

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA  
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

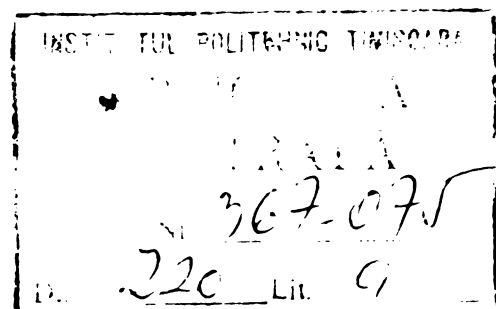
Ing.Ioan Felician SORAN

STUDIUL CONFIGURATIEI CIMPULUI MAGNETIC IN  
INTREFIERUL MASINII DE INDUCTIE SI INFLUENTA EI  
ASUPRA PARAMETRILOR DE PORNIRE

Teză de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

CONDUCATOR STIINTIFIC  
Prof.dr.ing.Ioan NOVAC



- 1979 -

TIMISOARA



# C U P R I N S

		PAG
CAP. 1.	INTRODUCERE	5
1.2	Contribuții aduse în lucrare	7
CAP. 2.	FORMULAREA PROBLEMEI GENERALE DE CALCUL A PARAMETRILOR MASINII ASINCRONE	9
2.1	Ecuatiile mașinii asincrone și metodele numerice de calcul a cîmpului magnetic	9
2.2	Formularea problemei de cîmp pentru modelul plan - paralel al mașinii asincrone	12
CAP. 3.	GENERALITATI PRIVIND MECANISMUL METODELOR NUMERICE DE CALCUL A CIMPULUI ELECTROMAGNETIC	19
CAP. 4.	UTILIZAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI DE CIMP	22
4.1	Definiții și notații	22
4.2	Principiul metodei elementelor finite	23
4.2.1	În ipoteza neglijării curenților induși	23
4.3	Detalierea etapelor MEF	28
4.3.1	Discretizarea domeniului D și alegerea funcției de aproximare	28
4.3.2	Stabilirea ecuației diferențiale $\partial^2 \mathcal{H}(\mathbf{A}) / \partial A_i^2$ la nivelul unui element oarecare $i, j, k$	32
4.3.3	Generarea matricii $[M]$ și a vectorului $\{TL\}$	34
4.3.4	Restricții impuse discretizării domeniului D în urma detalierii etapelor MEF	36
4.3.5	Noțiuni de triangularizare automată	40
4.3.6	Caracteristici ale matricii coeficienților deduse din modul concret de generare	42
4.4	Rezolvarea sistemelor mari de ecuații lineare	47
4.4.1	Metoda de eliminare Gauss pentru matrici A simetrice sau nesimetrice	49
4.4.2	Metode iterative bazate pe relaxare și suprare relaxare în cazul sistemelor mari de ecuații lineare $A X = B$	51
4.4.2.1	Convergența proceselor iterative bazate pe relaxare și suprare relaxare	54
4.4.2.2	Metode specifice matricilor A pozitiv definite și simetrice	57
4.5	Prezentarea programelor realizate și a rezultatelor obținute	59
4.5.1	Furnizarea datelor de intrare și verificarea lor	62
4.5.2	Alegerea metodei de rezolvare a sistemului $[M]\{A\} = \{TL\}$	67
4.5.3	SORSELF1	71
4.5.3.1	Prezentarea structurii programului	71

4.5.3.2	Discretizarea domeniului	71
4.5.3.3	Proprietăți de material $\mu$ și sarcina electromagnetică $J$	77
4.5.3.4	Soluția problemei de câmp pentru configurațiile din fig. 4.22 , fig. 4.23 , fig. 4.24	77
4.5.4	SORSELF2	83
4.5.4.1	Prezentarea structurii programului	83
4.5.4.2	Discretizarea domeniului	87
4.5.4.3	Proprietăți de material $\mu$ și sarcina electromagnetică $J$	92
4.5.4.4	Soluția problemei de câmp	101
4.5.5	SORSELF3	104
4.5.5.1	Prezentarea structurii programului	104
4.5.5.2	Discretizarea domeniului	106
4.5.5.3	Proprietăți de material $\mu$ și sarcina electromagnetică $J$	107
4.5.5.4	Rezultate obținute	107
CAP. 5.	UTILIZAREA METODEI DIFERENTELOR FINITE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI DE CIMP	111
5.1	Principiul metodei	111
5.2	Discretizarea domeniului $D$ de existență a câmpului	112
5.3	Definirea algoritmului de calcul	118
5.4	Accelerarea convergenței procesului	121
5.5	Calculul permeanțelor și inductanțelor	123
5.6	Aplicarea metodei diferențelor finite la determinarea câmpului de dispersie al creștăturii	123
5.6.1	Precizarea condițiilor de lucru	123
5.6.2	Programul pentru valoarea minimă a reactanței ( POISSON1 )	124
5.6.2.1	Rezultatele obținute	133
5.6.3	Programul pentru valoarea maximă a reactanței ( POISSON2 )	140
CAP. 6.	UTILIZAREA TRANSFORMĂRII CONFORME PENTRU REZOLVAREA ANALITICĂ A PROBLEMEI DE CIMP ELECTROMAGNETIC	143
6.1	Definiții și principii utilizate în transformarea conformă	144
6.1.1	Stabilirea funcției de transformare	144
6.1.2	Integrale și funcții eliptice	146
6.1.3	Funcții speciale utilizate în evaluarea integralelor eliptice	149
6.1.4	Probleme legate de evaluarea integralelor și funcțiilor eliptice	150
6.2	Problema câmpului de dispersie al creștăturii	151

## I N T R O D U C E R E

Din 1867, cînd Maxwell a introdus noțiunea de " parametri mașinilor electrice " ,atît noțiunea cît și modul de calcul s-au îmbogățit reciproc și progresiv , ajungînd azi problema esențială a cercetării legată de mașinile electrice, de comportamentul lor în diverse regimuri de funcționare și de proiectarea dimensiunilor lor geometrice astfel încît mașinile construite să prezinte caracteristicile dorite.

Evoluția modului de punere și rezolvare a problemei parametrilor mașinilor electrice a urmărit în general evoluția unei matematici.

Calculul inductivităților de dispersie și a rezistenței în curent alternativ a conductoarelor depuse în creștături practicate într-un mediu feromagnetic se poate face satisfăcător [B18], [B26], [B27] dacă se consideră mediul feromagnetic liniar și un model simplificat al configurației reale.

Prezenta lucrare se concentrează asupra calculului parametrilor mașinii asincrone în zona alunecărilor mari, ținînd cont de nelinearitatea miezului și geometria reală a mașinii.

Pentru definirea unei inductivități  $L$  se utilizează în general două variante ale unei și aceleiași realități, cunoașterea cîmpului magnetic produs de o excitație oarecare într-o configurație dată :

$$L = \frac{\Psi}{i} \quad (1)$$

$$L = \frac{2 \int_0^b H dB}{i^2} \quad (2)$$

în care :

$\Psi$  - înlînțuirea magnetică produsă de curentul  $i$ ,

$\int_0^b H dB$  - energia magnetică a cîmpului produs de  $i$ ,

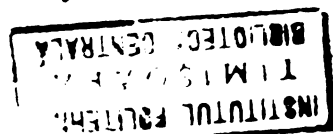
Găsirea înlînțuirii  $\Psi$  sau a energiei magnetice cunoscînd curentul  $i$  presupune rezolvarea unei probleme de cîmp în general tridimensională și nolineară, adică integrarea ecuației de tip Poisson :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_c \quad (3)$$

pentru cazul în care se neglijează curenții turbionari induși și curenții de deplasare ,sau a ecuației :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_c + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\bar{A}) \quad (4)$$

pentru cazul în care se ține cont de curenții turbionari induși. În relațiile (3) și (4) s-au utilizat notațiile uzuale :



$\vec{A}$  - potențialul magnetic vector.

$\vec{J}_0$  - densitatea curentului de conducție ,

$\mu$  - permeabilitatea magnetică locală a materialului,

$\sigma$  - conductibilitatea electrică locală a materialului.

Ecuațiile (3) și (4) trebuie integrate cunoscând condițiile pe frontiera domeniului D de existență a câmpului. Numai astfel soluția  $A(x,y,z)$  este unică.

Obținând soluția  $A(x,y,z)$  se pot calcula toate mărimile caracteristice câmpului magnetic total, deci inductivitatea totală  $L$ , dată de (1) sau (2).

Indiferent însă de modul de rezolvare a problemei pusă prin ecuațiile (3) sau (4), adică analitic sau numeric, soluția globală  $A(x,y,z)$  nu permite punerea în evidență a componentelor câmpului total, respectiv câmpul principal și câmpul de dispersie. De aceea se va căuta soluția ecuațiilor (3) și (4) pentru un regim de funcționare în care pot fi puse în evidență componentele dorite.

În cap.2 se precizează regiunile de funcționare convenabile determinării parametrilor, formularea problemei de câmp, domeniul de existență a câmpului și condițiile pe frontiera subdomeniului cuprins de analiză.

Deoarece problema formulată în cap.2. nu se poate rezolva analitic, în cap.3,4,5, se expun detaliile legate de rezolvarea numerică prin metoda elementelor finite și a diferențelor finite.

În cazul regimurilor de funcționare cu solenații egale în stator și rotor, făcând anumite simplificări apare posibilitatea utilizării transformării conforme pe lângă metodele numerice expuse anterior. În cap.6 se prezintă utilizarea transformării, conforme într-o manieră originală pentru rezolvarea aproximativă a unei probleme de câmp în mediu nelinear, ceea ce demonstrează că metode "depășite" pot cunoaște "tinereți" succesive.

În cap.7 se prezintă modul de prelucrare a rezultatelor obținute prin metodele numerice pentru calculul permeanțelor de dispersie și a cuplului dezvoltat.

Pe baza permeanțelor de dispersie ale creștăturilor individuale se poate calcula reactanța de dispersie pe fază ținând cont de poziția rotorului față de stator. Cap.8. se ocupă de această însumare când se ține seama de variația permeanțelor individuale între două limite condiționate de două situații limită: două creștături față-n față și creștătură în fața unui dinte.

Fără a răpi sensul capitolului 9 se poate afirma că cercetarea făcută permite și abordarea unor probleme nelegate de mașinile electrice. Fenomenele ce se pot descrie cu o ecuație diferențială de tip Poisson pot fi tratate cu ajutorul programelor elaborate pentru metoda elementelor finite făcând ajustări de importanță minoră. Folosind programele testate și funcționale în etapa actuală, se pot concretiza programe pentru rezolvarea ecuației difuziei, deci se poate ataca studiul regimurilor tranzitorii.

De asemenea rezultatele expuse în tratarea practică a sistemelor mari de ecuații (cap.4.3.4) și a funcțiilor speciale (cap.6) pot fi utile în domenii nu neapărat adiacente mașinilor electrice.

Condițiile în care a fost efectuată cercetarea se găsesc expuse în nota informativă finală din cap. 10.

### 1.2. Contribuții aduse în lucrare

Se face pentru prima dată o analiză numerică a câmpului magnetic neliniar dintr-o mașină asincronă, în scopul determinării corecte a reacțunțelor de dispersie și totale. Au fost create modelele corespunzătoare și s-au definit regimurile de funcționare speciale ce permit separarea câmpului total în componentele sale.

Au fost puse la punct programe de calcul a câmpului magnetic neliniar dintr-o mașină asincronă atât prin metoda diferențelor finite, cât și prin metoda elementelor finite. Chiar dacă principiu general nu constituie un secret, pachetele de programe care rezolvă fiecare etapă până la obținerea rezultatelor numerice sînt exclusiv personale. În afara acestui caracter personal al programelor există subprograme elaborate după idei originale pentru rezolvarea unor situații la care nu am găsit soluția în literatură.

- verificarea topologiei discretizării cu subprogramul VERNUM, precum și regulile de triangularizare manuală [366],
- executarea avansului automat al rotorului și redefinirea automată a topologiei discretizării prin subprogramul REDIS.

În seriile de programe SORSELF 2 și SORSELF 3 tratarea nelineralității mediului feromagnetic s-a făcut după o metodă originală obținînd o bună viteză de convergență.

S-a formulat principiul de calcul al valorii medii a reacțunței de dispersie pe fază ținînd cont de poziția rotorului față de stator.

Deși transformarea conformă cu metoda de calcul a câmpului pare depășită, s-a dat atenție reutilizării ei după o metodă originală pentru rezolvarea unei probleme neliniare (cap.6) Tot într-o manieră personală au fost rezolvate două amănunte legate de utilizarea transformării conforme în calculul câmpurilor:

- aflarea constantelor de transformare prin rezolvarea numerică a sistemului de ecuații ce le definesc [B35]
- calculul câmpului de-a lungul unei curbe oarecare din planul  $Z(x, y)$ , neconfundată cu frontierele, când se dă funcția de transformare  $Z(xy) = f(t)$  și soluția problemei de câmp în planul  $t = r + js$ .

Deoarece sistemele de ecuații rezultate prin aplicarea metodei elementelor finite sînt totdeauna sisteme mari, s-a făcut analiza (cap. 44) oportunității utilizării metodelor de rezolvare directe și iterative. S-a găsit o relație (4.8 2) care estimează mai bine decît relațiile date de literatură numărul de operațiuni afectate de trunchiere în aplicarea metodei de eliminare Gauss pentru rezolvarea marilor sisteme liniare, avînd matricea coeficienților de tip bandă. Aceasta permite justificarea utilizării metodei pentru sisteme avînd pînă la  $N=1000$  ecuații și lățimi de bandă cuprinse între  $1/15 \div 1/20 N$ .

Avantajul utilizării unei metode directe pentru rezolvarea sistemului rezultat la fiecare pas al iterațiilor făcute în raport cu permeabilitatea magnetică  $\mu$  este absența pericolului de non-convergență și oscilații ale reziduurilor.

Modul practic de rezolvare a problemei pentru un domeniu corespunzător la  $Z/2$  îl consider de asemenea original și valoros. Utilizînd fișiere pe disc și rezolvarea dinamică a generării matricii coeficienților și eliminării liniilor, s-a reușit rezolvarea unei probleme care necesita un spațiu memorie de circa 10,5 ori mai mare.

Calculatoarele Felix C.256 - nu dispun de asemenea memorii.

Fără aceasta, problema ar fi nerezolvabilă pe un calculator FELIX C-256.



Cap. 2. FORMULAREA PROBLEMEI GENERALE DE CALCUL A  
PARAMETRIILOR MAȘINII ASINCRONE

§ 2.1. Ecuațiile mașinii asincrone și metodele  
numerice de calcul a cîmpului magnetic.

O mașină asincronă ca orice mașină electrică rotativă este un sistem de conversie electromecanică a energiei. Prin circuitele mașinii legate la rețea se comunică în dublu sens energia electrică vehiculată prin mașină, iar prin interacțiunea cîmpului magnetic cu curenții ce străbat înfășurările, s-au părțile masive apar forțele mecanice necesare conversiei energiei.

Analiza regimurilor de funcționare se face cu ajutorul ecuațiilor mașinii în care apar parametrii ca mărimi antecalulate printr-un procedeu oarecare.

Cu precizia condiționată de ipotezele de lucru cunoscute, se poate obține expresia cuplului electromagnetic dezvoltat și a curenților din înfășurări în funcție de alunecarea  $s$  sau viteză unghiulară  $\Omega$  a rotorului :

$$M = f_1(U_1, R_1, X_1, R_2, X_2, f, s) \quad (5)$$

$$I_1 = f_2(U_1, R_1, X_1, R_2, X_2, f, s) \quad (6)$$

$$I_2 = f_3(U_1, R_1, X_1, R_2, X_2, f, s) \quad (7)$$

Adăugînd acestor relații forma de variație a cuplului rezistent  $M_r$  cu alunecarea  $s$  și ecuația mișcării :

$$M_r = f_4(s) \quad (8)$$

$$M - M_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (9)$$

putem rezolva orice regim staționar în ordinea următoare :

- impunem  $\frac{d\Omega}{dt} = 0$  în (9) de unde rezultă

$$M = M_r \quad (10)$$

- cu ajutorul relației (5) găsim

$$s = \mathcal{P}(U_1, R_1, X_1, R_2, X_2, f, M_r) \quad (11)$$

- iar din(6) rezultă curentul absorbit de la rețea.

Deficiențele modului de calcul expus se cunosc. S-ar părea că o metodă de calcul exact a cîmpului produs de curenții  $I_1$  și  $I_2$  ce străbat înfășurările, ținînd cont de nelinearitatea mediului și dispunerea reală a înfășurărilor în crestături, poate conduce în mod simplu la rezolvarea deficiențelor create de considerarea circuitului magnetic liniar și a cîmpului învîrtitor perfect sinusoidal. De la o astfel de metodă am aștepta găsirea relațiilor.

$$R_1, R_2, X_1, X_2, R_m, X_m = f(I_1, I_2, \mathcal{N}_r) \quad (12)$$

în care :

$\mathcal{N}_r$  = poziția rotorului față de stator

$$N_r = N_0 + \Omega t \quad (13)$$

Rezolvarea sistemului de ecuații ale mașinii s-ar complica în funcție de forma relațiilor (12), dar în final am găsi curenții  $I_1, I_2$  și cuplul  $M$  mai apropiați de realitate decât după procedeul descris anterior (5) + (7)

Pînă în prezent însă nu există o metodă care să ne dea soluția analitică a problemei de câmp luînd în considerație neliniaritatea fierului și geometria reală a mașinii. Există în schimb metode numerice care pot furniza cu o precizie satisfăcătoare (și în anumite condiții ameliorabilă) valorile mărimilor caracteristice cîmpului magnetic (inducția  $B$  sau cîmpul  $H$ ) în întreaga mașină, dacă se cunosc curenții din înfășurări.

Sfortul depus pentru a realiza acest pas a fost considerabil atât din partea matematicienilor cît și din partea informaticienilor.

Cei ce se ocupă de mașinile electrice sînt azi în situația paradoxală de a nu putea utiliza din plin toate posibilitățile oferite de această realizare deoarece relații de tipul (12) nu se pot obține direct.

O soluție numerică a cîmpului din mașină în ipoteza curenților Foucault neglijabili se poate obține numai cunoscînd distribuția spațială a curenților de conducție. Cu alte cuvinte pentru  $I_1$  și  $I_2$  dați se poate obține cîmpul total și cuplul dezvoltat.

Iată de ce pentru studiul regimurilor de funcționare o metodă de calcul numeric a cîmpului nu este utilă în mod direct.

În etapa actuală se propune utilizarea metodelor numerice pentru obținerea parametrilor "clasici" din soluții corecte ale problemei de câmp pentru regimuri de funcționare speciale în care putem evidenția mărimile ce ne interesează.

Pînă o mașină asincronă într-un regim special cu curenți conducți în stator și rotor, astfel ca solenauța totală să fie nulă, adică în mașină să nu existe decât cîmpul de dispersie al înfășurărilor. Cunoscînd repartiția curenților statorici și rotorici se calculează cîmpul corespunzător, apoi prin aplicarea relațiilor (1) sau (2) se poate evalua permeanța de dispersie a creștăturilor și dependența ei de curenții ce străbate creștătura.

Trebuie să introducem următoarele ipoteze simplificatoare pentru a rezolva relativ simplu această problemă :

- să se considere un model plan-paralel dacă se pot neglija efectele de capăt,

- rotorul să fie bobinat pentru a nu interveni refularea curenților din colivii sau bare rotorice .

În continuare trebuie definit domeniul de existență a câmpului și subdomeniul de calcul , precum și condițiile pe frontieră. Apoi se va aplica metoda de rezolvare numerică corespunzătoare a ecuației (3) sau(4) .

Se poate imagina un alt regim special de funcționare similar cu cel precedent, dacă în mașina considerată selenajii statorică și rotorică nu sînt egale , dar curenții  $I_1$  și  $I_2$  rămîn impuși. Existența unei selenajii totale nepule face să apară un câmp util ce se însumează (nelinear) cu cel de dispersie. Rezolvînd problema de câmp analog situației anterioare obținem câmpul total, iar dacă putem separa câmpul de dispersie se pot calcula permeanțele de dispersie în prezența saturației dată de câmpul principal. Se verifică fluxul polar astfel ca el să aibă același ordin de mărime cu fluxul polar nominal. La nevoie se ajustează curenții  $I_1$  și  $I_2$ . În cap.7.1 se expune principiul separării câmpului de dispersie din cel total.

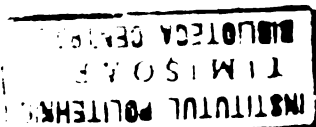
În lucrarea prezentă se analizează și expune calculul permeanțelor de dispersie prin diverse metode în aceste două regimuri speciale de funcționare. Rezultă permeanțele crestăturilor funcție de curent și poziția rotorului  $\alpha_r$ .

$$\lambda_{cr} = f(I_{cr}, \alpha_r) \quad (14)$$

Aceste permeanțe permit calculul reacțanțelor de dispersie, obținînd în final relații de tipul(12) , ceea ce s-a arătat că poate constitui în primă etapă scopul analizei corecte a câmpului din modelul plan- paralel al unei mașini asincrone în regim special de funcționare.

Se poate prevedea etapa următoare de utilizare a metodelor numerice sub forma :

- luarea în considerație a unui model tridimensional complet,
- impunerea restricțiilor de calcul a distribuției curenților de conducție din înfășurări cînd se dă tensiunea rețelei,
- rezolvarea problemei de câmp cu aceste restricții ,
- verificarea compatibilității soluției cu restricțiile impuse și reluarea calculelor pînă la o concordanță rezonabilă ,
- calculul cuplului dezvoltat și a regimului mecanic,
- redefinirea modelului (dacă este cazul) în funcție de mișcarea părților mobile și reluarea iterațiilor pînă la



atingerea regimului staționar electromagnetic și mecanic.

Desigur detalierea etapelor intermediare este o problemă delicată, de viitor, motiv pentru care n-au rezolvat problemele puse de cele două regimuri speciale definite mai sus.

§ 2,2, Formulara problemei de câmp pentru modelul plan - paralel al mașinii asincrone.

Se caută deci câmpul magnetic produs de curenții de conducție de distribuție cunoscută și curenții induși într-un domeniu  $D$  oarecare delimitat de frontiera  $\Gamma$ . Domeniul este izotrop, neomogen și nelinear, fiind constituit de o parte sau întreaga secțiune transversală a mașinii asincrone. Într-un reper  $xoyz$  planul  $xoy$  se suprapune planului în care există  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$ , iar axa  $oz$  se orientează pe direcția curentului de conducție. Pentru corpuri imobile și la viteze reduse de variație a câmpului electromagnetic - condiționate de frecvența rețelei - legea circuitului magnetic se scrie sub forma cunoscută :

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j}_c \quad (15)$$

Legătura dintre  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  pentru medii izotrope este de forma:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (16)$$

unde în general :

$$\mu = \mu(|\vec{B}|) \quad (17)$$

Variația câmpului magnetic  $\vec{B}$  condiționează apariția unui câmp  $\vec{E}_t$  eminentemente turbionar. În mediul de conductibilitate apare un curent de densitate.

$$\vec{j}_t = \sigma \vec{E}_t \quad (18)$$

ceea ce ne permite să scriem legea inducției electromagnetice sub forma :

$$[\nabla \times \frac{\vec{j}_t}{\sigma}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (19)$$

Introducând potențialul magnetic vector  $\vec{A}$  definit astfel :

$$[\nabla \times \vec{A}] = \vec{B} \quad (20)$$

$$[\nabla \cdot \vec{A}] = 0 \quad (21)$$

se poate scrie :

$$\frac{1}{\mu} [\nabla \times [\nabla \times \vec{A}]] = \vec{j}_c \quad (22)$$

$$\vec{j}_t = - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (23)$$

Câmpul magnetic total  $\vec{A}$  este determinat de curenții de conducție și induși, ceea ce se exprimă ca mai jos ținând cont de (22), (23) în ipoteza (21) :

$$\nabla^2 \vec{A} = - \mu \vec{j}_c + \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (24)$$

Ecuatia (24) cunoscută sub numele de ecuația difuziei descrie deci câmpul în cazul, cel mai general imaginat pentru modelul mașinii asincrone. Neglijând curenții turbionari în mașinile executate din tole, se obține ecuația Poisson:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{j}_c \quad (25)$$

Energia totală  $W$  a sistemului de conversie electromecanică modelat ca sistem izolat și complet este constituită de energia magnetică a volumului definit de domeniul plan  $D$  și o înălțime (pe axe  $oz$ ) egală cu unitatea:

$$W_m = \iint_D \frac{1}{2} (\bar{B}\bar{H}) dv = \iint_D \frac{1}{2\mu} |\bar{B}|^2 dv = \iint_D \frac{1}{2\mu} [\nabla \times \bar{A}]^2 dv \quad (26)$$

la care se adaugă energia potențială a curenților de conducție  $\bar{j}_c$  ce se găsește în câmpul  $\bar{B}$ :

$$W_{jc} = - \iint_D \bar{j}_c \bar{A} dv \quad (27)$$

și energia corespunzătoare curenților turbionari:

$$W_{jt} = - \iint_D \left( \int_0^{\bar{A}} \bar{j}_t d\bar{A} \right) dv \quad (28)$$

Insumând (26) (27) și (28) obținem:

$$W = \iint_D \left\{ \frac{1}{2\mu} [\nabla \times \bar{A}]^2 - \bar{j}_c \bar{A} - \int_0^{\bar{A}} \bar{j}_t d\bar{A} \right\} dv \quad (29)$$

în care  $\bar{j}_t$  este dat de (23)

Soluția problemei de câmp se poate obține și este unică numai dacă se precizează condițiile pe frontiera  $\Gamma$  a domeniului  $D$ . Soluția  $\bar{A}$  obținută în urma integrării ecuației (24) sau (29) face energia  $W$  a sistemului minimă.

În general se consideră câmpul magnetic din exteriorul mașinii electrice egal cu zero, ceea ce permite o primă delimitare a domeniului  $D$  prin frontiera fizică exterioară a mașinii (curba  $\Gamma$  din fig. 2.1 a). Pe frontiera  $\Gamma$  se poate considera:

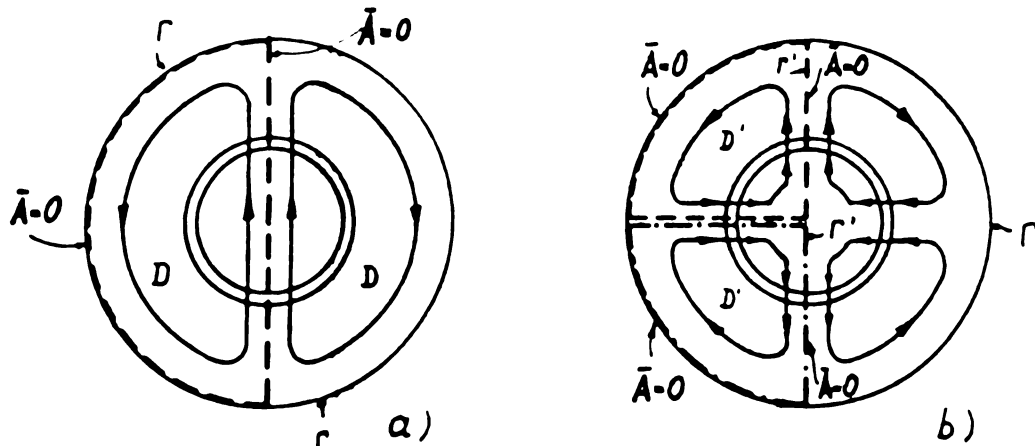


Fig.2.1 Cu privire la delimitarea domeniului de calcul.

$$A_r = 0 \quad (30)$$

ceea ce echivalează cu impunerea unei condiții de tip Dirichlet pe  $\Gamma$ .

Ipoteza a fost verificată prin calcul [B56] considerând frontiera  $\Gamma$  distanțată de frontiera fizică a mașinii și verificând valorile potențialului vector pe frontiera fizică. S-a găsit justificată condiția (30).

Existența unui câmp în exteriorul frontierei fizice ar complica mult lucrurile fiind nevoie să cunoaștem schimbul de energie cu alte sisteme magnetice. Sistemul construit de mașina studiată nu ar mai fi izolat și complet, ceea ce pentru metodele de rezolvare a ecuației (3) sau (4) poate constitui o piedică serioasă [B63].

În mașină mai există încă curbe de-a lungul cărora se verifică condiția (30) așa cum se vede în fig. 2.1.a., 2.1.b. Aceste curbe pot separa subdomeniul  $D'$  de studiu, deoarece în virtutea rel. (30) schimbul de energie cu alte subdomenii e zero.

Dacă pe anumite porțiuni  $\Sigma_1$  ale frontierei ar exista un schimb de energie cu exteriorul, acesta ar fi dat de componenta normală la  $\Sigma_1$  a lui  $\vec{B}$  și de valoarea potențialului vector  $\vec{A}$  în acel punct:

$$W_{ext} = - \int_{\Sigma_1} (\vec{A} \cdot (\frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \vec{n})) dl = - \int_{\Sigma_1} \frac{1}{\mu} A \cdot \frac{\partial A}{\partial n} dl \quad (31)$$

Concentrarea atenției asupra unor domenii mai reduse ca dimensiuni, dar care dau informații corecte pentru întreaga mașină, este deosebit de avantajoasă în cazul metodelor numerice de rezolvare a problemei de câmp. Observând că pot exista în mașină curbe de-a lungul cărora  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ , deci  $W_{ext} = 0$  se poate reduce domeniul de studiu în continuare. De-a lungul unei linii de simetrie în câmp  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ . Se obține astfel un subdomeniu  $D'$  de studiu pe a cărui frontieră avem condiție mixtă, adică pe anumite porțiuni condiții de tip Dirichlet (segmentul B C D din fig. 2.2.b) unde se verifică rel. (30) iar pe alte porțiuni condiții de tip Neumann (segmentul BO din fig. 2.2.b) unde se verifică condiția :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad (32)$$

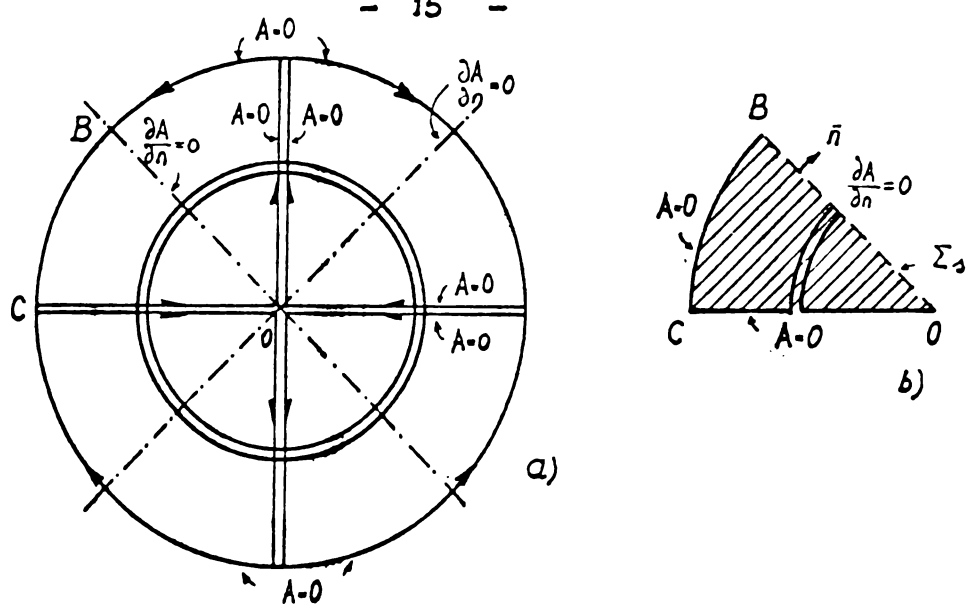


Fig.2.2. Delimitarea unui domeniu cu frontiere mixte.

Existența curbelor de-a lungul cărora  $\bar{A} = 0$  se datorește păturii de curent  $a(x)$  care în mașina ideală are o repartiție sinusoidală. Pătura de curent  $a(x)$  delimitează zone în care valoarea ei este de același semn. La frontiera zonelor cu semne diferite ale păturii de curent potențialul vector  $\bar{A}$  se anulează,  $\bar{A} = 0$ .

Deoarece selenajia totală a mașinii în punctul  $x$  se exprimă prin :

$$\theta(x) = \int_0^x a(x) dx \tag{33}$$

inducția  $B(x)$  în întrefierul  $\delta$  al mașinii va fi :

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2p\delta''} \theta(x) \tag{34}$$

unde :

- $p$  - numărul de perechi de poli a mașinii,
- $\delta''$  - valoarea de calcul a întrefierului  $\delta$  afectată de coeficientul Carter de majorarea a întrefierului.

Pentru  $a(x)$  variind sinusoidal,  $B(x)$  variază tot sinusoidal în spațiu, decalat cu  $\zeta/2$  în fața păturii de curent, așa cum se vede în fig.2.3. :

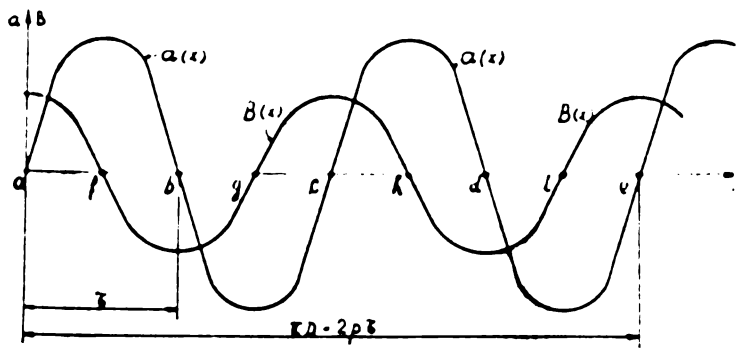


Fig.2.3. Referitor la delimitarea practică a domeniului D

Delimitarea unui subdomeniu de calcul D corespunzător unui pas polar sau a unei jumătăți de pas polar  $\zeta/2$  (pentru frontiere mixte) se face cu ajutorul punctelor în care  $a(x) = 0$ .

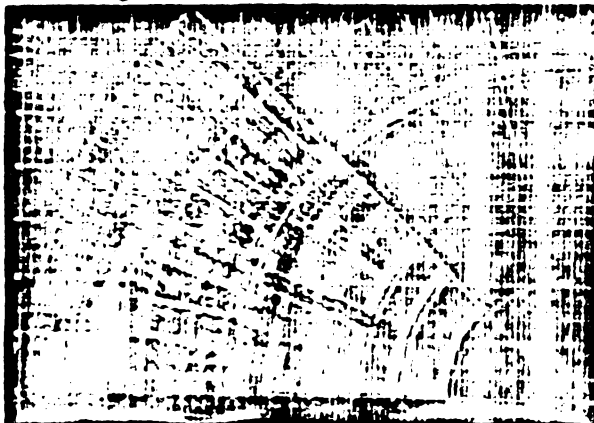
La o mașină reală, cu înfăgurări depuse în creștături ,  $a(x)$  nu va mai fi o sinusoidă . Dar se cunoaște expresia lui  $B(x)$  pentru acest caz și originea lui  $x$  [B32] :

$$B(x,t) = B_{max} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) \quad (35)$$

Originea  $x = 0$  se consideră în mijlocul zonei de  $q$  creștături a fazei notată cu  $l$  în succesiunea normală a fazelor 1,2,3 . Pentru  $q$  întreg și impar originea coincide cu mijlocul unei creștături, pentru  $q$  întreg și par cu mijlocul unui dinte. La fel ca în expresia (35) se ia drept referință înfăgurarea statorică.

Rezultă că pentru o mașină trifazată putem separa un domeniu de calcul minim, corespunzător la  $1,5 q$  creștături statorice.

Partea aplicativă a lucrării studiază diverse modele plan-paralele ale unor mașini executate la UME București. Pentru regimul cu curenții egale s-a separat un domeniu de calcul de  $1,5 q = 1,5 \cdot 3 = 4,5$  creștături din mașină asincronă de tipul AE - 160 - M, așa cum se vede și în fotografia 2.4.



Scara desen original : 4:1  
Micșorare foto 2.4 față  
de desenul original : 1:15

Utilizând o discretizare relativ grosieră pentru acest domeniu a rezultat un sistem de ecuații relativ mare (920 ecuații) ceea ce este un impediment serios pentru rezolvarea practică a problemei. De aceea s-a căutat diminuarea în continuare a domeniului  $D$  de calcul, fără a prejudicia formularea problemei de câmp, adică a "forța" condițiile pe frontieră.

Rotorul are totdeauna un număr de creștături  $N_2$  diferit de numărul de creștături statorice  $N_1$ , în interiorul zonei studiate vom avea creștături față-n față și creștături în fața unor dinți. Permeanța de dispersie a creștăturii diferă pentru aceste două cazuri limită. Prin deplasarea rotorului, permeanța de dispersie a unei creștături statorice oarecare variază într-un anumit fel între valorile corespunzătoare acestor două situații limită. Din acest motiv separarea unor domenii de calcul  $D$  mai mici decât zona corespunzătoare lui  $\tau/2$  s-a făcut astfel ca cele două valori limită ale permeanței și eventual chiar valorile intermediare să poată fi calculate.



S-a creeat modelul din fig.2.5 pentru studiul regimului de funcționare cu selenajii egale, căruiia putem să-i impunem condiții de tip Dirichlet pe frontiera sa ( $A=0$ ).

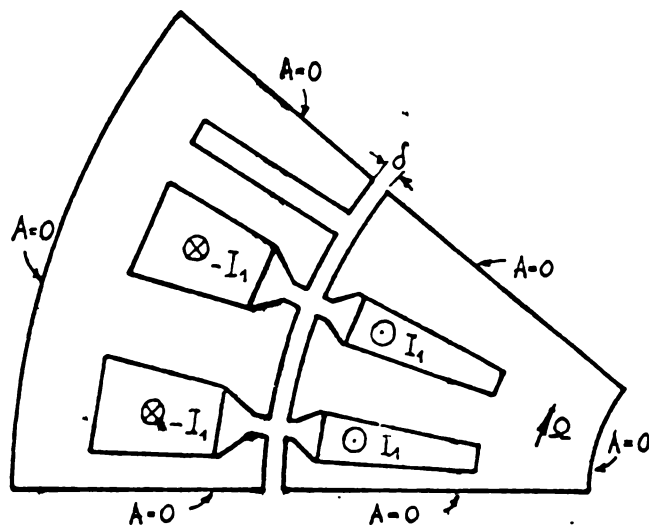


Fig.2.5 Modelul domeniului de calcul D pentru selenajii egale.

Se pot obține cu acest model permeanțele de dispersie ale creștăturilor în condițiile în care rotorul se mișcă. Particularitățile legate de mișcarea rotorului vor fi discutate în capitolul consacrat programului SORSELF 3 și rezultatelor obținute. Dimensiunile geometrice ale modelului corespund motorului AIM 200 L-S de 15 kw., 750 rpm.

Desigur rămâne interesantă întrebarea: care ar fi zona minimă de calcul ce s-ar putea obține introducând încă simplificări, dar calculul să fie condus totuși în condiții satisfăcătoare? Interesul este justificat de memoriile modeste de care dispun încă calculatoarele FELIX aflate în dotarea centrelor de calcul.

În construirea unor modele de dimensiuni cât mai reduse s-a făcut în plus ipoteza că:

- $N_2 = N_1$  pentru a avea același unghi la centru pentru ambele creștături, statorică și rotorică.

O astfel de situație prezintă interes pentru calculul permeanței de dispersie a unei creștături și este ilustrată de fig.2.6 a. pentru creștăturile statorică și rotorică față-n față și de fig. 2.6.c pentru o creștătură statorică în fața unui dinte rotoric.

Situația creștăturii statorice din fig.2.6 a este echivalentă cu aceea a creștăturii prezentate în fig.2.6.b. pentru care se scrie pe frontiera domeniului  $A=0$ .

3670 75  
270 m G

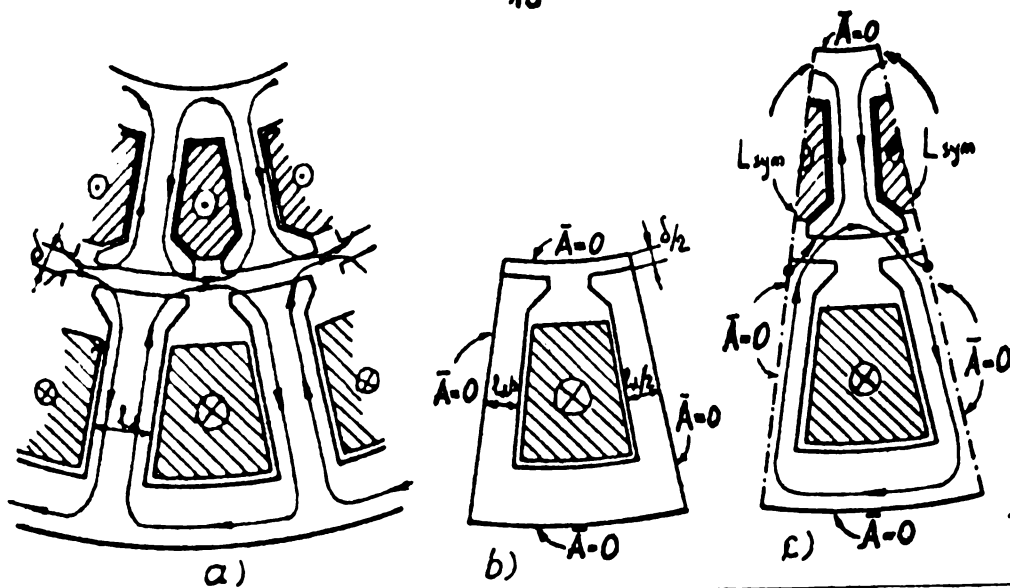


Fig. 2.6.

Configurației din fig.2.6. c putem să-i impunem condiții mixte pe frontieră după cum se vede chiar pe figură.

Evident modelul din fig.2.6 reprezintă limita pînă la care pot fi împinse simplificările.

Trebuie subliniat faptul că metodele "clasice" de calcul a permeanței de dispersie [B26], [B27], [B32], etc - stabilesc de la început drept model de calcul modelul din fig.2.6. b; în plus consideră materialul feromagnetic liniar.

De aceea trebuie apreciat corect lanțul de simplificări expus, luînd ca nivel de referință pentru pretențiile ascendente (satisfăcute în cazul ideal de modelul din fig.2.4) situația din fig. 2.6.b. care este categoric mai bună decît modelul "clasic" deoarece ne permite calculul permeanțelor ținînd cont de neliniaritatea fierului .

Modelului din fig. 2.6.b. calculul "clasic" i-a adus simplificări în continuare pentru a putea utiliza transformarea conformă [B3], [B5], [B8], [B26], [B28], [B30], etc. Într-adevăr configurația din fig.2.7 se pretează la transformarea conformă și modelează creștătura reală satisfăcător (capete de dinți înclinate la  $30^\circ$  sau  $45^\circ$ ) pentru zona creștăturii neocupată de înfășurări.

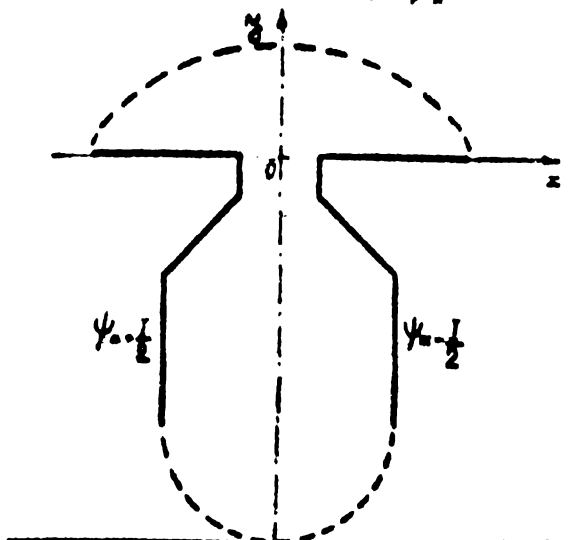


Fig.2.7 Modelul simplificat al unei creștături semideschise.

Modelul se poate aplica chiar și la potențial magnetic variabil pe frontiera fizică, așa cum se arată în [B5] și [B8]. În funcție de mijloacele de calcul de care se dispune se va adopta unul dintre modelele expuse mai sus.

CAP. 3 GENERALITATI PRIVIND MECANISMAUL METODELOR  
NUMERICE DE CALCUL A CIMPULUI ELECTROMAGNETIC

Problema de câmp electromagnetic poate fi formulată în două moduri distincte :

- prin ecuații diferențiale ce se aplică mărimilor caracteristice câmpului într-un domeniu infinitesimal tipic,
- postulând un principiu variațional valabil pentru întreg domeniul studiat , soluția fiind funcția ce minimizează o funcțională definită printr-o integrare convenabilă a necunoscutelor pe întregul domeniu.

Primul mod de formulare îi corespund ecuațiile lui Maxwell, celui de al doilea mod - minimizarea energiei electromagnetice conținută în domeniul studiat .Trebuie somnalat faptul că cele două moduri de formulare pe de o parte sînt echivalente, iar pe de altă parte nu sînt specifice câmpului electromagnetic.

Prin manipulări matematice relativ simple se poate trece de la ecuațiile lui Maxwell la condiția de minim a energiei electromagnetice conținută în domeniul studiat , sau invers. Soluția problemei de câmp ce verifică ecuațiile lui Maxwell este în același timp și funcția ce minimizează funcționala energie electromagnetică.

Ecuațiile diferențiale de tip Laplace sau Poisson sînt cazuri particulare ale ecuației generale cvasi-armonice care poate fi aplicată la :

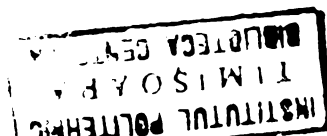
- transmisia căldurii ,
- infiltrarea irotațională a fluidelor perfecte,
- torsiunea barelor prismatice,
- lubrificarea lagănelor,
- flexiunea grinzelor prismatice ,etc.

Numărul funcționalelor definite este în general restrîns.

Interpretarea fizică facilă a funcționalei energie a determinat largă ei utilizare atît în problemele de câmp electromagnetic, cît și în rezolvarea problemelor mecanice sau termice.

În cazul real, domeniul  $D$  de existență a câmpului electromagnetic este constituit dintr-o infinitate de puncte, frontiera domeniului avînd o formă oarecare. Se presupune o constituție izotropă, în general neomogenă.

Orice metodă numerică presupune domeniul  $D$  , constituit dintr-un număr finit de elemente obținute prin aplicarea unei rețele de discretizare .Elementele se consideră legate între ele exclusiv în nodurile rețelei de discretizare. Aceasta este astfel construită încît să putem considera proprietățile de material constante



în toate punctele interioare unui element.

Mulțimea finită a valorilor potențialului magnetic vector  $A$  în nodurile rețelei de discretizare constituie necunoscuta problemei.

Nucleul algoritmilor de rezolvare numerică a problemei de câmp electromagnetic este constituit de ecuația ce rezultă prin aplicarea unui principiu specific metodei tuturor elementelor sau punctelor nodale ale domeniului  $D$ . Metoda elementelor finite impune condiția de minim a energiei conținută în fiecare element, iar metoda diferențelor finite deduce valoarea potențialului vector din fiecare nod cu ajutorul potențialului vector al nodurilor vecine. În ambele cazuri rezultă la fiecare "baleiaj" al elementelor sau nodurilor o ecuație liniară. Ecuațiile sînt asamblate într-un sistem, respectînd o anumită relație de ordin impusă de discretizarea domeniului.

După rezolvarea sistemului de ecuații rezultă valorile potențialului magnetic vector în nodurile rețelei de discretizare. Ținînd cont de modul în care s-a făcut discretizarea și aproximarea funcției necunoscute se poate afla potențialul magnetic vector și toate mărimile caracteristice câmpului ( $E$ ,  $H$ ) în fiecare punct intern al elementelor.

O soluție numerică permite și calculul forțelor mecanice și a cuplurilor corespunzătoare regimului de funcționare al mașinii pentru care este valabil modelul constituit de domeniul  $D$  [B64].

Soluția problemei constituită de mulțimea valorilor aproximative ale potențialului magnetic vector  $A$  în nodurile rețelei este afectată de erori ce pot proveni din :

- modul în care se exprimă condiția impusă necunoscutei în fiecare punct,
- discretizarea continuului domeniului  $D$  într-un număr finit de elemente avînd dimensiuni finite,
- erorile de calcul cumulate, provenite în cea mai mare parte din trunchierea produselor sau cîturilor,
- eroarea limită admisă drept condiție de abandon a procesului iterativ, în cazul algoritmilor iterative.

Eroarea globală este greu de apreciat. De aceea metodele de analiză a erorilor au o valoare comparabilă cu metodele de rezolvare la care se aplică. Analiza erorilor dă în general valoarea maximă a erorii de un anumit tip (trunchiere, discretizare, eroare de formulare, etc) dar eroarea globală nu e o sumă simplă de

erori parțiale .

Compararea metodelor numerice de rezolvare a problemei de câmp , criteriile de alegere a uneia dintre ele, sînt greu de realizat din cauza complexității problemelor adiacente pe care le ridică. În general pentru algoritmele iterative viteza de convergență constituie criteriul fundamental de comparare și decizie. Deformarea configurației prin discretizarea și modul în care neomogenitatea mediului complică algoritmul, pot constitui de asemenea criterii de comparare și decizie.

În general analiza situației începe cu constatarea mijloacelor de calcul ce care se dispune , de posibilitățile oferite de ordinator și centrul de calcul care-l deservește. În ultimă instanță capacitatea memoriei centrale, costul timpului -calculator și competența nucleului de analiză numerică în anumite domenii poate influența opțiunea pentru o metodă sau alta . Am convingerea că acestui factor i se potrivește de minune dictonul " At last but not at least "

## Cap. 4. UTILIZAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI DE CIMP.

### § 4.1. Definiții și notații

Metoda elementelor finite este una dintre metodele directe ale calculului variațional. Pentru a elimina eventualele ambiguități, se vor da definițiile noțiunilor cu care operează prezentul capitol, precum și notațiile utilizate.

Calculul variațional extinde problema determinării extreme-  
lor unei funcții, căutând extremele nu pentru o funcție, ci pentru o  
funcțională.

Funcționala este o cantitate, o valoare, ce depinde de o  
funcție și nu de o variabilă discretă. Potrivit relației de defi-  
niție, funcționala atagează o valoare fiecărei funcții aparținând  
unei anumite clase. În general valorile obținute sînt diferite; a  
minimaliza sau maximaliza o funcțională, înseamnă a găsi sau a  
construi funcția pentru care valoarea asociată funcționalei este  
minimă sau maximă.

Pentru prezenta lucrare funcția necunoscută este funcția  
potențialul vector  $A(x,y)$ . Funcționala definită pe același spațiu  
funcțional ca  $A(x,y)$  se va nota  $I[A]$ . Pentru a fructifica  
toate avantajele utilizării unor noțiuni cu sens fizic concret,  
se va folosi exclusiv funcționala energie pentru rezolvarea pro-  
blemei de cîmp electromagnetic cu metodele calculului variațional.

Așa cum o condiție necesară, dar nu totdeauna suficientă  
pentru existența extremului unei funcții este anularea derivatelor  
sale de ordinul 1, pentru ca o funcție să minimalizeze o funcțio-  
nală este necesar, dar nu totdeauna suficient ca ea să satisfacă  
ecuațiile lui Euler. Există însă ca rezolvînd ecuațiile lui Euler  
(în general ecuații diferențiale) să se obțină funcția căutată.

Pentru o anumită clasă de funcționale, ecuațiile lui Euler  
apar ca ecuații diferențiale ce descriu fenomenul a cărei soluție  
este căutată prin minimalizarea funcționalei. În acest caz rezol-  
varea ecuației diferențiale nu constituie calca ce trebuie urmată  
pentru găsirea soluției. Trebuie să se opereze direct asupra func-  
ționalei, încercînd minimalizarea ei. Funcția construită în proce-  
sul de minimalizare este soluția problemei. Metodele ce operează  
direct asupra funcționalei pentru a o minimaliza se numesc metode  
directe. Cele mai cunoscute sînt metoda Ritz-Rayleigh și metoda ele-  
mentelor finite.

Într-adevăr, exprimînd energia electromagnetică dintr-un domi-  
niu  $D$  dat, prin funcționala energie, ecuația lui Euler ce exprimă

condiția necesară pentru a minimaliza această energie este tocmai ecuația lui Poisson ce descrie câmpul electromagnetic din domeniul  $D$ . Deci sîntem nevoiți să utilizăm una dintre metodele directe ale calculului variațional, deoarece se caută tocmai o metodă de a contorna găsirea soluției prin rezolvarea ecuației lui Poisson. Ecuația lui Poisson este o ecuație cu derivate parțiale de tip eliptic, convergența în energie a metodei elementelor finite spre o soluție unică poate fi măsurată cantitativ și este totdeauna asigurată. [B46]

§ 4.2. Principiul metodei elementelor finite

4.2.1. In ipoteza neglijării curenților induși, sau pentru regimuri permanente.

Presupunînd planul  $xoy$  al unui reper cartezian asociat domeniului  $D$  plan - paralel, în virtutea rel ( 2o) vom avea :

$$B = [\nabla \times \bar{A}] = \frac{\partial A}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \bar{j} \quad (4.1)$$

deoarece axa  $oz$  e-a presupus dirijată în direcția curențului de conducție  $\bar{j}_c$ , iar  $\bar{A}$  are drept urmare o singură componentă :

$$\bar{A} = A_z \bar{k} = A \bar{k} \quad (14.2)$$

Energia totală a domeniului  $D$  este atunci :

$$I[A] = W = \iint_D \left[ \frac{1}{2} \left\{ \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - j_c(x,y) A \right] dx dy \quad (4.3)$$

în care :

$$\nu - \text{reductivitatea mediului} \quad (4.4)$$

$$\nu = \frac{1}{\mu}$$

Ca în cap.2., domeniul  $D$  modelează un sistem izolat și complet, deci pe frontiera  $\Gamma$  a domeniului avem condiții de tip Dirichlet sau mixte, fără schimb de energie cu exteriorul.

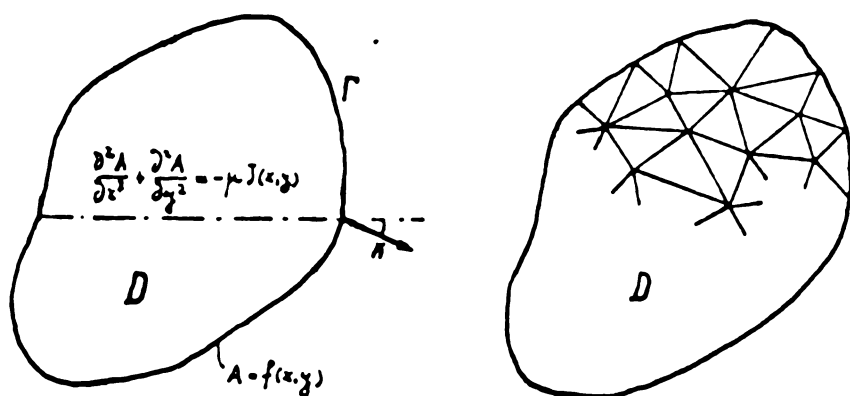


Fig. 4.1  
Problemă de câmp plan-paralelă de tip Dirichlet.

Energia  $W$  este o funcțională, deoarece depinde de  $A(x,y)$ . Orice funcție aparținînd clasei din care face parte soluția, dî prin integrarea (4.3) o valoare energiei  $W$  conținută în domeniul  $D$ . Aceasta (4.3.) este funcționala  $I(A)$  ce trebuie minimalizată printr-o metodă directă.

În cursul procesului de minimalizare aproximativă, pe porțiuni, a funcționalei se obține mulțimea finită a valorilor potențialului vector în nodurile rețelei de discretizare.

Plecând de la valorile potențialului vector în nodurile rețelei de discretizare trebuie însă să avem posibilitatea exprimării potențialului vector în orice punct al domeniului  $D$ . Altfel nu este posibilă integrarea din relația (4.5) pe de o parte, și nici definirea câmpului în domeniul  $D$  pe de altă parte.  $A(x,y)$  fiind o funcție necunoscută, impasul este evident. De aceea se caută aproximarea lui  $A(x,y)$  pe porțiuni, la nivelul fiecărui element. Pentru a simplifica totuși situația se presupune că pentru toate elementele discretizării funcția de aproximare este de același tip: polinom de gradul I, II ... în  $x$  și  $y$ , polinoame de tip Hermite, de tip Lagrange, etc. Desigur faptul este arbitrar, diferența dintre funcția reală și funcția de aproximare putând fi importantă. Faptul că în nodurile rețelei, celor două funcții (reală și de aproximare) li se impune să aibă aceeași valoare, nu rezolvă problema continuității funcției de aproximare și nici condiția de minim a energiei exprimată pentru funcția de aproximare nu constituie condiția de minim real, corespunzătoare funcției necunoscute.

Pentru minimalizarea aproximativă a energiei totale (și ca o consecință pentru construirea aproximativă a funcției  $A(x,y)$ ) apar aici două probleme esențiale:

- stabilirea clasei din care face parte funcția de aproximare și discretizare cărora i se aplică,
- asigurarea convergenței funcției de aproximare spre soluția unică a problemei de câmp cînd dimensiunile elementelor se reduc, tinzînd la limită, spre zero.

În prezenta lucrare discretizarea s-a făcut marcu puncte - oțou ce generează elemente triunghiulare delimitate prin trei puncte, vîrfurile triunghiului. Pentru aceste elemente triunghiulare s-a presupus ca funcția  $A(x,y)$  aparține clasei "polinom în  $x$  și  $y$ ". Din punct de vedere s-a ales ca element de bază al discretizării triunghiul simplu definit prin 3 puncte, polinomul în  $x$  și  $y$  devine în mod obligatoriu un polinom de gradul I de forma:

$$A(x,y) = ax + by + c \quad (4.5)$$

Coeficienții  $a, b, c$ , sînt determinați de valorile funcției  $A(x,y)$  în vîrfurile triunghiului. Necunoscutele problemei sînt valorile funcției  $A(x,y)$  în nodurile rețelei.

Orice discretizare a domeniului  $D$  atacează o relație de ordin<sup>o</sup> ultimii elementelor generate, pentru a facilita reperajul



nodurilor și elementelor .In virtutea acestei relații de ordine, valorile nodale ale funcției  $A(x,y)$  pot constitui un vector notat simbolic  $\{A\}$ . Pentru un element " e" oarecare al discretizării, relația (4.5 ) poate fi pusă sub forma :

$$\{A\} = [N] \cdot \{A\}^e \quad (4.6)$$

unde :

$\{A\}^e$  constituie vectorul valorilor nodale asociate elementului e,  $[N]$  matricea linie a coeficienților valorilor nodale, coeficienți ce conțin exclusiv coordonatele vîrfurilor triunghiului și al punctului curent  $PC(x,y)$  .

Fie triunghiul i , j , k definit de vîrfurile sale așa cum arată fig. 4.2

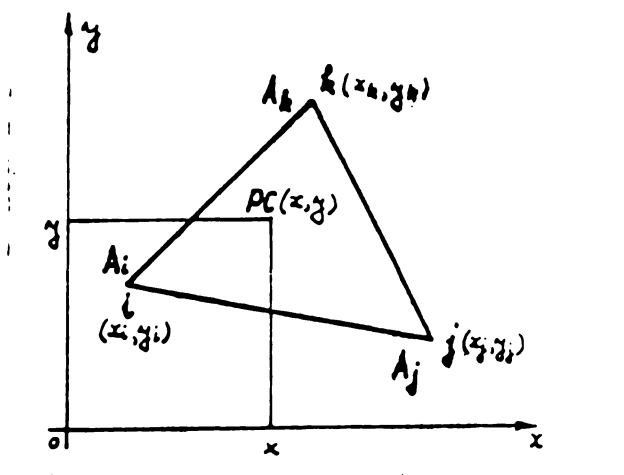


Fig. 4.2  
Definirea unui element triunghiular simplu prin coordonatele vîrfurilor

Potrivit relației (4.5 ) se poate scrie pentru valorile funcției  $A(x,y)$  în nodurile i , j , k ale triunghiului ;

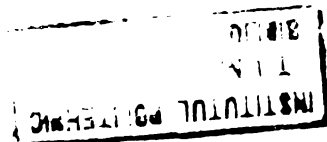
$$\begin{aligned} A_i &= ax_i + by_i + c \\ A_j &= ax_j + by_j + c \\ A_k &= ax_k + by_k + c \end{aligned} \quad (4.7)$$

Coeficienții a, b , c se determină rezolvînd( 4.7 )

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta} [A_i(y_j - y_k) + A_j(y_k - y_i) + A_k(y_i - y_j)] \\ b &= \frac{1}{\Delta} [A_i(x_k - x_j) + A_j(x_i - x_k) + A_k(x_j - x_i)] \\ c &= \frac{1}{\Delta} [A_i(x_j y_k - x_k y_j) + A_j(x_k y_i - x_i y_k) + A_k(x_i y_j - x_j y_i)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

în care :

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$



sau :

$$\Delta = 2 \cdot \text{suprafata triunghiului } i, j, k$$

Introducind valorile coeficientilor a, b, c, obtinute prin (4.3) in (4.5.) si punind in evidenta valorile nodale  $A_i, A_j, A_k$  obtinem:

$$A(x, y) = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k \quad (4.10)$$

unde :

$$N_i = \frac{1}{\Delta} [(y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y + (x_j y_k - x_k y_j)] \quad (4.11)$$

$$N_j = \frac{1}{\Delta} [(y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y + (x_k y_i - x_i y_k)] \quad (4.12)$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta} [(y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y + (x_i y_j - x_j y_k)] \quad (4.13)$$

Coeficientii  $N_i, N_j, N_k$  ce multiplică valorile nodale  $A_i, A_j, A_k$  ale funcției  $A(x, y)$  sînt funcții de coordonatele vîrfurilor  $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$  și coordonatele punctului curent  $x, y$ . De aceea vor fi numiți "funcții de ponderație".

Avînd definită funcția necunoscută  $A(x, y)$  prin relația (4.10) se poate calcula contribuția elementului "e" la funcționala energie totală :

$$I[A]^e = \iint_e \left[ \frac{1}{2} \left\{ \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} A_k \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} A_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} A_k \right)^2 \right\} - J_c(x, y) (N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k) \right] dx dy \quad (4.14)$$

Parametrii de care depinde energia elementului "e" sînt  $A_i, A_j, A_k$ . Pentru ca energia elementului "e" să fie minimă, trebuie să avem simultan :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I[A]^e}{\partial A_i} &= 0 \\ \frac{\partial I[A]^e}{\partial A_j} &= 0 \\ \frac{\partial I[A]^e}{\partial A_k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Să presupunem că discretizarea aplicată domeniului D a generat un număr "ne" finit de elemente și un număr "nd" finit de noduri interne. Nodurile aparținînd frontierei de tip Dirichlet au fost excluse din "nd" deoarece pe frontiera  $\Gamma$  valorile funcției  $A(x, y)$  sînt cunoscute. Energia totală fiind suma energiilor tuturor elementelor, avem :

$$I[A] = \sum_{e=1}^{n_e} I[A]^e \quad (4.16)$$

în care :

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Exprimând condițiile ( 4.15) de minim a energiei la nivelul fiecărui element și asamblându-le pentru totalitatea celor "ne" elemente ale domeniului D , se obține sistemul de ecuații :

$$\frac{\partial I[A]}{\partial \{A\}} = 0 \quad ( 4.18)$$

care are semnificația " funcționala energie totală fiind funcție de "nd" parametri (componentele vectorului {A}), pentru a obține minimul funcționalei trebuie să anulăm toate derivatele ei de ordinul I ce se pot exprima separat pentru acești "nd" parametri".

Rezolvând sistemul (4.18) se obțin valorile funcției A(x,y) în cele "nd" noduri interne. Pentru orice punct al domeniului D valoarea aproximativă a potențialului vector A este exprimabilă, în virtutea relației ( 4.6) , deoarece orice punct al domeniului D aparține fie unui element, fie frontierei dintre două elemente, fie nodurilor rețelei de discretizare. Deci problema de câmp se rezolvă generând sistemul de ecuații ( 4.18) și rezolvându-l . .

Rămâne de demonstrat că sistemul (4.18) este în practică un sistem rezolvabil pentru un număr de noduri "nd" rezonabil.

Rezumând principiul metodei elementelor finite pentru regimuri permanente avem etapele :

- a) - Domeniul D de existență a câmpului este discretizat în mod arbitrar, printr-o rețea oarecare, în "ne" elemente și "nt" noduri din care "nd" neaparținând frontierei  $\Gamma$ . Evident  $nd < nt$ .
- b) - Ca o consecință a discretizării arbitrare efectuate, funcția de aproximare a potențialului magnetic vector la nivelul fiecărui element poate fi adoptată .
- c) - Se exprimă energia unui element oarecare ca o contribuție la energia totală a domeniului D ;
- d) - Se impun condițiile de minim a energiei la nivelul elementului considerat ;
- e) - Deoarece energia totală este suma energiilor tuturor elementelor ( 4.16 ) se assemblează condițiile de minim a energiei impuse tuturor elementelor discretizării, într-un sistem unic de ecuații .
- f) - Rezolvând acest sistem de ecuații se obțin valorile potențialului vector în nodurile rețelei de discretizare ( 4.17).

Ansamblul acestor valori constituie soluția problemei de câmp, deoarece în orice punct al domeniului D valoarea aproximativă a potențialului vector este exprimabilă în funcție de valorile nodale și coordonate , în virtutea etapei b.

### § 4.3. Detalierea etapelor IRR

#### § 4.3.1. Discretizarea domeniului D și alegerea funcției de aproximare.

Funcția de aproximare trebuie să asigure :

- validitatea adăugării energiilor tuturor elementelor pentru a obține energia totală (relația 4.16 ),
- valoare finită derivatelor din expresia funcționalei pentru a nu necesita precauțiuni speciale la frontiera dintre două elemente,
- la dimensiuni ale elementelor tinzând spre zero funcția de sub semnul integralei din (4.3) trebuie să tindă spre o funcție univocă, fără singularități .

Din aceste motive funcțiile de ponderație [N] trebuie să satisfacă următoarele criterii de convergență :

Criteriul N<sup>o</sup> 1 : Funcțiile de ponderație [N] trebuie să fie astfel alese încât pentru valori convenabile ale potențialului vector în noduri  $\{A\}^e$ , orice valoare constantă a funcției  $\{A\}$  sau a derivatelor sale figurând în funcționala I [A] să poată fi obținută la limită ,când dimensiunea elementelor tinde spre zero.

Criteriul N<sup>o</sup> 2 : Funcțiile de ponderație [N] trebuie să fie astfel alese ca  $\{A\}$  și toate derivatele sale până la un ordin inferior cu 1 ordinului derivatei ce figurează în funcțională să fie continue pe linia de separație a elementelor.

Deoarece funcționala energie conține numai derivate de ordinul 1 ale funcției necunoscute,este suficientă continuitatea funcției pe linia de separație a elementelor, fără continuitatea derivatelor.

Prin convergență se înțelege faptul că eroarea comise în determinarea valorii adevărate a funcționalii dispare când talia elementelor tinde spre zero.In practică acest lucru este irealizabil, dar este important să știm dacă o aproximare dată de o anumită rețea de discretizare este în unul sigur mai bună decât alta, dată de o altă rețea de discretizare.

În general dacă a doua rețea de discretizare este obținută prin subdivizarea elementelor primei rețele , se obține o convergență monotonă spre valoarea adevărată a funcționalii I [A].Acest principiu a fost enunțat pentru prima dată de Melosh în 1963.

Discretizarea poate fi făcută prin elemente plane aparținând familiilor patrulater, dreptunghi, triunghi.S-a optat pentru familia triunghiurilor din cauza distorsiunii reduse a frontierelor și facilităților oferite în stabilirea expresiilor de calcul.

Familia triunghiurilor este cea mai bună.Pentru definirea

ei să considerăm suita triunghiurilor generate de modelul expus în figura 4.3. Numărul de noduri al fiecărui element din suită astfel ales încât să permită reprezentarea funcției necunoscute printr-un polinom complet al cărui grad este tocmai cel necesar pentru asigurarea compatibilității inter - elemente.

Se poate defini un sistem de coordonate normale pentru triunghi. Să presupunem un triunghi liniar 1, 2, 3 ( Fig. 4.3.b)

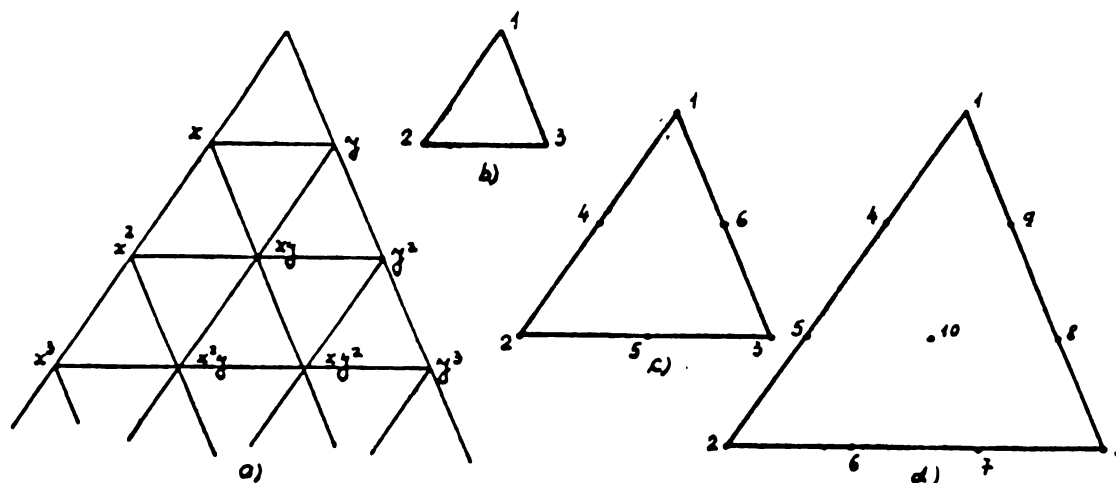


Fig. 4.3. Familie de elemente triunghiulare.

- a) Generarea familiei,
- b) triunghi liniar ,c) triunghi patratial
- d) triunghi cubic

Un ansamblu comod de coordonate este ansamblul  $L_1, L_2, L_3$  a cărui relație cu sistemul cartezian se exprimă prin :

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \quad (4.19)$$

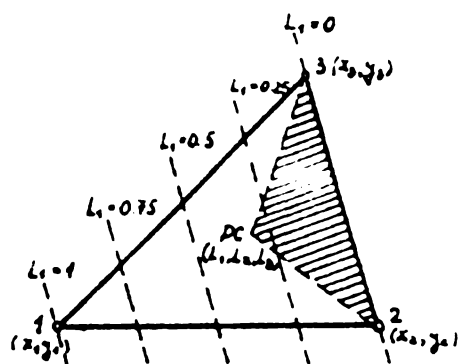
$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

În nodul 1,  $L_1 = 1$  și simultan  $L_2 = L_3 = 0$ . Analog în nodul 2,  $L_2 = 1$  și  $L_1 = L_3 = 0$ , etc. Ultima relație din (4.19) implică <sup>faptul</sup> că familia de curbe  $L_1 = ct$  este o familie de drepte paralele laturii 2 - 3 pe care  $L_1 = 0$ .

Coordonatele  $L_1, L_2, L_3$  ale unui punct din interiorul triunghiului se pot exprima prin raportul suprafețelor a două triunghiuri, cum se vede în (figura 4.4.) și relația (4.20) pentru coordonata  $L_1$  a punctului PC.

Fig.4.4. Referitor la definierea coordonatelor normale  $L_1, L_2, L_3$ .



$$L_1 = \frac{S_{PC 23}}{S_{123}} \quad (4.20)$$

Rezolvând (4.19) în funcție de  $L_1, L_2, L_3$  avem :

$$L_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / \Delta \quad (4.21)$$

$$L_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y) / \Delta$$

$$L_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y) / \Delta$$

în care :

$$\Delta = 2 \times S_{123} \text{ identic cu cel definit prin relația (4.9) }$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (4.22)$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

Se remarcă identitatea formală a rel( 4.21) cu relațiile (4.11), (4.12), (4.13). Pentru triunghiul liniar, coordonatele de suprafață  $L_1, L_2, L_3$  se confundă cu funcțiile de ponderație [N] definite pentru același triunghi.

$$L_1 = N_1, \quad L_2 = N_2, \quad L_3 = N_3 \quad (4.23)$$

Pentru a obține funcțiile de ponderație ale celorlalte triunghiuri ale familiei se vor stabili relații de recurență.

Se consideră un triunghi de ordinul  $n$  ale cărui funcții de ponderație sînt presupuse cunoscute. În funcție de acestea, se caută funcțiile de ponderație pentru un triunghi de ordinul  $(n+1)$ . Fig.4.5 prezintă cele două triunghiuri avînd nodurile separate prin intervale egale, ca în modelul din fig. 4.3.a

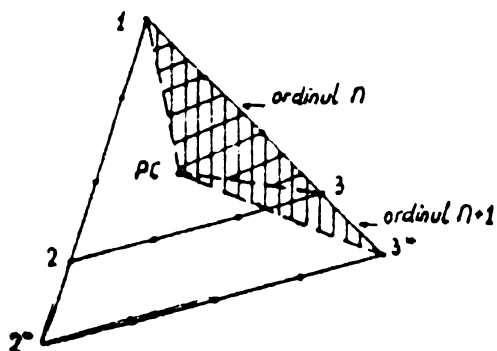


Fig.4.5

Pentru nodul  $i$  se cunoaște :

$$N_i^n(L_1^n, L_2^n, L_3^n) \quad (4.24)$$

funcția de ponderație de ordinul  $n$  definită în funcție de coordonatele de suprafață ale triunghiului  $123$ , Această funcție de ponderație se poate exprima și cu coordonatele de suprafață ale triunghiului  $12^*3^*$ , dacă se poate găsi o relație între cele două sisteme de coordonate. Noua funcție de ponderație <sup>trebuie</sup> să aibă valoarea 1 în nodul  $i$  și zero în restul nodurilor noului triunghi cu excepția celor situate pe linia  $2^*3^*$ .

Relația între cele două sisteme de coordonate de suprafață se obține cu ajutorul fig.4.5. .

$$L_2^n = \frac{S_{123}}{S_{123}} \quad ; \quad L_2^{n+1} = \frac{S_{123^*}}{S_{12^*3^*}} \quad (4.25)$$

$$L_2^n = \frac{S_{123}}{S_{123}} * \frac{S_{12^*3^*}}{S_{123^*}} * L_2^{n+1}$$

Dacă fiecare latură a triunghiului de ordinul  $n$  este formată din  $n$  segmente egale, iar pentru triunghiul de ordinul  $n+1$  din  $n+1$  segmente de aceeași lungime ca laturile omoloage ale triunghiului de ordinul  $n$ ,

$$L_2^n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n^2} L_2^{n+1} = \frac{n+1}{n} L_2^{n+1} \quad (4.26)$$

Similar :

$$L_3^n = \frac{n+1}{n} L_3^{n+1} \quad (4.27)$$

Deoarece  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

$$L_1^n = \frac{1}{n} [(n+1)L_1^{n+1} - 1] \quad (4.28)$$

În virtutea acestor relații avem funcțiile de ponderație de ordinul  $n + 1$  exprimate în funcție de funcțiile de ponderație pentru triunghiul de ordinul  $n$ , ca mai jos :

$$N_i^{n+1} = c L_i^{n+1} N_i^n \quad (4.29)$$

unde :

$$c = \frac{n+1}{n} \quad (4.30)$$

$l$  fiind numărul straturii în care se găsește nodul  $i$ , numărînd de la nodul 1. Funcțiile de ponderație ale punctelor situate pe bază se vor scrie prin permutare de indici.

Triunghi patratic (de ordinul  $n = 2$ ) conform fig.4.3.c.

Pentru vîrfuri :

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \text{ etc.} \quad (4.31)$$

Pentru mijlocul laturilor :

$$N_4 = 4L_1 L_3, \text{ etc.} \quad (4.32)$$

Triunghi cubic (ce ordinea  $n = 3$ ) conform fig.4.3.

Nodurile vîrfurilor :

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \cdot L_1, \text{ etc.} \quad (4.33)$$

Pentru nodurile laturilor :

$$N_4 = \frac{9}{4} L_1 L_2 (3L_1 - 1), \text{ etc.} \quad (4.34)$$

Pentru nodul interior :

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (4.35)$$

Triunghiul patratic a fost realizat pentru prima dată de Argyris în anul 1965, pe baza unei lucrări a lui Fraejis de Veubøke.

Aproximarea funcției necunoscute se poate face la nivelul unui element și prin utilizarea polinoamelor de interpolare în sens Hermite, sau polinoame de tip Lagrange [B47]. Avantajul rezidă în posibilitatea creerii unor programe utilizabile pentru o mare varietate de probleme.

Din categoria elementelor triunghiulare face parte și elementul triunghiular a lui Clough și Tocher [B48] utilizat cu precădere în rezolvarea numerică a problemelor de eforturi mecanice în plăci.

Prin urmare chiar utilizînd elementele triunghiulare pentru discretizare, avem multiple posibilități de alegere între elementele triunghiulare cu un număr de grade de libertate din ce în ce mai mare. Se pune evident problema interesului pe care-l prezintă ridicarea complexității unui element. Răspunsul nu este totdeauna ușor. Depinde de tipul problemei, de timpul de calcul, timpul de preparare a datelor de intrare, etc.

Alegerea triunghiului simplu cu funcția de aproximare polinom liniar în  $x$  și  $y$  s-a făcut ținînd cont de următoarele :

- funcțiile de ponderație au o formă simplă,
- numărul nodurilor ce definesc triunghiul de suprafață dată este minim, deci se face economie de memorie calculator.
- integralele ulterioare sînt simplu de efectuat.
- în zonele cu gradient mare al funcției  $A(x,y)$  se poate afina discretizare, în detrimentul zonelor cu cîmp practic uniform.

#### 4.3.2 Stabilirea ecuației diferențiale $\frac{\partial II[A]^e}{\partial A_i}$ la nivelul unui element oarecare $i, j, k$ .

Prin relația (4.14) s-a stabilit energia elementului  $i, j, k$  ramîne să se detalieze condițiile (4.15) pentru a pune bazele algoritmului de generare a sistemului (4.13). Se consideră derivata  $\frac{\partial II[A]^e}{\partial A_i}$

$$\frac{\partial II[A]^e}{\partial A_i} = \iint_e \left[ \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} A_k \right) \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} A_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} A_k \right) \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) - J(x,y) N_i \right] dx dy \quad (4.36)$$



Ținând cont de (4.11) ÷ (4.13) avem :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= (y_j - y_k) / \Delta ; & \frac{\partial N_j}{\partial x} &= (y_k - y_i) / \Delta ; & \frac{\partial N_k}{\partial x} &= (y_i - y_j) / \Delta \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= (x_k - x_j) / \Delta ; & \frac{\partial N_j}{\partial y} &= (x_i - x_k) / \Delta ; & \frac{\partial N_k}{\partial y} &= (x_j - x_i) / \Delta \end{aligned} \quad (4.37)$$

Prin urmare (4.36) se poate pune sub forma :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [IA]^e}{\partial A_i} &= \left\{ [(y_j - y_k) A_i + (y_k - y_i) A_j + (y_i - y_j) A_k] \frac{y_i - y_k}{\Delta^2} + \right. \\ &+ \left. [(x_k - x_j) A_i + (x_i - x_k) A_j + (x_j - x_i) A_k] \frac{x_k - x_j}{\Delta^2} \right\} \cdot \iint_e v dx dy - \\ &- \iint_e \frac{1}{\Delta} J(x, y) [(y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y + x_j y_k - x_k y_j] dx dy \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pentru a ușura integrarea se presupune

$$\begin{aligned} J(x, y) &= J_e = ct \\ v &= v_e = ct \end{aligned} \quad (4.39)$$

pentru întreaga suprafață a elementului.

Pentru un triunghi definit prin vîrfurile sale  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$  avem:

$$\iint_e dx dy = \frac{\Delta}{2} \quad (4.40)$$

$$\iint_e \frac{1}{\Delta} [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y] dx dy = \frac{x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x_G + (x_k - x_j) y_G}{2} \quad (4.41)$$

în care :

$$x_G = \frac{1}{3} (x_i + x_j + x_k) \quad (4.42)$$

$$y_G = \frac{1}{3} (y_i + y_j + y_k)$$

sînt coordonatele centrului de greutate al elementului e.

Se observă că (4.41) reprezintă tocmai 1/6 din valoarea determinantului  $\Delta$  definit ca în relația (4.9).

Sub formă compactă relația (4.36) se poate exprima astfel :

$$\frac{\partial [IA]^e}{\partial A_i} = M_i A_i + M_j A_j + M_k A_k - \frac{J_e \Delta}{6} \quad (4.43)$$

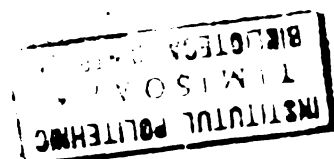
unde :

$$M_i = \frac{J_e}{2\Delta} [(y_j - y_k)^2 + (x_k - x_j)^2]$$

$$M_j = \frac{J_e}{2\Delta} [(y_j - y_k)(y_k - y_i) + (x_i - x_k)(x_k - x_j)] \quad (4.44)$$

$$M_k = \frac{J_e}{2\Delta} [(y_i - y_j)(y_j - y_k) + (x_j - x_i)(x_k - x_j)]$$

S-a obținut deci nucleul algoritmului de generare a sistemului (4.18). Prin permutări circulare se obțin expresiile celorlalte derivate referitoare la nodurile j și k :  $\frac{\partial [IA]^e}{\partial A_j}$  și  $\frac{\partial [IA]^e}{\partial A_k}$ . Se observă un lucru deosebit de important :



SISTEMUL DE ECUATII OBTINUT PRIN MINIMALIZAREA ENERGIEI IN TOATE ELEMENTELE DOMENIULUI D ESTE UN SISTEM DE ECUATII LINIARE , DE TIPUL :

$$\frac{\partial J[A]}{\partial A} = [M]\{A\} + \{TL\} = 0 \quad (4.45)$$

Matricea coeficienților [M] se obține prin asamblarea unor relații de tipul (4.43) în procesul de baleiaj al elementelor obținute prin discretizarea domeniului D. Ea este în principiu o matrice pătrată cu găuri , de dimensiune "nd" .In anumite condiții ea se poate obține sub forma unei matrici de tip bandă.

Termenul liber {TL} este un vector de dimensiuni "nd" generat de funcția J(x,y) și produselor  $M_f A_f$  corespunzătoare nodurilor situate pe frontieră.S-a văzut însă că domeniul D se delimitează totdeauna printr-o curbă A = 0 ,ceci contribuția produselor  $M_f A_f$  este nulă.

#### § 4.3.3. Generarea matricii [M] și a vectorului {TL}

Analizând expresia derivatei (4.43) și a sistemului (4.18) se conturează două posibilități de generare a matricii [M];

- prin asamblarea tuturor (în spațiul a celor trei ) derivatelor referitoare la un element și baleierea discretizării în ordinea elementelor ;
- prin asamblarea derivatelor corespunzătoare tuturor elementelor în funcție de o singură valoare nodală și baleierea discretizării în ordinea nodurilor.

S-a optat pentru posibilitatea a doua ,deoarece ea permite generarea matricii [M]linie de linie, ceea ce prezintă anumite avantaje la rezolvarea sistemului prin metoda de eliminare Gauss.

Fie o parte a unei discretizări, prezentată în fig.4.6

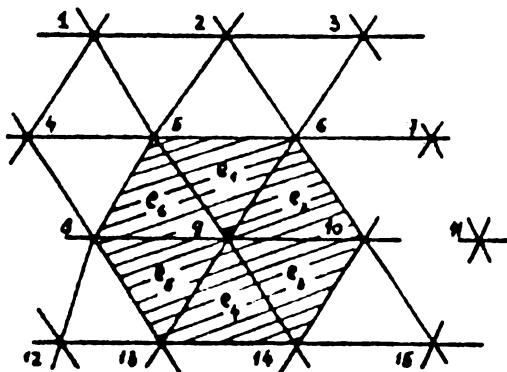


Fig.4.6  
Referitor la generarea matricii [M]

Nodul numărul 9 este înconjurat de  $n_v = 6$  elemente vecine. Valoarea potențialului vector  $A_9$  va interveni în expresia energiei, numai pentru aceste "n<sub>v</sub>" elemente. Pentru restul elementelor discretizării , "n<sub>e</sub> - n<sub>v</sub>" elemente, energia electromagnetică este constantă în raport cu  $A_9$  , toate derivatele de tipul  $\frac{\partial J[A]}{\partial A_9}$

fiind identice nule pentru  $n_x \in n_e - n_v$ . Deci se poate scrie :

$$\frac{\partial I[A]}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{n_v} \frac{\partial I[A]^e}{\partial A_i} \quad (4.46)$$

Relația (4.46) simplifică considerabil procesul de asamblare a matricii  $[M]$ , deoarece  $n_v \ll n_e$ . În practică  $n_v \leq 8$ , în timp ce "ne" poate fi de ordinul miilor. Cele "nv" elemente sînt luate pe rînd și cu ajutorul relațiilor practice de calcul, (4.43) și (4.44) se generează cele 3 derivate parțiale, corespunzătoare nodurilor triunghiului. Se trece apoi la elementul următor ș.a.m.d.

Nodurile și elementele sînt numerotate. Deci pentru fiecare element din cele "nv" elemente trebuie afectată o valoare indicilor  $i, j, k$  spre a putea repara coordonatele nodurilor în calculul expresiilor (4.44): Afectînd cîte o valoare lui  $i, j, k$ , implicit se dă un loc coeficienților  $M_i, M_j, M_k$ , în linia generată.

Pentru a genera corect liniile matricii  $[M]$  se procedează după modelul descris în cele de mai jos pentru linia  $p = 9$  a matricii  $[M]$  corespunzătoare nodului 9.

PENTRU TOATE CELE "nv" ELEMENTE CE ÎNCONJOARA NODUL AVIND NUMĂRUL "p" AL LINIEI GENERATE, ÎN ORDINEA  $i, j, k$  SE AFECTEAZA  $i = p, j$  și  $k$  FIIND NODURILE GASITE PRIN PARCURGAREA LATURILOR ELEMENTULUI ÎN SENS TRIGONOMETRIC, CU PUNCTUL DE PLECARE ÎN  $i = p$ .

În cazul elementului  $e_1, i = p = 9$   
iar :  $j = 6, k = 5$ .

Coeficienții  $M_i, M_j, M_k$  calculați se depun în coloanele 9, 6 și 5 ale liniei  $p = 9$ .

Procedînd analog pentru restul elementelor ce înconjoară nodul  $p = 9$ , se obține linia  $p = 9$  în modul descris de tabelul de mai jos :

Tabel 4.1

Elementul	Ordinea locală			Elementele liniei $p=9$ a matricii $M$												
	$i$	$j$	$k$	...	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$e_1$	9	6	5			$M_5^{e_1}$	$M_6^{e_1}$			$M_9^{e_1}$						
$e_2$	9	10	6				$M_6^{e_2}$			$M_9^{e_2}$	$M_{10}^{e_2}$					
$e_3$	9	14	10							$M_9^{e_3}$	$M_{10}^{e_3}$				$M_{14}^{e_3}$	
$e_4$	9	13	14							$M_9^{e_4}$				$M_{13}^{e_4}$	$M_{14}^{e_4}$	
$e_5$	9	8	13						$M_8^{e_5}$	$M_9^{e_5}$				$M_{13}^{e_5}$		
$e_6$	9	5	8			$M_5^{e_6}$			$M_8^{e_6}$	$M_9^{e_6}$						
				...0	0	$M_5$	$M_6$	0	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$	0	0	$M_{13}$	$M_{14}$	0...

Aici:  $M_9 = M_9^{e_1} + M_9^{e_2} + \dots + M_9^{e_6}$   
 $M_5 = M_5^{e_1} + M_5^{e_6}$   
 etc.

Numărul nodurilor " active " este restrâns. De aceea matricea rezultată are foarte multe găuri. Printr-o numerotare potrivită a nodurilor și printr-o explorare judicioasă a ordinii impuse nodurilor se poate asigura existența tuturor elementelor nenule ale matricii [M] într-o " bandă " situată în jurul diagonalei principale.

Matricea [M] este totdeauna simetrică, pozitiv definită pentru o problemă de câmp electromagnetic într-un mediu izotrop. Această proprietate este foarte utilă pentru stocarea în memorie doar a elementelor necesare, adică semibanda dreaptă sau stîngă a matricii [M].

#### § 4.3.4. Restricții impuse discretizării domeniului D în urma detalierii etapelor MEF

Triangularizarea trebuie făcută astfel încît să asigure :

- descrierea topologiei discretizării și furnizarea datelor necesare pentru :
  - calculul coeficienților  $M_i, M_j, M_k$ , adică coordonatele nodurilor interne și a celor situate pe frontieră.
  - asamblarea liniilor matricii [M], adică numărul tuturor elementelor ce înconjoară fiecare nod intern al domeniului D și nodurile ce definesc fiecare element.
- forma de tip bandă a matricii [M] și o lățime cît mai redusă a acestei benzi pentru a ușura memorarea matricii în vederea rezolvării sistemului (4.45).
- o densitate de noduri satisfăcătoare în zonele de gradient pronunțat a funcției  $A(x,y)$ . Inginerul poate preciza zonele de interes prioritar, însă fără experiență și fler este greu să se facă o discretizare corectă sau apropiată de cea optimă ;
- în unele cazuri, afinarea discretizării prin subdivizarea primei rețele de discretizare.

Ținînd cont de aceste cerințe trebuie făcute cîteva teste asupra proiectului de triangularizare înainte de a decide descrierea topologiei discretizării prin ~~datele de intrare~~ datele de intrare. Pentru triangularizare neautomată se parcurg următoarele etape :

- Se desenează la o scară cît mai mică posibil, domeniul studiat. Aceasta depinde exclusiv de mijloacele grafice de care se dispune pentru un desen la scară, corect, fără erori.
- Se decide în primă instanță pasul rețelei în zonele cu un mare gradient al funcției  $A(x,y)$ . Aceste zone fie se " sînt ", fie rezultă dintr-o soluție anterioară. Ulterior se execută trecerea de la aceste zone la restul domeniului, astfel ca să avem

toate elementele triunghiulare interconectate prin vîrfuri. Situații de genul celei ilustrate în fig. 4.7 a nu sînt admise .

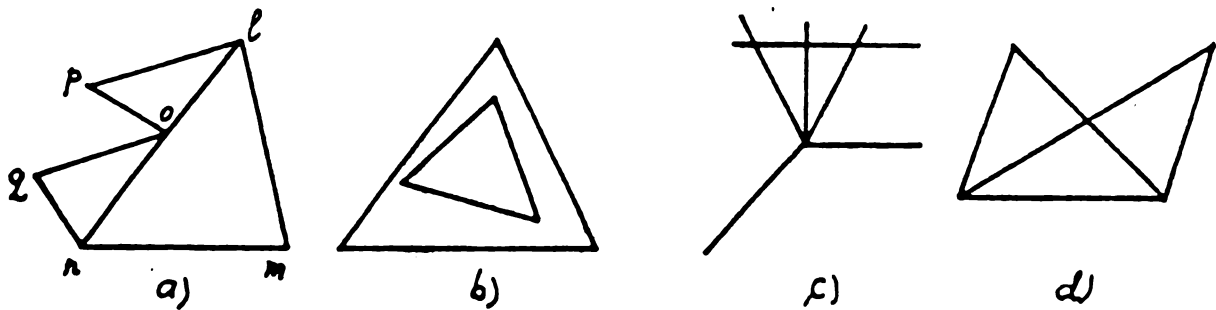


Fig.4.7 Situații nepermise în triangularizare.

- Se cercetează media numărului "nv" de elemente vecine unui nod. Ea nu trebuie să depășească  $nv = 8 \div 10$ . Numărul optim este  $nv = 6$ , ceea ce revine la valoarea medie a unghiurilor triunghiurilor aproximativ egală cu  $\pi/3$ . Nu sînt recomandate unghiuri deosebit de variate (de exemplu, unele  $10^\circ$  altele  $150^\circ + 160^\circ$ ) din considerente de rezolvare numerică a sistemului  $[M]\{A\} = \{TL\}$ . De multe ori un examen vizual de tip "estetică a rețelei" poate depista defecte ale rețelei de discretizare. Pentru ilustrarea se poate compara fig.4.8 c și 4.8 d "Dezordinea" din jurul nodurilor 4, 5, 8, 11, 10, 7 are repercursiuni asupra lățimii benzii.

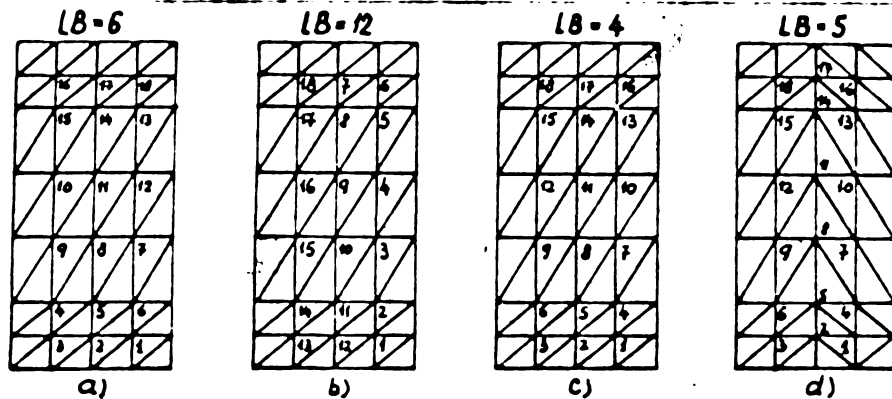


Fig.4.8 Exemple de triangularizare și numerotare

Nu trebuie uitat că proprietățile de material trebuie să fie constante pe întreaga suprafață a elementului, deci se urmăresc frontierele zonei feromagnetice, a zonei străbătută de curenți, etc. Dacă geometria inițială a domeniului e puternic alterată de conturul care trebuie să urmărească laturile rețelei de discretizare, se reface triangularizarea.

- Abia după aceste etape se începe numerotarea nodurilor și elementelor, respectînd criteriile sau regulile următoare :

Criteriul 1. Numerotarea elementelor trebuie să grupeze (pe cît posibil) elementele situate în fier, ( $\mu$  variabil,

$J(x,y) = 0$ ) cele situate în aer ( $\mu = \mu_0, J(x,y) = 0$ ) și cele străbătute de curent ( $\mu = \mu_0, J(x,y) \neq 0$ ). Se ușurează astfel scrierea programului de generare a matricii [M]. Regula nu este obligatorie, teoretic orice numerotare a elementelor fiind acceptabilă.

Criteriul 2. Numerotarea nodurilor separă în două grupuri nodurile interne și cele aparținând frontierei. Ea se face de asemenea manieră, încât să asigure forma bandă pentru matricea [M]. Regula este obligatorie. Aceasta înseamnă că se baleiază configurația conform unui principiu, FARA A INTERVENI ÎNTR-O ZONA ÎN CARE S-A FACUT NUMEROTAREA. NUMEROTAREA NODURILOR NU TINE CONT DE VARIATIA PROPRIETATILOR DE MATERIAL DE-A LUNGUL DIRECTIEI DE BALEIAJ.

Criteriul 3. Pentru a asigura o lățime de bandă minimă, se alege astfel direcția de baleiaj, ca de-a lungul ei, totodată în același sens, să se traverseze domeniul D întâlnind un număr minim de noduri.

Comparația divorselor numerotări se face în ultimă instanță în funcție de lățimea de bandă maximă rezultată. Această lățime se apreciază pornind de la poligonul format în jurul unui nod oarecare de elementele vecine nodului. Pentru nodul 9 din fig. 4.6 acest poligon este descris de vîrfurile 5, 6, 10, 14, 13, 18. Se caută diferența maximă între numerele de ordine a două vîrfuri, se adaugă 1 și se obține lățimea benzii LB', adică numărul de coloane în care pot fi găsiți toți coeficienții nenuli din matricea [M]. Pentru cazul din fig. 4.6. avem :

$$LB' = 14 - 5 + 1 = 10$$

adică într-o zonă de 10 coloane se găsesc toți coeficienții nenuli ai liniei  $p = 9$  a matricii [M]. În exteriorul acestei zone, cu siguranță vom avea doar zerouri, deoarece restul nodurilor nu aparțin poligonului 5, 6, 10, 14, 13, 8.

La o numerotare potrivită, această bandă LB' se situează simetric față de elementul diagonal.

Avînd o matrice [M] simetrică, pozitiv definită, de tip bandă se poate stoca în memorie un număr de elemente corespunzător semibenziei LB, definită ca diferență maximă între numerele de ordine ale nodului central și vîrfurile poligonului format de elementele vecine nodului central, la care se adaugă 1. Din motivele expuse ulterior se va utiliza totdeauna semibanda dreaptă definită ca diferența maximă între numerele de ordine a nodului central și ale

vîrfurilor poligonului care are un număr de ordine superior nodului central , la care se adaugă 1.

Pentru cazul din fig. 4.6.

$$\text{semibanda stîngă : LB} = 9 - 5 + 1 = 5$$

$$\text{semibanda dreaptă : LB} = 14 - 9 + 1 = 6$$

Se face un examen amănunțit al întregii discretizări pentru a verifica dimensiunea semibenzi. Dacă valoarea medie a semibenzi este depășită doar în cîteva puncte, în mod excepțional, se reface triangularizarea și numerotarea, deoarece valoarea maximă a semibenzi determină dimensiunea zonei de memorie afectată stocării. Această zonă este utilizată prost dacă doar în 5 % sau 10 % din numărul total al liniilor se utilizează lățimea maximă.

Trebuie semnalat că o triangularizare și o numerotare care să satisfacă simultan criteriile de mai sus este greu de realizat. Pentru a ilustra problemele delicate pe care le pune doar numerotarea, după ce rețeaua de triangularizare a fost decisă , să analizăm fig. 4.8 și 4.9.

Fig.4.8 prezintă numerotarea nodurilor interne pentru o configurație rectangulară , un caz extrem de simplu din punct de vedere al formei domeniului. Numerotarea din fig.4.8.c și 4.8.d asigură lățimea minimă a semibenzi , deoarece numai aceste numerotări respectă criteriul 3. Cazul din fig.4.8.d dă o lățime a semibenzi superioară cazului din fig.4.8.c. din cauza "neregularității" triangularizării în zona punctelor 4,5,8,11,10,7 . Deci lățimea benzi este condiționată atît de triangularizare cît și de numerotare.

Fig.4.9 prezintă un caz în care se poate reveni cu numerotarea în zone din care s-a început , ceea ce contrazice criteriul 2 enunțat anterior. Se observă că pentru acest caz numerotarea "radială" este dezavantajoasă față de numerotarea "în elice "

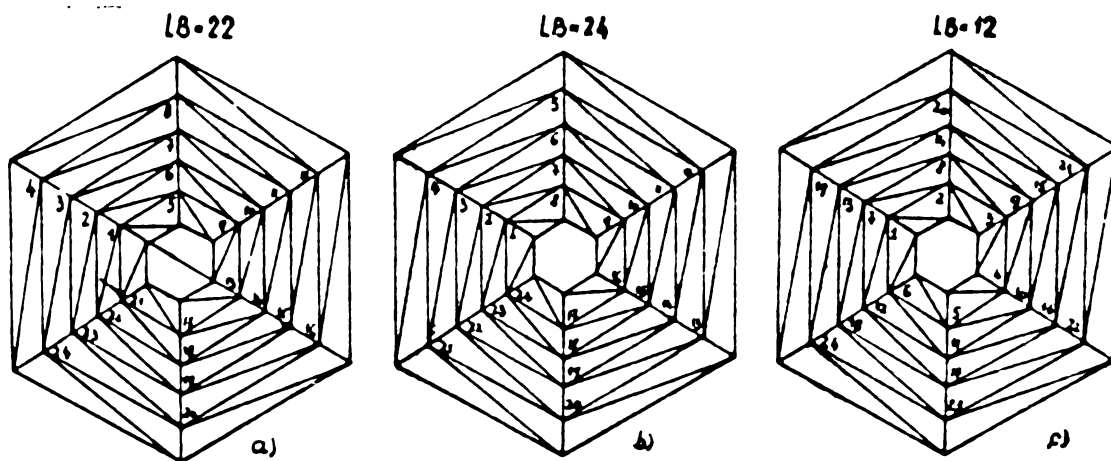


Fig.4.9 Exemple de triangularizare și numerotare

Descrierea completă a discretizării domeniului D este dată de:

- ansamblul coordonatelor punctelor situate în interiorul și pe frontiera domeniului  $D$ ,
- numerele de ordine ale elementelor vecine pentru fiecare nod intern al domeniului  $D$ ,
- numerele de ordine ale nodurilor ce definesc fiecare element,
- valoarea permeabilității magnetice a fiecărui element,
- valoarea densității de curent în fiecare element.
- valorile funcției necunoscute în nodurile frontierei.

Ansamblul tuturor acestor informații constituie datele de intrare ale programului scris pentru rezolvarea problemei de cîmp. După scrierea programului și testarea lui, furnizarea datelor de intrare este etapa cea mai laborioasă și mai delicată. De aceea s-au imaginat metode de triangularizare automată a domeniului pornind de la un număr restrîns de informații furnizate sistemului de discretizare.

#### 4.3.5. Noțiuni de triangularizare automată.

Fără a intra în detalii, se vor prezenta cîteva informații cu privire la bazele unui algoritm de triangularizare automată descris în [B49] și [B50], algoritm ce face parte dintr-un sistem interactiv pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale pe un domeniu plan, pus la punct în cadrul CNRS\* - FRANTA.

Sistemul este accesibil doar centrelor de calcul dispunînd de o capacitate a memoriei centrale practic infinită (superioară cifrei de un megaoctet, cum e cazul Centrului de Calcul a Universității Științifice și Medicale din Grenoble, care a făcut comunicarea din [B49]). Numai algoritmul de discretizare (triangularizare automată) ocupă fără terminal grafic 25,672 ko, iar cu terminal grafic 231,800 ko.

Configurația este ocupată prin frontiere exterioare și frontiere interioare. Frontierele sînt constituite de un ansamblu de curbe  $\Gamma_E$  (frontiere exterioare) și  $\Gamma_I$  (frontiere interioare) precum și un ansamblu de curbe  $\Gamma_{II}$  numit "fronturi intermediare" ce permit subdiviziuni ale domeniului  $D$  în zone simple, subdomenii.

Fiecare extremitate de frontieră se numește bornă.

Lista ordonată a frontierelor astfel orientate încît să formeze o buclă simplă ce închide un subdomeniu, se numește centură.

Fiecare frontieră va fi descrisă prin cele 2 borne ale sale și o listă de coordonate furnizate fie explicit, fie cu un mijloc optic pe un ecran catodic sau o masă gradată și etalonată. Această listă ordonată fixează o orientare a frontierei.

Exemplu : problemă de mediu neomogen

\* Comisia Națională pentru Cercetarea Științifică



Fie domeniul  $D$  constituit din subdomeniile  $D_1$  și  $D_2$  cum se vede în fig.4.10.

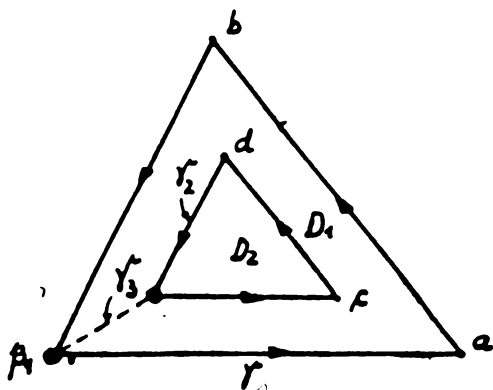


Fig.4.10  
Subdivizarea domeniului.

Frontiera exterioară e constituită de curba  $\gamma_1$  definită de  $(\beta_1, a, b, \beta_1)$

$$\gamma_1 \in \Gamma_E \quad \text{definită de } (\beta_1, a, b, \beta_1)$$

Frontiera internă este constituită de  $\gamma_2$ , definită de  $(\beta_2, c, d, \beta_2)$

$$\gamma_2 \in \Gamma_I \quad \text{definită de } (\beta_2, c, d, \beta_2)$$

Pentru divizarea subdomeniului  $D_1$  se definește frontiera intermediară  $\gamma_3$

$$\gamma_3 \in \Gamma_{II} \quad \text{definită de } (\beta_2, \beta_1)$$

Domeniul întreg  $D$  este :

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma_3$$

Centurile :

$$\text{centura lui } D_1 : (\gamma_1, -\gamma_3, -\gamma_2, \gamma_3)$$

$$\text{centura lui } D_2 : (\gamma_2)$$

Pentru recunoașterea diverselor categorii de frontiere, se asociază fiecărei borne un tip de valoare. De exemplu : tip pozitiv pentru  $\Gamma_E$ , negativ pentru  $\Gamma_I$  și fără semn pentru  $\Gamma_{II}$ .

Discretizarea fiecărui subdomeniu debutează cu discretizarea centurii sale. Această discretizare a centurii servește drept bază pentru construirea triunghiurilor din interiorul subdomeniului. Utilizatorul furnizează pe centură un anumit număr de puncte, pe care ulterior poate să le controleze pe terminalul optic. Dacă evoluția triangularizării nu este satisfăcătoare se poate interveni direct pe imaginea domeniului afișată pe terminal și fie se reface discretizarea, fie se dirijează evoluția ei ulterioară. De obicei fiecărei borne  $i$  se atașează o valoare indicativă pentru pasul discretizării, iar nodurile -frontieră vor fi repartizate automat între 2 borne astfel ca distanța între ele să fie o progresie aritmetică. Atribuirea valorilor indicative fiind decisă de utilizator, se pot obține pași foarte diferiți de la o zonă la alta. Bornele sînt incluse sistematic în rețeaua de discretizare. Detalii asupra algoritmului de construire dinamică a discretizării se vor

De ulterior, deoarece metoda este în strînsă legătură cu tehnica de eliminare frontală utilizată pentru rezolvarea sistemului de ecuații  $[M]\{A\} = \{TL\}$

4.3.6. Caracteristici ale matricii coeficienților deduse din modul concret de generare.

Pornind de la modul concret de generare a matricii  $[M]$  a coeficienților din relația (4.45), se pot demonstra următoarele proprietăți:

- matricea  $[M]$  este simetrică,  $m_{ij} = m_{ji}$
- elementele diagonale sînt față de elementele extradiagonale în relația :  $m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij} = 0$ .
- elementele diagonale corespunzătoare nodurilor situate în aer sau în mediu avînd  $\mu \cong \mu_0$  sînt față de elementele diagonale corespunzătoare nodurilor situate în fier în relația :

$$(m_{ii})_{aer} \cong \mu_r (m_{ii})_{Fe}$$

Aceste constatări sînt necesare la alegerea metodei de rezolvare a sistemului (4.45).

Propozițiunea 1 : Matricea  $[M]$  este simetrică.

Demonstrația :

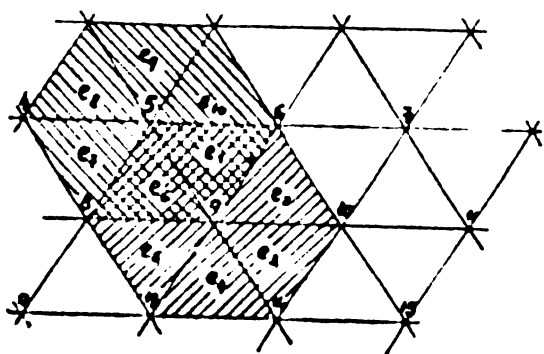
Fie porțiunea de discretizare redată în fig.4.11. Luînd două noduri oarecare, 5 și 9 în speța (însă raționamentul este independent de numerotare) înseamnă că trebuie să arătăm ținînd cont de relațiile (4.44) de generare a coeficienților ca :

$$M_{9,5} = M_{5,9}$$

Coeficienții  $M_{9,5}$  și  $M_{5,9}$  sînt dați de contribuția elementelor  $e_1$  și  $e_6$  la generarea liniei 9, respectiv 5 a matricii  $[M]$ .

Fig.4.11

pentru demonstrarea simetriei matricii  $[M]$



Generînd linia 9 și 5 avem pentru ordinea "locală"  $i, j, k$ , situația redată în tabelul 4.7. de mai jos.

Tabel 4.2.

Linia	Elementul	Ordinea locală			Componentele elementelor matricii M
		i	j	k	
9	e <sub>1</sub>	9	6	5	M <sub>9,5</sub> <sup>e<sub>1</sub></sup> calculat cu M <sub>k</sub> din rel.(4.44)
	e <sub>6</sub>	9	5	8	M <sub>9,5</sub> <sup>e<sub>6</sub></sup> calculat cu M <sub>j</sub> din rel.(4.44)
$M_{9,5} = M_{9,5}^{e_1} + M_{9,5}^{e_6}$					
5	e <sub>1</sub>	5	9	6	M <sub>5,9</sub> <sup>e<sub>1</sub></sup> calculat cu M <sub>j</sub> din rel.(4.44)
	e <sub>6</sub>	5	8	9	M <sub>5,9</sub> <sup>e<sub>6</sub></sup> calculat cu M <sub>k</sub> din rel.(4.44)
$M_{5,9} = M_{5,9}^{e_1} + M_{5,9}^{e_6}$					

Luind deci ca bază de calcul relațiile (4.44) avem :

$$M_{9,5} = M_{9,5}^{e_1} + M_{9,5}^{e_6} = \frac{\nu_1}{2\Delta_1} [(\gamma_9 - \gamma_6)(\gamma_6 - \gamma_5) + (x_6 - x_9)(x_5 - x_6)] + \frac{\nu_6}{2\Delta_6} [(\gamma_5 - \gamma_8)(\gamma_8 - \gamma_9) + (x_9 - x_8)(x_8 - x_5)] \quad (4.48)$$

$$M_{5,9} = M_{5,9}^{e_1} + M_{5,9}^{e_6} = \frac{\nu_1}{2\Delta_1} [(\gamma_9 - \gamma_6)(\gamma_6 - \gamma_5) + (x_5 - x_6)(x_6 - x_9)] + \frac{\nu_6}{2\Delta_6} [(\gamma_5 - \gamma_8)(\gamma_8 - \gamma_9) + (x_8 - x_5)(x_9 - x_8)] \quad (4.49)$$

Evident :

$$M_{5,9} = M_{9,5}$$

ceea ce era de demonstrat

Propozițiunea 2 : Pentru orice linie a matricii [M] există relația :

$$m_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij} = 0 \quad (4.50)$$

Demonstrație :

Fie linia p = 9 generată în tabelul 4.1. trebuie să demonstrăm că :

$$M_{9,5} + M_{9,6} + M_{9,8} + M_{9,9} + M_{9,10} + M_{9,13} + M_{9,14} = 0 \quad (4.51)$$

Expresiile detaliate ale termenilor relației (4.51) sînt, în condițiile amintite, următoarele :

$$M_{9,5} = M_{9,5}^{e_1} + M_{9,5}^{e_6} = \frac{\nu_1}{2\Delta_1} [(\gamma_9 - \gamma_6)(\gamma_6 - \gamma_5) + (x_9 - x_6)(x_5 - x_6)] + \frac{\nu_6}{2\Delta_6} [(\gamma_5 - \gamma_8)(\gamma_8 - \gamma_9) + (x_9 - x_8)(x_8 - x_5)] \quad (4.52)$$

$$M_{9,6} = M_{9,6}^{e_1} + M_{9,6}^{e_2} = \frac{\nu_1}{2\Delta_1} [(\gamma_6 - \gamma_5)(\gamma_5 - \gamma_9) + (x_9 - x_5)(x_5 - x_6)] + \frac{\nu_2}{2\Delta_2} [(\gamma_9 - \gamma_{10})(\gamma_{10} - \gamma_6) + (x_{10} - x_9)(x_6 - x_{10})] \quad (4.53)$$

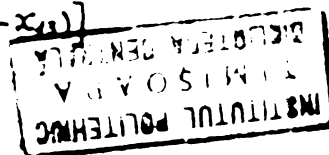
$$M_{9,8} = M_{9,8}^{e_5} + M_{9,8}^{e_6} = \frac{\nu_5}{2\Delta_5} [(\gamma_8 - \gamma_{13})(\gamma_{13} - \gamma_9) + (x_9 - x_{13})(x_{13} - x_8)] + \frac{\nu_6}{2\Delta_6} [(\gamma_9 - \gamma_5)(\gamma_5 - \gamma_8) + (x_5 - x_9)(x_8 - x_5)] \quad (4.54)$$

$$M_{9,9} = M_{9,9}^{e_1} + M_{9,9}^{e_2} + M_{9,9}^{e_3} + M_{9,9}^{e_4} + M_{9,9}^{e_5} + M_{9,9}^{e_6} = \frac{\nu_1}{2\Delta_1} [(\gamma_6 - \gamma_5)^2 + (x_5 - x_6)^2] + \frac{\nu_2}{2\Delta_2} [(\gamma_{10} - \gamma_6)^2 + (x_{10} - x_6)^2] + \frac{\nu_3}{2\Delta_3} [(\gamma_{14} - \gamma_{10})^2 + (x_{14} - x_{10})^2] + \frac{\nu_4}{2\Delta_4} [(\gamma_{13} - \gamma_{14})^2 + (x_{13} - x_{14})^2] + \frac{\nu_5}{2\Delta_5} [(\gamma_8 - \gamma_{13})^2 + (x_8 - x_{13})^2] + \frac{\nu_6}{2\Delta_6} [(\gamma_5 - \gamma_8)^2 + (x_5 - x_8)^2] \quad (4.55)$$

$$M_{9,13} = M_{9,13}^{e_4} + M_{9,13}^{e_5} = \frac{\nu_4}{2\Delta_4} [(\gamma_{13} - \gamma_{14})(\gamma_{14} - \gamma_9) + (x_9 - x_{14})(x_{14} - x_{13})] + \frac{\nu_5}{2\Delta_5} [(\gamma_9 - \gamma_8)(\gamma_8 - \gamma_{13}) + (x_8 - x_9)(x_{13} - x_8)] \quad (4.56)$$

$$M_{9,10} = M_{9,10}^{e_2} + M_{9,10}^{e_3} = \frac{\nu_2}{2\Delta_2} [(\gamma_{10} - \gamma_6)(\gamma_6 - \gamma_9) + (x_9 - x_6)(x_6 - x_{10})] + \frac{\nu_3}{2\Delta_3} [(\gamma_9 - \gamma_{14})(\gamma_{14} - \gamma_{10}) + (x_{14} - x_9)(x_{10} - x_{14})] \quad (4.57)$$

$$M_{9,14} = M_{9,14}^{e_3} + M_{9,14}^{e_4} = \frac{\nu_3}{2\Delta_3} [(\gamma_{10} - \gamma_{14})(\gamma_{14} - \gamma_9) + (x_9 - x_{14})(x_{10} - x_{14})] + \frac{\nu_4}{2\Delta_4} [(\gamma_9 - \gamma_{13})(\gamma_{13} - \gamma_{10}) + (x_{13} - x_9)(x_{14} - x_{13})] \quad (4.58)$$



Având expresiile coeficienților  $M_{ij}$ , se poate verifica relația (4.51)

Elementul diagonal este totdeauna pozitiv, deoarece el este constituit dintr-o sumă de pătrate, așa cum o demonstrează relația (4.44) și transcrierea pentru cazul concret  $M_{9,9}$ , relația (4.55).

Se poate demonstra că în anumite condiții toate elementele extradiagonale sînt negative. Fie elementul triunghiular din fig. 4.12. Expresia  $M_j$  din rel.(4.44), adică contribuția elementului  $i, j, k$ , la elementul extradiagonal se poate scrie în funcție de catele din fig. 4.12 astfel :

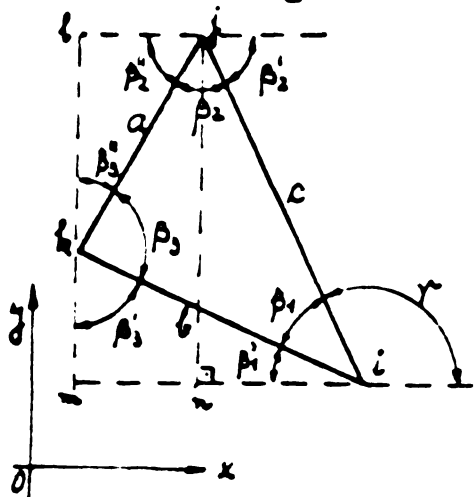


Fig.4.12

Referitor la semnul elementelor extradiagonale ale matricii [M]

$$M_j = \frac{\sqrt{e}}{2\Delta_e} [a \sin \beta_2'' b \sin \beta_1' - b \cos \beta_1' a \cos \beta_2''] = -\frac{\sqrt{e}}{2\Delta_e} ab \cos(\beta_1' + \beta_2'') = -\frac{\sqrt{e}}{2\Delta_e} ab \cos \beta_3 \quad (4.59)$$

Similar se exprimă  $M_k$  :

$$M_k = -\frac{\sqrt{e}}{2\Delta_e} ac \cos(\gamma - \beta_2'') = -\frac{\sqrt{e}}{2\Delta_e} ac \cos \beta_2 \quad (4.60)$$

Dacă triangularizarea se face astfel ca :

$$\begin{aligned} \beta_1 &< \pi/2 \\ \beta_2 &< \pi/2 \\ \beta_3 &< \pi/2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

rezultă elemente extradiagonale strict negative, deci se poate scrie cu certitudine

$$|m_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |m_{ij}| \quad (4.62)$$

Acuasta are drept consecință caracterul de matrice pozitiv definită pentru matricea [M], deoarece măcar pentru o linie vom avea :

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |m_{ij}| \quad (4.63)$$

cea ce este necesar ca raza spectrală a matricii să fie inferioară unității .

În orice caz rezultă o convergență relativ slabă a proceselor iterative , raza spectrală fiind apropiată de unitate însă din fericire totdeauna inferioară unității (rel(4.128)).

Triangularizări care să satisfacă rel.(4.61) se pot ușor efectua .De altfel s-a stipulat în capitolul ce dă regulile de triangularizare valoarea optimă pentru unghiurile  $\beta$  în jurul valorii  $\pi/3$ .

Propozițiunea 3 : Elementele diagonale corespunzătoare nodurilor situate în aer sînt de aproximativ  $\mu_r$  ( $\mu_r$  este permeabilitatea relativă a fierului ) ori mai mari decît elementele diagonale corespunzătoare nodurilor situate în fier.

Demonstrație :

Pentru un nod înconjurat de elemente situate în aer reluctivitatea  $\nu$  a tuturor elementelor este :

$$\nu_{\text{aer}} = 1/\mu_0 \quad (4.64)$$

În timp ce pentru un nod înconjurat de elemente situate în fier:

$$\nu_{\text{Fe}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \quad (4.65)$$

Considerînd o triangularizare ce dă aproximativ aceeași dimensiune a elementelor din fier și aer, este evident că vom avea :

$$(M_{ii})_{\text{aer}} / (M_{nn})_{\text{Fe}} \cong \mu_r \quad (4.66)$$

Relația (4.66) ne obligă să constatăm că matricea  $[M]$  a coeficienților este prost condiționată ,  $\mu_r$  putînd avea valori în jurul :

$$\mu_r \cong 1000 \quad (4.67)$$

Se pot deci rezuma caracteristicile matricii coeficienților:

- este pozitiv definită deoarece provine dintr-o funcțională pozitiv definită, satisface relația (4.62) și au toate valorile proprii  $\leq 1$
- este simetrică ,
- elementele diagonale sînt pozitive și lejer superioare în modul, elementelor extradiagonale ce pe aceeași linie, în zona de  $\mu$  omogen,
- elementele extradiagonale sînt strict negative în condițiile (4.61),
- este prost condiționată din cauza variației brutale a proprietăților de material de la un element la altul.

Inseamnă că nu totdeauna convergența proceselor itorative

este asigurată, ceea ce se remarcă și în [B52].

Din punct de vedere practic se pare interesantă propunerea de a utiliza pentru o soluție aproximativă curbe  $B = f(H)$  care conduc la valori ale lui  $\mu_r$  în jurul lui 100, deoarece fenomenul fizic real nu este alterat considerabil luînd  $\mu_r = 100$  în loc de  $\mu_r \pm 1000$ , însă erorile generate de rezolvarea practică a sistemului (4.45) cît și viteza de convergență se ameliorează. În plus soluția aproximativă poate constitui punctul de plecare într-o serie de iterații pentru care  $\mu_r$  va fi cel real.

Țin să subliniez că nu se poate afirma cu certitudine care metodă este mai bună și nici nu se poate da soluția generală pentru ameliorarea convergenței. Însă totdeauna se pot găsi compromisuri care permit obținerea soluției problemei de câmp cu o precizie satisfăcătoare în condiții bine determinate.

Corolar 1. Pentru o triangularizare obținută prin diviziunea în triunghiuri a elementelor rectangulare ale unei rețele periodice cu pași egali pe direcția  $x$  și  $y$ , relațiile de calcul a necunoscutei în nodul central obținute prin metoda diferențelor finite sînt identice cu cele obținute prin metoda elementelor finite.

Demonstrație :

Fie rețeaua din fig. 4.13 situată într-un domeniu în care, pentru toate elementele, proprietățile de material și încărcarea electromagnetică sînt constante și egale. Demonstrația rămîne valabilă și pentru proprietăți de material și sarcină electromagnetică diferite de la un element la altul.

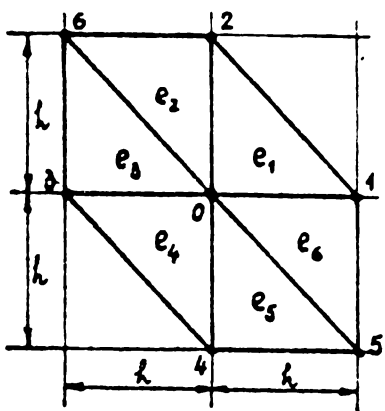


Fig. 4.13

Rețeaua rectangulară uniformă divizată în elemente triunghiulare.

Linia corespunzătoare nodului 0 din sistemul (4.45) va fi

$$(M) \cdot (A)_0 = (TL)_0 \quad (4.68)$$

adică :

$$M_{01}A_1 + M_{02}A_2 + M_{03}A_3 + M_{04}A_4 + M_{00}A_0 + M_{05}A_5 + M_{06}A_6 = TL_0$$

Deoarece :

$$\begin{aligned}
 & x_1 = x_0 + h = x_5 \\
 & x_3 = x_0 - h = x_6 \\
 & x_2 = x_4 = x_0 \\
 & y_0 = y_1 = y_3 \\
 & y_2 = y_0 + h = y_6 \\
 & y_4 = y_0 - h = y_5
 \end{aligned}
 \tag{4,69}$$

și deoarece ordinea " locală " i , j , k este cea dată de tabelul de mai jos :

Tabel 4.3

Elementul	ordinea " locală "			elementul liniei 0 a matricii M						
	i	j	k	1	2	3	4	5	6	0
$Q_1$	0	1	2	$M_{01}^{e_1}$	$M_{02}^{e_1}$					$M_{00}^{e_1}$
$Q_2$	0	2	6		$M_{02}^{e_2}$				$M_{06}^{e_2}$	$M_{00}^{e_2}$
$Q_3$	0	6	3			$M_{03}^{e_3}$			$M_{06}^{e_3}$	$M_{00}^{e_3}$
$Q_4$	0	3	4			$M_{03}^{e_4}$	$M_{04}^{e_4}$			$M_{00}^{e_4}$
$Q_5$	0	4	5				$M_{04}^{e_5}$	$M_{05}^{e_5}$		$M_{00}^{e_5}$
$Q_6$	0	5	1	$M_{01}^{e_6}$				$M_{05}^{e_6}$		$M_{00}^{e_6}$
				$M_{01} = M_{01}^{e_1} + M_{01}^{e_6}$	$M_{02} = M_{02}^{e_1} + M_{02}^{e_2}$	$M_{03} = M_{03}^{e_3} + M_{03}^{e_4}$	$M_{04} = M_{04}^{e_4} + M_{04}^{e_5}$	$M_{05} = M_{05}^{e_5} + M_{05}^{e_6}$	$M_{06} = M_{06}^{e_2} + M_{06}^{e_3}$	$M_{00} = \sum_{i=1}^6 M_{00}^{e_i}$

avem :

$$\begin{aligned}
 M_{01} &= \frac{1}{h^2} [(-h) \cdot h + 0 \cdot h] + \frac{1}{h^2} [h \cdot (-h) + h \cdot 0] = -2 \nu \\
 M_{02} &= \frac{1}{h^2} [0 \cdot (-h) + h \cdot (-h)] + \frac{1}{h^2} [0 \cdot h + h \cdot (-h)] = -2 \nu \\
 M_{03} &= \frac{1}{h^2} [(-h) \cdot h + (-h) \cdot 0] + \frac{1}{h^2} [0 \cdot h + h \cdot (-h)] = -2 \nu \\
 M_{04} &= \frac{1}{h^2} [0 \cdot h + h \cdot (-h)] + \frac{1}{h^2} [0 \cdot (-h) + (-h) \cdot h] = -2 \nu \\
 M_{05} &= \frac{1}{h^2} [h \cdot 0 + 0 \cdot h] + \frac{1}{h^2} [(-h) \cdot 0 + (-h) \cdot 0] = 0 \\
 M_{06} &= \frac{1}{h^2} [(-h) \cdot 0 + 0 \cdot (-h)] + \frac{1}{h^2} [h \cdot 0 + h \cdot 0] = 0 \\
 M_{00} &= \frac{1}{h^2} [h^2 + h^2 + 0 + h^2 + h^2 + 0 + h^2 + h^2 + 0 + h^2 + h^2 + 0] = 8 \nu \\
 TL_0 &= 6 \cdot Jh^2/12 = Jh^2/2
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

Asamblînd linia 0 a matricii [M] obținem :

$$-2\nu A_1 - 2\nu A_2 - 2\nu A_3 - 2\nu A_4 + 0 \cdot A_5 + 0 \cdot A_6 + 8\nu A_0 = Jh^2/2
 \tag{4.72}$$

De unde

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 = - \frac{Jh^2}{4\nu}
 \tag{4.72'}$$

ceea ce este analog cu relația dată de metoda diferențelor finite pentru nodul zero (cap.5 rel.5.29 )

#### 4.4. Rezolvarea sistemelor mari de ecuații algebrice liniare

Rezolvarea se face numai prin metode numerice deoarece inversarea unei matrici de talie mare (talie 100 de exemplu) , este imposibilă .Ori chiar discretizări grosiere ale unei configurații neomogene (o zonă cu creștături) conduc la sisteme ce depășesc 100 ecuații. Există două categorii de metode numerice pentru rezolvarea

sistemelor de tipul  $[A] \cdot \{X\} = \{b\}$ .

- metode directe prin care se calculează o soluție exactă, afectată doar de erorile de rotunjire și calcul,
- metode iterative care calculează prin tehnici de aproximare succesivă soluții ce converg spre soluția exactă. Cumularea erorilor de rotunjire și viteza de convergență condiționează limita erorii cu care se poate obține soluția definitivă.

N.B. Notăția  $A \cdot X = B$  este uzuală în literatura ce se ocupă de rezolvarea sistemelor liniare de soluții. Pentru cap. 4.4. se va utiliza această notație, subliniind că ea nu are nimic comun cu notațiile anterioare. Corespondența cu relația (4.45), este dată de:

$$[K] \leftrightarrow A ; \{A\} \leftrightarrow X ; \{TL\} \Rightarrow B .$$

Metodele directe aplicabile matricilor simetrice sînt :

- metoda de eliminare Gauss,
- metoda Jordan (valabilă și la matrici nesimetrice)
- metoda de ortogonalizare a matricii  $A$ ,
- metoda lui Choleski pentru matrici simetrice nesingulare.

Metodele directe sînt utilizabile pentru matrici simetrice pline pînă la limita de 100 de ecuații. Peste această limită erorile ce intervin prin cumulare sînt importante [B51] și nu mai există nici o certitudine asupra corectitudinii soluției. În plus, pentru stocarea elementelor matricii  $A$  necesarul de memorie devin jenant : 100 de ecuații înseamnă 10000 de elemente pentru  $A$  !

Metodele iterative pot da rezultate bune în cazul matricilor simetrice pozitiv definite pînă la ranguri ale matricii  $A$  de ordinul  $N = 2000 \div 3000$  ! Metodele iterative pot fi separate în două categorii, în funcție de caracterul matricii  $A$  :

- Metode aplicabile matricilor  $A$  simetrice sau nu :
  - metoda Southwell bazată pe relaxare,
  - metoda Gauss - Seidel,
  - metoda Gauss - Seidel extrapolată, etc.
- Metode aplicabile exclusiv matricilor  $A$  simetrice :
  - metoda pantei maxime,
  - metoda gradientului,
  - metoda Stiefel - Hestens, etc.

În continuare se va trata fiecare categorie de metode de rezolvare deoarece cunoașterea lor aprofundată poate pe de o parte influența scrierea programului, iar pe de altă parte poate influența precizia cu care se obține soluția. Metodele directe vor fi ilustrate prin expunerea metodei de eliminare Gauss, iar metodele bazate pe relaxarea și suprar relaxarea vor fi tratate în bloc, deoarece prezintă mari asemănări. Dintre metodele aplicabile exclusiv



matricilor simetrice se va trata numai metoda pantei maxime. Deși analiza numerică prezintă o mare varietate de metode de rezolvare programele practice puse la punct se abat rar de la utilizarea metodelor expuse. Amănunte pot fi găsite în [B46], [B51], [B52], [B53].

4.4.1 Metoda de eliminare Gauss pentru matrici A simetrice sau nu.

Mo sistemul :

$$A \cdot X = B \quad (4.73)$$

analog sistemului (4.45), în care însă matricea coeficienților A nu este neapărat simetrică și nici neapărat de tip bandă.

Principiul metodei : Prin tehnica de eliminare Gauss rangul matricii A este redus succesiv pînă la rangul 1, cînd ultima necunoscută a vectorului X poate fi calculată. Printr-un proces de substituție inversă se obțin toate necunoscutele vectorului X începînd de la penultima necunoscută, pînă la prima.

Matricea A se pune sub forma :

$$(4.74)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \end{array}$$

în care :

- $A_{11}, X_1, B_1$  = matrici 1 x 1
- $A_{12}$  - matrice linie 1 x (N-1)
- $A_{21}, X_2, B_2$  - matrice coloană (N-1) x 1
- $A_{22}$  - matrice patrată (N-1) x (N-1)

Procesul de eliminare permite reducerea rangului matricii A și a sistemului la un sistem de N-1 ecuații cu N-1 necunoscute

$$A^* X = B^* \quad (4.75)$$

unde :

$$A^* = A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12} \quad (4.76)$$

$$B^* = B_2 - A_{21} * A_{11}^{-1} * B_1 \quad (4.77)$$

Repetînd eliminarea pentru matricea  $A^*$ , ș.a.m.d. se ajunge la o matrice  $A^{**}$  de rangul 1x1, ultima necunoscută neeliminată fiind atunci :

$$x_N = A^{** -1} * B^* \quad (4.78)$$

Obținerea celorlalte necunoscute , începînd cu a ( N-1) - a necunoscută , pînă la prima, se face prin substituții inverse de tipul :

$$X_1 = A_n^{-1} \cdot B_1 - A_n^{-1} \cdot A_{12} \cdot X_2 \quad (4.79)$$

Operația fundamentală a procesului este triplul produs  $A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}$ . Din fericire inversarea matricii  $A_{11}$  nu pune probleme. Numărul de operații este proporțional cu  $(N-1)^2$  pentru o eliminare și o substituție inversă . Pentru rezolvarea completă a sistemului sînt necesare aproximativ  $1/6 N^3$  operații [B46], [B56]. Dacă se speculează faptul că matricea  $A$  din (4.74) este simetrică de tip bandă a cărei nemilățime este LB , avem următoarea descompunere :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & 0 \\ \hline A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ \hline 0 & A_{23}^T & A_{33} \\ \hline \end{array} \quad (4.80)$$

În care rangurile matricilor sînt respectiv :

- $A_{11}$  ( 1 \* 1 )
- $A_{12}$  ( 1 \* (LB- 1) )
- $A_{22}$  ((LB-1) \* (LB-1))
- $A_{23}$  ((LB-1) \* (N-LB))
- $A_{33}$  ((N-LB) \* (N-LB))

În procesul de eliminare a elementului  $A_{11}$  se modifică doar  $A_{22}$ , numărul de operații fiind proporțional cu  $(LB-1)^2$  pentru o eliminare și o substituție. Deci numărul total de operații se poate estima [B46] el este aproximativ :

unde ;  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N LB_n^2 \leq \frac{1}{2} N * LB^2 \quad (4.81)$

- $LB_n$  - lățimea benzii la linia a n - a ,
- $LB$  - lățimea maximă a benzii

Rolația (4.81) dă numărul aproximativ de operații pentru o simbandă avînd toate elementele diferite de zero. Dacă simbanda de lățime LB are numai LDZ elemente diferite de zero, în cazul celei mai dezavantajoase repartiții a acestor elemente, numărul de operații ce provoacă trunchere ( înmulțire , împărțire) este de numai :

$$\frac{1}{2} N [2LDZ + (LDZ - 2)(2LB - LDZ)] \quad (4.82)$$

Analiza amănunțită a erorilor prezumtive pentru metoda de eliminare Gauss se va face în partea tratând aspectele practice ale punerii la punct a unui program bazat pe metoda elementelor finite.

În tot raționamentul făcut s-a presupus ca  $A_{11} \neq 0$ . Pentru problemele la care s-a utilizat procedeul, respectiv în metoda elementelor finite, se generează totdeauna o matrice a cărei elemente diagonale sînt diferite de zero. Deci nu este necesară intervenția liniilor pentru a avea element diagonal diferit de zero. De altfel o intervenție de linii ar însemna schimbarea numerotării în discretizare, ceea ce este imposibil.

Prin urmare algoritmul metodei de eliminare Gauss este simplu, fără schimbarea liniilor, nu ca cel general prezentat în [B46], [B52], [B55].

#### 4.4.2 Metode iterative bazate pe relaxare și suprarelaxare în cazul sistemelor mari de ecuații liniare. $Ax = B$

Fie sistemul (4.73) avînd matricea  $A$  decupată ca mai jos :

$$\begin{bmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{bmatrix} \cdot X = B \quad (4.83)$$

unde :

- $D$  - matrice diagonală avînd obligatoriu  $d_{ii} = a_{ii} \neq 0$
- $F$  - matrice triunghiulară strict superioară.  
avînd  $(-F)_{ij} = a_{ij}$  pentru  $i < j$  și  
 $(-F)_{ij} = 0$  pentru  $i \geq j$
- $E$  - matrice triunghiulară strict inferioară,  
avînd  $(-E)_{ij} = 0$  pentru  $i \leq j$  și  
 $(-E)_{ij} = a_{ij}$  pentru  $i > j$

$$A = D - E - F \quad (4.84)$$

Fie de asemenea  $X^0$  un vector  $X$  inițial, oarecare.

Se definește vectorul  $r^0$  reziduu al sistemului, relativ la  $X^0$  astfel :

$$r^0 = AX^0 - B \quad (4.85)$$

În general vectorul  $r = AX - B$  este o funcție liniară de  $X$ .

Principiul metodelor bazate pe relaxare și suprarelaxare poate fi expus astfel :

Plecînd de la  $X^0$  oarecare se calculează  $r^0$ . Într-un procedeu bine stabilit se modifică vectorul  $X$  și se calculează reziduuul corespunzător. Repetînd operația se obțin două șiruri.

$$X^0, X^1, X^2, \dots, X^p, \dots \quad (4.86)$$

și

$$r^0, r^1, r^2 \dots r^p, \dots \quad (4.87)$$

Teorema: Dacă A este o matrice regulată (avînd determinantul  $\Delta \neq 0$ ), condiția necesară și suficientă ca șirul  $X^p$  să convergă spre soluția  $\Omega$  a sistemului  $AX = B$  ( $\Omega$  unic astfel ca  $A\Omega = B$ ) este ca șirul  $r^p$  al reziduurilor să convergă spre un vector nul de  $\mathbb{R}^N$ .

Demonstrația se poate găsi în [B51], [B52], [B53].

Dacă trecerea de la un vector  $X^p$  la altul  $X^{p+1}$  nu alterează decât o componentă a lui  $X^p$ , se spune că are loc o RELAXARE. Dacă se modifică mai multe, sau toate, are loc o ITERAȚIE.

Să presupunem că sîntem în cursul iterației  $p + 1$  care a avansat pînă la componenta  $i$  a vectorului  $X^p$ , adică avem notația :

$$X^{p,i} = \begin{pmatrix} x_1^{p+1} \\ x_2^{p+1} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{p+1} \\ x_i^p \\ x_{i+1}^p \\ \vdots \\ x_N^p \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

Se va căuta precizarea formei în care se face relaxarea componentei  $i$ , și apoi regulile generale de trecere de la o iterație  $p$  la alta,  $p + 1$ .

Reziduul zero pentru relaxarea  $p + 1$  a componentei  $i$ , înseamnă :

$$(AX^p - B)_i = 0 \quad (4.89)$$

sau în scriere detaliată :

$$a_{ii}x_i^{p+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{p+1} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^p - b_i = 0 \quad (4.90)$$

Noua valoare a necunoscutelor  $x_i$  se obține din (4.90).

$$x_i^{p+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{p+1} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^p \right] \quad (4.91)$$

Expresia (4.91) permite să se scrie vectorul  $X^{p+1}$  al iterației  $p + 1$  în funcție de vectorul  $X^p$  al iterației precedente, făcînd  $i = 1, \dots, N$ . Este de dorit să punem trecerea de la iterația  $p$  la iterația  $p + 1$  sub forma unei combinații liniare de  $X^{p+1}$  și  $X^p$  deoarece pe de o parte procesul trebuie automatizat (cu un calculator) iar pe de altă parte trebuie făcute studii ale convergenței procedurii spre soluția  $\Omega$  a sistemului. Dacă reușim să punem procesul iterativ sub forma liniară :

$$X^{p+1} = KX^p + T \quad (4.92)$$

și dacă K și T pot fi definiți cu ajutorul matricii A decupată ca mai sus (4.83) și a vectorului B, se poate studia convergența analizând valoarea razei spectrale a matricii K.

Relația (4.90) poate fi pusă sub forma :

$$a_{ii}x_i^{p+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{p+1} = b_i - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^p \quad (4.93)$$

Ea poate fi transformată în continuare ținând cont de decupajul matricii A dat în relația (4.83), astfel :

$$(DX^{p+1})_i - (EX^{p+1})_i = B_i + (FX^p)_i \quad (4.94)$$

Iar pentru  $i = 1, \dots, N$  :

$$DX^{p+1} - EX^{p+1} = B + FX^p \quad (4.95)$$

Ceea ce ne permite să obținem iterația p+1 în funcție de iterația p astfel :

$$X^{p+1} = (D-E)^{-1}FX^p + (D-E)^{-1}B \quad (4.96)$$

Relația (4.96) este echivalentă relației (4.92) dacă notăm ;

$$(D-E)^{-1}F = K \quad (4.97)$$

$$(D-E)^{-1}B = T \quad (4.98)$$

Acest proces iterativ de trecere de la vectorul  $X^p$  la  $X^{p+1}$  baza pe relaxarea simplă a componentelor (4.91) poartă numele de ITERAȚIE LINIARĂ. Iterațiile liniare sub această formă sînt cunoscute sub numele de procedeul Gauss-Seidel și Jacobi.

Dacă modificarea componentei i a vectorului X se face cu o cantitate diferită de partea dreaptă a relației (4.91) avem o SUPRARELAXARE. Si iterațiile bazate pe suprarelaxare pot fi puse sub forma de combinații liniare ale vectorului  $X^p$  și  $X^{p+1}$ .

Reziduul iterației p referitor la componenta i a vectorului X se notează  $r_i^p$ . El are forma :

$$-r_i^p = -(AX^p - B)_i = a_{ii}(x_i^{p+1} - x_i^p) = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{p+1} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^p \quad (4.99)$$

Se observă că nouă valoare a lui  $x_i^{p+1}$  se obține în funcție de reziduul  $r_i^p$  astfel :

$$x_i^{p+1} = x_i^p - \frac{r_i^p}{a_{ii}} \quad (4.100)$$

A suprarelaxa  $x_i^p$  înseamnă a obține  $x_i^{p+1}$  astfel :

$$x_i^{p+1} = x_i^p - \omega \frac{r_i^p}{a_{ii}} \quad (4.101)$$

unde  $\omega$  - factorul de suprarelaxare, în general  $> 1$

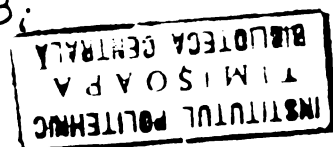
Pentru  $\omega = 1$  avem o relaxare simplă, ca în procedeul Gauss-Seidel.

Iterațiile bazate pe suprarelaxare pot fi puse sub forma

$$(4.92) \text{ astfel :} \quad a_{ii}x_i^{p+1} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{p+1} = a_{ii}x_i^p - \omega \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^p + \omega b_i \quad (4.102)$$

În baza decupajului (4.83) relația (4.102) se poate scrie

$$(DX^{p+1})_i - \omega (EX^{p+1})_i = (1-\omega)(DX^p)_i + \omega(FX^p)_i + \omega B_i \quad (4.103)$$



De unde :

$$X^{p+1} = (D - \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega F] X^p + \omega (D - \omega E)^{-1} B \quad (4.104)$$

Relația (4.104) este echivalentă relației (4.92) dacă notăm :

$$(D - \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega F] = K_\omega \quad (4.105)$$

$$\omega (D - \omega E)^{-1} B = T_\omega \quad (4.106)$$

Punerea iterațiilor bazate pe relaxarea simplă sau suprarelaxare sub formă liniară, facilitează automatizarea calculului, constituind nucleul algoritmilor iterative de căutare a soluției.

Problema care se pune este de a ști dacă există o convergență a procesului iterativ cînd vectorul inițial  $X^0$  este oarecare.  $X^0$  este pentru toate iterațiile practice, identic nul deoarece nu posedăm o soluție aproximativă a problemei, iar în cazul iterațiilor făcute cu un ordinator a face  $X^0$  identic nul este deosebit de comod.

Deci trebuie răspuns la întrebările : procesul iterativ descris de (4.92) este convergent ? În ce condiții este el convergent ? Cum se poate ameliora convergența astfel ca timpul de calcul să fie cît mai redus ?

#### 4.4.2.1 Convergența proceselor iterative bazate pe relaxare și suprarelaxare

Tooremă : Condiția necesară și suficientă ca procesul iterativ :

$$X^{p+1} = KX^p + T$$

să fie convergent spre soluția  $\Omega$  unică a sistemului, este ca raza spectrală a matricii  $K$  să fie strict inferioară unității :

$$\rho(K) < 1 \quad (4.107)$$

adică toate valorile proprii  $\lambda_i$  ale matricii  $K$  să fie în interiorul unui cerc de rază 1.

$$\rho(K) = \max |\lambda_i| < 1 \quad (4.108)$$

#### Demonstratie

Fie  $U$  matricea unitate de ordinul  $N$ , egal ordinului  $N$  al matricii  $A$ . Iterațiile succesive pot fi puse deci sub forma :

$$\begin{aligned} X^1 &= KX^0 + T \\ X^2 &= KX^1 + T \\ X^3 &= KX^2 + T \\ &\vdots \end{aligned}$$

De unde :

$$\begin{aligned} X^1 - X^0 &= U(X^1 - X^0) \\ X^2 - X^1 &= K(X^1 - X^0) \\ X^3 - X^2 &= K^2(X^1 - X^0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$X^p - X^{p-1} = K^{p-1} (X^1 - X^0)$$

$$X^{p+1} - X^p = K^p (X^1 - X^0)$$

$$\frac{X^{p+1} - X^0}{X^1 - X^0} = (U + K + K^2 + \dots + K^p + K^{p+1}) (X^1 - X^0)$$

Dacă vectorul inițial este identic nul, avem :

$$X^{p+1} = (U + K + K^2 + \dots + K^{p-1} + K^p) B \quad (4.109)$$

în care :

$K^1, K^2, \dots, K^{p-1}, K^p$  sînt puterile succesive ale matricii

$K$ . Pentru ca  $X^{p+1}$  să tindă spre  $\Omega$  cînd  $p \rightarrow \infty$  este imperativ necesar ca șirul :

$$U + K + K^2 + \dots + K^{p-1} + K^p \quad (4.110)$$

să fie convergent, adică :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K^p = 0 \quad (4.111)$$

Condiția (4.111) este satisfăcută dacă  $\zeta(K) < 1$

Sub această formă, condiția de convergență este foarte precisă, însă este inutilizabilă, deoarece căutarea maximului șirului de valori proprii  $|\lambda_i|$  este o problemă practică deosebit de delicată.

Justificare : Calculul valorilor proprii ale unei matrici  $K$  și localizarea lor în planul complex.

Valorile proprii  $\lambda_i$  ale matricii  $K$  sînt rădăcinile polinomului de gradul  $N$  rezultat prin dezvoltarea determinantului ;

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\lambda & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1,n-1} & k_{1,n} \\ -k_{21} & k_{22}-\lambda & k_{23} & \dots & k_{2,n-1} & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & k_{n,3} & \dots & k_{n,n-1} & k_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.112)$$

adică rădăcinile ecuației :

$$P(\lambda) = (-1)^N [\lambda^N + g_1 \lambda^{N-1} + g_2 \lambda^{N-2} + \dots + g_{N-1} \lambda + g_N] = 0 \quad (4.113)$$

Polinomul  $P(\lambda)$  poate avea rădăcini reale și complexe.

Teorema lui Gerschgorin : Valorile proprii ale matricii  $K$  se găsesc în domeniul  $D_1$  format prin reuniunea a  $N$  interfevențe de centru  $K_{ii}$  și rază :

$$g_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N |k_{ij}| \quad (4.114)$$

Îată deci că criteriul de convergență (4.107) este inutil în practică ;

- găsirea rădăcinilor polinomului  $P(\lambda)$  este foarte dificilă, de același grad de complexitate ca rezolvarea sistemului (4.83)

- se pot găsi criterii de convergență mai puțin eficace, dar utilizabile din punct de vedere practic.

Criteriul 1 de convergență : Metoda Gauss - Seidel este convergență dacă matricea  $A$  este o matrice de diagonală dominantă, adică dacă :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \quad (4.115)$$

Demonstratie :

Matricea K este conform relației ( 4.97) :  $K = (D - E)^{-1} F$

Pentru matricile avînd diagonala dominantă se poate arăta că:

$$\rho(K) < 1$$

Fie  $\lambda$  o valoare proprie a matricii K și  $X$  un vector propriu asociat. Avem deci conform definiției vectorului propriu și valorii proprii  $\lambda$

$$KX = \lambda X \quad (4.116)$$

$$\text{sau : } (D - E)^{-1} FX = \lambda X \quad (4.117)$$

se va scrie :

$$FX = \lambda (D - E) X \quad (4.118)$$

$$\text{sau : } \lambda DX - \lambda EX = FX \quad (4.119)$$

Componenta i a acestei egalități va fi :

$$\lambda a_{ii} x_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j = - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j \quad (4.120)$$

Se alege componenta maximă a vectorului propriu :

$$|x_i| = \max |x_j| \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.121)$$

Atunci punînd (4.120) sub formă:

$$\lambda a_{ii} = - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} \frac{x_j}{x_i} - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \quad (4.122)$$

se obține o inegalitate majorînd pe  $x_j$  pînă la valoarea maximă definită prin relația (4.121) :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=i+1}^N \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \quad (4.123)$$

deoarece  $\left| \frac{x_j}{x_i} \right| < 1$  avem :

$$|\lambda| < \sum_{j=i+1}^N \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad (4.124)$$

Notînd :

$$\alpha = \sum_{j=i+1}^N \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad (4.125)$$

$$\beta = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad (4.126)$$

avem :

$$\lambda \leq \frac{\alpha}{1 - \beta} \quad (4.127)$$



Conform ipotezei (4.115)  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}|$ , deci

$$\lambda \leq \frac{\alpha + \beta - \beta}{1 - \beta} < \frac{1 - \beta}{1 - \beta} = 1 \quad |\lambda| < 1 \quad (4.128)$$

Criteriul N<sup>o</sup>1 este însă foarte restrictiv, matricile de diagonală dominantă fiind un caz particular.

Criteriul 2 de convergență ? Metodele iterațive bazate pe supra-relaxare sînt convergente dacă :

- matricea A este pozitiv definită,
  - factorul de suprar relaxare  $\omega$  este
- $$0 < \omega < 2 \quad (4.129)$$

Demonstrația este dată de Teorema lui Ostrowski care ne asigură că o matrice A hermitică :

$$A = D - E - E^H \quad (4.130)$$

are  $\rho(K_\omega) < 1$  dacă și numai dacă A este pozitiv definită, și dacă  $0 < \omega < 2$

Evident pentru iterațiile bazate pe suprar relaxare matricea K este definită prin relația (4.105)

Matricile A reale, simetrice au într-adevăr :

$$E^H = (\hat{E})^T \quad (4.131)$$

deoarece conjugatul unui număr real este identic cu numărul real.

Pentru ca o matrice A să fie pozitiv definită este necesar și suficient ca produsul scalar definit astfel

$$(AX, X) > 0 \quad (4-132)$$

să fie pozitiv, indiferent de vectorul  $X \neq 0$

În cazul problemelor de câmp guvernate de o ecuație de tip Poisson matricea A rezultată fie din asamblarea ecuațiilor lui Euler, fie din asamblarea condițiilor de minim a energiei în raport cu un număr de parametri, este totdeauna pozitiv definită

[B46], [B56].

Criteriile de convergență expuse anterior au mare însemnătate practică deoarece a fi sigur de convergență înseamnă a elimina o sursă de erori atunci cînd e vorba de depanarea unui program.

#### 4.4.2.2. Metode specifice matricilor A pozitiv definite și simetrice

Principiul metodei : În loc să rezolvăm sistemul (4.83) în care A este pozitiv definită și simetrică ( $A = A^T$ ), se caută minimul funcției :

$$F(V) = -\frac{1}{2} V^T A V - V^T B \quad (4.133)$$

unde V este un vector arbitrar de același rang N ca matricea A, iar  $V^T$  este matricea linie, transpusă vectorului coloană V.

Se definește vectorul eroare față de soluția  $X$  a sistemului

$$\xi = X - V \quad (4.134)$$

Se calculează  $F(V) - F(X)$  pentru a vedea cum se situează în calculul funcției (4.133) vectorul  $V$  oarecare față de soluția  $X$  a sistemului .

$$\begin{aligned} F(V) - F(X) &= \frac{1}{2} [V^T A V - X^T A X] - [V^T B - X^T B] = \\ &= \frac{1}{2} [(X^T - \xi^T) A (X - \xi) - X^T A X] - [(X^T - \xi^T) B - X^T B] = \\ &= \frac{1}{2} [-X^T A \xi - \xi^T A X + \xi^T A \xi] + \xi^T B \end{aligned} \quad (4.135)$$

A fiind simetrică ,

$$X^T A \xi = \xi^T A X \quad (4.136)$$

Deci :

$$F(V) - F(X) = \frac{1}{2} \xi^T A \xi + \xi^T (B - AX) = \frac{1}{2} \xi^T A \xi \quad (4.137)$$

Deoarece  $A$  este pozitiv definită :

$$\xi^T A \xi \geq 0 \quad (4.138)$$

Deci avem mereu

$$F(V) - F(X) \geq 0 \quad (4.139)$$

Inseamnă că vectorul  $V$  trebuie astfel căutat încît să minimalizeze

$F(V)$ . Pornind de la o soluție aproximativă a sistemului (4.83)

$X^P$ , se caută o soluție mai bună ,  $X^{P+1}$ , după schema :

$$X^{P+1} = X^P + \mu V \quad (4.140)$$

unde  $\mu$  - un parametru oarecare

$\mu$  se alege din condiția ca  $F(X^{P+1})$  să fie minimă . Dacă definim reziduul iterației  $p$  ca în (4.99) avem pentru  $\mu$  expresia :

$$\mu = \frac{V^T r^P}{V^T A V} \quad (4.141)$$

relațiile (4.140) și (4.141) definesc o "relaxare generalizată".

Înainte de a particulariza vectorul  $V$  pentru metoda pantei maxime trebuie să remarcăm următoarele :

- funcția  $F(X^P) = \text{const}$  reprezintă un "elipsoid generalizat" în spațiul  $N$  dimensional,
- vectorul reziduu  $r^P = B - AX^P$  cu semn schimbat este dirijat după normala " elipsoidului generalizat ".

Parametrii directori ai normalei exterioare sînt :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^P} = \frac{\partial}{\partial x_i^P} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^P (a_{i1} x_1^P + \dots + a_{iN} x_N^P) - \sum_{i=1}^N x_i^P b_i \right] \quad (4.142)$$

$$= \frac{1}{2} [(a_{i1} + a_{1i}) x_1^P + (a_{i2} + a_{2i}) x_2^P + \dots + (a_{iN} + a_{iN}) x_N^P] - b_i \quad (4.143)$$

dar este simetrică ,  $a_{ij} = a_{ji}$  , deci avem

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^P} = (AX^P - B)_i = -r_i^P \quad (4.144)$$

- vectorul  $r^{P+1}$  este normal vectorului arbitrar  $V$ .

Este suficient să verificăm produsul lor scalar :

$$\begin{aligned} V^T r^{P+1} &= V^T (B - AX^{P+1}) = V^T (B - AX^P - \mu AV) = \\ &= V^T (r^P - \mu AV) = V^T r^P - \mu V^T AV = V^T r^P - V^T r^P = 0 \end{aligned} \quad (4.145)$$

Fig.4.14 prezintă schematic o secțiune plană a unui spațiu  $N$ - dimensional , secțiune ce trece prin punctul  $X^P$ .

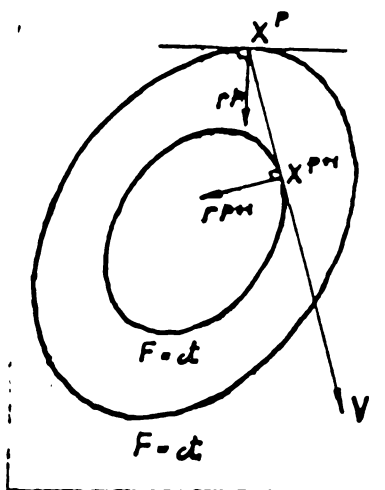


Fig.4.14 Secțiunea plană a spațiului cu  $N$  dimensiuni .

În figură apare vectorul arbitrar  $V$  , rezidul  $r^{P+1}$  și elipsa ce trece prin  $X^{P+1}$

Metoda celei mai mari punte alege

$$V = r^P \quad (4.146)$$

Atunci (4.140) devine

$$X^{P+1} = X^P + \mu r^P \quad (4.147)$$

în care :

$$\mu = \frac{(r^P)^T \cdot r^P}{(r^P)^T A r^P} \quad (4.148)$$

Calculul lui  $\mu$  la fiecare etapă este fastidios .De aceea el este calculat pentru primele iterații, iar pe urmă este recalculat numai din timp în timp. Soluția de a-l introduce în program ca o constantă pentru toate iterațiile , implică riscuri .Se dă [B52] limita superioară a lui  $\mu$

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (4.149)$$

unde  $\lambda_{\max}$  este cea mai mare valoare proprie a lui  $A$ .

Aceeași sursă [B52] ne dă o altă valoare practică a limitei superioare a lui  $\mu$  :

$$\mu = \frac{2}{\sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \cdot a_{ji}}} \quad (4.140)$$

#### 4.5. Prezentarea programelor realizate și a rezultatelor obținute.

Algoritmul general al unui program cu elemente finite

trebuie să corespundă succesiunii etapelor rezolvării problemei de câmp, etape expuse în § 4.2.1. De obicei discretizarea domeniului și descrierea topologiei discretizării se face separat, manual, comunicînd programului principal un set de date potrivit alor.

Generarea matricii coeficienților se face pe baza relațiilor (4.44) și a principiului expus în § 4.3.3. În funcție de cerințele metodei de rezolvare a sistemului (4.45) matricea  $[M]$  se generează integral, sau succesiv, pe porțiuni.

Aparent simplă, punerea la punct a unui program este etapa ce reclamă bugetul de timp cel mai mare. Absența informațiilor concrete în acest domeniu este justificată de caracterul secret sau cel puțin confidențial al programelor, de protecționismul unei piețe de desfacere a acestor pachete de programe. Cu rodul acumulării experienței personale au fost puse la punct trei serii de programe botezate SORSELF (SORAN SINGUR) în amintirea muncii solitare pe care am fost silit să o fac.

Programul SORSELF 1 rezolvă o problemă de câmp plan-paralelă într-un mediu liniar. A fost realizat la Constantine (Algeria) pentru un calculator MITRA - 15. Neutilizînd memorii auxiliare, discretizarea pe care o permite programul este relativ grosieră, cam  $200 \div 215$  noduri active pe rețea. Poate fi tratată doar problema simplificată a unei creștături singulare (cazul din fig. 2.6.b. cap.2) sau a unei creștături în fața unui dinte (cazul din fig. 2.6.c cap.2) pentru regimul de funcționare cu solenații egale.

Pachetul de programe SORSELF 2, reprezintă un mare pas înaintea în direcția rezolvării sistemelor mari și a afinării discretizării domeniului  $D$ , pentru același calculator MITRA - 15. S-a ajuns la un număr de  $900 \div 1000$  noduri active pe rețea, ceea ce reprezintă limita pînă la care se mai poate utiliza o metodă directă de rezolvare a sistemului (4.45) pentru matricii simetrice de tip bandă cu multe găuri. S-au utilizat memoriile auxiliare, atît pentru datele de intrare cît și pentru etapele intermediare. Din acest motiv generarea matricii  $[M]$  se face succesiv, pe porțiuni. Pachetul de programe SORSELF 2 poate rezolva o problemă de câmp plan-paralel într-un mediu neliniar. Discretizînd o zonă corespunzătoare la  $\frac{1}{2}$  este accesibilă rezolvarea problemei atît pentru regimul de funcționare cu solenații egale, cît și inegale. Este cel mai complet și suplul pachet de programe.

Pachetul de programe SORSELF 3, a fost pus la punct pentru

studiul variației permeanței de dispersie a creștăturii în funcție de poziția relativă rotor - stator . Pe baza topologiei discretizării dată pentru poziția inițială se face avansul automat al rotorului și se redefiniște succesiv topologia noii discretizări virtuale .Se poate rezolva o problemă de câmp plan -paralelă în mediu nelinier pentru regimul de funcționare cu solonații egale. Acest pachet de programe a fost pus la punct în țară , pentru un calculator FELIX C -256 . Nu s-au utilizat memorii auxiliare,dar a fost necesară segmentarea programelor.

SORSALF 1 și SORSALF 2 au fost scrise în limbaj FORTRAN ținând cont de particularitățile ordinatului MITRA-15,motiv pentru care consider utilă reproducerea caracteristicilor principale ale acestui ordinator ,măcar pentru a face o comparație cu FELIX -C -256,ordinator cu care sînt echipate în prezent majoritatea centrelor de calcul din țară.

#### Memorie centrală

Capacitate în funcțiune : 48 kocteți  
Lungimea cuvîntului-memorie : 16 bits + 1 bit de paritate + 1 bit de protecție.  
Ciclu de bază : 300 nanosecunde/cuvînt  
Debit : 2,5 milioane octeți/sec.

#### Periferice

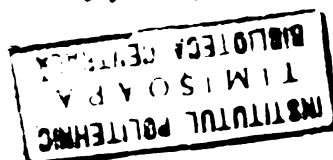
- 1 lector de cartele
- 1 imprimantă
- 1 Télétype de serviciu
- 2 unități de bandă
- 1 unitate de discuri conținînd un disc fix (5 Mo) și un disc amovibil( 5 Mo)

#### Software

- Assembler MITRAS 2
- LP 15
- FORTRAN
- BASIC
- COBOL
- MAG 15 : macro-generator
- BIB : bibliotecă
- FGMS : programe de serviciu

#### Sisteme

- MCCMIN dimensiune : 12 ko  
(asigură funcțiile de bază , fără LP 15, MAG 15,BIB)
- MCCMAX dimensiune : 16 ko



- BATCH dimensiune : 26 ko  
( asigură controlul automat al lanțurilor de JOB - uri)
- MTRDE  
(monitor timp real)

Problemele legate de alegerea metodei de rezolvare a sistemului de ecuații (4.45) furnizarea datelor de intrare, precum și verificarea topologiei discretizării sînt comune celor trei serii de programe ,motiv pentru care vor fi tratate în bloc.

#### 4.5.1. Furnizarea datelor de intrare și verificarea lor.

Se pornește de la un desen executat corect, la o scară convenabilă - Respectînd cu stricto rigore regulile de triangularizare expuse în § 4.3.1 și § 4.3 se încearcă mai multe variante de triangularizare pentru un număr de noduri prestabilit .Acest număr maxim de noduri este dependent de metoda de rezolvare a sistemului de ecuații și de memoria ordinatorului. De obicei după punerea la punct a programului, cînd nu mai sînt modificări de făcut în structura sa, spațiul disponibil pentru datele de intrare și matricea  $[M]$  se cunoaște suficient de exact.

Scara desenului depinde de modul de citire a coordonatelor . Un cititor experimentat face o eroare absolută la citire de aproximativ 0,2 mm. Pentru a diminua eroarea relativă de citire , dimensiunile elementelor celor mai mici trebuie să fie de o valoare corespunzătoare. Pentru o eroare de citire de 2% rezultă dimensiuni minime de aproximativ 10 mm. Intrefierul și istmurile creștăturilor constituie deci zona sensibilă pentru o mașină asincronă.

În funcție de dimensiunile lor geometrice se alege scara de lucru . Inconvenientul rezidă în valoarea mare a raportului " diametru exterior "/" întrefier " sau " adîncime de creștătură "/" întrefier " pentru modelele simplificate. Adîncimea medie a creștăturii fiind de  $15 \div 20$  mm , iar întrefierul  $\delta \cong 0,5$  mm rezultă dimensiuni ale creștăturilor de ordinul  $40 \times 50$  cm<sup>2</sup> ! Iar pentru o zonă corespunzătoare de 1,5 q creștături e ușor de imaginat ce probleme pune execuția desenului la scară !

Oporușunea de citire a coordonatelor de pe desen se poate elimina dacă calculatorul dispune de un terminal special format într-o masă graoată și etalonată. Se lipește desenul la scară, ce conține și rețeaua de triangularizare, pe suprafața sensibilă. Cu ajutorul unui "creion "legat la sistem se fixează dimensiunile cheie, de valoare cunoscută. Se verifică etalonarea. Apoi se fixează " creionul " în fiecare nod al rețelei , în ordinea numerotării,

coordonatele punctelor fiind introduse automat în memorie .Ulterior se poate face o verificare cu un trasor.Sistemul,existent la Centrul de Calcul al Universității din Grenoble, are dezavantajul următor : dimensiunile geometrice ale "mesei de lucru " în comparație cu dimensiunile vârfului "creionului " nu permit lucrări deosebit de pretențioase.Există însă dispozitive mult mai precise. Astfel institutele moderne de cartografie dispun de instrumente care de pe un desen la scară pot transmite coordonatele diverselor puncte cu o eroare absolută de 0,01. mm ! [B58]

Așa cum s-a specificat în cap. 4.3.4. pentru descrierea topologiei discretizării se perforază pe cartole :

- lista XY- ansamblul ordonat al coordonatelor nodurilor,
- lista NNLVE - lista ordonată a elementelor vecine fiecărui nod,
- lista NNEL - lista ordonată a nodurilor ce definesc fiecare element,
- densitățile de curent în elementele creștăturilor,
- permeabilitățile magnetice ale elementelor situate în Fe dacă problema ce se rezolvă este liniară.

Data fiind importanța corectitudinii datelor de intrare pentru generarea sistemului (4.45) , se impune verificarea lor.

Munca de verificare poate fi făcută manual, prin confruntare cu desenul , însă nu dă nici o siguranță deoarece este vorba de un număr de cartele de ordinul  $500 \div 1000$  cartele,pe care sînt înregistrate în medie  $7000 \div 12000$  informații. Din această cauză am fost nevoit să pun la punct algoritme de verificare a topologiei discretizării.

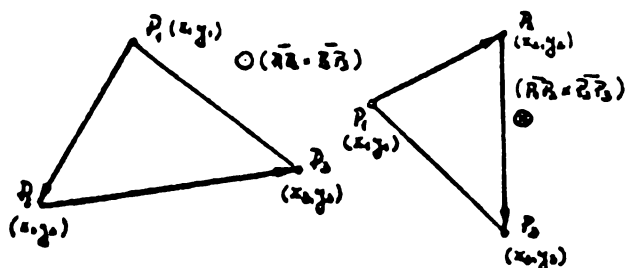
Verificarea listei XY Dacă ordinatorul posedă un periferic-trasor ( BENSON pentru calculatorul MITRA -15) se execută desenul pe baza listei XY memorată de ordinator după citirea cartelelor. Comparația desenului cu originalul oferă certitudinea corectitudinii listei XY .

În absența unui trasor, lista XY se verifică manual, prin citirea listei XY dată de calculator la imprimantă. Deși este fastidioasă, metoda este unica posibilă în absența unui periferic-trasor.

Verificarea listei NNEL și XY Adoptînd "ordinea locală"  $i, j, k$  se poate verifica lista NNEL prin produsul vectorial efectuat ca în fig. 4.15

Fig.4.15

Referitor la verificarea  
"ordinii locale" i,j,k



Fie triunghiul  $P_1 P_2 P_3$  definit de elementele liniei k a

tabloului NNEL

$P_1(x_1, y_1)$  este punctul avînd numărul dat de NNEL (k,1)

$P_2(x_2, y_2)$  " " " " " NNEL (k,2)

$P_3(x_3, y_3)$  " " " " " NNEL (k,3)

Se consideră produsul vectorial al vectorilor definiți de punctele

$P_1, P_2$  și  $P_2, P_3$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j \quad (4.151)$$

$$\overrightarrow{P_2 P_3} = (x_3 - x_2) i + (y_3 - y_2) j$$

Pentru sensul trigonometric ales drept sens pozitiv, produsul vectorial trebuie să fie pozitiv, deci trebuie să avem satisfăcută

$$\text{relația } (x_2 - x_1)(x_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) > 0 \quad (4.152)$$

Valoarea produsului vectorial ( $\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_2 P_3}$ ) este totdeauna  $\neq 0$

deoarece punctele alese pentru definirea triunghiurilor nu sînt

colineare. Dacă se obține totuși o valoare egală cu zero, înseamnă că o eroare grosolană s-a strecurat în triangularizare. Cum verificarea coordonatelor se presupune efectuată, locul erorii grosolane este în tabloul NNEL.

Dacă rezultă o valoare a produsului vectorial negativă, înseamnă că ordinea din linia k a tabloului NNEL nu e bună și se intervertesc două elemente ale tabloului de pe linia k. Un mesaj de avertisment însoțește modificarea.

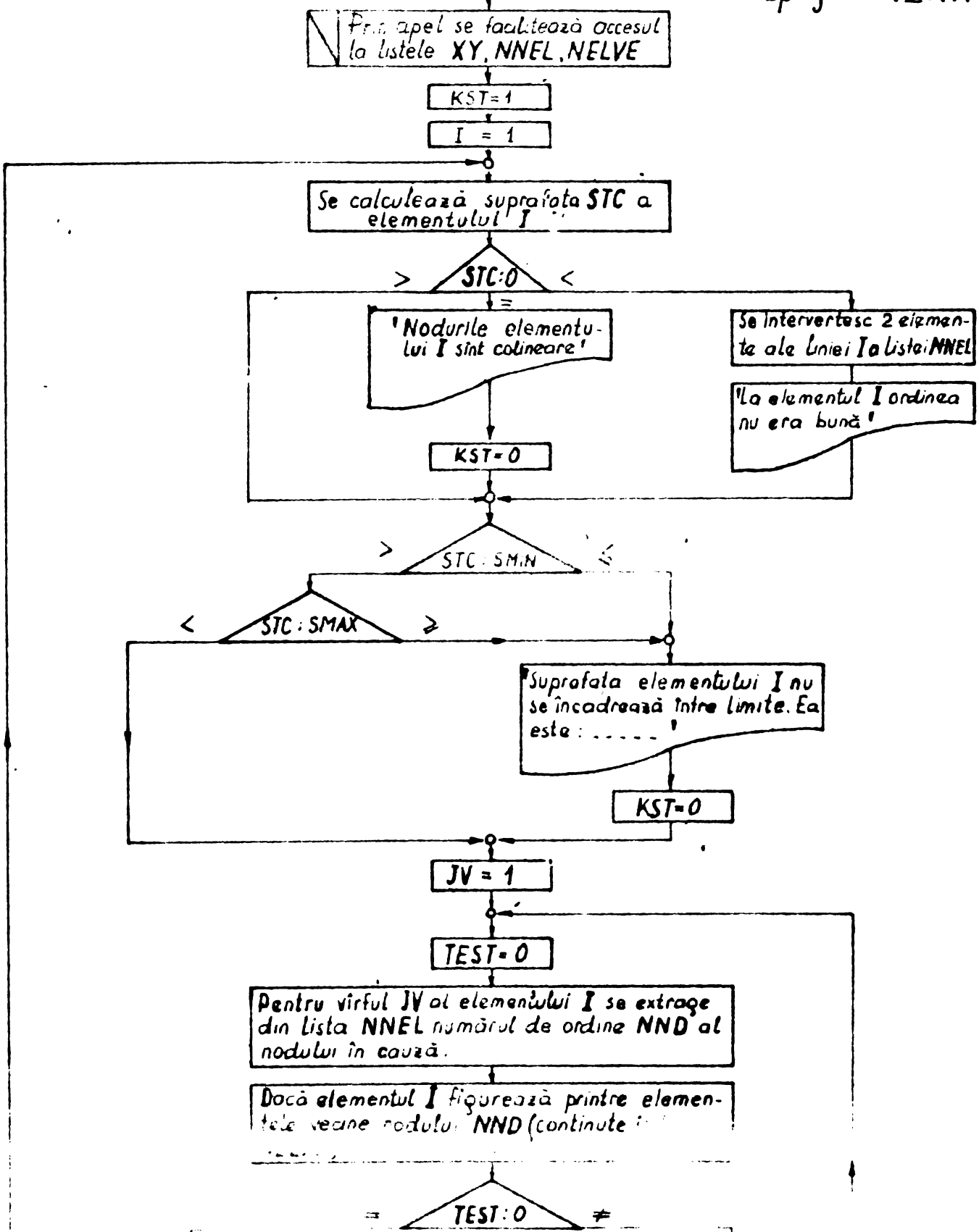
Modulul produsului vectorial poate fi utilizat pentru testarea erorilor grosolane din lista XY dacă se introduc valorile extreme ale suprafeței triunghiurilor discretizării în programul de verificare.

Verificarea listei NNELVE și NNEL. Verificarea ordinii în lista NNEL nu este suficientă. Privind fig.4.6. și presupunînd în lista NNEL pentru elementul  $e_5$  o eroare tradusă prin valorile NNEL(5,1) = 13, NNEL(5,2) = 4, NNEL(5,3) = 9 semnul produsului vectorial rezultă corect, ca pentru NNEL(5,1) = 13, NNEL(5,2) = 8, NNEL(5,3) = 9, iar suprafața triunghiului eronat 13, 4, 9 nu este sesizată. De aceea trebuie făcute verificări simultane în listele NNELVE și NNEL. Se fac două verificări după algoritmele de mai jos (fig 4.16).



APEL SUBPROGRAM VERNUM

Fig. 4.16. Algoritm: subprogram VERNUM.



'ELEMENTUL I NU SE GASESTE DEFINIT DE NODUL NND'

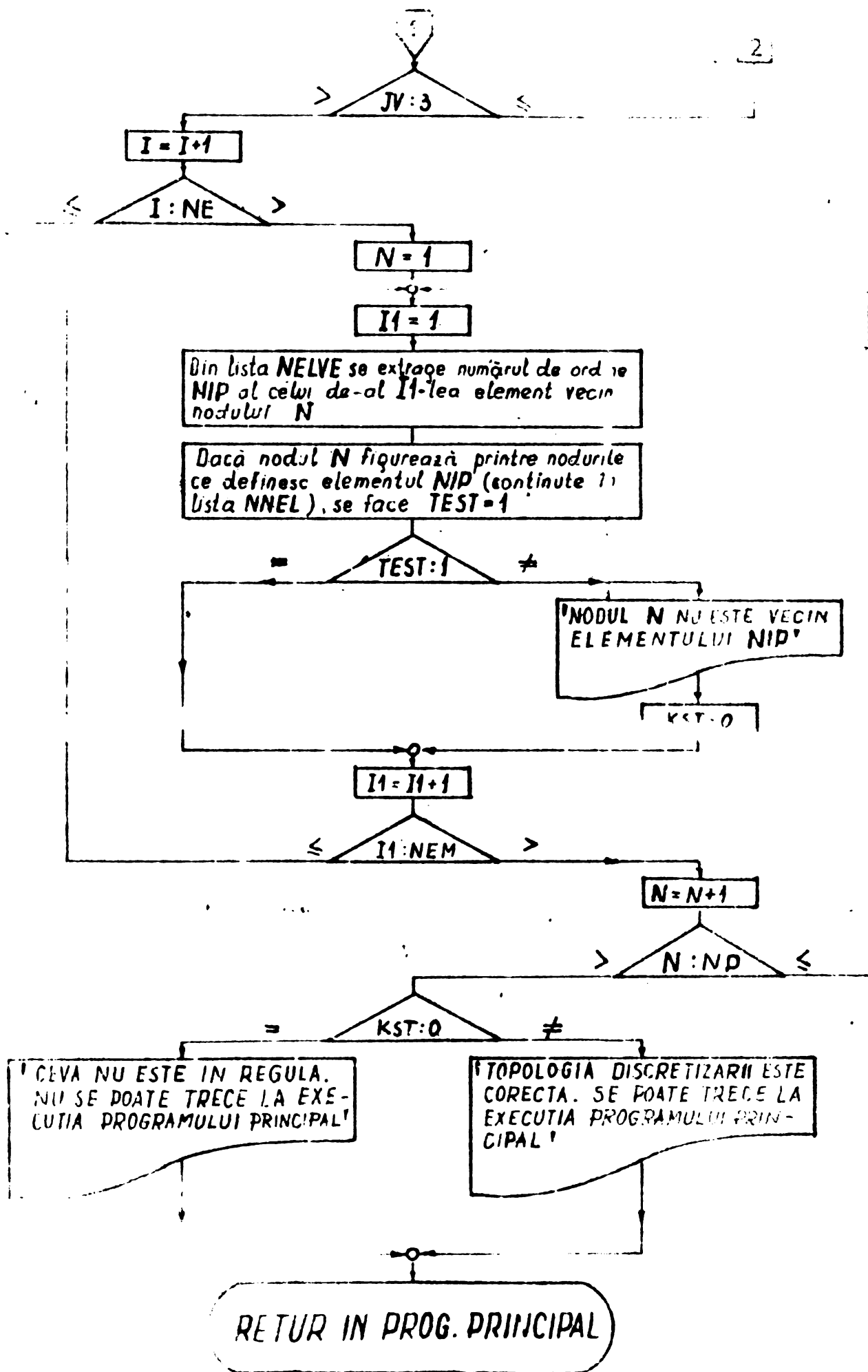


Fig 4.16. (continuare)

jos( fig.4.16).

Programul de verificare a fost numit MICRO RD pentru SORSELF 1 și SORSELF 2, iar pentru SORSELF 3, VERNUM. Programul VERNUM trebuie să includă ambele verificări (lista NNEL și NELVE) deoarece există erori ce nu se pot depista verificând doar o singură listă. Fig.4.17 demonstrează acest lucru. În dreptul liniilor eronate din listele NNEL și NELVE a fost pus câte un asterisc. Făcînd proba pentru liniile marcate se verifică cele afirmate.

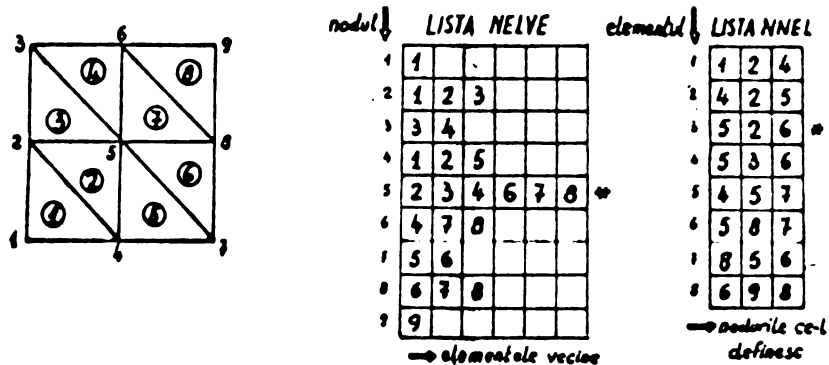


Fig.4.17  
Pentru verificarea algoritmului din fig.4.16

Algoritmul prezentat în fig.4.16 este original. În literatura consultată nu am întâlnit nici principiul, nici vreun raționament înrudit. Principiul lui se poate rezuma astfel : orice nod, înconjurat de NEM elemente trebuie să figureze printre nodurile ce definesc cele NEM elemente, sau orice nod ce definește un element trebuie să aibă în lista elementelor vecine, elementul pe care-l definește [B66].

4.5.2. Alegerea metodei de rezolvare a sistemului  $[M] \{A\} = \{TL\}$

Ținînd cont de considerațiile făcute în cap.4.4. și în special în § 4.3.6, este de preferat o metodă directă de rezolvare a sistemului (4.45) Matricea  $[M]$  nu este de diagonală dominantă. Relația (4.50) o dovedește. Situațiile în care unghiurile  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  din fig.4.12 nu satisfac relația (4.61) sînt relativ inevitabile dacă discretizarea și numerotarea se fac luptînd pentru o lățime de bandă minimă a matricii  $[M]$ . Ca urmare, convergența procesului iterativ este compromisă sau mult înrăutățită. Pe de altă parte neputînd calcula corect valoarea optimă a factorului de suprarolaxare  $\omega_{opt}$  sîntem amenințați chiar pentru matricile cu diagonală dominantă să avem o convergență slabă.  $\omega = 1$ , adică procedeul, iterativ Gauss - Seidel (sau algoritmul Richardson pentru diferențe finite) are o convergență slabă, recunoscută ca atare în mod unanim, [B51], [B52], [B53], iar valori  $\omega \rightarrow 2$  conduc la oscilații ale vectorului reziduu, definit ca în rel.(4.85). Deci atenția a fost îndreptată spre metodele directe. Există o mare varietate

de metode directe ,aşa cum s-a specificat în cap.4.4. S-a ales metoda de eliminare Gauss din următorul motiv ? În procesul de eliminare sînt trataţi doar coeficienţii conţinuţi într-un triunghi dreptunghic de latură LB( fig.4.18)

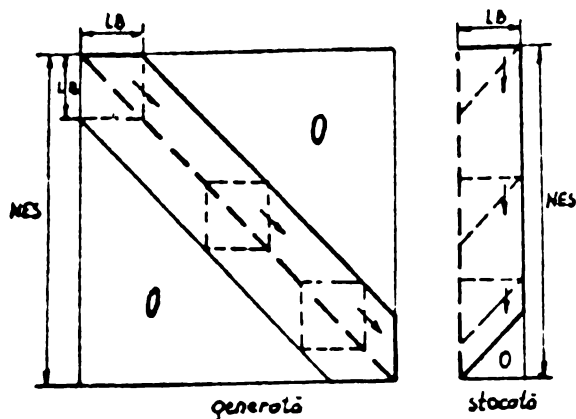


Fig.4.18

Referitor la modul de avansare a eliminării Gauss într-o matrice bandă.

Acest triunghi coboară în timpul eliminării și urcă în timpul substituției inverse. Toate operațiile se pot efectua în aceeași zonă de memorie( un tablou avînd dimensiunea LB x LB) Cînd o necunoscută este eliminată , toți coeficienții ce se găsesc în triunghi sînt modificați. Modificîndu-i se poate face o deplasare în sus cu o linie , astfel ca ultima linie a zonei de lucru să rămîna liberă, capabilă să primească următoarea linie generată. Procedul este deosebit de avantajos cînd se lucrează cu membrii auxiliare , cum s-a făcut în SORSELF 2.

Procedul de eliminare este redat schematic în fig.4.19

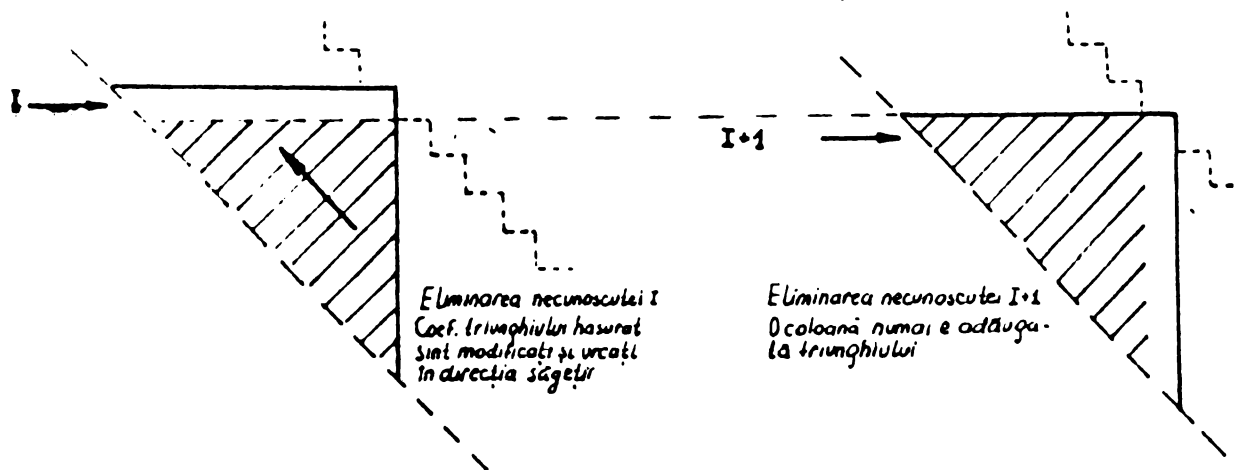


Fig.4.19 Zona de lucru activă în procesul de eliminare.

Este interesant de notat că în legătură cu procedul de eliminare Gauss a fost pusă la punct o metodă frontală [B57] utilizată în sistemele ce efectuează triangularizarea automată a domeniului. Originea metodei frontale se găsește în analiza procesului de eliminare Gauss, deschis de relațiile(4.76) și(4.77) .

Dacă necunoscuta I este eliminată utilizînd ecuația  $e_I$  coeficienții sistemului se modifică astfel :

$$M_{ij}^* = M_{ij} - \frac{M_{ix} \cdot M_{xj}}{M_{xx}} \quad (4.153)$$

$$TL_i^* = TL_i - \frac{M_{iI} \cdot TL_i}{M_{II}} \quad (4.154)$$

Elementele  $M_{ij}$  ale matricii sînt suma contribuției mai multor elemente. Expresiile care se scad pot fi scăzute în orice ordine cu condiția ca ele să fie evaluate corect, adică  $M_{iI}$ ,  $M_{Ij}$ ,  $M_{II}$  să fie deja calculați. Expresiile  $M_{iI} \cdot M_{Ij} / M_{II}$  nu vor fi modificate, de îndată ce ecuația  $e_I$  (linia I) e complet generată, adică imediat ce a fost asamblată contribuția ultimului element în care intervine nodul I. Deci necunoscuta I poate fi eliminată imediat ce dispăre în procesul de baleiaj al elementelor. Necunoscutele ce intervin prin coeficienții lor în calculul expresiilor (4.153) și (4.154) corespund "nodurilor" active, necunoscutele ce au fost eliminate corespund nodurilor "depășite". Necunoscutele active constituie un "front" ce, pe măsura progresării generării de elemente în procesul de triangularizare automată, avansează activînd necunoscute noi și depășind cele eliminate. Fig. 4.20 prezintă triangularizarea automată și frontul necunoscutele active pentru un domeniu în care sistemul de ecuații generat este rezolvat prin metoda de eliminare Gauss cu tehnica eliminării frontale.

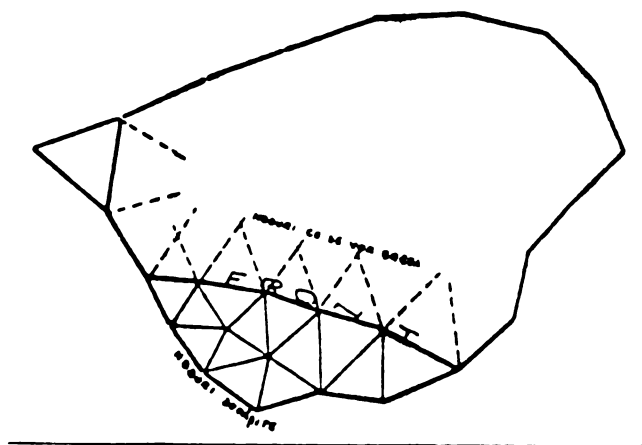


Fig. 4.20  
Referitor la metoda  
frontală de rezolvare a  
sistemului (4.45)

Amănunte asupra triangularizării automate și a metodei frontale se găsesc în [B49], [B50], [B57].

Metoda frontală este totdeauna superioară metodei matricii bandă din punct de vedere al vitezei de rezolvare a sistemului și a spațiului necesar în memoria centrală. Însă ea nu poate fi utilizată decât în legătură cu un sistem ce face triangularizarea automată.

Fixîndu-ne asupra metodei de eliminare Gauss ca metodă de rezolvare a sistemului (4.45), rămîne de văzut care este numărul maxim de ecuații ce pot fi tratate fără a introduce erori de calcul însemnate. Numărul de operații necesare pentru rezolvarea

sistemului este hotărâtor pentru mărimea erorii de trunchiere. Pentru o matrice pătrată plină, de talie NES numărul de operațiuni este  $\frac{1}{6} NES^3$  când NES este suficient de mare, [B52], [B53]. În [B51] se arată că lucrând în precizie simplă (4 octeți/cuvânt) pentru o matrice pătrată plină, NES = 100 apare ca limită pentru garantarea corectitudinii soluției. Deci numărul limită de operațiuni este :

$$\frac{1}{6} NES^3 = \frac{1}{6} 100^3 = 166.666 \text{ operațiuni}$$

Dacă matricea bandă stocată (fig.4.18) are semilățimea LB, iar semibandă este plină, numărul de operațiuni necesare pentru rezolvarea sistemului (4.45) prin metoda de eliminare Gauss este conform [B51], [B52], [B53]:

$$\frac{1}{2} NES \times LB^2$$

Pentru LB = NES/10, limita este împinsă deci pînă la 320 ecuații.

Dar așa cum s-a văzut în cap.4.33 în interiorul semibenzii LB sînt foarte multe găuri. Pentru  $n_{ev} = 10$  elemente vecine, vor fi maximum 6 elemente nenule în semibandă LB. Se știe că  $n_{ev} = 10$  reprezintă limita maximă admisibilă pentru numărul de elemente vecine unui nod. Evident, interesează poziția acestor elemente în semibandă. Respectînd regulile de triangularizare date în § 4.3,4. avem totdeauna un element nenul în vecinătatea diagonalei principale. Fig. 4.6 și tabelul 4.1. demonstrează afirmația. Însumat că maximum 4 elemente vor fi situate în cele LB-2 locuri, într-o ordine oarecare. Cea mai defavorabilă așezare a elementelor nenule este cea corespunzătoare ultimelor locuri din semibandă (cea mai mare distanță față de diagonala principală).

Analizînd modul de avansare al eliminării din fig.4.18 și apoi cel al substituției inverse, pentru LDZ elemente diferite de zero din semibandă LB, la aranjarea cea mai defavorabilă corespunde un număr de operațiuni necesare pentru rezolvarea sistemului :

$$N_{oper} = NES [2LDZ + (LDZ-2)(2LB-LDZ)] \quad (4.155)$$

Această relație dă un număr acoperitor de operațiuni deoarece aranjarea cea mai defavorabilă nu apare, iar LB este o valoare maximă ce ea însăși nu apare decât la anumite linii. Deci se poate lucra fără nici un risc cu această relație. Ea este absolut originală. Pentru cazul defavorabil LB = NES/20 și LDZ = 6 se ajunge la un număr de ecuații permis:

$$NES = 660 \text{ ecuații.}$$

Rezultă din această analiză bune posibilități de utilizare

a metodei de eliminare Gauss pentru sisteme mari cu matricea coeficienților de tip bandă cu multe găuri, motiv pentru care metoda a fost utilizată în exclusivitate pentru cele trei serii de programe SORSELF.

#### 4.5.3 SORSELF 1

##### 4.5.3.1. Prezentarea structurii programului

Programul a fost structurat pe un număr de subrutine avînd un mare grad de generalitate, pentru a fi reutilizate cu un efort minim. Organigrama din fig.4.21 în sine este valabilă pentru orice problemă liniară. Finețea discretizării este funcție de memoria calculatorului pe care se rulează programul.

Fiind primul program din seria SORSELF nu s-a făcut nici un artificiu pentru economisirea memoriei. El trebuia să dea certitudinea corectitudinii metodei și să confirme superioritatea elementelor finite față de diferențele finite în tratarea neomogenității domeniului  $D$ .

Programul a răspuns întrebărilor care l-au generat în mod pozitiv. Experiența obținută a fost utilizată ulterior. Utilizînd programul pe un calculator MIRA -15 pentru studiul configurațiilor din fig.4.22 ; 4.23 ; 4.24 a fost necesară execuția lui în două etape :

- verificarea topologiei discretizării prin subrutina VERNUM ( MISORD)

- generarea matricii  $[M]$  și a vectorului  $\{TL\}$  și rezolvarea sistemului .

Chiar în aceste condiții, pentru  $NES = 216$  programul obișnuit rodus ( generarea matricii și rezolvarea sistemului) a rezultat de o astfel de lungime încît nu a putut fi executat decît sub controlul sistemului MCCMM.

Dificultățile legate de memorie au obligat la căutarea unor soluții corespunzătoare pentru a rezolva pe un calculator mic probleme corespunzătoare unor discretizări mai fine.

Seria de programe SORSELF 2 a concretizat răspunsul la problemele legate de aceste dificultăți .

Configurația din fig.4.22 corespunde problemei din fig.4.6, b. În exemplul din fig.4.23 s-a încercat pentru prima dată o problemă cu frontiere mixte. Configurația din fig.4.24 corespunde problemei din fig.4.6 c.

##### 4.5.3.2. Discretizarea domeniului

Discretizările făcute pentru cele trei cazuri la care... a

fost testat SORENLP 1 au caracteristicile date în tabelul 4.4

Semnificația notațiilor din tabel este următoarea :

- NP - număr total de puncte , inclusiv frontierele pe care  $A = 0$  ,
- NFR - numărul de ordine al nodului de la care începe frontiera pe care  $A = 0$  ,
- NE - numărul total al elementelor triunghiulare ,
- NEM - numărul maxim de elemente situate în jurul unui nod ,
- NES - numărul de generații al sistemului ,
- LB - lățimea maximă a semibenzi în care se găsesc elementele nănule ale matricii coeficienților .
- DNELVO - dimensiunea tabloului care conține lista numerelor de ordine a tuturor elementelor care înconjoară fiecare nod ,
- DNNEL - dimensiunea tabloului care conține numerele de ordine ale vîrfurilor tringhiurilor ce definesc elementele discretizării ,
- DEQMB - dimensiunea tabloului care conține semibanda dreaptă a matricii bandă echivalentă matricii coeficienților .

Tabel 4.4.

Configurație.	NP	NFR	NE	NEM	NES	LB	DNELVO ko	DNNEL ko	DEQMB ko
Fig. 4.22	208	155	360	7	154	14	2,156	2,160	8,624
Fig. 4.23	122	85	180	7	84	10	1,190	1,080	3,360
Fig. 4.24	216	185	365	7	182	10	2,548	2,190	7,280

Numerotarea nodurilor s-a făcut astfel ca lățimea LB a semibenzi să fie minimă.

Numerotarea elementelor a fost și ea ordonată ,deși în principiu ea poate fi oarecare.Au fost numerotate toate elementele situate în fier, apoi cele în care densitatea de curent este diferită de zero și în final elementele situate în aer. Această ordonare permite economisirea spațiului necesar pentru tabloul ce stochează proprietățile de material și sarcina electromagnetică, deoarece numărul de ordine al ultimului element situat în fier NFR delimitează foarte precis o zonă în care  $\mu = \mu_{Fe}$  și  $J=0$ . Începînd cu elementul ce are numărul de ordine NFR +1 pînă la ultimul element situat în zona străbătută de curent;  $\mu = \mu_0$  și  $J \neq 0$  , în rest avînd  $\mu = \mu_0$  și  $J = 0$  .Economia este evidentă :  
 $NE \approx 2M + 4$  octeți. Adică pentru figura 4.22 economia este de  $0,360 \times 8 = 2,880$  ko.



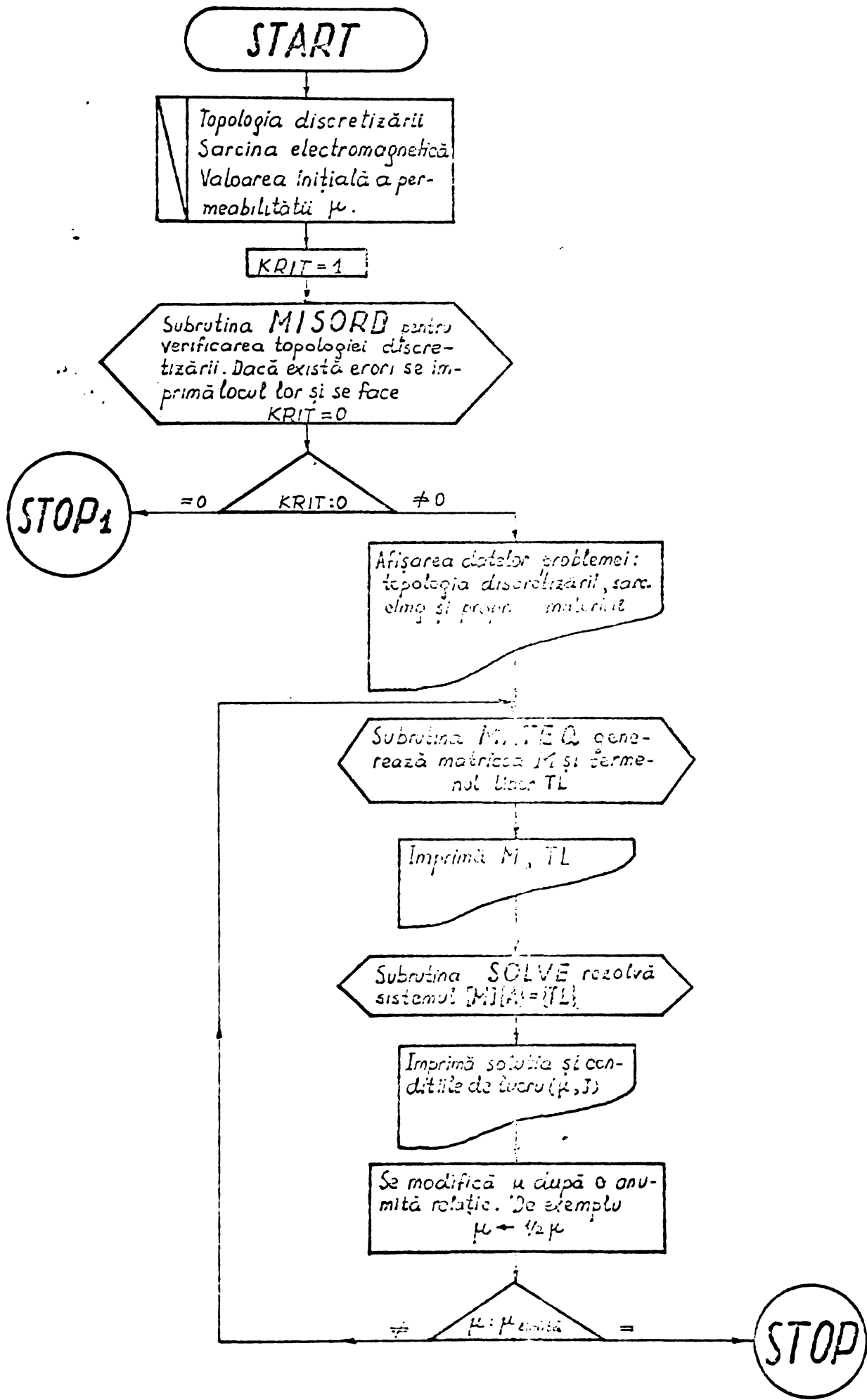
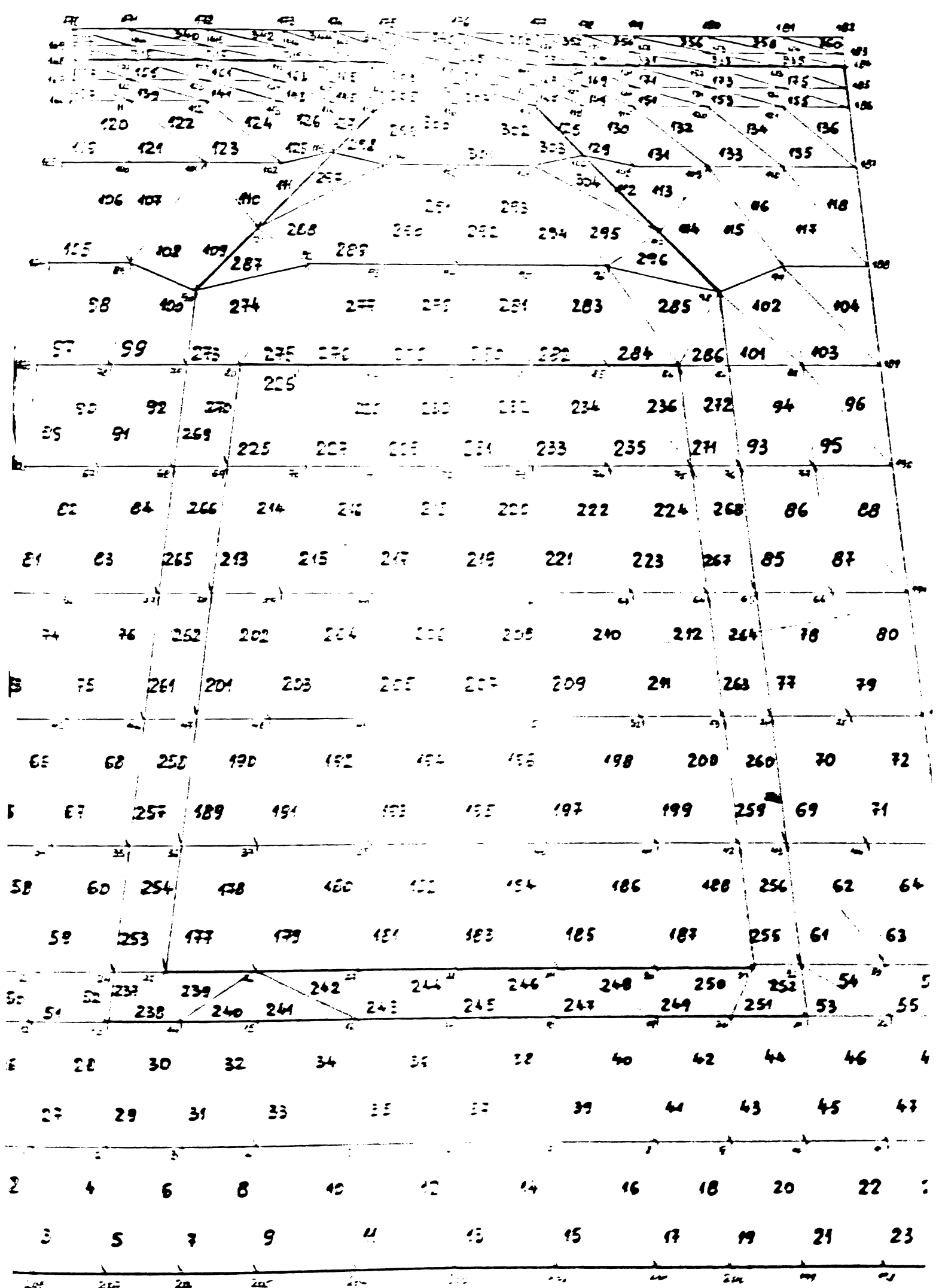


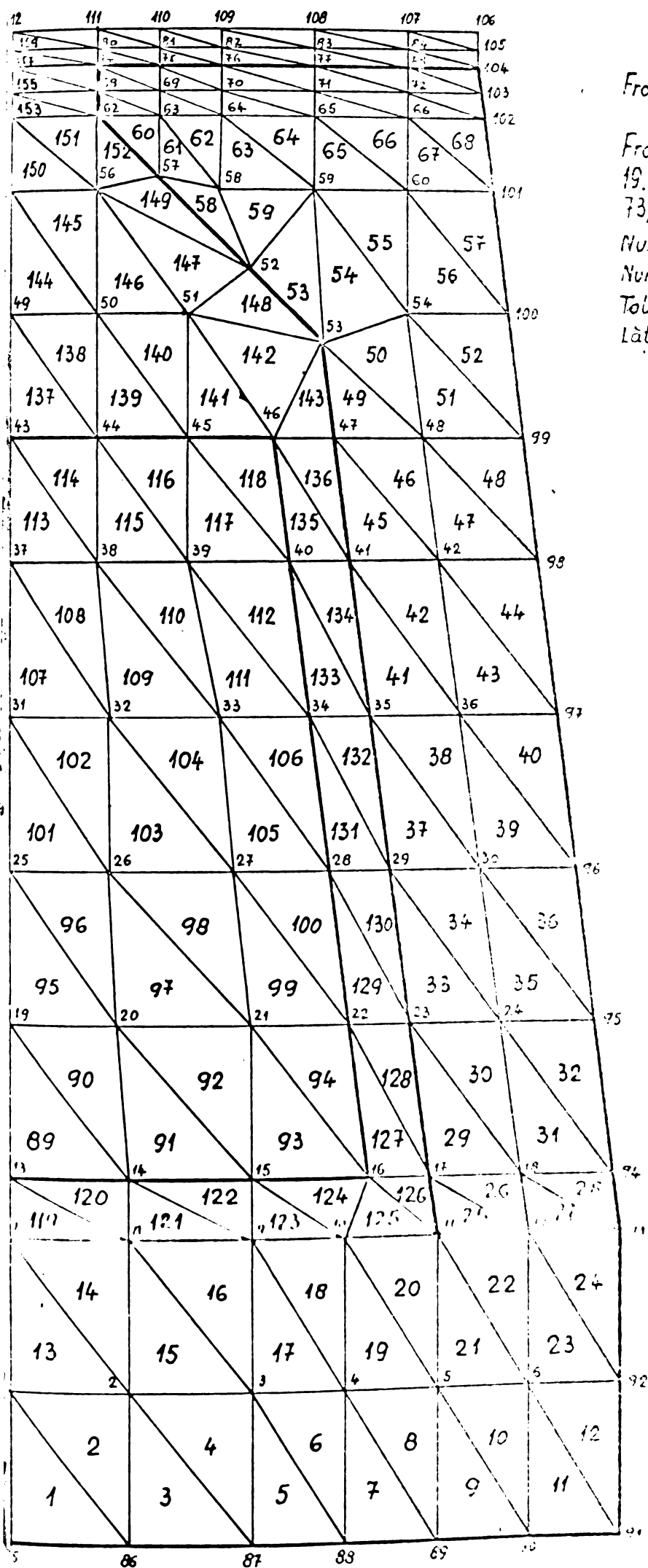
Fig 4.21. Algoritm program SORSELF1.

INSTITUTUL POLITEHNIC  
TIMISOARA  
BIBLIOTECA CENTRALA



Număr total de puncte	$NP = 121$	Total noduri bordă rezultate	$NES = 54$
Număr total de elemente	$NE = 100$	Număr noduri bordă scurte	$LB = 14$
Frontieră cu $f=0$	$155 = 205$		

Fig. 22 Discretizarea structurii pătrate



Frontiere  $A=0$  : 85 + 112

Frontiere  $\partial A/\partial n=0$  : 1,7,13  
19,25,31,37,43,49,55,61,67  
73,79.

Număr total de puncte :  $NP=112$   
Număr total de elemente :  $NE=180$   
Totul matricii bandă rezultate :  $NES=84$   
Lățimea semibenzi stocate :  $LB=10$

Fig. 4.23 Discretizarea creștăturii  
singulare ținând cont de linia  
de simetrie

Numar total de puncte NP = 215  
Numar total de elemente NE = 365  
Talia matricei banda rezultata NES = 102  
Lăţimea submatricei stânga LB = 10  
Frontiera A-D 103 - 215  
Frontiera SA/DA = 1, 14, 21, 28  
35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98  
105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168, 175

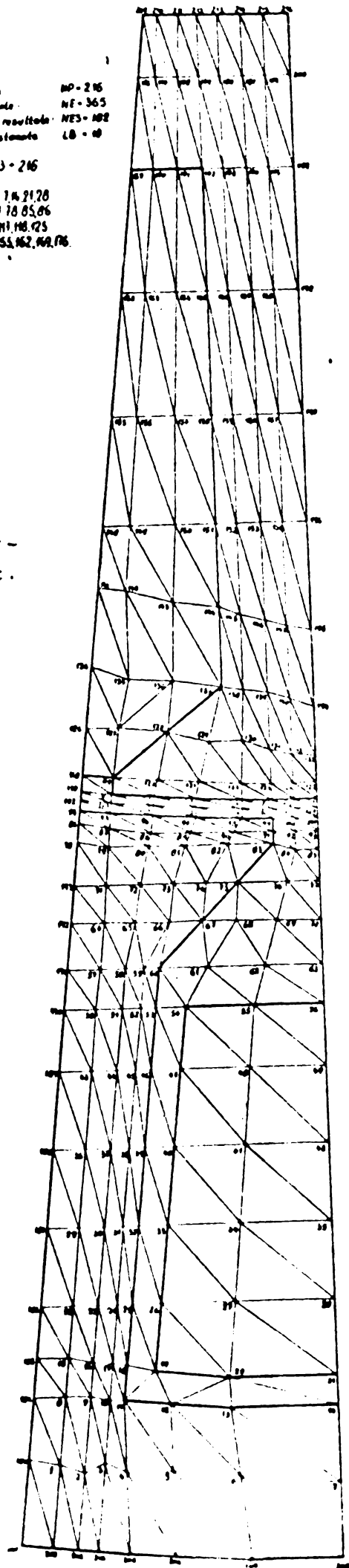


Fig. 4.24. Discretizarea domeniului conţinând crăstătura în faţa unui dinte.

Au fost furnizate ca date de intrare , prin citire de pe cartole următoarele informații :

- elementele tabloului NELVO , numerele de ordine ale tuturor elementelor ce înconjoară nodurile active. Dimensiunea tabloului este  $NES * NEM$  cuvinte, adică  $NES * NEM = 2$  octeți deoarece constantele de tip întreg sînt codificate cu 2 octeți/cuvînt la calculatorul MITRA 15,
- elementele tabloului NNEF, numerele de ordine ale nodurilor ce delimitează elementele discretizării. Dimensiunea tabloului este  $NE * 3$  cuvinte, adică  $NE * 3 * 2$  octeți ,
- Coordonatele (x,y ) ale fiecărui nod al discretizării. Dimensiunea tablourilor X și Y este de NP cuvinte, adică  $NP * 4$  octeți deoarece codificarea constantelor de tip real se face cu 4 octeți/cuvînt,
- NP , NFR, NE, NEM , NES, LB , NFER,
- permeabilitatea inițială a fierului,
- densitatea de curent pentru care se face calculul.

#### 4.5.3. 3 Proprietăți de material $\mu$ și

#### sarcina electromagnetică J.

Permeabilitatea magnetică a fost considerată constantă pentru fiecare ciclu descris în organigrama din fig.4.21 și aceeași pentru toate elementele situate în fier. Pentru a da o imagine a influenței permeabilității asupra soluției s-au considerat următoarele valori ale permeabilității relative ;

$$\mu_r = 100 ; 50 ; 25 ; 12,5$$

Au fost analizate erorile introduse în rezolvarea sistemului de ecuații de variația bruscă a permeabilității magnetice de la un element la altul, concluziile fiind ulterior utilizate în scrierea programului SORSOLF2.

Tinînd cont de deschiderea creștăturii pentru cazul concret studiat (3 mm), densitatea curentului în zona ocupată de conductoare a fost considerată :

$$J = 30 \text{ A/mm}^2$$

ceea ce corespunde unui regim de pornire pentru mașina studiată.

#### 4.5.3.4 Soluția problemei de câmp pentru configurațiile din fig. 4.22, fig. 4.23 , și 4.24

Valorile potențialului vector în nodurile rețelelor din fig. 4.22 ÷ 4.24 sînt date în tabelele din Anexa A1 pentru valorile lui  $\mu$  și J stabilite în § 4.5.3.3. Pe baza acestor date s-a trasat spectrul liniilor de câmp corespunzător configurației din fig.4.22 și fig.4.24 pentru  $\mu_r = 100$  ( fig. 4.25 și fig.4.27)

și  $\mu_r = 12.5$  (fig.4.26 și fig.4.28).

Calculul permeanțelor de dispersie s-a făcut pe baza relației :

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0 I^2} \iint_D \vec{j} \cdot \vec{A} \, dV = \frac{1}{\mu_0 I^2} \iint_D \left( \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV \quad (4.156)$$

care este echivalentă relației(2) din cap.I. Integrarea se face numai în zona în care  $j \neq 0$ , adică pentru elementele din zona înfășurării. Dacă  $j = ct$  pe suprafața elementului  $e$ , evaluate integrale de tipul :

$$\iint_e A(x,y) \, dx \, dy \quad (4.157)$$

pentru elementele străbătute de curent. In baza relațiilor

(4.10) ÷ (4.13) se obține pentru (4.157):

$$\begin{aligned} \iint_e A(x,y) \, dx \, dy &= A_i \iint_e N_i \, dx \, dy + A_j \iint_e N_j \, dx \, dy \\ &+ A_k \iint_e N_k \, dx \, dy = \frac{1}{3} (A_i + A_j + A_k) \cdot \frac{\Delta^e}{2} \end{aligned} \quad (4.158)$$

unde :  $\Delta^e$  dublul suprafeței elementului  $e$

$A_i, A_j, A_k$  - valorile potențialului vector în nodurile triunghiului "0". Astfel permeanța  $\lambda$  a crestăturii devine :

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0 I^2} \sum_{p=1}^{n_b} \frac{\Delta^p}{6} [(A_i)_p + (A_j)_p + (A_k)_p] \quad (4.159)$$

în care :

$$I = \sum_{p=1}^{n_b} J_p \frac{\Delta^p}{2} \quad (4.160)$$

$J_p$  - densitatea de curent în elementul curent  $p$ ,

$n_b$  - numărul de elemente străbătute de curent.

Efectuînd integrarea pentru soluția problemei din fig.4.25 se obține

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{p=1}^{60} \frac{\Delta^p}{6} [(A_i)_p + (A_j)_p + (A_k)_p] = 5,8385309 \cdot 10^{-1} \, A \cdot m$$

$$I = 3690 \, A$$

$$\lambda = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 5,8385309 \cdot 10^{-1}}{3,69^2 \cdot 10^6} = 1,286388 \cdot m^{-1}$$

Se poate compara această valoare cu alte valori calculate prin alte metode. In tabelul de mai jos este sintetizată comparația. Pentru a elucida modul de calcul a permeanței din coloana a 2-a a tabelului 4.5 se dă variația potențialului vector de-a lungul axei de simetrie a configurației din fig.4.22 pentru cele 4 valori ale permeabilității relative  $\mu_r$ . Considerînd că fluxul de dispersie a crestăturii este cel corespunzător diferenței dintre valoarea potențialului vector în fundul crestăturii și la limita istm - întrefier, permeanța de dispersie a crestăturii

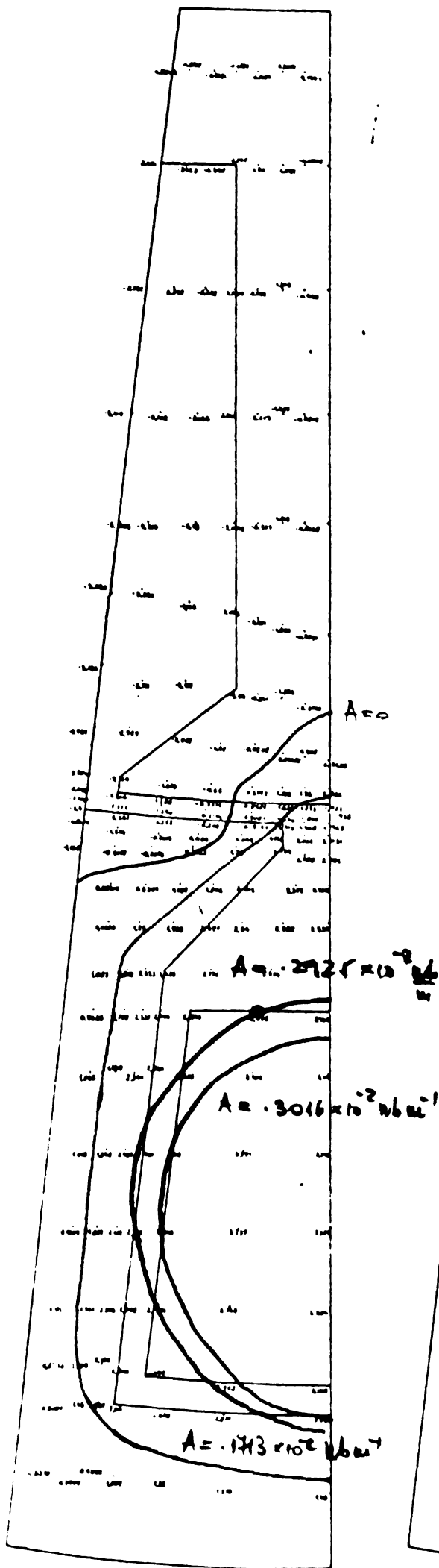


Fig 4.28

Solutia problemei ptr  $\mu = ct$   
(SORSELF1)

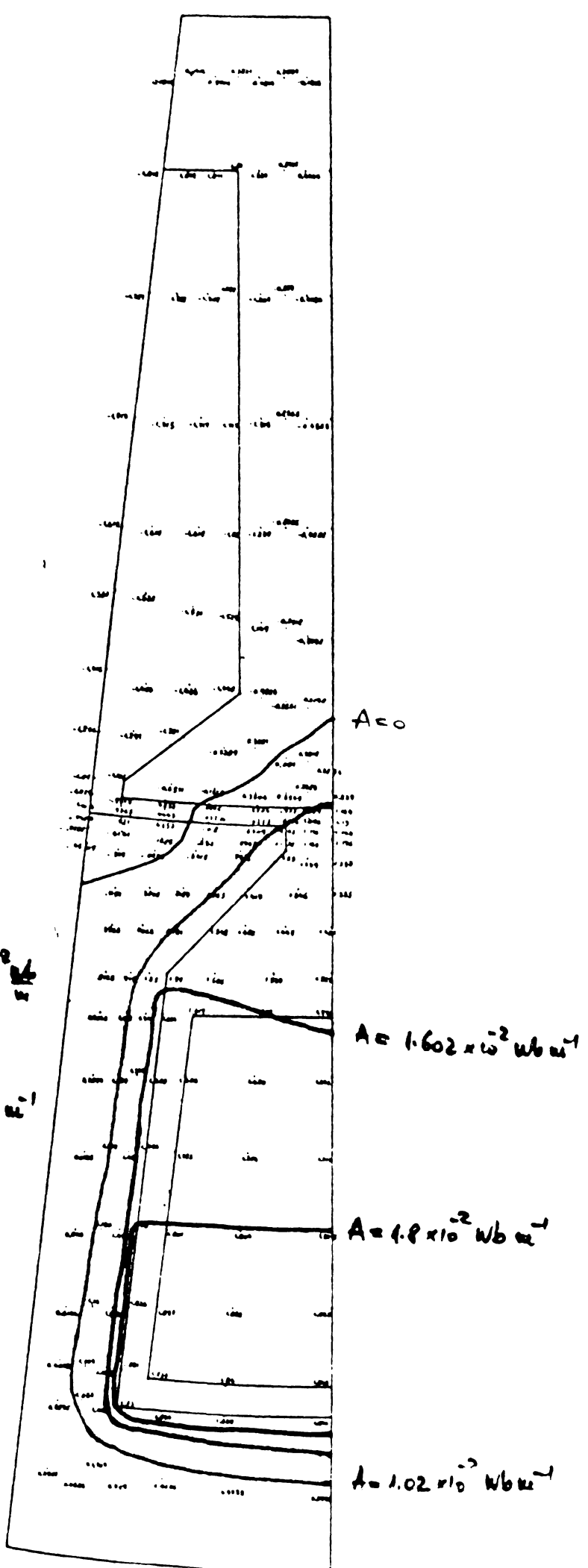
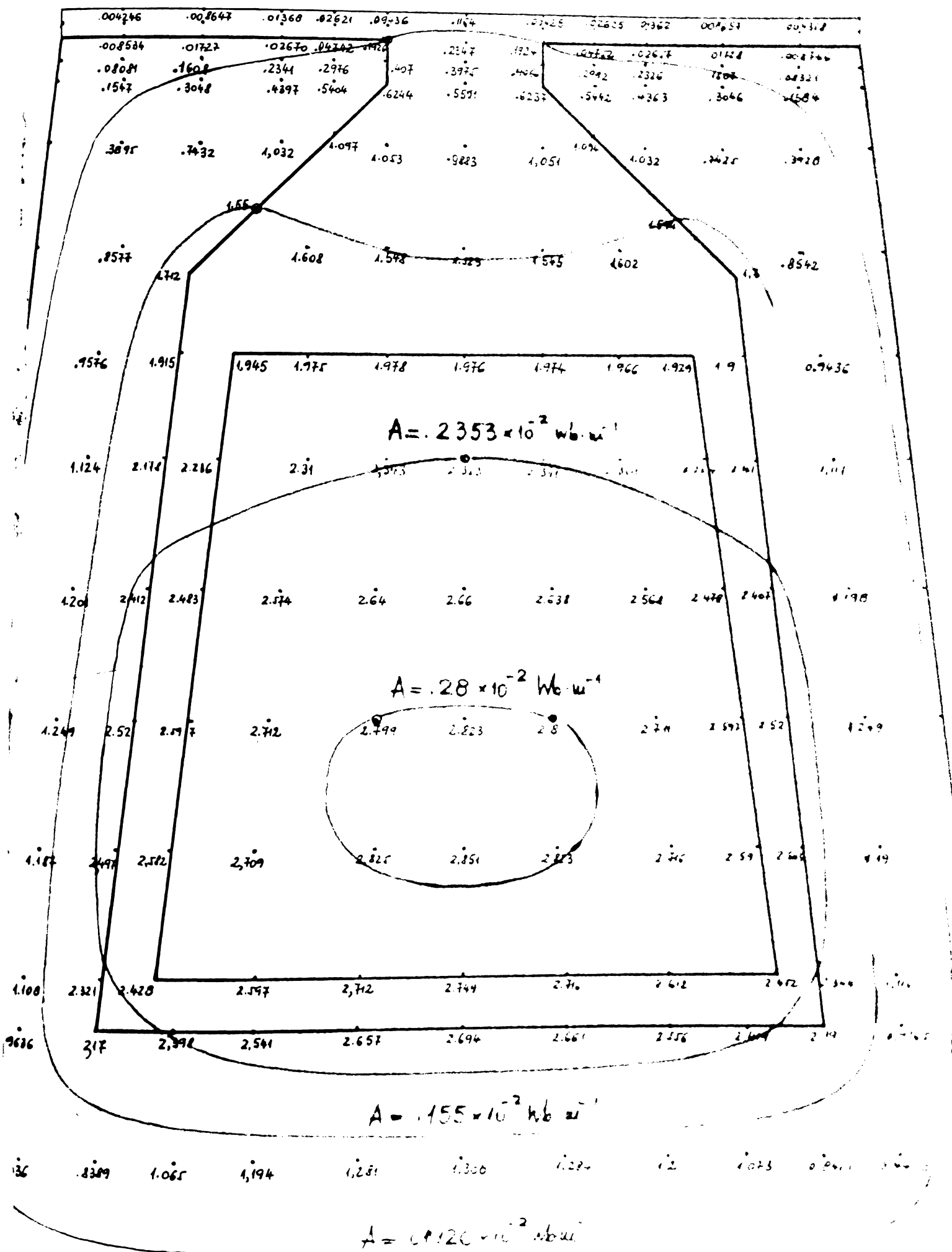


Fig 4.27

INSTITUTUL POLITEHNIC  
TIMISOARA  
BIBLIOTECA CENTRALA

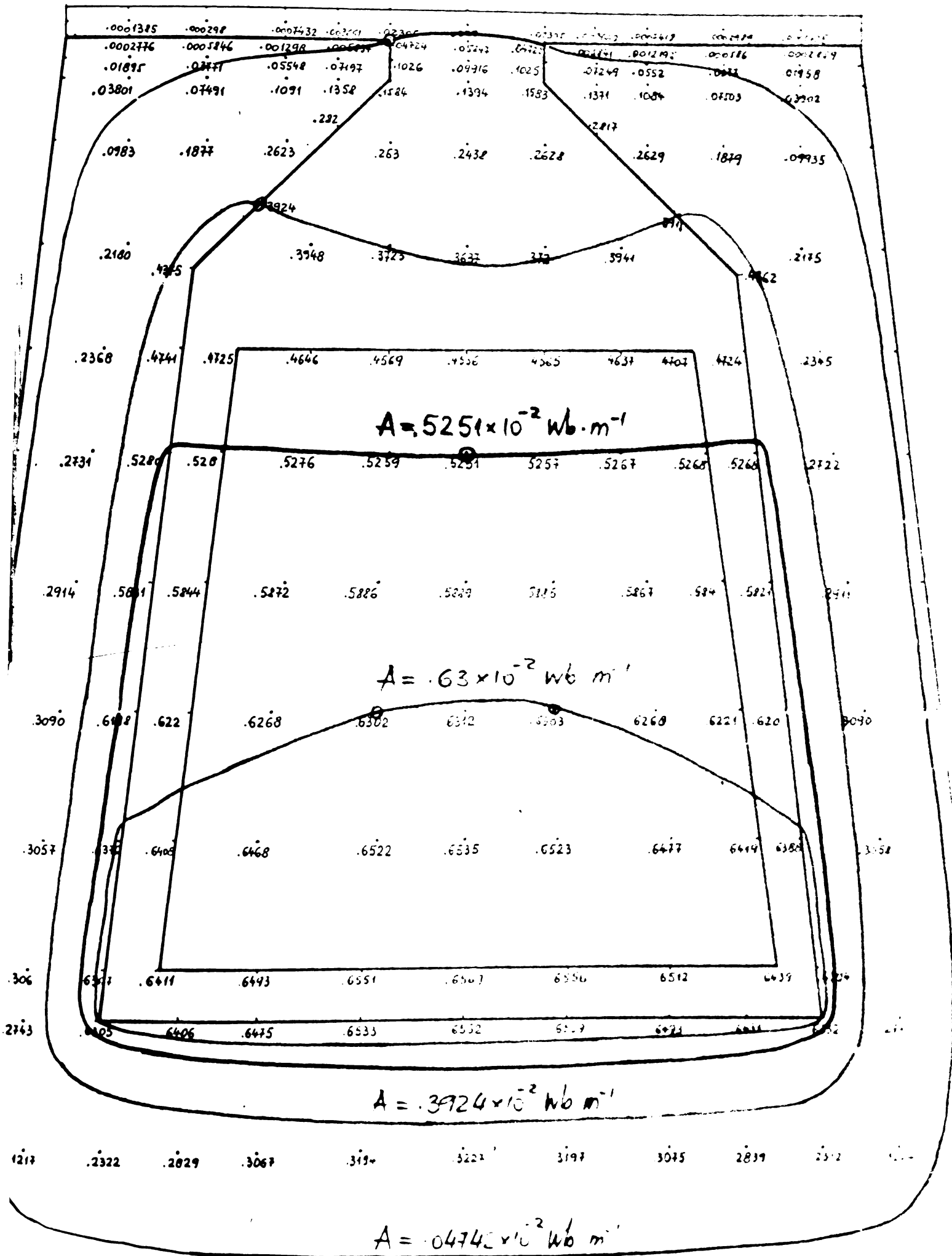
\*Linii de câmp au fost trasate prin aceleași puncte-chiavă ca cele marcate în fig 4.25.



• Valorile lui A în noduri se multiplică cu  $10^{-3}$   
 •  $\mu_r = 12.5$  ;  $l = 30^4 \text{ mm}^2$

Fig. 20. Soluția problemei 54.  $\mu = 12.5$   
 S. R. S. D. C. 1





\*Valorile lui A în noduri se multiplică cu  $10^{-2}$   
 \*\* u = 1000 ; i = 20 A/m

Fig+25 Soluția probleme nr 11-1 (SOLSELF)

este dată de

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0} \frac{A_{fund} - A_{istm}}{I} \quad (4.161)$$

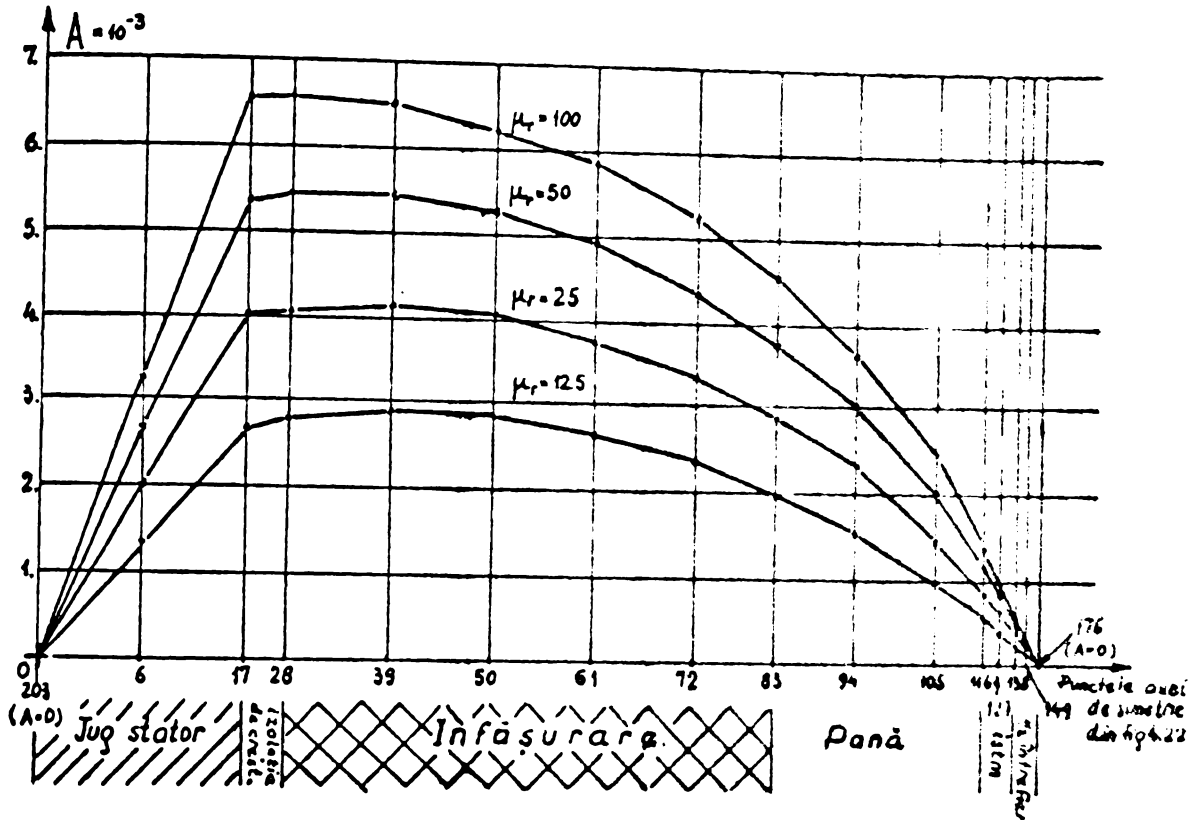


Fig.4.29 Variația potențialului magnetic vector  $A$  în lungul axei de simetrie a fig.4.22 .

A fost calculate permeanțele de dispersie pentru creștătura trapezoidală din fig.4.22 cu relațiile date pentru această geometrie în [B26] .

Valorile permeanței de dispersie a creștăturii trapezoidale din fig.4.22 calculate prin diverse metode.

Tabel 4.5

$\frac{\mu_{rel}}{\mu_r}$	[B26] Kazovski	[B65] I.S.Gheorghiu	rel. (4.156)	$\lambda = \frac{\text{Flux total}}{\mu_0 \cdot \text{curent}}$	rel. (4.161)	Integrare prin metoda lui A în 12 puncte ale înfășurării
100	1,1006212	1,3027441	1,2863883	1,4166518	1,2705081	1,2219999
50			1,0656792	1,171018	1,0599764	1,0073882
25			0,7991585	0,8863508	0,7891757	0,7522447
125			0,542267	0,6148384	0,5303655	0,5087531

Evaluarea erorilor nu se poate face ușor.

Metoda de eliminare Gauss că în mod teoretic soluția exactă a sistemului (4.45) cu eroarea practică dată de erorile de trunchiere. Soluția exactă nu se cunoaște. Trebuie să analizăm prin urmare sursele de eroare și încercăm o eliminare a lor, sau o ameliorare a rezultatelor.

Eroarea dată de discretizare și aproximarea funcției  $A(x,y)$  printr-un polinom de gradul I este necontrolabilă. Se poate face apel la principiul lui Melosh [B59] ce postulează că orice triangularizare obținută prin subdivizarea unei triangularizări anterioare mai grosiere dă o soluție mai bună decât soluția obținută pentru triangularizarea grosieră.

O subdiviziune automată s-ar putea face luând în interiorul fiecărui element triunghiular centrul său de greutate și unindu-l cu vîrfurile triunghiului, așa cum se indica în [B61]. Algoritmul se complică considerabil din cauza numerotării nodurilor și elementelor noi rețele de discretizare.

Eroarea dată de trunchiere ar trebui să afecteze cel mai mult nodurile avînd numere de ordine reduse, deoarece eliminarea începe din prima linie, iar substituția inversă se sfîrșește la prima linie. Procedul de afinare a soluției descrise în [B60], [B51], [B52], [B53] se bazează pe următorul principiu:

Fie sistemul :

$$AX = B$$

și soluția aproximativă  $X'$  afectată de eroarea  $\xi$ . Deci :

$$X = X' + \xi$$

Avem ;

$$AX' + A\xi = B \quad (4.162)$$

sau ;

$$A\xi = B - AX' \quad (4.163)$$

Dar  $B - AX'$  reprezintă tocmai vectorul reziduu  $R$  al soluției aproximative

Rezolvîm :

$$A\xi = R \quad (4.164)$$

obținem corecția soluției aproximative.

Am aplicat acest procedeu, însă corecțiile sînt neînsemnate. Deci pentru programul SORSELF 1 erorile de trunchiere sînt neglijabile.

O metodă de verificare a erorilor poate fi și compararea valorilor potențialului vector în două puncte situate simetrice față de o linie de simetrie (dacă ea există). Pentru configurația din fig. 4.22 s-a făcut acest lucru.

În doson punctele 80 și 86 sînt simetrice plasate față de linia de simetrie ce trece prin punctul 83. Se definește eroarea față de valoarea medie, adică :

$$\varepsilon = \frac{|A_{86} - A_{80}| \cdot 2 \cdot 100}{|A_{86} + A_{80}|} = \frac{|0,2881 \cdot 10^{-2} - 0,2898 \cdot 10^{-2}|}{(0,2881 + 0,2898) \cdot 10^{-2}} \cdot 200 = 0,6\%$$

După afinarea soluției prin procedeul McCracken :

$$\epsilon = \frac{|A_{86} - A_{80}| \cdot 2}{|A_{86} + A_{80}|} \cdot 100 = \frac{200 \cdot |0,2882 - 0,2899|}{0,2882 + 0,2899} = 0,588\%$$

Se observă pe de o parte că afinarea soluției nu aduce practic nici o schimbare în valorile potențialului vector , iar pe de altă parte erorile calculate sînt mici.

Făcînd bilanțul rezultatelor obținute prin seria de programe SORSELF 1 se pot formula concluziile :

1. Sînt imperativ necesare programe de verificare a descrierii topologiei discretizării ,dacă nu se dispune de un sistem de triangularizare automată.
2. Spectrul liniilor de cîmp pentru  $\mu_r = 100$  și buna concordanță a valorilor lui  $\lambda$  calculate prin diverse metode indică corectitudinea ipotezei că pentru a ușura rezolvarea sistemului (4.45) se poate lua valoarea maximă a permeabilității relative a fierului  $\mu_r \approx 100$
3. Metoda de eliminare Gauss dă bune rezultate pentru  $N_{SCA} = 218$  , deci ipotezele făcute în § 4.5.2. sînt corecte.
4. Aprecierea adîncimii de pătrundere a cîmpului în dintele opus creștăturii (fig,4.24) este corectă.
5. Prelucrarea rezultatelor ar fi ușurată considerabil dacă s-ar poseda un trasor automat ca periferic al calculatorului .
6. Pentru calcule practice relația (4.161) este satisfăcătoare.
7. Nucleul de bază al calculului permeanței, respectiv generarea matricii bandă [K] și soluționarea sistemului (4.45) poate fi utilizat în seriile de programe SORSELF 2 și SORSELF 3 pentru rezolvarea unei probleme neliniare.

#### 4.5.4. SORSELF 2

##### 4.5.4.1 Prezentarea structurii programului

Seria de programe SORSELF 2 a fost scrisă pentru a face un pas înainte în studiul cîmpului din întrefierul mașinii asincrone. Asigurarea unei discretizări suficient de fină pentru o zonă de mașină egală cu  $\tau/2$  și rezolvarea problemei neliniare au fost obiectivele principale ale seriei SORSELF 2 .Deoarece se poate discretiza o zonă de  $\tau/2$  ,devine posibilă rezolvarea problemei de cîmp pentru regimul de funcționare cu solcnații inegale.

În baza studiului făcut în § 4.5.2. s-a prevăzut cifra de 1000 ecuații pentru sistemul (4.45), urmînd ca după concretizarea discretizării să se verifice numărul de operațiuni pe baza relației (4.155). Pentru NRS = 1000 memoria centrală a unui sistem de calcul este insuficientă, iar segmentarea programului ineficientă din cauza dimensiunii blankului comun :

Lista XY	= 1000 x 2 x 4 =	8000 octeți
LISTA NELVE	= 1000 x 7 x 4 =	28000 octeți
LISTA NNEL	= 2000 x 3 x 4 =	24000 octeți

Matricea M(cu

LB = $\frac{1}{20}$ NRS)	= 1000 x 50 x 4 =	<u>200000</u> octeți
		260000 octeți

Calculul este aproximativ, dar edificator pentru spațiul memorio estimat. Fiind nevoit să dezvoit seria SORSELF 2 pe un calculator MITRA 15 a apărut necesitatea utilizării pe scară largă a memoriilor auxiliare. Aceasta a complicat pe de-o parte algoritmul general expus în fig. 4.30 iar pe de altă parte a lungit considerabil timpul de calcul deoarece accesul la un sector oarecare al discului este lent (timp mediu de acces = 20 m sec !!). După găsirea sectorului căutat informația se transferă în memoria centrală sau invers, în ritmul de 150 ko/sec. Înseamnă că trebuie redus la minimum numărul de citiri și scrieri de pe și pe disc. Așa după cum se vede în organigrama din fig. 4.30 s-a făcut următorul artificiu pentru reducerea la minimum a transferului pe și de pe disc. După generarea a LB linii ale matricii [M] începe eliminarea, iar liniile eliminate se stochează într-o zonă de așteptare (în funcție de memoria calculatorului) fiind transferate în bloc pe disc. Pentru substituția inversă se procedează analog, citind de pe disc câte un bloc de linii eliminate. Prin acest artificiu transferurile de pe și pe disc sînt reduse la aproximativ 5% din transferurile necesare pentru generarea matricii linie de linie și transferul ei pe disc. Accesul la listele XV, NELVE, NNEL nu se poate modifica, numărul de transferuri pentru accesul la datele de intrare rămînd important.

Din acest motiv subrutinele MATLQ (generarea matricii [M]) și SOLVE (rezolvarea sistemului (4.45) prin eliminarea GAUSS) au fost contopite și adaptate în programul principal.

Pentru rezolvarea problemei nolineare a apărut necesitatea unei serii de iterații care apropie soluția obținută de soluția reală, existentă în condițiile în care  $\mu_{r_2}$  este funcție de soluția problemei. Reevaluarea proprietăților de material se va expune

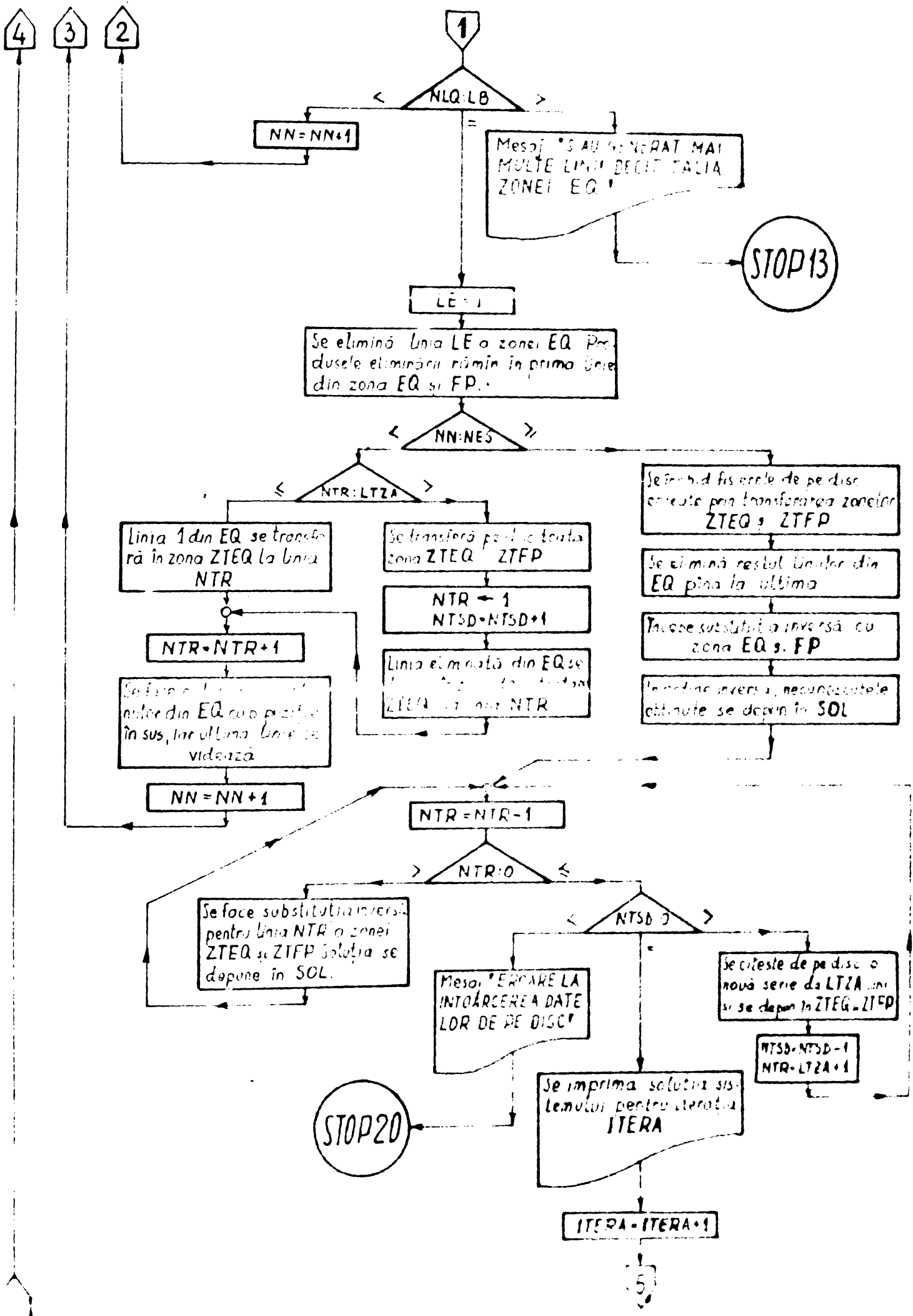


Fig 4.30 (continuare 1)

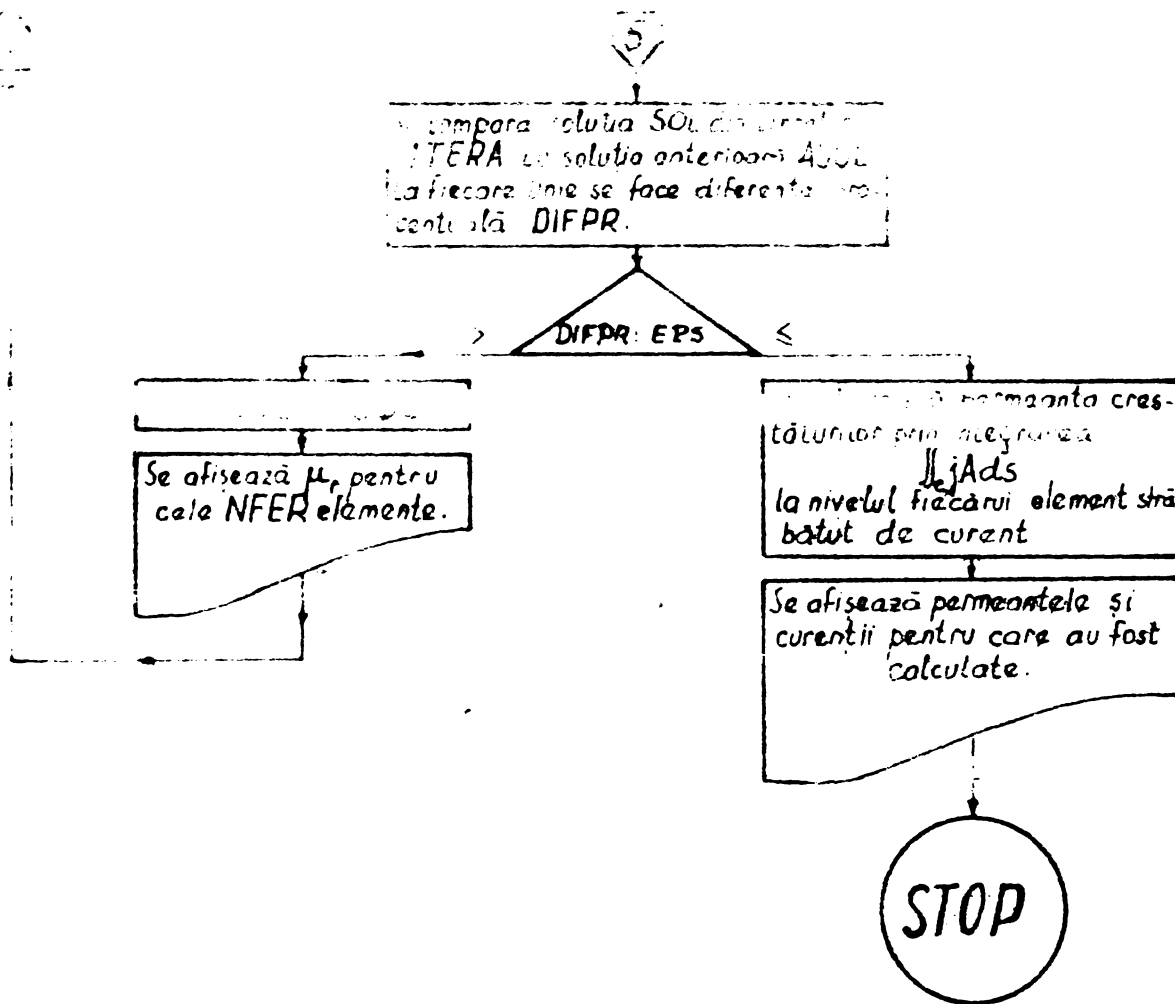


Fig 430 (continuare 2)

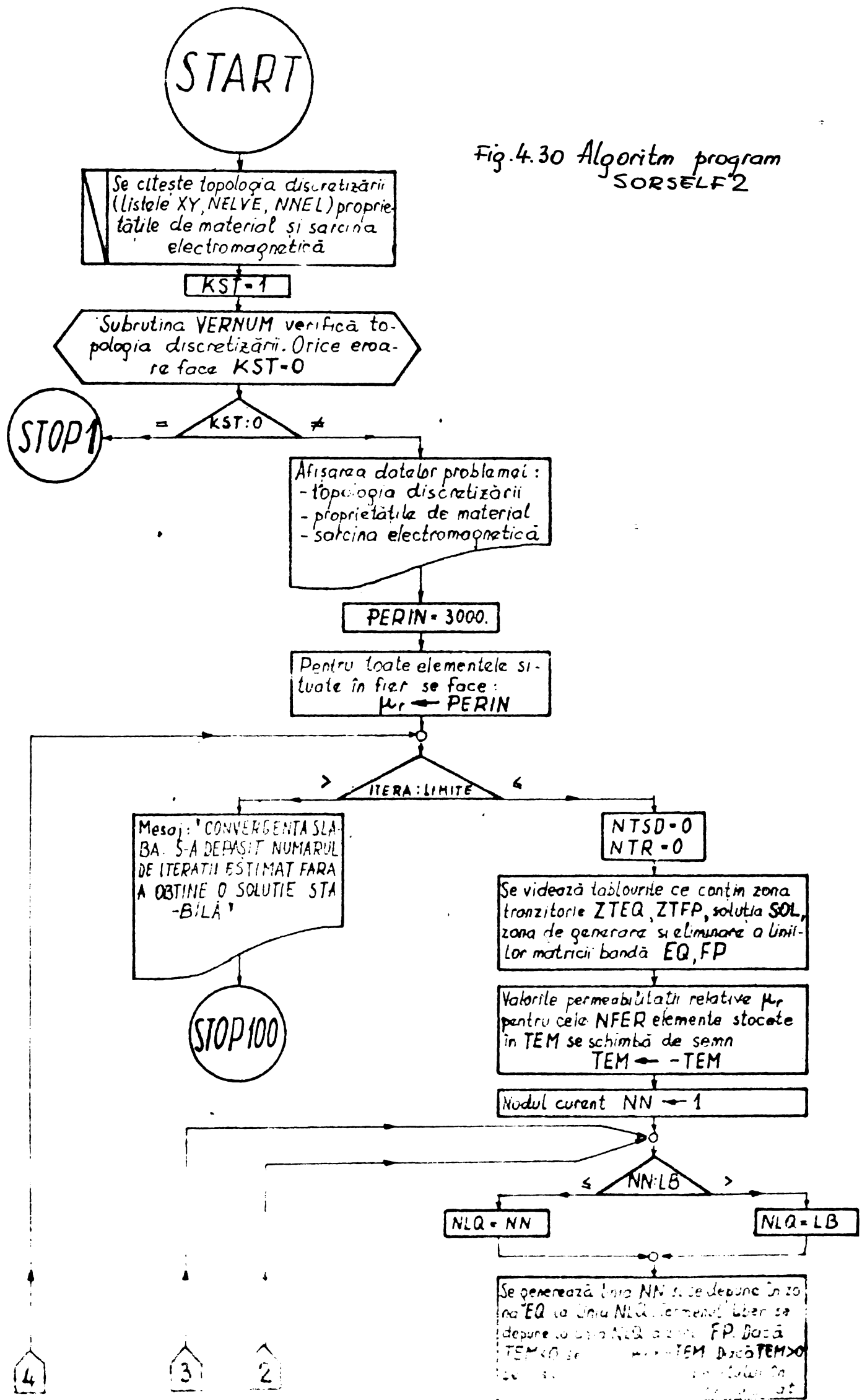


Fig.4.30 Algoritm program SORSELF2



ulterior ,în § 4.5.4.3. Ceea ce este însă de semnalat aici, este faptul că apropierea de soluția corectă se face prin prin modificarea matricii [M] și nu prin alte procedee de rezolvare a unei ecuații matriciale neliniare. Metoda originală de reevaluare a proprietăților de material expusă în § 4.5.4.3 asigură o bună convergență a procesului ,similară metodei Newton - Raphson.

#### 4.5.4.2 Discretizarea domeniului

Configurația studiată a fost cea corespunzătoare unei jumătăți de pas polar pentru mașina asincronă de tipul AM -160- M în fabricație la I.M.F.B. Dimensiunile geometrice sînt date în fig. 4.31, iar celelalte caracteristici sînt următoarele :

$Z_1 = 36$  creștături statorice

$Z_2 = 26$  creștături rotorice

$p = 2$  perechi poli

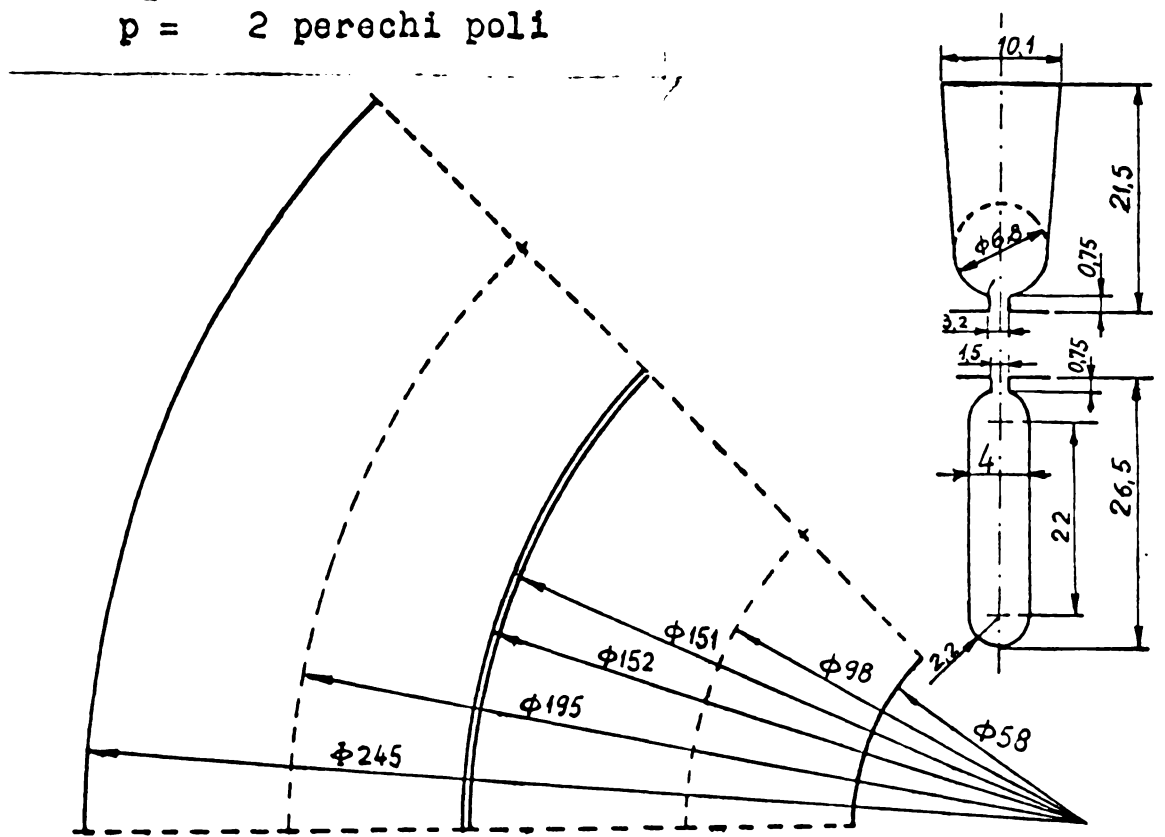


Fig. 4.31

Dimensiunile geometrice ale mașinii studiate.

Rețeaua de discretizare s-a constituit din segmente de dreaptă dispuse în general într-o direcție radială, întretăiată cu segmente de dreaptă aranjate concentric. Elementele patrulatoare astfel generate au fost împărțite prin diagonale, avînd toate aceeași orientare, în elemente triunghiulare simple, așa cum arată fig. 4.32

Tinînd cont de criteriile expuse în § 4.3.4 s-a decis numărul de raze echivalente și de cercuri concentrice echivalente avînd în vedere următoarele :

- în zonele cu  $\mu = \mu_0$  <sup>din creștături</sup> variația potențialului vector între două puncte separate de distanța  $d$  este mai mică decît variația potențialului

vector între două puncte situate în fier și separate de aceeași distanță  $d$  ;

- în zona întrefierului gradientul potențialului vector este pronunțat ;

- unghiurile triunghiurilor nu trebuie să fie foarte diferite de  $\pi/3$  ;

- în condițiile unei numerotări icoale a nodurilor, lățimea semi-bonzi trebuie să fie cuprinsă între  $(\frac{1}{40} + \frac{1}{20})N$  unde  $N$  este numărul punctelor în care  $A$  este necunoscut ( $N$ -alia sistemului de ecuații (4.45)).

Tabelul de mai jos expune variantele discretizărilor posibile luate în considerație și caracteristicile lor :

Tabel 4.6

r	R	NC	NES	LB	$\frac{1}{2} \text{NES} \cdot \text{LB}^2$	$[(\text{LDZ}-2)(2\text{LB} - \text{LDZ}) + 2 \text{LDZ}] \cdot \text{NES}$
0	37	16	592	17	85.544	40.256
		17	629	18	101.893	45.288
		18	666	19	120.213	50.616
		19	703	20	140.600	56.240
		20	740	21	163.170	62.160
		21	777	22	188.034	68.376
10	46	18	828	19	149.454	62.928
		19	874	20	174.800	69.920
		20	920	21	202.860	77.280
		21	966	22	233.772	85.008
12	55	18	990	19	178.695	75.240
		19	1045	20	209.000	79.420
		20	1100	21	242.550	92.400
		21	1155	22	279.510	101.640

S-a notat :

$r$  - numărul de raze pe pas de crestătură

$R$  - numărul total de raze de-a lungul cărora se găsesc puncte în care  $A$  este necunoscut. Pentru  $Z_1=36, Z/2=4.5$  crestături. Deci :

$R = 4.5 * r + 1$  deoarece linia de simetrie face parte din razele pe care  $A$  este necunoscut.

$NC$  - numărul de cercuri concentrice al discretizării, cercuri pe care  $A$  este necunoscut.

$NES$  - numărul de ecuații, sau numărul punctelor în care  $A$  este necunoscut.

$\frac{1}{2} \text{NES} \times \text{LB}^2$  - numărul de operații necesar pentru rezolvarea sistemului, dacă toată semibanda este ocupată de elemente ale matricii [M] diferite de zero.

$\text{NES} \cdot [(\text{LDZ} - 2)(2\text{LB} - \text{LDZ}) + 2 \text{LDZ}]$  - numărul de operații necesar pentru rezolvarea sistemului în ipoteza aranjării celei mai defavorabile pentru cele LDZ elemente diferite de zero.

LDZ - numărul elementelor semibenzii diferite de zero. Pentru maximum 7 elemente vecine, LDZ = 4.

Numărul operațiilor afectate de erori de trunchiere (înmulțire, împărțire) pentru rezolvarea unui sistem liniar de ecuații  $AX = B$  prin metoda de eliminare Gauss este pentru N (număr de ecuații) sensibil egal cu  $\frac{1}{6}N^3$ .

Conform § 4.5.2 numărul de operațiuni  $N_{\text{oper}} = 166.666$  operațiuni apare ca limită impusă de erorile de trunchiere.

Potrivit acestui criteriu sînt favorabile discretizările făcute cu:

$R = 37 ; NC = 20$

$R = 46 ; NC = 18$

și la limită, depășind puțin cifra de 166.666 chiar și discretizările făcute cu :

$R = 46 ; NC = 20$

$R = 55 ; NC = 18$

Luînd în considerație numărul de operații stabilit în cap. 4.5.2. pentru matricile bandă avînd găuri chiar în bandă, pentru un număr maxim de elemente diferite de zero în semibandă.

$\text{LDZ} = 4$

cea ce corespunde la discretizarea cea mai defavorabilă ce se poate imagina, apar favorabile discretizările avînd :

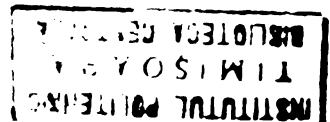
$R = 37 ; NC = 21$

$R = 46 ; NC = 21$

$R = 55 ; NC = 21$

Decizia privind caracteristicile discretizării se va lua după analiza desenului configurației, întrucît discretizarea ce se va face trebuie să dea distorsiunile cele mai mici ale conturului real al mașinii .

Așa cum se vede în fig. 4.32 izolația de creștătură impune două raze care să separe zona ocupată de conductoare de zona ocupată cu izolația creștăturii . Pentru dinte avem o rețea destul de fină considerînd pentru discretizare 6 raze. Deci numărul de 10 raze pe pas de creștătură poate fi considerat satisfăcător. Intrefierul și înălțimea istmului vor fi delimitate fiecare, de cercuri. Pentru zona ocupată de pană existența a 4 cercuri permite



o bună aproximare a conturului crestăturii- În acest fel zona în care gradientul lui A este mare a fost acoperită de o rețea suficient de fină.

S-a decis ținând cont de cele de mai sus discretizarea domeniului prin  $R = 46$  ;  $NC = 20$  .A rezultat un număr de ecuații al sistemului :

$$NES = 920 \quad (4.165)$$

un număr total de puncte, inclusiv punctele frontierei unde  $A=0$

$$NP = 1034 \quad (4.166)$$

un număr de elemente,

$$NEL = 1932 \quad (4.167)$$

și un număr maxim de elemente situate în jurul unui nod

$$NEM = 7 \quad (4.168)$$

Numerotarea nodurilor s-a făcut în lungul razelor, totdeauna în același sens, pentru a obține lățimea de bandă minimă pentru matricea [M].

Numerotarea elementelor s-a făcut într-o ordine dictată de necesitatea de a găsi rapid proprietățile de material și în cărcarea electromagnetică ,fără a creea tablouri speciale în memoria calculatorului pentru aceste date de intrare.Elementele au fost numerotate în ordinea următoare :

Tabel 4.7

Partea mașinii	Elementul inițial.	Elementul final.	Simbol utilizat pentru reperaj
- jug statoric	1	276	
- dinți stator	277	719	
- jug rotor	720	903	
- dinți rotor	904	1347	NFER
- conductoare crest.stator	1348	1459	EFZCS
- conductoare crest.rotor	1460	1555	EFZCR
- părți ocupate de izolație și aer	1456	1932	NEL

Descrierea topologiei discretizării trebuie să furnizeze toate datele necesare calculului elementelor matricii [M] și asamblării lor.

Această descriere trebuie făcută prin datele de intrare , care în mod obișnuit sînt depuse în memorie.

Necesarul de memorie este conform tabelului 4.3 pentru un

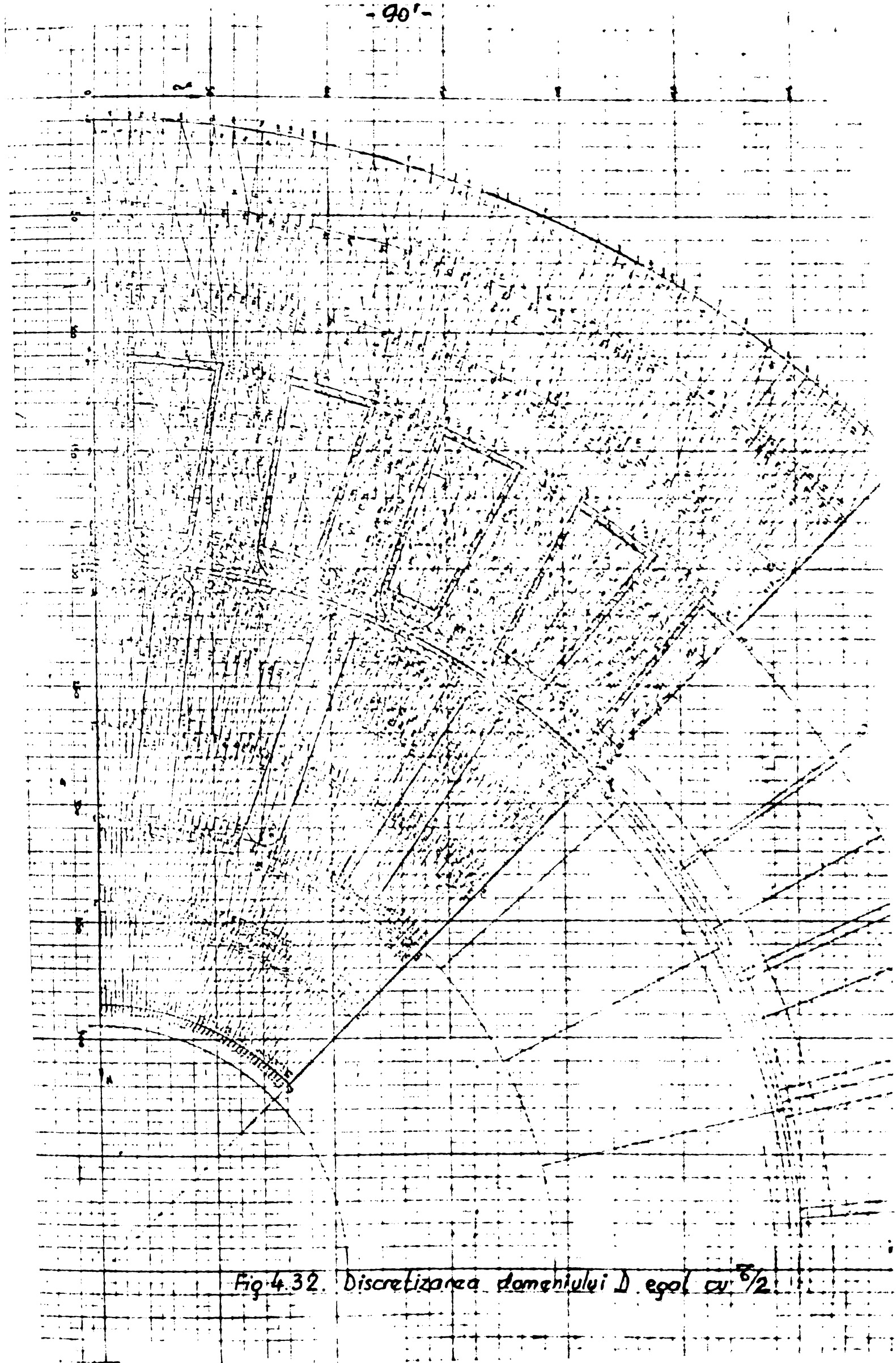


Fig. 4.32. Discretizarea domeniului  $D$  egal cu  $h/2$ .

calculator MITRA 15 unde codificarea întregilor este diferită de codificarea numerelor reale.

Tabel 4.8

Nume tablou	Dimensiuni	Tip	Număr de octeți.
NELVO(NES,NEM)	920x7	INTEGER	12.880
NNEL(NEL,3)	1932x3	INTEGER	11.592
X(NP)	1034	REAL	4.136
Y(NP)	1034	REAL	4.136
PERM( NEL)	1932	REAL	7.728
DENSC(NEL)	1932	REAL	7.728
		TOTAL	48.200

Memoria centrală a calculatorului MITRA - 15 fiind de 48.000 octeți,trebuie găsite alte soluții pentru furnizarea datelor de intrare.

Posibilități :

- Elementele tabloului NELVO( numerele de ordine ale elementelor vecine nodului " de lucru " pot fi citite de pe cartele,pe rând,deoarece liniile matricii [M]sînt generate ordonat.Dacă se face însă reluarea programului fie pentru ameliorarea soluției ,fie prin logica iterativă a algoritmului,trebuie să atîtea pachete de cartele cu elementele tabloului ,cîte iterații se fac.Soluția este necorespunzătoare din două motive,deși economia de spațiu - memorie este considerabilă( 12.880 octeți):
  - în general nu se cunoaște exact numărul iterațiilor ce trebuie executate,
  - numărul cartelelor conținînd aceste date, este deranjant.Numerele de ordine pot fi constituite din 4 cifre.Avînd maximum 7 elemente vecine,nu se pot perfora pe o cartelă(80 de coloane) decît numerele de ordine ale elementelor vecine la 2 noduri :  $4 \times 7 \times 2 = 56$  coloane ; astfel numai pentru elementele tabloului NELVO sînt necesare 460 de cartele,fiecare conținînd datele pentru două noduri.
- Se poate renunța la stocarea proprietăților de material din cauza caracterului ordonat al numerotării elementelor.Pe lîngă simbolurile utilizate pentru reperaj din Tabelul 4.7 s-au utilizat variabilele întregi auxiliare :
  - EFZAS elementul final al conductoarelor fazei A stator,
  - EFZBS elementul final al conductoarelor fazei B stator,

- EFZCS elementul final al conductoarelor fazei C stator,
- EFZAR elementul final al conductoarelor fazei A rotor,
- EFZBR elementul final al conductoarelor fazei B rotor,

Dacă NO este numărul elementului pentru care căutăm proprietățile de material și sarcina electromagnetică J, sînt valabile următoarele relații :

$$\begin{array}{llll}
 1 \leq NO \leq NFER & \mu = \mu_{Fe} & ; & J = 0 & (4.169) \\
 NFER < NO \leq EFZAS & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{AS} & (4.170) \\
 EFZAS < NO \leq EFZBS & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{BS} & (4.171) \\
 EFZBS < NO \leq EFZCS & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{CS} & (4.172) \\
 EFZCS < NO \leq EFZAR & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{AR} & (4.173) \\
 EFZAR < NO \leq EFZBR & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{BR} & (4.174) \\
 EFZBR < NO \leq EFZCR & \mu = \mu_0 & ; & J = J_{CR} & (4.175) \\
 EFZCR < NO \leq NEL & \mu = \mu_0 & ; & J = 0 & (4.176)
 \end{array}$$

Un algoritm dichotomic poate stabili rapid proprietățile elementului avînd numărul curent NO.

Economia realizată ar fi de 15.456 octeți.

Niciuna dintre soluțiile enumerate mai sus nu aduce o îmbunătățire simțitoare, deoarece pe lîngă tablourile conținînd datele de intrare, în memoria centrală mai trebuie să rezervăm un loc și pentru tablourile în care se depune matricea bandă, soluția etc. ca să nu mai amintim și programul propriu zis a cărei lungime trebuie luată în considerație. De aceea toate datele corespunzătoare descrierii "topologiei discretizării" au fost depuse în fișiere pe disc.

#### 4.5.4.3 Proprietăți de material $\mu$ și sarcina electromagnetică J.

Dacă permeabilitatea magnetică  $\mu$  nu mai poate fi considerată constantă, așa cum se stipula în §4.5.3.3 înseamnă că pentru găsirea soluției sistemului (4.45) trebuie făcute iterații pe parcursul cărora matricea [M] se revaluează în funcție de noile valori ale permeabilității magnetice  $\mu$  ale elementelor situate în fier. Acest proces iterativ continuă pînă în momentul în care norma vectorului diferență a două soluții succesive este inferioară unei limite prestabilite.

Iterațiile în funcție de  $\mu$  debutează în condițiile:

- pentru toate elementele situate în fier se afectează o permeabilitate inițială arbitrară, PERIN,
- soluția inițială a sistemului (4.45) este identic nulă.

Rezolvînd succesiv sistemul:

$$[M] \cdot \{A\} = \{TL\}$$

în care:

$$[M] = \varphi(\mu) \tag{4.177}$$

iar:

$$\mu = f(\{A\}) \tag{4.178}$$

sîntem nevoiți să concretizăm doar forma relației (4.178), deoarece funcția (4.177) este definită de modul de generare a matricii  $[M]$ , discutat în cap.4.3.3.

Prelucrînd datele obținute prin măsurători, pentru diversele materiale se obține funcția:

$$\mu = \mu(|\bar{B}|) \tag{4.179}$$

Aceste curbe arată ca în fig.4.33 pentru diverse materiale întîlnite în construcția de mașini electrice. Valorile după care s-au trasat aceste curbe sînt date în tabelul 4.9.

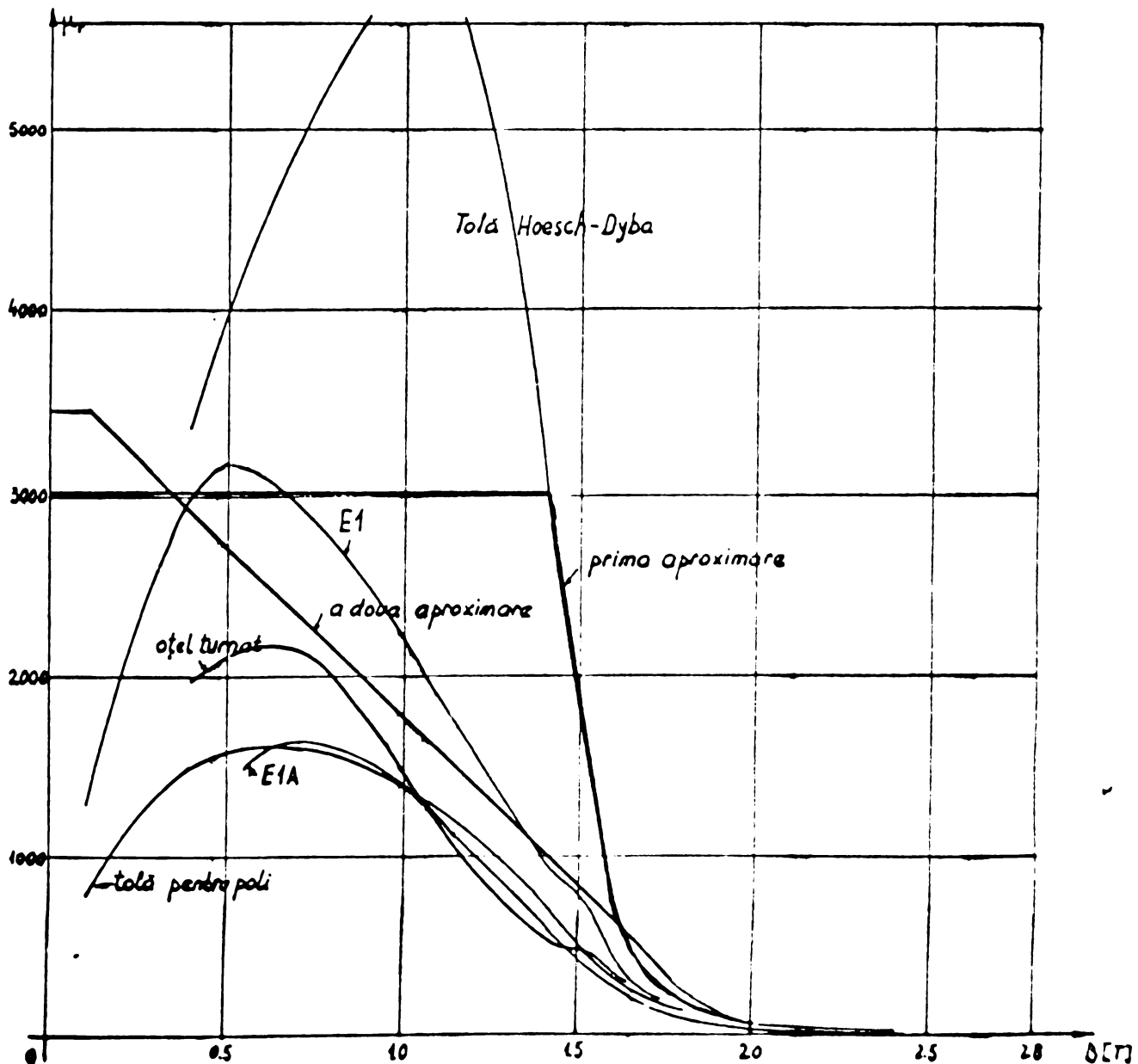


Fig.4.33 Alura curbelor  $\mu = f(B)$  pentru diverse materiale feromagnetice.



Tabel 4.9  $\mu_r = f(B)$  pentru diverse table feromagnetice

B T	E I	E IA	Oțel turnat	Tolă ptr.poli	Hoesch- Dyba
0.1	1283.5000			795.0000	
0.2	1989.4370			1136.8212	
0.3	2594.9180			1326.2914	
0.4	3002.9240		1989.4371	1515.7616	3333.1800
0.5	3157.8360		2094.1444	1591.5497	3920.0689
0.6	3100.4200	1591.5497	2170.2950	1618.5251	4462.2841
0.7	2962.9915	1638.3600	2142.4708	1614.6156	4907.8572
0.8	2755.9303	1591.5497	1989.4371	1571.9000	5305.1746
0.9	2461.1590	1492.0778	1746.8229	1492.0778	5639.3399
1.0	2198.2730	1396.0962	1421.0265	1396.0962	5872.8700
1.1	1898.8000	1215.7671	1151.7794	1268.6266	5797.0226
1.2	1570.6000	1026.8062	909.4570	1130.0944	5410.3614
1.3	1170.8900	808.2088	728.5263	957.8771	4497.8530
1.4	968.7700	612.1345	554.2710	747.7079	3210.6155
1.5	834.7300	411.6077	477.4649	525.8424	1768.3866
1.6	404.2000	270.9021	335.0631	318.3099	695.7595
1.7	223.9800	162.9900	208.1257	191.8890	296.0210
1.8	132.6300	100.8729	132.6291	120.3693	149.9888
1.9	87.4000	67.4988	93.3316	80.4240	88.4193
2.0	58.3000	45.4728	64.9612	54.8810	57.8745
2.1	31.2360	32.4490	43.1816		
2.2	14.1190	23.8191			
2.3	8.9720	18.6763			
2.4	6.7250	15.0383			
2.5	5.4650	12.0572			

Cunoscând soluția  $\{A\}$  a sistemului (4.45) se poate calcula inducția  $B$  în orice element, iar pe baza relației (4.178) se obține permeabilitatea  $\mu$ . Pentru elementul triunghiular simplu inducția  $B$  este constantă în toate punctele sale, după cum se demonstrează în continuare.

$$\bar{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \bar{j} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} \quad (4.180)$$

în care pe baza relațiilor (4.1) ÷ (4.8) avem:

$$B_x = \frac{1}{\Delta} [A_i(x_k - x_j) + A_j(x_i - x_k) + A_k(x_j - x_i)] \quad (4.181)$$

$$B_y = \frac{1}{\Delta} [A_i(y_k - y_j) + A_j(y_i - y_k) + A_k(y_j - y_i)] \quad (4.182)$$

De unde modulul inducției:

$$B = |\bar{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (4.183)$$

Se observă că pentru o iterație  $p$  oarecare, în curs, se utilizează valoarea lui  $\mu$  determinată într-un anumit fel de soluția  $\{A\}$  calculată în iterația anterioară  $p-1$ . Dacă am lua în mod simplu:

$$\mu^p = f(\sqrt{(B_x^{p-1})^2 + (B_y^{p-1})^2}) \quad (4.184)$$

s-ar produce oscilații în jurul valorii finale, așa cum se vede în fig.4.34 a. S-a presupus pentru cazul ilustrat în fig. 4.34 a că solenația cunoscută  $\Theta$  ăz fixa punctul de funcționare în  $P_f$ , definit de valoarea finală a inducției în  $B_f$  și permeabilitatea finală  $\mu_f$ , în planul  $(\mu, B)$ .

Dacă iterațiile încep considerînd o valoare inițială  $\mu_{in}$  pentru permeabilitatea magnetică și dacă:

$$\mu_{in} > \mu_f$$

rezolvarea problemei de câmp în aceste condiții va conduce la o inducție  $B_1$  mai mare decît  $B_f$

$$B_1 > B_f$$

Luînd în continuare valoarea  $\mu_1$  corespunzătoare inducției  $B_1$  pentru generarea elementelor matricii, după rezolvarea problemei de câmp vom obține o inducție  $B_2$  mai mică decît  $B_f$ .

$$B_2 < B_f$$

Aceste oscilații pot fi amortizate sau nu. Se deduce simplu că pentru o curbă, aproximînd funcția  $\mu = f(B)$ , de tipul a din fig.4.35, cu paliere de  $\mu = ct$  foarte extinse, convergența este compromisă iremediabil. Deaceea sînt favorabile curbe de tipul b,

cu paliere de  $\mu$  - ct cit se poate de reduse în zona inducțiilor în care  $B < 2.5 T$ .

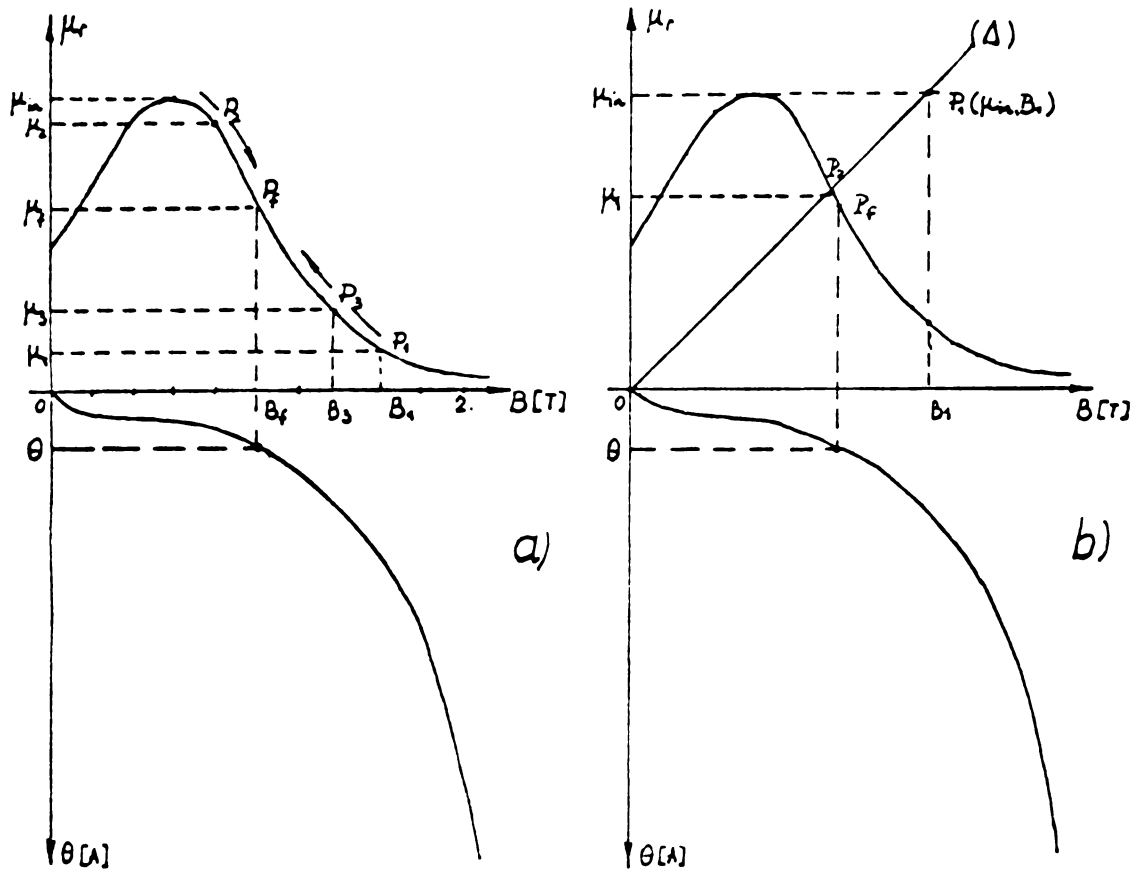
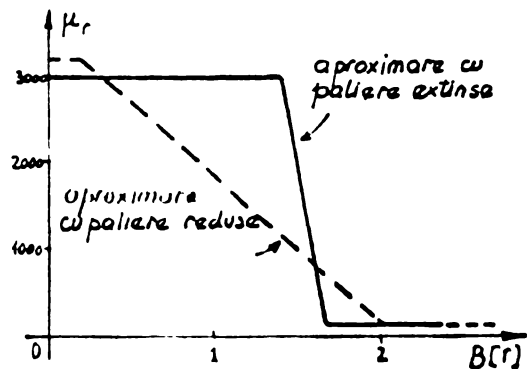


Fig. 4.34

Diverse modalități de alegere a permeabilităților succesive pentru o problemă nelineară.

Fig. 4.35

Asupra problemei palierelor curbei  $\mu = f(B)$ .



Pentru a soluționa inconvenientele menționate a fost experimentată cu deosebit succes metoda de mai jos care aparține autorului.

Indiferent de valoarea permeabilității inițiale  $\mu_{in}$  (zona cu  $\mu_{max}$  sau  $\mu_{min}$ ) pentru iterația  $p$  se ia permeabilitatea de alcul  $\mu_c$  rezultată din rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} \mu = \frac{\mu^{p-1}}{B^{p-1}} \cdot B & (4.185) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = f(B) & (4.179) \end{cases}$$

Dreapta  $\Delta$ , rel. (4.185), este determinată de origine și punctul de coordonate  $(\mu^{P-1}, B^{P-1})$ .

Analizînd curbele  $\mu = f(B)$  din fig.4.33 s-a ales o funcție (4.179) de aproximare pe porțiuni de forma celei redată în fig.4.36. Constantele ce intervin sînt determinate pentru fiecare material în parte astfel ca în zona inducțiilor medii și mari să fie o suprapunere cît mai bună.

$$\mu_r = \begin{cases} \mu_{\max} & \text{pentru } 0 < B \leq B_I \\ m'B + n' & \text{pentru } B_I \leq B \leq B_{II} \\ \frac{C}{B-C_1} + C_2 & \text{pentru } B_{II} \leq B \leq B_{III} \\ m''B + n'' & \text{pentru } B_{III} \leq B \leq B_{IV} \\ \mu_{\min} & \text{pentru } B > B_{IV} \end{cases} \quad (4.186)$$

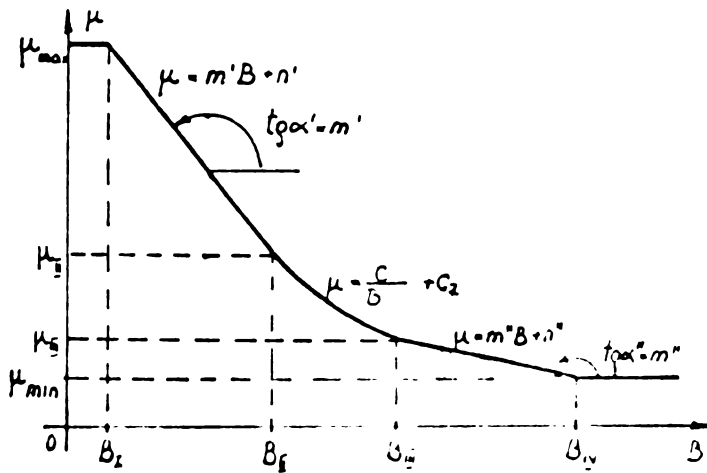


Fig.4.36  
Funcția de aproximare  
 $\mu = f(B)$

În fig.4.33 s-a trasat o primă aproximare a curbei  $\mu = f(B)$  corespunzătoare tablei Hoesch-Dyba, avînd paliere prelungite. Constantele din expresia (4.186) au avut valorile:

$B_I = 1.4 \text{ T}$	$B_{II} = 1.6 \text{ T}$	$B_{III} = 2.0 \text{ T}$	$B_{IV} = 5.0 \text{ T}$
$m' = -11500$	$m'' = -16$	$n' = 19100$	$n'' = 92$
$C = 80$	$C_1 = 1.5$	$C_2 = -100$	$\mu_{\max} = 3000$
$\mu_{\min} = 12$	$\mu_I = 700$	$\mu_{II} = 60$	$\mu_{IV} = 12$

Paliereul exagerat din zona  $0 < B \leq 1.4 \text{ T}$  a condus la un număr de iterații în jur de 10÷12 pentru rezolvarea problemei neliniare cu o precizie mediocră; reziduuul maxim procentual  $< 10 \%$  din valoarea potențialului punctului în care apare. S-a încercat în continuare o aproximare a curbei  $\mu = f(B)$  cu o curbă avînd un palier mai redus, fiind în partea liniară apropiată de curbele  $\mu = f(B)$  ale materialelor de performanță medie. (A se vedea tot fig.4.33) Pentru această aproximare numărul de iterații s-a redus simțitor, fiind în medie 6÷7 pentru o precizie îmbunătățită; re-

ziduul maxim procentual < 5 % din valoarea potențialului punctului în care apare.

Constantele expresiei (4.186) au fost în acest caz:

$$\begin{array}{llll}
 B_I = 0.1 \text{ T} & B_{II} = 1.5 \text{ T} & B_{III} = 2.0 \text{ T} & B_{IV} = 2.5 \text{ T} \\
 m' = -2158.3 & m'' = -89.6 & n' = 3647.5 & n'' = 232 \\
 C = 100 & C_1 = 1.3 & C_2 = -90 & \mu_{\max} = 3431.66 \\
 \mu_{\min} = 8 & \mu_I = 410 & \mu_{II} = 52.8 & \mu_{IV} = 12
 \end{array}$$

Alegerea densității de curent este o problemă spinoasă deoarece circuitul magnetic al subdomeniului de calcul este puternic asimetric din punct de vedere al reluctanței magnetice, fapt remarcat și din desenul la scară din fig.2.5. Probleme similare a ridicat și seria de programe SORSKLF3 motiv pentru care se vor detalia toate aspectele rezolvării acestei probleme în prezentul paragraf.

Respectarea criteriului de a avea solenații egale și de sens contrar în cele două părți conduce la următoarele valori ale curenților:

Tabel 4.10

Crestătura	Suprafața străbătută de curent $\times 10^{-3} [\text{m}^2]$	Densitatea curenților $\times 10^6 [\text{A}/\text{m}^2]$	Curentul din crestătură [A]
1	.124151	6	744.904
2	.121490	6	728.943
3	.120000	6	720.025
4	.121330	12	1456.030
5	.061926	12	743.112
6	.101844	-10.9	-1118.603
7	.100730	-10.9	-1106.368
8	.098699	-21.9	-2168.118
			$\sum i = -0.076 \text{ A}$

Infășurarea statorică este alimentată de un sistem trifazat de curenți, avînd cîte q crestături parcurse de același curent. În fig.4.37 curba solenației este reprezentată pentru momentul în care curentul prin crestătura statorică notată 1 este maxim. În aceeași figură se presupune că rotorul în scurtcircuit are crestăturile în poziția figurată, ceea ce corespunde poziției crestăturilor în domeniul de studiu descris de fig.2.4 . La poziții diferite ale rotorului, pot intra în zona statorică luată în studiu unul sau patru crestături rotorice. Evident spectrul cîmpului se modifică, după cum și problemele legate de alegerea densității de

curent in crestaturile rotorice.

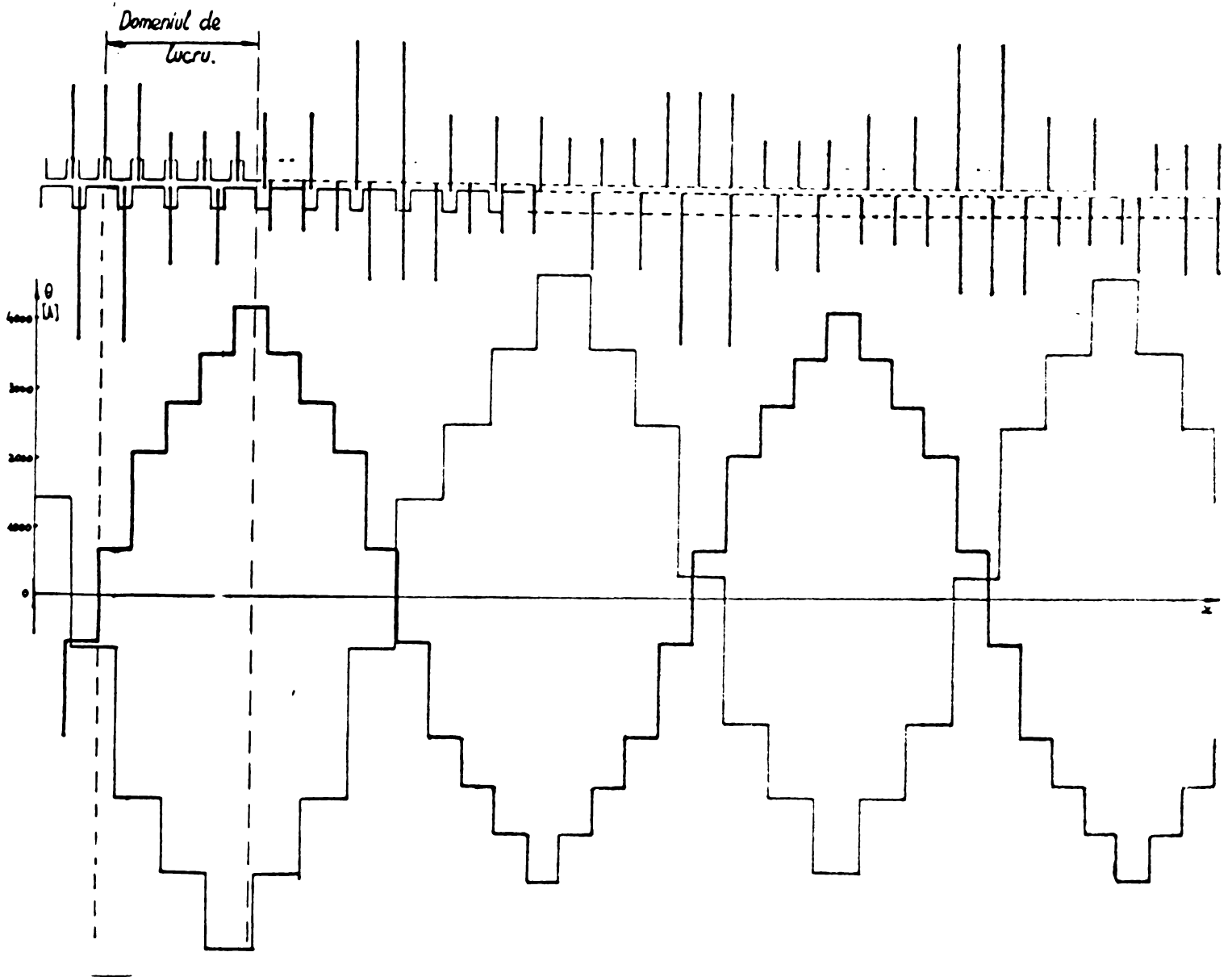


Fig.4.37

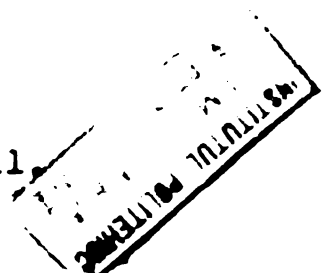
Referitor la modul de stabilire a densității curentului în rotor.

Alegînd densitățile de curent conform tabelului 4.10, linia de cîmp  $A = 0$  s-a plasat în zona statorului, mult peste linia întrefierului, semnul predominant al potențialului vector fiind semnul curentului din rotor. Permeanțele de dispersie nu au mai putut fi calculate prin procedeul descris în cap. 4.5.3.4. Deaceia se dau în cap. 7 indicații cu privire la prelucrarea rezultatelor obținute în această situație.

Încercînd o contornare a dificultății amintite, s-a încercat distribuirea curenților în creștăturile configurației astfel ca amplitudinile fundamentalelor păturilor de curent să fie egale și de semn contrar. Acceptînd pentru fundamentală păturii de curent statorice

$$a(x) = 1500 \sin \frac{\pi}{6} x$$

se obțin densitățile de curent redată în tabelul 4.11.



Tabel 4.11

Crestătura	Suprafața străbătută de curent x 10 m	Densitatea curentului x 10 A/m	Curentul din crestătură A
1	.124151	5.8	720.0758
2	.121490	5.8	704.6420
3	.120000	9.6	1149.0660
4	.121330	12.0	1456.0300
5	.061926	12.0	743.1120
6	.101844	-3.2	-324.6591
7	.100730	-9.6	-964.1812
8	.098699	-14.0	-1385.8192
			$\sum I = 2098.2662 \text{ A}$

Nici metoda expusă în tabelul 4.11 nu a dat rezultate satisfăcătoare, nereușind să plaseze linia  $A = 0$  la nivelul întrefierului. Există deci transfer de energie între cele două părți ale mașinii. Dacă nu există transfer de energie, înseamnă că energia celor două părți este egală, adică avem:

$$\iiint_{V_r} \frac{B^2}{\mu} d\tau = \iiint_{V_s} \frac{B^2}{\mu} d\tau \quad (4.187)$$

Șau altfel scris:

$$\iint_R \left[ \frac{1}{2} \left\{ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - J_{c_r} A \right] dx dy = \iint_S \left[ \frac{1}{2} \left\{ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - J_{c_s} A \right] dx dy$$

$$\iint_R \left[ \frac{1}{2} \left\{ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \iint_S \left[ \frac{1}{2} \left\{ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \iint_R J_{c_r} A dx dy = \iint_S J_{c_s} A dx dy$$

Presupunînd o repartitie a potențialului vector aproape similară în cele două zone, cu valori și derivate practic egale, se obține:

$$\left[ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] (S_R - S_S) = A_m (\sum I_R - \sum I_S)$$

$$\sum I_R - \sum I_S = \frac{\left[ v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot A_m}{S_R - S_S} \quad (4.188)$$

S-ar putea determina deci  $\sum I_R$  impunînd curenții din stator ( $\sum I_S$ ) dacă se cunoaște valoarea medie a potențialului vector în restături ( $A_m$ ), suprafețele totale ale rotorului ( $S_R$ ), statorului ( $S_S$ ) și derivatele  $\partial A / \partial x$  și  $\partial A / \partial y$ .

d Relația (4.188) nu este însă o relație practică, putînd fi utilizată doar într-un procedeu de recurență pentru  $J$  la  $I_S$  impus.

c Rezultă deci concluzia că trebuie găsită o metodă de separare a componentelor cîmpului total dat de soluția problemei de cîmp.

#### 4.5.4.4 Soluția problemei de câmp

Programul SORSELF2 a fost utilizat pentru configurația din fig.4.31, a cărei discretizare se vede în fig.2.4 și care este făcută conform celor expuse în §4.5.4.2. Din cauza problemelor ridicate de obținerea descrierii topologiei discretizării a fost analizată o singură configurație, modificând doar valorile curenților din crestături pentru diverse rulări. Timpul de calcul pentru obținerea unei soluții este destul de mare, motiv pentru care s-au explorat relativ puțin proprietățile remarcabile ale acestei serii de programe.

Am selectat în tabelul 4.12 principalele caracteristici ale câtorva rulări ale programului SORSELF2, rulări care au fost utilizate în continuare pentru prelucrarea rezultatelor.

Tabel 4.12 Principalele caracteristici ale rulărilor studiate

Rulare		1	2	3	4
Caracteristici					
Curenții din crestături	$I_1$	720.1 A	744.9 A	1440.0 A	2160.0 A
	$I_2$	704.6 A	728.9 A	1409.0 A	2114.0 A
	$I_3$	1149.0 A	720.0 A	2298.0 A	3447.0 A
	$I_4$	1456.0 A	1456.0 A	2912.0 A	4368.0 A
	$\frac{1}{2}I_5$	743.1 A	743.1 A	1486.0 A	2229.0 A
	$I_6$	-568.2 A	-1118.6 A	-649.3 A	-649.3 A
	$I_7$	1687.0 A	-1106.3 A	-1928.0 A	-1928.0 A
	$I_8$	-2425.0 A	-2168.1 A	-2772.0 A	-2772.0 A
Permeabilitate inițială $\mu_{in}$		30	30	500	500
cf. Eq. 4.36. $\mu = f(B)$	$B_I$	0.1 T	0.9 T	0.1 T	0.1 T
	$\mu_{max}$	3431.0	1500.0	3431.0	3431.0
	$B_E$	1.5 T	1.8 T	1.5 T	1.5 T
	$\mu_E$	410.0	112.0	410.0	410.0
	$B_{\bar{E}}$	2.0 T	2.5 T	2.0 T	2.0 T
	$\mu_{\bar{E}}$	52.8	12.0	52.8	52.8
	$B_{\bar{I}}$	2.5 T	5.0 T	2.5 T	2.5 T
	$\mu_{\bar{I}}$	8.0	8.0	8.0	8.0
Număr iterații		8	10	7	6
Timp de calcul		35'12"	38'39"	27'28"	23'32"
Secunde pe iterație		264"	231.9"	235.4"	235.3"

Se remarcă ușor că o aproximare a curbei  $\mu = f(B)$  cu palete prelungite în zona inducțiilor mici (rularea a doua) a condus la un timp de calcul prelungit, iar permeabilități finale relativ



mici (rularea 4) cauzate de curenți mari în creștături, conduc mai rapid la soluția căutată (6iterații în loc de 8 iterații) în cazul aceleiași aproximări  $\mu = f(B)$ .

Rularea a doua corespunde unui regim cu solenații perfect egale și de semn contrar în stator și rotor, așa cum s-a stipulat în tabelul 4.10. A rezultat o soluție finală de semnul curentului din rotor, în toate punctele domeniului, așa cum se poate vedea în anexa A2 tabel 2. Deaceea s-a apelat la procedeul descris de tabelul 4.11 pentru a hotărî solenația din rotor. Rularea a treia corespunde valorilor din tabelul 4.11 multiplicat cu 2. Semnul soluției finale a rezultat în toate punctele domeniului de semnul curentului din stator.

Permeanțele calculate cu relația (4.159) nu mai corespund permeanțelor de dispersie, deoarece cîmpul creștăturilor nu e un cîmp de dispersie pur. Făcînd integrala din (4.156) în elementele în care  $j \neq 0$ , obținem pentru cele patru rulări situația din tabelul 4.13.

Tabel 4.13 Valorile permeanțelor calculate cu rel.(4.159) pentru cele patru rulări analizate.

$\Lambda$ Rulare după (4.159)	1	2	3	4
Crestătura 1	-0.3468782	-0.4524775	+5.4789091	+3.8300638
Crestătura 2	-6.0988177	-0.7061705	+15.6290160	+11.2363390
Crestătura 3	-5.6316979	-4.6735851	+14.9048610	+11.0135220
Crestătura 4	-9.7422660	-4.6672189	+15.4937340	+11.3397900
Crestătura 5	-5.5720148	+0.3985239	+35.7462010	+25.7512710
Crestătura 6	+7.4802826	+4.3266273	+9.1752829	-11.0612690
Crestătura 7	+9.2946491	+9.4697195	-10.0108460	-11.8172550
Crestătura 8	+9.5731702	+7.3879728	-11.7535930	-13.3928890

Valorile permeanțelor creștăturilor statorică și rotorică calculate în mod clasic cu dimensiunile din fig.4.31 sînt;

$$\begin{aligned} \lambda_{cr\ st} &= 1.7 \\ \lambda_{cr\ rot} &= 2.95 \end{aligned} \quad (4.189)$$

așa după cum arată fișa de calcul a motorului întocmită de Serviciul Proiectare al IMEB. Faptul că nu există cea mai neînsemnată concordanță între valorile obținute în tabelul 4.13 și cele calculate în mod clasic, ne conduce la ideea că rezultatele obținute prin cele patru rulări trebuie prelucrate altfel decît utilizînd relația (4.159). În tabelul 4.5 se utilizează cu bune rezultate relația (4.161). Aplicînd-o pentru valorile medii ale potenția-

lului vector în fundul creștăturii și la nivelul istmului se obțin pentru permeanțele creștăturilor statorice valorile din tabelul 4.14. Se precizează faptul că rel.(4.161) a fost aplicată rulărilor 3 și 4 pentru soluția finală și rulărilor 1 și 2 pentru soluția corespunzătoare unei permeabilități constante în toate elementele  $\mu = \mu_{in} = 30$ , deoarece numai în aceste cazuri semnul potențialului vector e același cu semnul curentului din creștăturile statorice. O motivare detaliată a acestui mod de calcul se va face în cap. 7.

Tabel 4.14 Valorile permeanțelor  $\lambda$  calculate cu rel.(4.161) pentru creștături statorice.

Ru- lare	Perm. Iter.	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1	1 8	1.2625463 -	1.6278810 -	1.4675778 -	1.9675752 -	0.6570765 -
2	1 10	1.4551997 -	1.3594185 -	1.6504039 -	1.8172470 -	0.2302403 -
3	1 7	0.6292976 -	0.9809030 -	1.1548778 -	0.8539823 -	1.9117875 -
4	1 6	0.2706003 -	0.6540486 -	0.7162436 -	0.3693758 -	1.3637774 -

În principiu primele două rulări ar trebui să dea aceleași valori pentru permeanțele creștăturilor statorice deoarece permeabilitatea magnetică este constantă și aceeași. Curenții de creștătură sînt diferiți, însă nu ar trebui să influențeze valoarea permeanțelor. Înseamnă că în aceste condiții (ale programului SOR-SELF2) relația (4.161) nu dă rezultate corecte, deși valorile date în tabelul 4.14 se apropie de valorile teoretice (4.189).

Adoptînd prelucrarea rezultatelor descrisă în cap.7, adică separînd fluxul de dispersie de cel principal, se obține pentru creștătura nr.1 șirul de valori redat în tabelul 4.15. Prelucrarea soluției problemei de cîmp este laborioasă, motiv pentru care calculele au fost redată numai pentru creștătura nr.1.

Tabel 4.15 Permeanța creștăturii nr. 1 calculată prin metoda separării cîmpului de dispersie de cel principal.

Felul soluției	$\mu$ în jurul crest.	$\mu_r$	I [A]	$\Phi_r \cdot 10^4$ [Wb]	$\lambda$
stabilizată, finală	din soluție și rel.(4.186)	9.4 ÷ 25.9 preponderă 10 ÷ 12	2160.0	8.23	0.3032679
prima itera- ție cu $\mu_{in}$	constant	30	744.9	14.4	1.5255819
prima itera- ție cu $\mu_{in}$	constant	3000	744.9	22.1	2.3591424

Rezultatele din tabelul 4.15 sînt concludente. Ele dau o imagine corectă a fenomenelor ce se petrec în creștătura analizată și în materialul din preajma ei.

A fost analizată deasemenea valoarea inducției din întrefier pentru rulările expuse în tabelul 4.12. Rezultatele analizei sînt date sub formă compactă în tabelul 4.16 și fig.4.38 unde au fost trasate curbele corespunzătoare datelor din tabel.

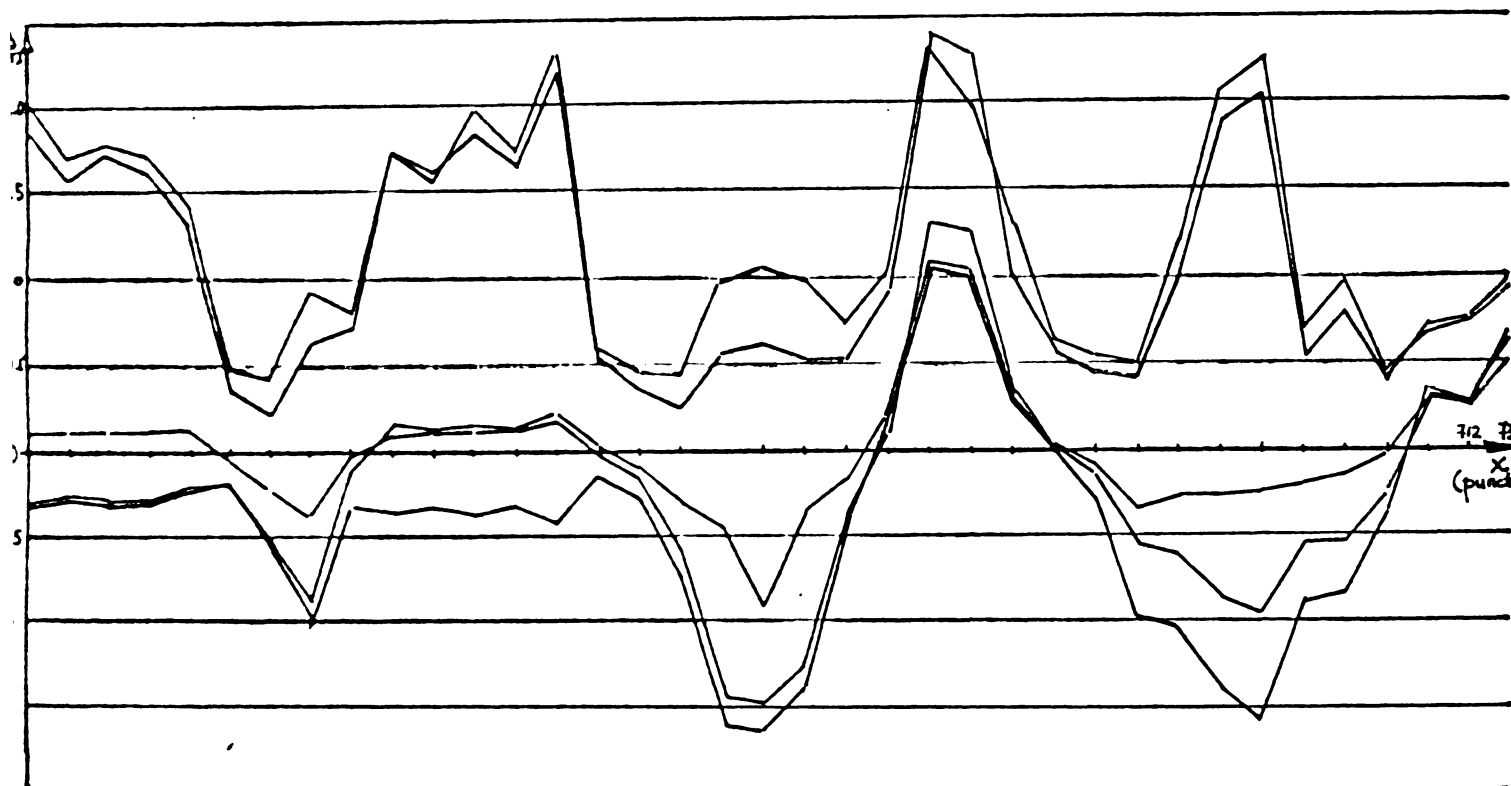


Fig.4.38

Variația inducției din întrefier pentru rulările din tabelul 4.12

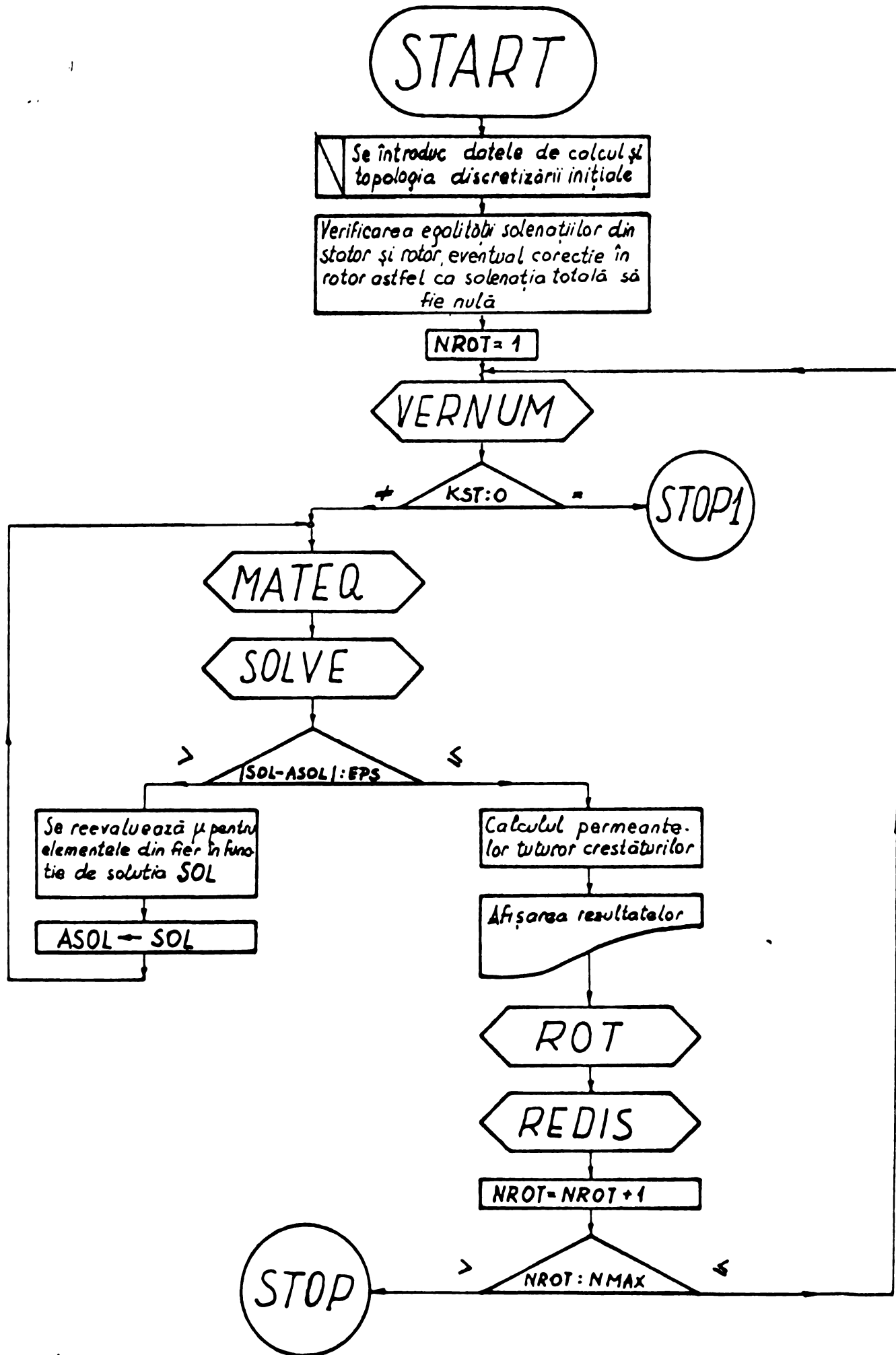
Variația cîmpului B în întrefier ajută la înțelegerea modului de prelucrare a rezultatelor expus în capitolul 7 pentru seriile de programe SORSELF2 și SORSELF3.

#### 4.5.5 SORSELF 3

##### 4.5.5.1 Prezentarea structurii programului

Seria de programe SORSELF3 rezolvă o problemă de cîmp plan paralel într-un domeniu izotrop și nelinear a cărui configurație se poate schimba automat pentru poziții succesive ale părții mobile. Ea a fost structurată pe subprogramele utilizate în seriile SORSELF anterioare, reprezentînt modificări decît în ceea ce privește mecanismul de obținere a descrierii topologiilor succesive ce apar în urma rotirii părții mobile cu un unghi  $\Delta\varphi$ . Acest lucru reiese din organigrama prezentată în fig.4.39.





- KST - Variabilă de test. KST=0 pentru topologie a discretizării găsită necorespunzătoare.
- SOL - Vector în care SOLVE depune soluția.
- ASOL - Vector în care se depune soluția anterioară iterației în curs.
- EPS - Norma admisibilă a vectorului eroare

Fig.4.39. Algoritmul programului SORSELF3

Rămîne deci de explicat modul în care subprogramele ROT și REDIS furnizează topologiile succesive.

Cînd se execută numerotarea nodurilor și a elementelor topologiei inițiale, se au în vedere criteriile expuse în [B66] care asigură o lățime minimă a semibenziilor matricii [M]. Aceasta are drept urmare existența unei ordini crescătoare a numerelor de ordine ale nodurilor dispuse în direcție radială, deoarece pentru minimum  $2 \div 3$  pași de creștere conținuți în domeniul de calcul, numărul cercurilor prin care se decupează configurația este sensibil mai mic decît numărul de raze. Decuparea domeniului prin cercuri concentrice și drepte dispuse radial dă naștere unor fișii de patrulare secționate ulterior în triunghiuri prin diagonale avînd în general aceeași direcție. Aceste fișii nu sînt de lățime constantă, iar dreptele numite "raze" sînt formate din segmente de dreaptă a căror dispunere nu este riguros radială. Esențial e însă numărul identic de fișii din stator și rotor. Dacă se execută NROT rotații, ultimele NROT fișii sînt delimitate de raze distanțate cu un unghi  $\Delta\varphi$  egal cu unghiul de avans a părții mobile.

Notațiile utilizate în continuare corespund figurii 4.40 care ajută la înțelegerea mecanismului algoritmului de rotire.

Prin rotirea părții mobile cu un unghi  $\Delta\varphi$  se execută un transport de material, fără a deforma frontiera exterioară inițială deoarece fișia de elemente considerată ultima în sensul rotirii (BDR) va ocupa locul primei fișii (B1ST). Prin rotire nu se modifică numărul de ordine al elementelor părții mobile, nici forma și nici suprafața lor. Sînt modificate coordonatele x și y a NPLM (număr de puncte de pe partea mobilă a razei) puncte de pe fiecare rază precum și lista NELVE pentru punctele aparținînd frontierei externe a părții mobile (LFS, LFD, LFP2) și a curbei de separație parte fixă - parte mobilă (JFM). Elementele fișiiilor care prin rotire "freacă" frontierele fixe vor fi delimitate de alte noduri, deși suprafața și forma lor nu se modifică. Lista NNEL se va modifica deci pentru numerele de ordine ale acestor elemente: cele din B1ST, B2ST, BDR, KBP, KB2. După executarea transportului de material prin rotire, nodurile situate în partea mobilă se renumerotează pentru a asigura lățimea de bandă a matricii M dată de topologia inițială.

Dacă ar fi să numerotăm "razele" din stator și rotor, am putea spune că renumerotarea nodurilor restabilește ordinea crescătoare pe "raze" stator și rotor avînd același număr de ordine.

Se operează din nou modificări în listele NNEL și NELVE, corespunzător noii numerotări.

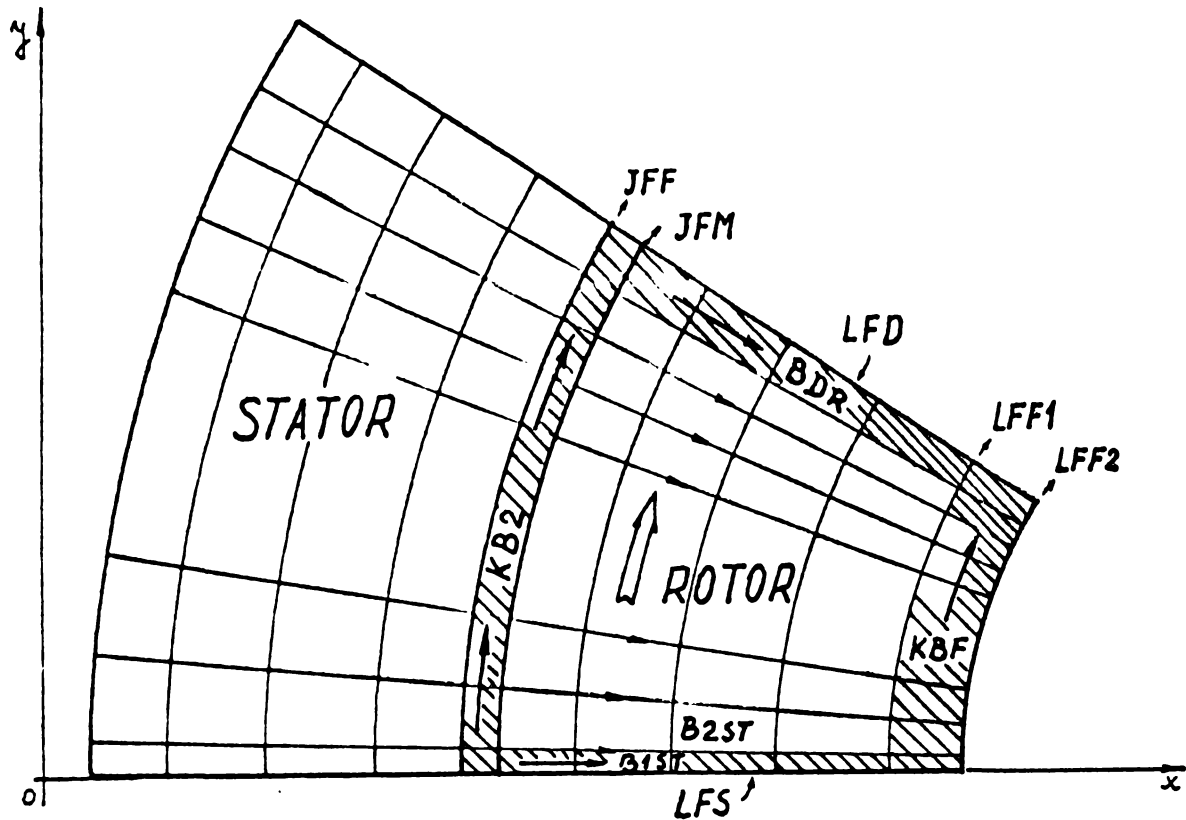


Fig.4.40

Explicativă la notațiile utilizate în subrutina REDIS

Figura 4.41 exemplifică pe o configurație redusă ca dimensiuni cum operează subprogramele ROT și REDIS.



Fig.4.41

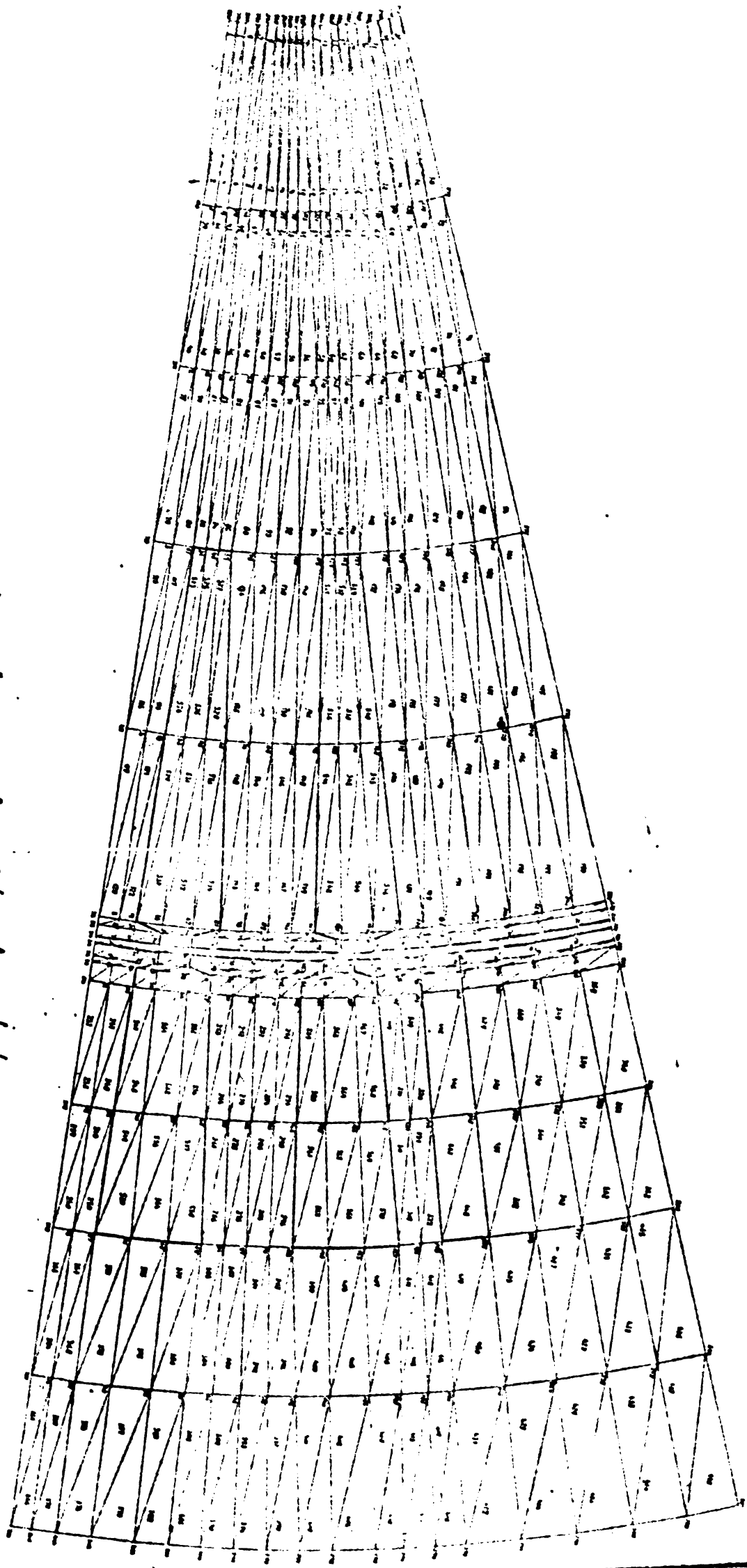
Exemplu de deplasare tratat în spiritul subrutinei REDIS

#### 4.5.5.2 Discretizarea domeniului

S-a făcut conform principiilor enunțate, rezultând pentru topologia inițială discretizarea prezentată în fig.4.42 și care are următoarele caracteristici:

Numărul total de puncte	NP = 320
Numărul de elemente	NE = 570
Numărul de ecuații	NES = 252
Numărul maxim de elemente vecine	NEM = 7
Lățimea semibenzi	LB = 16
Ultimul element situat în fier	NFER = 438

Fig. 4.42. Discretizarea domeniului de calcul pentru programul SORSELE 3.



INSTITUTUL POLITEHNIC  
TIMIȘOARA  
BIBLIOTECA CENTRALĂ



Numărul de elemente al unei benzi în mișcare NELBG = 12  
 Numărul de puncte de pe partea "mobilă" a razei NPLM = 7  
 Unghiul de avans al părții mobile  $\Delta\varphi = 0.023958 \text{ rad}$   
 sau  $\Delta\varphi = 1^{\circ}22'21,7''$

4.5.5.3 Proprietăți de material  $\mu$   
și sarcina electromagnetică J.

S-a rulat cu densități de curent de 12 A/mm<sup>2</sup> în creștătura statorică, pentru creștăturile rotorice ajustând astfel densitatea ca să avem un regim de lucru cu solenații egale și de semn contrar în rotor și stator.

Pentru caracteristica de material  $\mu/\mu_0 = f(B)$  s-a adoptat aproximarea de tip (4.186). În ceea ce privește palieretele din zona inducțiilor mici și mari, s-au făcut rulări cu ambele tipuri de aproximări, ajungând la aceleași concluzii cu cele formulate la seria SORSELF2.

4.5.5.4 Rezultate obținute

Pentru cazul prezentat în fig.4.42 s-au executat rulări atât cu solenații perfect egale și de semn contrar, cât și cu dezechilibre neînsemnate, pentru densitățile de curent amintite. Permeanțele creștăturilor calculate cu relația (4.159) pentru cele șase poziții distincte ale rotorului sînt date în tabelul 4.18.

Caracteristicile principale ale rulărilor luate în considerație sînt date de asemenea sub formă tabelară în tabelul 4.17 pentru norma vectorului eroare 5% !

Tabel 4.17 Privește caracteristici ale rulărilor studiate(SORSELF3)

Rulare		1	2	3	4	5
Caracteristici		15/02/78	17/02/78	21/02/78	22/02/78	02/03/78
Curentii din creștături	I <sub>1</sub>	1880.99	1880.99	1880.99	2684.48	2684.48
	I <sub>2</sub>	1907.64	1907.64	1907.64	2722.52	2722.52
	I <sub>3</sub>	-1863.53	-1863.53	-1863.53	-2676.62	-2706.55
	I <sub>4</sub>	-1859.33	-1859.33	-1859.33	-2670.59	-2700.45
	ΣI	65.77	65.77	65.77	59.79	0.
Permeabilitate inițială		3000	3000	3000	3000	3000
Poziții distincte tratate		3	3	6	6	6
Număr iteratii pe poziția tratată	Poz: 1	12	-	13	14	17
	" 2	8	-	10	10	15
	" 3	29	-	29	13	13
	" 4	14	2	15	17	13
	" 5	-	13	21	14	15
	" 6	-	9	29	10	11
Timp de calcul		22'01"	9'46"	27'33"	27'49"	26'54"

Tabel 4.17 (continuare)

Rulare		1	2	3	4	5
Caracteristici		15/02/78	17/02/78	21/02/78	22/02/78	02/03/78
$\mu = \tau(0)$ cf. fig 4.36	$B_r$	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
	$\mu_{max}$	3000	3000	3000	3000	3000
	$B_{\tau}$	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
	$\mu_{\tau}$	700	700	700	700	700
	$B_{\tau}$	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
	$\mu_{\tau}$	60	60	60	60	60
	$B_{\tau}$	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
	$\mu_{\tau}$	12	12	12	12	12
Existența istm în stator		da	da	nu	nu	nu

Tabel 4.18 Permeanțele creștăturilor configurației pentru cele 6 poziții tratate prin programul SORSELP3 în cele cinci rulări luate în considerare

Crestătura Poziția	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	Rulare
1	1.5491346	1.9586880	2.0767014	1.8168619	1 15/02/78
2	2.2314000	3.2109271	1.9435783	0.8183747	
3	5.0174869	8.2723170	0.5934219	-4.4635163	
4	3.1537030	4.4077088	2.0798846	-0.0970518	
5	-	-	-	-	
6	-	-	-	-	
1	-	-	-	-	2 17/02/78
2	-	-	-	-	
3	-	-	-	-	
4	3.3064121	4.8839082	2.1179464	-0.1864762	
5	2.0585419	3.2098847	2.5480071	1.3579179	
6	2.3815946	2.4907590	2.4856979	1.2469233	
1	1.5288345	1.9240003	2.0905559	1.8880551	3 21/02/78
2	2.1613321	3.1783164	2.0243475	0.9612640	
3	4.9515810	8.5911046	0.7219109	-4.1815496	
4	3.1008556	4.5982252	2.1533983	0.0654013	
5	1.6455417	3.3297364	3.2058343	1.8565265	
6	2.2040095	2.4645144	2.5558613	1.5220863	
1	1.3011315	1.9055861	1.7662061	1.8934346	4 22/02/78
2	2.1679769	3.5461553	1.7761612	0.4911959	
3	3.6814370	6.4058110	1.1919353	-2.5307865	
4	2.3933562	3.4931726	1.8822460	1.0339501	
5	1.6870345	2.5890690	2.2342251	1.8740018	
6	-0.0909005	1.3605599	2.7263083	3.5546542	
1	1.4137734	1.7385927	2.0974473	2.0757147	5 02/03/78
2	2.0358544	3.0244613	1.6621108	1.0935252	
3	3.5078069	6.3645189	1.4048209	-1.9662559	
4	2.8252550	3.7398230	1.8104114	0.5111969	
5	1.8829466	2.6531369	2.1814493	1.6884112	
6	1.8504548	1.9605263	2.3045000	1.8705720	



Fig.4.43 prezintă grafic datele conținute în tabelul 4.18 pentru rularile 3 și 4, permeanțele statorice  $\lambda_1, \lambda_2$  și  $\lambda_3, \lambda_4$  (rotorice)

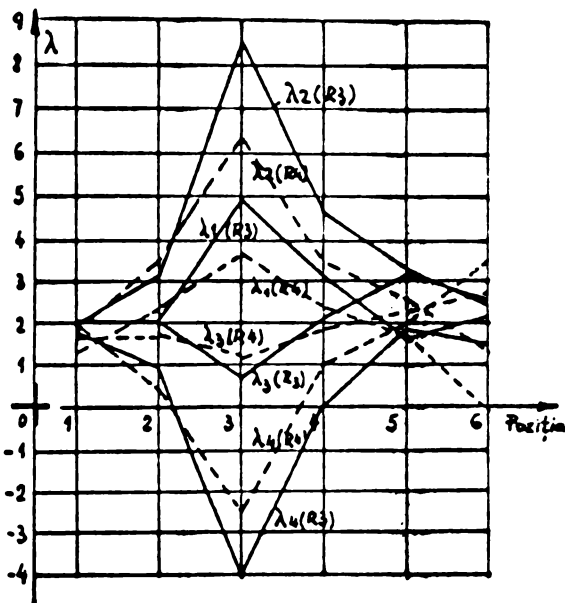


Fig.4.43

Variația permeanțelor de dispersie în funcție de poziția rotorului.

Se remarcă ușor că valorile permeanțelor calculate cu relația (4.159) nu corespund realității, pentru poziția 3 rezultând sistematic valori negative ale permeanței  $\lambda_4$ . Într-adevăr, consultând valorile potențialului vector în nodurile crestăturii 4 pentru poziția a 3-a a rotorului, se constată că acestea au semn opus semnului curentului. Înseamnă că acest curent se găsește în câmpul produs de solenația de pe fața opusă, fapt ce împiedică calculul permeanței cu relația (4.159) și utilizarea metodei de separare a fluxurilor descrisă în capitolul 7.

În poziția inițială există o concordanță perfectă între valoarea permeanței rezultată prin aplicarea relației (4.159) și metoda separării câmpurilor propusă în capitolul 7.

Potrivit rezultatelor obținute pentru rularea nr.3 din 21/02/1978 avem  $\lambda_{\sigma 3}$  calculat cu relația (4.159):

$$\lambda_{\sigma 3} = 2.0905559 \quad (\text{Tabel 4.18 coloana } \lambda_3 \text{ linia 13})$$

Separând câmpurile de dispersie și principal după principiul expus în cap.7 avem :

$$\Phi_{\sigma 3} = 4.8736195 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

ceea ce pentru curentul crestăturii

$$I_3 = 1863.53 \text{ A}$$

conduce la valoarea

$$\lambda_{\sigma 3} = \frac{\Phi_{\sigma 3}}{\mu_0 I_3} = 2.0811559$$

Acumantă concordanță nu este înlocuitorie. Fig.4.44 redă porțiunea de configurație corespunzătoare crestăturilor 1 și 3, față în față pentru poziția inițială. Figura 4.44 nu respectă scara desenului ,

structurată pe o rețea rectangulară uniformă, deoarece scopul ei este de a pune în evidență linia de cîmp  $A = 0$  și modul fericit în care aici zona cîmpului determinat de fiecare solenație se confundă cu zona cîmpului de dispersie a crestăturii. În aceasta rezidă explicația concordanței dintre rezultatele obținute prin cele două metode. În alte poziții și pentru alte crestături situația nu se reproduce.

Drept termen de comparație al valorilor expuse mai sus se dă valoarea teoretică a permeanței crestăturii 3 în ipoteza permeabilității infinite a fierului [B26]

$$\lambda_{teor} = 2.2110257$$

În urma analizei rezultatelor generale obținute pentru configurația cu 4 crestături din fig.4.42 s-a ajuns la concluzia că istmul situat în stator (practicat în ideea creerii pentru crestătura 4 a unei situații analoage cu aceea a crestăturii 3) nu schimbă sensibil spectrul cîmpului, efectul asimetriei magnetice creeat de spațiul de gardă fără crestături (dar necesar pentru rotire), fiind mult mai mare.

A rezultat de asemenea că spațiul de gardă alterează mult spectrul cîmpului pentru crestătura 4 statorică, ea fiind complet "înocată" în poziția 3-a a rotorului. De aceea s-a desenat un model cu 6 crestături, care nu a îmbunătățit însă sensibil rezultatele, asimetria fiind încă marcantă asupra valorilor potențialului vector din zona crestăturilor statorice vecine spațiului de gardă.

Important de reținut este mecanismul de rotire pus la punct în această serie de programe. El poate fi aplicat unei configurații extinse la întreaga mașină, cînd nu se mai pune problema spațiilor de gardă.

CAP. 5 UTILIZAREA METODEI DE ELEMENTE FINITE  
PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI DE CIMP.

5.1. Principiul metodei

Pentru deducerea algoritmului de calcul a potențialului magnetic vector se pornește de la forma integrală a ecuației (25):

$$\oint_r \vec{H} d\vec{l} = \iint_{s_r} \vec{j}_c d\vec{s} \quad (5.1)$$

Relația (5.1) se aplică într-o rețea de discretizare ce cuprinde domeniul D de existență a cîmpului, rețea necesară pentru rezolvarea numerică a problemei de cîmp, așa cum s-a arătat în cap.3. Fig.5.1 redă un fragment dintr-o rețea de discretizare rectangulară, deoarece utilizarea ei este cea mai răspîndită, iar raționamentul ce se va urmări se poate aplica analog oricărei alte rețele. Se va deduce deci algoritmul de calcul a potențialului magnetic vector  $A(x,y)$ , în nodurile rețelei, în ipotezele enunțate deja în § 2.2.

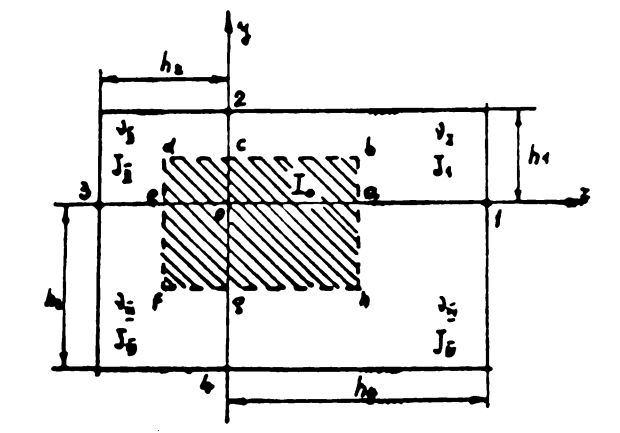


Fig.5.1  
Un segment de rețea rectangulară generală

Elementele ce înconjoară nodul 0 sînt caracterizate prin :

$$v_I, v_{II}, v_{III}, v_{IV} = ct \quad (5.2)$$

$$J_1, J_2, J_3, J_4 = ct \quad (5.3)$$

densitatea de curent J fiind orientată în lungul axei oz pentru reperul xoyz atașat planului de existență a cîmpului și avînd originea în nodul 0. Drumul de integrare este constituit de mediatoarele segmentelor 0-1, 0-2, 0-3, 0-4 ale rețelei.

Integrala (5.1) se poate scrie astfel :

$$\oint_r \vec{H} d\vec{l} = \int_a^b H_y dy + \int_b^c H_x dx + \int_c^d H_x dx + \int_d^e H_y dy + \int_e^f H_y dy + \int_f^g H_x dx + \int_g^h H_x dx + \int_h^a H_y dy = \frac{1}{4} [J_1 h_1 h_4 + J_2 h_2 h_1 + J_3 h_3 h_2 + J_4 h_4 h_1] = I_0 \quad (5.4)$$

Componentele cîmpului H pe cele două direcții sînt conform ipotezelor din § 2.2:

$$H_x = \nu \frac{\partial A}{\partial y} \quad (5.5)$$

$$H_y = -\nu \frac{\partial A}{\partial x} \quad (5.6)$$

ceea ce duce la transformarea expresiei (5.4) după cum urmează :

$$\begin{aligned} \oint_r \bar{H} d\bar{l} = & -v_I \int_a^b \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) dy - v_I \int_b^c \frac{\partial A}{\partial y} dx - v_{II} \int_c^d \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) dx + v_{II} \int_d^e \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) dy + \\ & + v_{III} \int_e^f \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) dy + v_{III} \int_f^g \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) dx + \int_g^h (v_{IV} \frac{\partial A}{\partial y}) dx - \int_h^a v_{IV} \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) dx = I_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Fiecare integrală din (5.7) se evaluează după modelul dat mai jos pentru  $\int_a^b$ :

$$-v_I \int_a^b \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) dy \approx -v_I \frac{A_1 - A_0}{h_4} \cdot \frac{h_1}{2} \quad (5.8)$$

Relația (5.8) este aproximativă, dar pentru o rețea suficient de fină ( $h_1, h_2, h_3, h_4$  suficient de mici) ea este satisfăcătoare.

Insumând toate componentele din (5.7) se obține:

$$A_0 = \frac{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + I_0}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \quad (5.9)$$

în care :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (v_{I} h_1 + v_{IV} \cdot h_3) \cdot h_4 / 2 \\ \alpha_2 &= (v_{II} h_2 + v_{I} \cdot h_4) \cdot h_1 / 2 \\ \alpha_3 &= (v_{III} h_3 + v_{II} \cdot h_1) \cdot h_2 / 2 \\ \alpha_4 &= (v_{IV} h_4 + v_{III} \cdot h_2) \cdot h_3 / 2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$I_0 = \frac{1}{4} [J_1 \cdot h_1 h_4 + J_2 \cdot h_2 h_1 + J_3 h_3 h_2 + J_4 \cdot h_4 h_3] \quad (5.11)$$

Relația de legătură între potențialul vector al punctului 0 și cel al punctelor vecine este liniară, putînd fi pusă sub forma :

$$A_0 = C_1 A_1 + C_2 A_2 + C_3 A_3 + C_4 A_4 + C_0 \quad (5.12)$$

în care coeficienții  $C_i$  ( $i=1,2,3,4,0$ ) sînt determinați exclusiv de proprietățile de material, sarcina electromagnetică și dimensiunile rețelei.

Relația (5.12) este analogă relației (4.43) și constituie nucleul algoritmului de calcul a potențialului magnetic vector prin metoda diferențelor finite, deoarece aplicînd-o fiecărui nod al rețelei în ordinea dictată de numerotarea nodurilor, se obține un sistem liniar asemănător sistemului (4.45) din cap. 4.3.2. Metoda diferențelor finite preferă tehnici de rezolvare a acestui sistem deduse din metodele iterative expuse în cap. 4.4. fără a asambla sistemul.

Aplicarea relației (5.9) în fiecare nod al rețelei de discretizare impune cunoașterea în fiecare nod a elementelor ce sînt utilizate ca ostre (5.10) motiv pentru care în continuare se va analiza modul de discretizare a domeniului D și restricțiile ce rezultă.

### 5.2. Discretizarea domeniului D de existență a cîmpului

Fig. 5.2. prezintă discretizarea domeniului D, pentru o problemă de tip Dirichlet, prin intermediul a două tipuri de rețele :

- rețea uniformă cu pași egali pe direcția lui x și y și egali între ei ( fig.5.2.a),
- rețea periodică cu pași egali pe direcția lui x și y dar neegali între ei ( fig. 5.2 b).

De asemenea în fig.5.2. c este dat un segment de rețea rectangulară generală, analogă celei descrise de segmentul prezentat în fig.5.1.

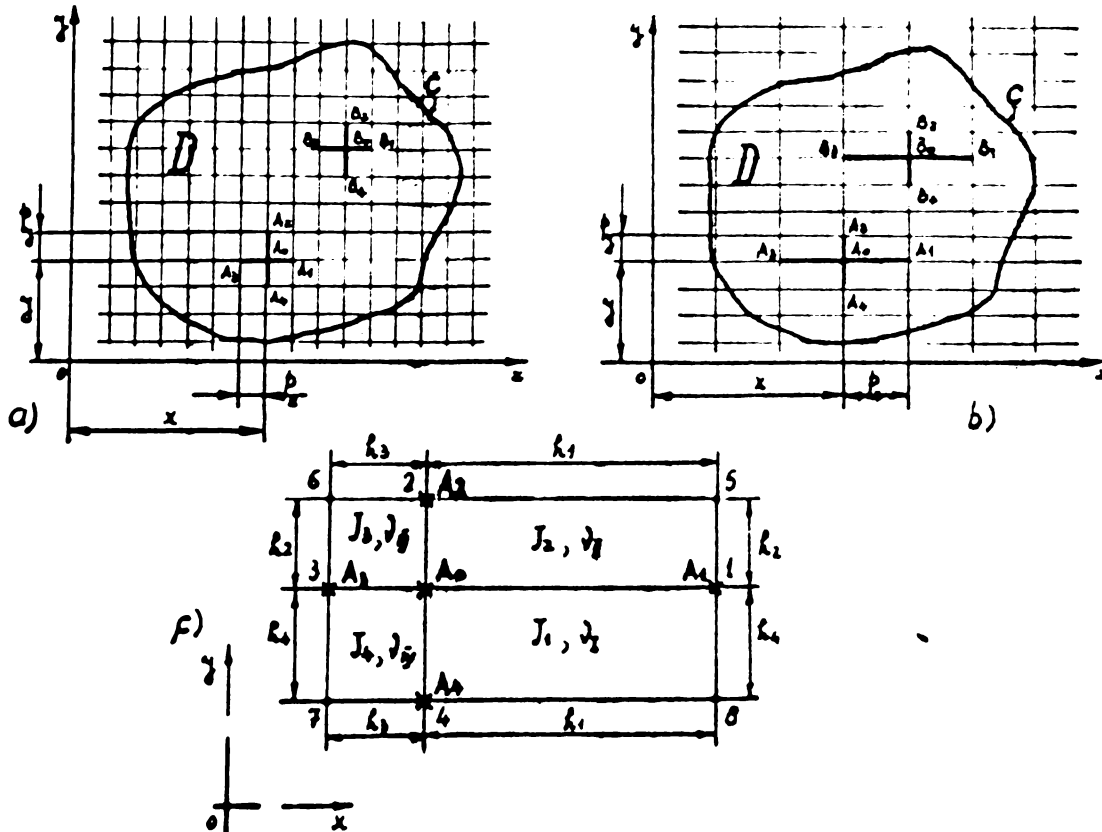


Fig.5.2. Discretizarea domeniului D prin rețele uniforme rectangulare.

Evident punctul O din fig.5.2. c poate fi oricare nod al rețelei. Oriocînd se poate exprima A în funcție de potențialul nodurilor vecine și proprietățile elementelor înconjurătoare. Dar dacă în noua poziție a punctului O configurația rețelei nu va reproduce configurația pentru care au fost evaluate constantele  $\alpha$ , expresia ( 5.9 ) nu mai poate fi utilizată ca bază a unui algoritm de calcul a potențialului vector în toate nodurile rețelei .

Acesta este motivul pentru care rețelele de discretizare a domeniului D trebuie să fie rețele periodice, cu laturile paralele <sup>directurilor</sup> V definatorii ale reperului.



Fig. 5.3  
O rețea periodică generală



Punctul O din fig.5.2. c poate ocupa într-o rețea periodică generală patru poziții distincte, ilustrate de fig.5.3. adică pozițiile punctelor  $X_1, X_2, X_3, X_4$ . Celelalte poziții sînt echivalente cu una din primele patru :

$X_5$  echivalent cu  $X_4$ , ș.a.m.d.

Rețelele periodice rectangulare generale sînt înlocuite în majoritatea cazurilor practice de rețele rectangulare uniforme (fig.5.2.a.) sau periodice cu pași egali pe direcția lui x și y (fig.5.2.b.) din următoarele motive :

- algoritmul de calcul se simplifică ,
- convergența procesului și precizia soluției nu se ameliorează utilizînd rețele periodice rectangulare generale.

Dacă există o direcție după care în mod sigur gradientul funcției potențial vector este mai mare, se alege o axă a reperului paralelă cu această direcție și se va practica o rețea ce pe direcția în cauză va avea pași egali , dar mai mici decît pentru direcția perpendiculară. În restul cazurilor dacă nu există constrîngeri cauzate de deformarea grosulună a frontierelor , se utilizează cu precădere rețele rectangulare uniforme.

Suprapunînd o rețea unui domeniu D oarecare, frontiera reală C trebuie înlocuită cu o frontieră care să urmeze direcțiile laturilor rețelei. Aceeași constrîngere se aplică și curbelor care delimitează zone ale domeniului D cu proprietăți diferite. Motivarea constrîngerii rezidă în procesul de calcul schematizat de relația (5.9) și ipoteza acceptată în definirea relației(5.9) : proprietățile elementelor, I, II, III, IV sînt constante în toate punctele lor.

Deformarea frontierelor este cu atît mai puternică cu cît pașii rețelei după una sau ambele direcții sînt mai mari (fig.5.4) Abateroa maximă a frontierei reale față de frontiera echivalentă  $e_{max}$  este după cum se vede, net inferioară pentru cazul din fig. 5.4.b față de cel din fig.5.4.a.

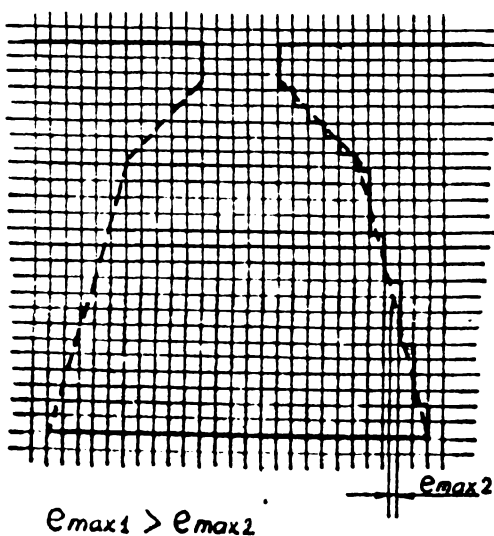
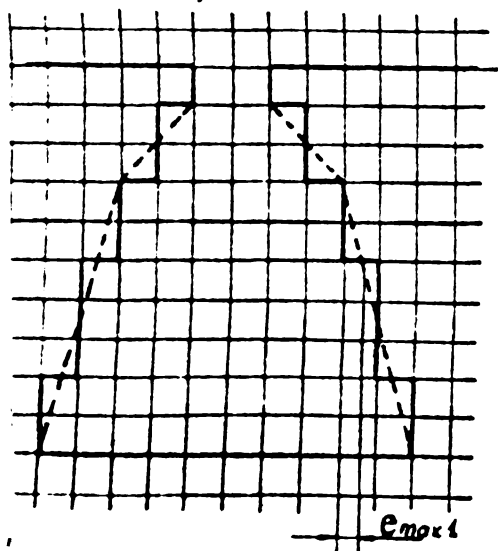


Fig.5.4

Deformarea configurației domeniului D prin suprapunerea unor rețele cu pași diferiți.

Micșorarea pașilor rețelei pînă cînd deformarea este negli-  
jabilă nu se poate practica totdeauna deoarece numărul nodurilor  
rețelei crește rapid , ceea ce constituie pe de o parte o proble-  
mă pentru trecerea algoritmului de calcul pe un calculator, iar pe  
de altă parte provoacă o creștere considerabilă a erorilor de  
calcul.

Dacă curbura suprafețelor nu este neglijabilă, iar suprafețe-  
le se situează după cilindri concentrici , se poate utiliza un  
reper polar. Rețeaua polară trebuie să fie și ea periodică, din cauza  
motivărilor de mai sus. Mărimile caracteristice ale unei rețele  
polare periodice sînt date în fig. 5.5 , iar relațiile de calcul ale  
potențialului vector în punctul A, pentru un cîmp de tip Laplace  
sînt cele de mai jos :

$$A_0 = \frac{A_1 \alpha_1' + A_2 \alpha_2' + A_3 \alpha_3' + A_4 \alpha_4'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4'} \quad (5.13)$$

în care :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= f_1' (\delta_2 v_{II} + \delta_4 v_{III}) \\ \alpha_2' &= \gamma_2' (\delta_1 v_{II} + \delta_3 v_{IV}) \\ \alpha_3' &= \gamma_3' (\delta_2 v_{II} + \delta_4 v_{IV}) \\ \alpha_4' &= \delta_4' (\delta_3 v_{II} + \delta_1 v_{IV}) \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

și  $\delta$  sînt constante geometrice definite astfel :

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 2 [\theta_1 (\theta_0 + \theta_1)]^{-1} \\ f_2 &= 2 (R_2 + R_0) [(R_2 - R_0)(R_2^2 - R_4^2)]^{-1} \\ \gamma_3 &= 2 (\theta_0 + \theta_1)^{-1} \\ \gamma_4 &= 2 (R_0 + R_4) [(R_0 - R_4)(R_2^2 - R_4^2)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \theta_1 (\theta_0 + \theta_1)^{-1} \\ \delta_2 &= 2 (R_0 - R_4) [R_0 (R_2 - R_4)^2]^{-1} \\ \delta_3 &= \theta_0 (\theta_0 + \theta_1)^{-1} \\ \delta_4 &= 2 (R_2 - R_0) [R_0 (R_2 - R_4)^2]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

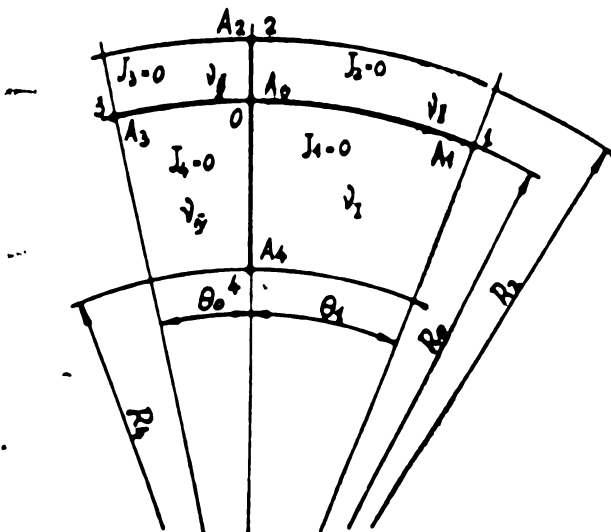
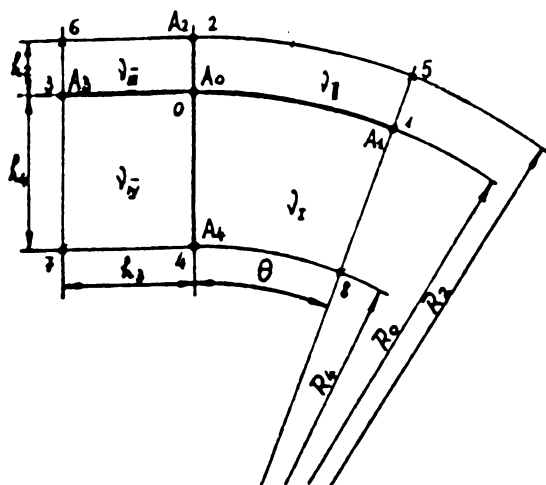


Fig. 5.5.

Mărimile caracteristice  
unei rețele polare perio-  
dice generale.

Fig.5.6

Mărimile caracteristice  
unei rețele combinate.



Există situații în care este necesară trecerea de la o rețea rectangulară la o rețea polară. Pentru o rețea combinată și curent nul în elementele situate în jurul punctului O, din fig. 5.6. relațiile de calcul ale potențialului punctului O în funcție de potențialele punctelor 1+ 8 și proprietățile de material ale elementelor I,II,III,IV se dau în [B4].

Literatura [B5], [II3], [II4] indică posibilitatea utilizării și a altor tipuri de rețele : hexagonale, rețea rezultată prin suprapunerea a două rețele rectangulare uniforme etc. Complicațiile rezultate sînt uneori justificate prin scăderea erorilor de discreti

Problema alegerii formei rețelei și a pasului ei este o problemă complexă ce nu se poate rezolva după reguli precise. Fiecare caz în parte trebuie analizat ,decizia fiind de cele mai multe ori un compromis între mai multe tendințe contradictorii. Din punct de vedere al deformării conturilor configurației și al reducerii erorilor de discretizare ar fi necesară o rețea cît mai fină.

Din punct de vedere al erorii globale și a vitezei de convergență , un număr prea mare de puncte constituie un dezavantaj.

Dacă calculul se face cu un ordinator, memoria centrală a ordinatorului va fixa aproape exclusiv numărul de noduri, deci dimensiunea rețelei. Forma ei este singurul parametru ce rămîne la latitudinea utilizatorului.

În general ordinatearele de capacitate medie au la dispoziția utilizatorului aproximativ 100 ÷ 120 kiloocteți. Dacă se lucrează în precizie simplă. înseamnă că pentru tabloul care conține valorile potențialului vector în nodurile rețelei există un spațiu de 20 + 25.000 adrese( cuvinte). Ori aceasta înseamnă o rețea care are maximum 150 x 150 puncte . Dacă domeniul D ar avea forma unui patrat cu latura L , rezultă pasul rețelei uniforme :

$$h = \frac{L}{150} \tag{5.17}$$

In general însă problema este mai complicată , Dimensiunile principale ale configurației trebuie să fie multiplu de  $h$ . In cazul unei configurații cu creștătură și întrefier se caută un pas-divizor comun al întrefierului  $\delta$  , al înălțimii istmului  $\gamma_1, \gamma_2$  și al deschiderii creștăturii  $s_1, s_2$  ( fig.5.7 )

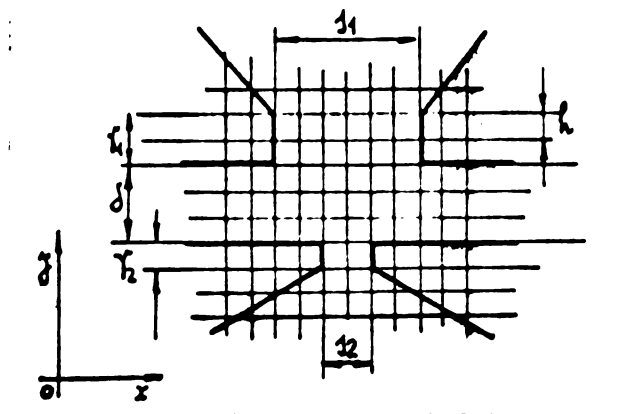


Fig.5.7.  
Referitoare la alegerea pasului rețelei

Dacă nu se poate găsi un pas  $h$  care să satisfacă atâtea condiții se încearcă o rețea neuniformă, cu pași în direcția lui  $x$  ( $h_x$ ) și  $y$ , ( $h_y$ ) dar neegali între ei ( $h_x \neq h_y$ ) . Acum  $h_x$  trebuie să dividă exact doar  $s_1$  și  $s_2$  iar  $h_y$  doar  $\delta$  ,  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  .

Dacă nici în aceste condiții nu putem găsi  $h_x$  și  $h_y$ , se va sacrifica dimensiunea cea mai puțin importantă iar configurația echivalentă va fi numai o aproximare a configurației reale.

Deoarece întrefierul , înălțimea istmului și deschiderea creștăturii sînt mici în comparație cu dimensiunile părții ocupată de conductoare, iar interesul pe care-l prezintă în calculul reactanțelor de dispersie a creștăturii partea ocupată de curent este mai redus decît interesul pe care-l prezintă zona capului dintelui și întrefierul, apare evident o contradicție între pasul necesar în zona capului dintelui și utilitatea acestui pas în zona ocupată de înfășurare . Ar fi utilă deci existența a două sau mai multe rețele, stabilind pentru fiecare rețea expresiile de calcul adecvate.

Problema nu este simplă , deoarece de-a-lungul liniei de separație a rețelelor apar numere de puncte diferite, de-o parte și de alta , așa cum se vede în fig.5.8.

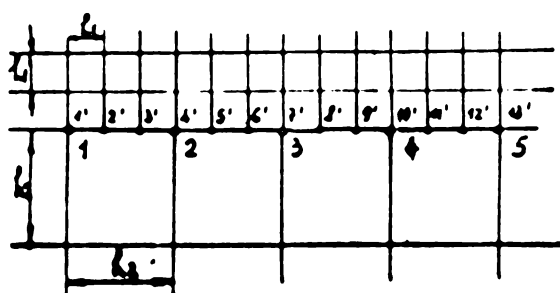


Fig. 5.8  
Explicativă la problema joncțiunii a două rețele uniforme cu pași diferiți.

Prin relațiile de calcul proprii rețelei cu pas mare se calculează potențialele punctelor 1, 2, 3 ... Procedând analog în rețeaua cu pasul mic, obținem potențialele punctelor 1', 2', 3' ... Deși teoretic  $A_1=A_1'$ ,  $A_2=A_2'$  etc. în practică pot apărea diferențe. De aceea s-a procedat în scrierea programului după cum urmează :

- În rețeaua avînd pasul  $h_2$ , pentru punctele liniei de separație se consideră rețeaua periodică din fig. 5.9 și relațiile de calcul corespunzătoare.

- Se impune  $A_1=A_1'$ ,  $A_2=A_2'$ , ... (în fig. 5.8)

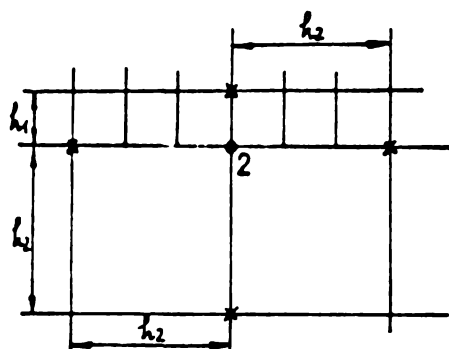


Fig. 5.9  
Explicativă la egalizarea potențialelor în anumite puncte ale liniei de separație.

- Între valorile impuse, în rețeaua cu pasul mic se face o interpolare (liniară, patratică, etc) pentru a afecta valori potențialului punctelor intermediare (2', 3', 5', 6', 8', 9' etc)

În realitate potențialul poate varia altfel decât se postulează și oricâte procedee de corecție se introduc ulterior, linia 1, 2, 3 ... rămîne o zonă unde convergența va fi slabă.

Dacă este posibil se va evita utilizarea mai multor rețele cu pas diferit în cadrul aceleiași probleme.

### 5.3. Definirea algoritmului de calcul

Dacă ( 5.9 ) se aplică succesiv nodurilor unei rețele periodice, apare prima condiție pentru asamblarea sistemului de ecuații :  
- numerotarea nodurilor și explorarea lor într-o anumită ordine.

Algoritmeele bazate pe diferențe finite rezolvă sistemul de ecuații printr-un proces iterativ, repetînd calculele pînă cînd diferența maximă între valori calculate succesiv în același punct este mai mică decît eroarea admisă pentru abandonul iterațiilor. Primul algoritm a fost imaginat de Richardson în 1911. Fie domeniul  $D$  înscris în segmentul de rețea uniformă din fig. 5.10

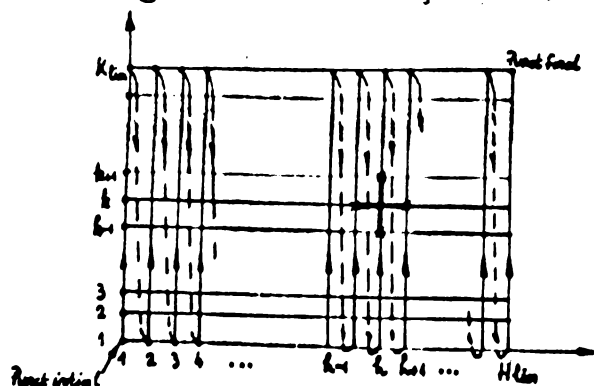


Fig. 5.10  
Referitor la algoritmul Richardson

În iterația  $n + 1$  pentru calculul potențialului vector în punctul  $(h,k)$  se utilizează valorile potențialului vector din punctele  $(h,k-1)$ ,  $(h,k+1)$ ,  $(h-1,k)$ ,  $(h+1,k)$ , calculate la iterația  $n$ :

$$A_{h,k}^{n+1} = C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^n + C_4 A_{h,k-1}^n + C_0 \quad (5.18)$$

Dezavantajele algoritmului lui Richardson sînt următoarele:

- convergența slabă a procesului,
- necesitatea stocării a două tablouri de dimensiunea  $H_{lim} \cdot K_{lim}$  în memoria calculatorului, unul conținînd valorile iterației  $n$ , celălalt al iterației  $n + 1$ .

Metoda Liebmann [B5] elimină al doilea dezavantaj utilizînd explorarea ordonată a punctelor, în ordinea indicată în fig. 5.10, adică luînd fiecare coloană în același sens. Cînd se ajunge la punctul  $(h,k)$ , punctele  $(h-1,k)$ ,  $(h,k-1)$  au fost deja explorate, deci se poate scrie:

$$A_{h,k}^{n+1} = C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^{n+1} + C_4 A_{h,k-1}^{n+1} + C_0 \quad (5.19)$$

Acum este suficientă stocarea unui tablou de dimensiunea  $H_{lim} \cdot K_{lim}$  în memorie, elementele lui fiind reevaluate progresiv, pe măsura avansării explorării punctelor.

Convergența este mai bună decît în cazul algoritmului lui Richardson, dar este nesatisfăcătoare pentru tablouri mari și pentru valori inițiale egale cu zero pentru potențialul magnetic vector  $A$ .

Frankel și Young [116], [117], [B5] au perfecționat metoda Liebmann introducînd suprarelexarea valorii potențialului în punctul  $(h,k)$  după metoda indicată de Southwell [112] în 1946.

Dacă soluția este stabilă, apare:

$$A_{h,k}^{n+1} = A_{h,k}^n \quad (5.20)$$

deci este licit a scrie:

$$A_{h,k}^{n+1} = A_{h,k}^n + \omega [C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h-1,k}^{n+1} + C_4 A_{h,k-1}^{n+1} + C_0 - A_{h,k}^n] \quad (5.21)$$

Relația (5.21) repretintă algoritmul "metoda Liebmann extrapolată". Factorul  $\omega$  de relaxare este cuprins între 1 și 2. Pentru valori apropiate de 2, procesul este instabil, iar pentru  $\omega = 1$  convergența este slabă. Există o valoare optimă pentru care viteza de convergență este maximă și eroarea de calcul rezonabilă. Valorile practice pentru  $\omega_{opt}$  oscilează între 1,6 și 1,85. Frankel și Young au stabilit valoarea factorului  $\omega$  de suprarelexare optim, pornind de la sistemul de ecuații asamblat pentru toate nodurile rețelei. Calculul soluției se face cu un proces iterativ de tipul:

$$A^{n+1} = MA^n + B \quad (5.22)$$

$M$  fiind o matrice de raza spectrală  $< 1$ , iar  $A^{n+1}$  vectorul valorilor

potențialul în a n + 1 a iterație .M, A<sup>n</sup> și B sînt bine definiți cînd se assemblează întreg sistemul de ecuații (vezi și rel.4.92 )

Dacă  $\lambda$  este valoarea proprie dominantă a matricii M, valoarea optimă a lui  $\omega$ , notată cu  $\omega_0$  va fi :

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda}} \quad (5.23)$$

Cum este greu de determinat, în practică imposibil (deoarece nu posedăm sistemul de ecuații asamblat) , se aproximează valoarea proprie dominantă cu raportul :

$$\lambda = \frac{\|A^n - A^{n-1}\|}{\|A^{n-1} - A^{n-2}\|} \quad (5.24)$$

Imediat ce acest raport este destul de stabil .In (5.24)  $\|A^n - A^{n-1}\|$  este norma vectorului-reziduu dintre iterația n și n - 1 de calcul a vectorului necunoscutei A.

Există relații semiempirice destul de numeroase pentru determinarea fie a lui  $\lambda$  , fie a lui  $\omega_0$ . Din [B5] se poate cita :

- pentru domeniul D sub forma unui patrat cu p + 1 noduri pe latură :

$$\lambda = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (5.25)$$

- pentru domeniul D de forma unui dreptunghi cu (p+1) x (q+1) noduri :

$$\omega_0 = 2\left(1 - \pi \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}}\right) \quad (5.26)$$

Unica metodă practică rămîne însă determinarea lui  $\lambda$  prin relația (5.24) .După aproximativ 100 de iterații se obține o valoare corespunzătoare pentru  $\lambda$ .

Dacă se ia ca normă a vectorului - reziduu valoarea maximă absolută a expresiei :

$$Rez^{n+1} = \text{Max}[\text{abs}(C_1 A_{h+1,k}^n + C_2 A_{h,k+1}^n + C_3 A_{h+1,k}^{n+1} + C_4 A_{h,k+1}^{n+1} + C_0 - A_{h,k}^n)] \quad (5.27)$$

atunci:

$$\lambda \approx \frac{Rez^{101}}{Rez^{100}} \quad (5.28)$$

In consecință algoritmul definit de expresia (5.21) poate asigura o bună convergență dacă se apreciază valoarea lui  $\omega$  cu relația (5.23), după ce valoarea razei spectrale (valoarea proprie dominantă a matricii M din (5.22)) s-a stabilizat și se poate calcula cu (5.28).

Detalierea calculelor impuse de (5.9) se face în funcție de fiecare configurație reală. În expresia generală (5.12 ) coeficienți C<sub>i</sub> trebuiesc calculați pentru fiecare nod în care se

aplică relația de calcul. Ori proprietățile elementelor rețelei variază.

De aceea, înainte de punerea la punct a algoritmului se caută toate situațiile tip, se scriu subrutine pentru calculul coeficienților, ușurând astfel asamblarea algoritmului general.

De exemplu: într-un câmp de tip Laplace situat în aer sau în alt mediu omogen, discretizat cu o rețea uniformă având latura patratului  $h$ , relația (5.9) devine:

$$A_0 = \frac{1}{4} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \quad (5.29)$$

#### 5.4. Accelerarea convergenței procesului

Orice metodă de apreciere a valorii optime a factorului  $\omega$  de suprarelaxare contribuie la accelerarea convergenței. Cîm evaluarea valorii optime este legată de calculul valorilor proprii ale unei matrici, problema se complică, deoarece calculul valorilor proprii este în sine o problemă dificilă a analizei numerice. De aceea se scriu programe fie cu  $\omega$  fix, fie cu  $\omega$  calculat prin procedeul anterior (rel (5.23) + rel (5.28)).

Dacă proprietățile materialului (permeabilitatea magnetică în speță) variază mult de la un element al discretizării la altul și dacă frontierele echivalente interne sau externe sînt cu multe colțuri, convergența iterațiilor spre o soluție stabilă este slabă [B5], [B40], [B41]. Uneori pot apărea chiar oscilații ale rezidului maxim.

Pentru accelerarea convergenței procesului în configurațiile ce conțin fier și aer se descrie în [B40] un procedeu de corecție a valorilor potențialului vector, corecție ce poate îmbunătăți considerabil convergența spre o soluție stabilă. Iată principiul corecției.

Fie o "feroastră" (zonă avînd  $\mu = \mu_0$ ) într-un domeniu feromagnetic, așa cum se vede în fig.5.11.

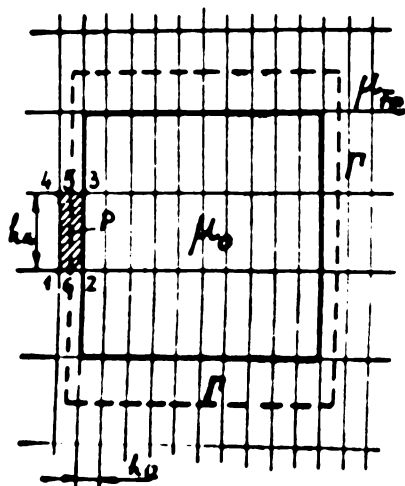
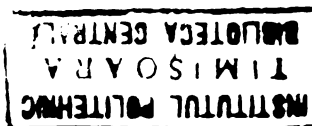


Fig.5.11  
O feroastră avînd  $\mu = \mu_0$ .





Pentru toate nodurile aparținând ferestrei, după fiecare iterație se aplică potențialul vector  $A$  corecția :

$$A' = A + \Delta A \quad (5.30)$$

în care  $\Delta A$  se apreciază în funcție de  $\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l}$  de-a lungul curbei  $\Gamma$  din fig. 5.11. Într-un punct  $P$  oarecare al curbei avem componenta cîmpului în lungul curbei :

$$H_i = \frac{1}{2\mu_{Fe}} \left[ \frac{A_1 - A_2}{h_{12}} - \frac{A_3 - A_4}{h_{34}} \right] \quad (5.31)$$

Această valoare se presupune constantă pe porțiunea :

$$\Delta l_i = \frac{h_{23} + h_{14}}{2} \quad (5.32)$$

Insumînd produsele  $H_i \Delta l_i$  de-a lungul curbei  $\Gamma$  avem valoarea calculată a integralei  $\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l}$ . Pe de altă parte :

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \iint_{S_r} \bar{J} d\bar{s} \quad (5.33)$$

Diferența care apare eventual între valoarea curentului total din fereastră  $\iint_{S_r} \bar{J} d\bar{s}$  și integrala calculată,

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} - \sum_i H_i \Delta l_i = \sum_i \frac{1}{2\mu_{Fe}} \left( \frac{A_1 - A_2}{h_{12}} - \frac{A_3 - A_4}{h_{34}} \right) \frac{h_{23} + h_{14}}{2} \quad (5.34)$$

provine de la valoarea incorectă a potențialelor  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , de aceea pentru punctele situate în zona care  $\mu_o = \mu$  se face corecția :

$$\Delta A = \frac{\iint_{S_r} \bar{J} d\bar{s} - \sum_i H_i \Delta l_i}{\sum_i \frac{1}{\mu_i} \left( \frac{h_{23} + h_{14}}{h_{12} + h_{34}} \right)} \quad (5.35)$$

Pentru un dinte și o creștătură, adică pentru o "fereastră" deschisă, alegerea conturului  $\Gamma$  de integrare se face ca în fig. 5.12

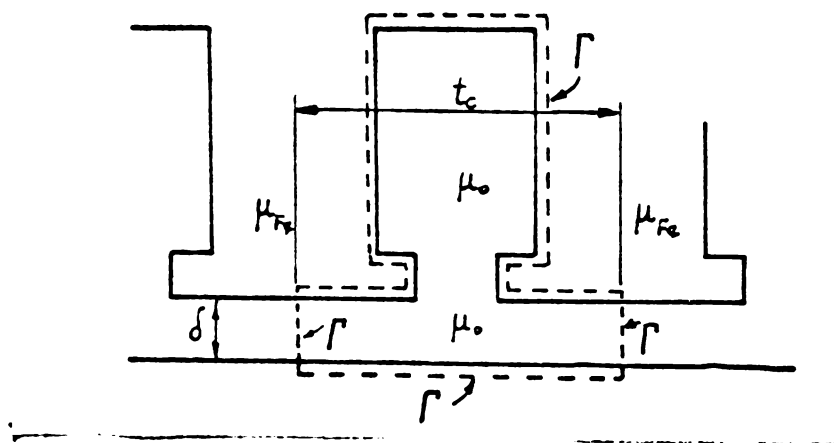


Fig. 5.12  
Alegerea conturului  $\Gamma$   
într-o "fereastră"  
deschisă "

Articolul menționat [340] demonstrează că această corecție îmbunătățește viteza de convergență spre o soluție stabilă a cîmpului  $A$ .

Procedeeul a fost introdus în ambele programe scrise pentru calculul valorii maxime și minime a reactanței de disipare a

crestăturii. Utilizarea lui este larg citată în literatură [B40] , [B41] , [B42] , [B44] .

5.5 Calculul permeanțelor și inductanțelor.

Calculînd energia magnetică  $W_m$  din domeniul D prin :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_D (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (5.36)$$

în care  $d_V = 1 \cdot dx, dy$

se poate exprima egalitatea între această energie și cea definită prin inductivitatea crestăturii :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (5.37)$$

Dacă I se ia drept curentul total al crestăturii, pentru lungimea egală cu unitatea, L devine permeanța  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \frac{1}{I^2} \int_D (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (5.38)$$

Produsul scalar  $(\vec{H} \cdot \vec{B})$  se poate scrie succesiv :

$$\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} [\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] = \vec{A} \cdot (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}) = \vec{A} \cdot \vec{J} \quad (5.39)$$

Pentru problema plan - paralelă enunțată , produsul scalar  $\vec{A} \cdot \vec{J}$  se transformă în produs algebric , deci :

$$\Lambda = \frac{1}{I^2} \iint_D J A dx dy \quad (5.40)$$

Pentru rețeaua uniformă avînd pasul h ( fig.5.13) , integrarea se va face după regula lui Simpson :

$$\iint_D J A dx dy = \frac{Jh^2}{9} [16A_0 + 4(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + (A_5 + A_6 + A_7 + A_8)] \quad (5.41)$$

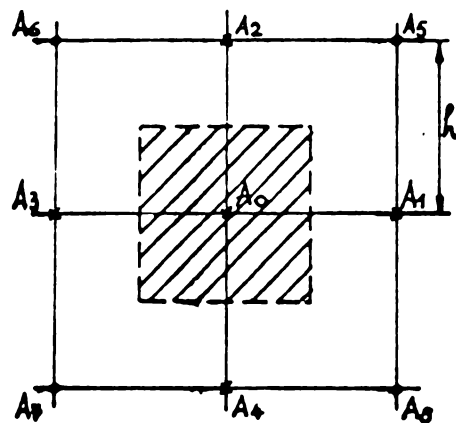


Fig.5.13  
Referitor la calculul integralei (5.40)

Integrarea se extinde, evident doar la zona unde  $J \neq 0$ .

Procedeeul descris de raționamentul de mai sus se poate întîlni în principiu și în [B49] , [B13] , [B26].

5.6. Aplicarea metodei elementelor finite la determinarea cîmpului de dispersie al crestăturii.

5.6.1. Propagarea condițiilor de lungu

Discretizarea unui domeniu egal cu  $3q$  crestături conduce la tablouri incompatibile cu memoria calculatoarelor mici și medii. De aceea s-a recurs doar la analiza celor două situații limită descrise în capitolul 2.2. fig. 6 .S-au scris două programe, unul pentru valoarea minimă , altul pentru valoarea maximă a reactanței

de dispersie a creștăturii. În ideea reutilizării programelor pentru orice tip de creștătură, scriitorul s-a făcut pentru două contururi echivalente, avînd coordonate generale și putînd include majoritatea tipurilor de creștătură utilizate; creștături trapezoidale sau cu pereți paraleli avînd înclinarea capului de dinte egală cu înclinarea uzuală de  $45^\circ$ .

Caracteristica de magnetizare s-a considerat de forma :

$$B = K H^{1-2/n} \quad (5.42)$$

constantele  $K$  și  $n$  determinîndu-se cu ajutorul curbei reale de magnetizare astfel încît să fie o concordanță perfectă între curba de magnetizare și curba obținută cu ajutorul relației (5.42) în zona cotului și a fierului saturat.

S-au aplicat corecții pentru accelerarea convergenței, iar coeficientul de suprarolaxare s-a calculat prin procedeul descris de relațiile ( 5.23 ) și ( 5.28 ) .

### 5.6.2 Programul pentru valoarea minimă a reactanței ( POISSON 1 )

Considerînd jugul statoric nesaturat , de permeabilitate teoretic infinită , domeniul studiat se reduce în cazul neglijării curburii suprafețelor la cel delimitat de curba C din fig. 5.14 a.

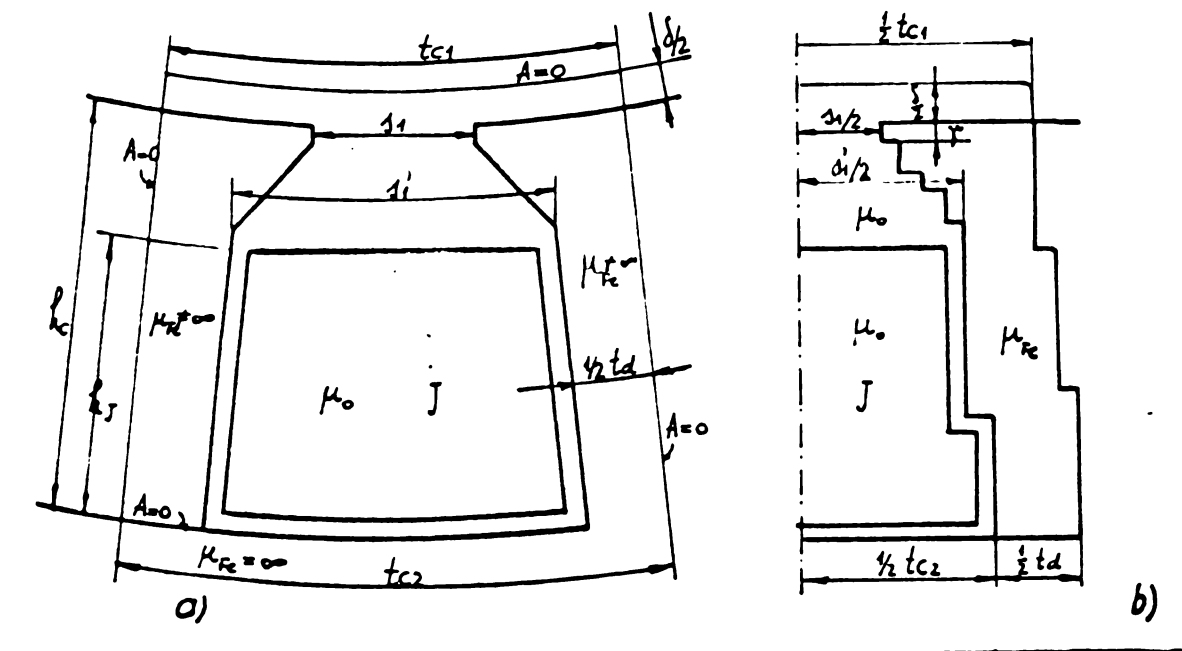


Fig. 5.14

Se exploatează simetria figurii luînd doar jumătatea din dreapta. S-a optat pentru sistemul de axe rectangular în favoarea sistemului polar sau mixt, din următoarele motive :

- se poate neglija efectul curburii suprafețelor pentru diametre mari în raport cu pasul de creștătură [B43],
- atât în coordonate polare, cît și în coordonate rectangulare

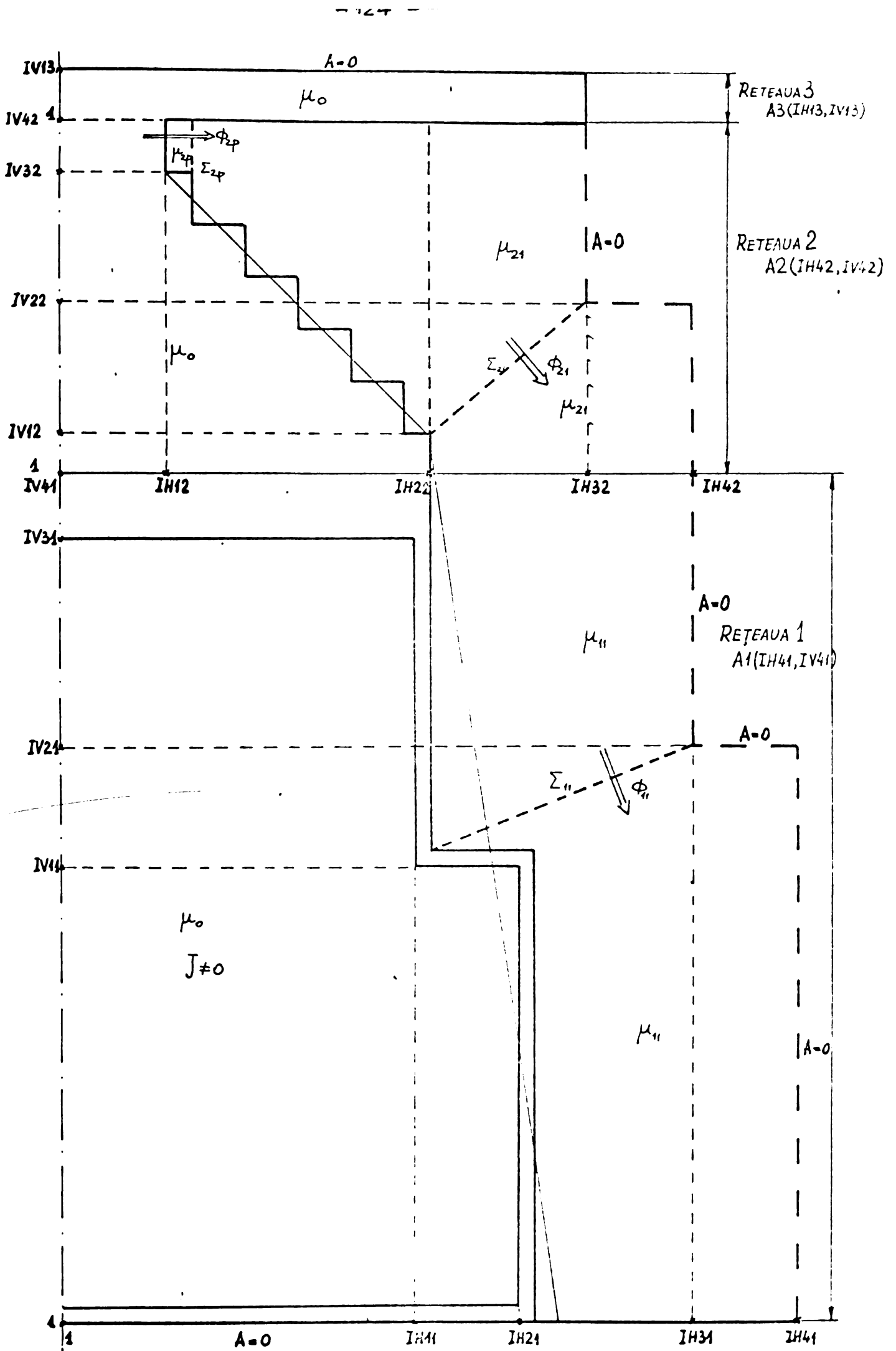


Fig. 5.15. Ratelele de discretizare pentru programul POISSON 1

apar neconcordanțe între rețea și frontieră .

- schimbarea proprietăților de la un element la altul se poate trata mai simplu în coordonate rectangulare.

Zonele înclinate ale capului de dinte și a creștăturii propriu zise s-au aproximat cu un contur în trepte confundat cu laturile rețelei de discretizare,

Pentru a nu altera valoarea  $\gamma$  a înălțimii istmului, a semînțefierului , a deschiderii creștăturii ( $s/2$ ) , a lățimii creștăturii sub capul dintelui ( $s'/2$ ) , a grosimii izolației de creștătură și a lățimii dintelui ( $t_d/2$ ) s-au deosebit trei rețele de discretizare .Cu toate dificultățile inerente acestei discretizări se preferă soluția aceasta din considerente de memorie necesară.

S-au avut în vedere că :

- rețeaua trebuie să fie suficient de deasă în zona gradientului maxim , adică în zona capului de dinte, spre întrefier.

- grosimea izolației de creștătură impune pasul rețelei în zona conductoarelor străbătute de curent,

- există câteva dimensiuni cheie ce trebuie să fie multiplu al pașilor rețelei din zona respectivă , deoarece nu pot fi modificate fără a schimba însăși configurația creștăturii.

Cele trei rețele de discretizare și dimensiunile ce constituie date de intrare pentru program s-au prezentat în fig.5.15.

Pentru a face ușor și corect trecerea de la o rețea la alta s-a procedat astfel :

- trecerea de la rețeaua uniformă cu pas mare ( zona conductoarelor străbătute de curent) la rețeaua uniformă cu pași mici a fost plasată în vecinătatea conductoarelor, acolo unde ipoteza unei variații liniare a potențialului magnetic  $A$  pe pasul rețelei mari este valabilă ;

- în zona întrefierului s-a păstrat <sup>pasul</sup> pe orizontală egal cu pasul rețelei vecine , adoptînd o rețea periodică neuniformă.

Segmentul de program care calculează potențialul vector în cele trei rețele debutează cu exploatarea nodurilor rețelei uniforme cu pași egali , în ordinea indicată de fig.5.10 , ordine obligatorie pentru metoda Liebmann extrapolată. Factorul de supra-relaxare pentru primele 100 iterații se introduce în program în mod arbitrar , în funcție de experiența cîștigată.

$$\omega_{\text{optim}} = 1,6 + 1,8.$$

După ce toate punctele rețelei N° 1 au fost explorate, se calculează potențialul vector pe linia de trecere între rețeaua 1 și rețeaua uniformă cu pași egali , 2 .Fie o porțiune a acestei

linii de separație , cea redată de fig. 5.16.

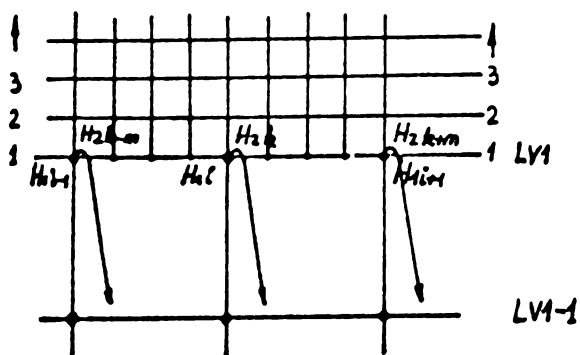


Fig.5.16

Referitor la trecerea  
rețea 1 → rețea 2

LV1 - limita superioară (pe  
verticală) a rețelei 1

LV1-1 - o linie situată sub LV1

Pasul rețelei 2 este de  $m$  ori mai mic decât pasul rețelei 1:

$$h_2 = \frac{h_1}{m} \quad (5.43)$$

Punctele  $(H1_{i-1}, LV1)$ ,  $(H1_i, LV1)$ ,  $(H1_{i+1}, LV1)$  aparțin rețelei 1, iar valorile potențialului vector  $A$  se găsesc în tabloul  $A1$  (DIMENSION  $A1$ )

Evident valorile potențialului vector din tabloul  $A2$ , (DIMENSION  $A2$ ), corespunzător rețelei 2, pentru punctele comune celor două rețele sînt identice:

$$A1(H1_{i-1}, LV1) = A2(H2_{k-m}, 1) \quad (5.44)$$

$$A1(H1_i, LV1) = A2(H2_k, 1) \quad (5.45)$$

etc.

Pentru cele  $m-1$  puncte situate în rețeaua 2 între punctele comune  $(H2_{k-m}, 1)$ ,  $(H2_k, 1)$  potențialul vector va varia în trepte egale cu :

$$\Delta A_2 = \frac{A1(H1_i, LV1) - A1(H1_{i-1}, LV1)}{m} \quad (5.46)$$

Raționamentul se repetă analog pentru orice alt interval al liniei de separație. După rezolvarea trecerii de la o rețea la alta, explorarea rețelei 2 continuă în mod analog explorării rețelei 1. Trecerea de la rețeaua 2 la rețeaua 3 nu pune probleme de aproximare a variației potențialului vector, deoarece pasul pe orizontală a fost păstrat. În ceea ce privește linia de separație ea se prezintă ca în fig. 5.17.

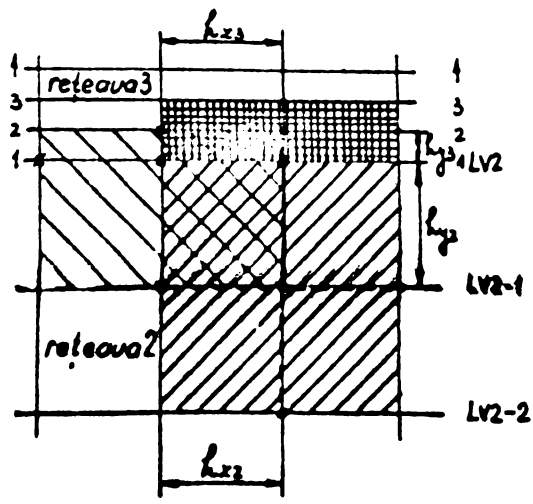


Fig. 5.17

Referitor la trecerea  
rețea 2 → rețea 3

LV2 - limita superioară  
(pe verticală) a rețelei 2

LV2-1 - o linie situată sub LV2;

LV2-2 - o linie situată sub LV2-1

Pentru linia LV2- 1 din rețeaua 2 se mai pot aplica relațiile corespunzătoare rețelei rectangulare uniforme cu pași egali.

Pentru linia LV2 a rețelei 2 trebuie aplicate relațiile corespunzătoare unei rețele periodice cu pași egali pe orizontală .

Pentru linia 2 din rețeaua 3 trebuie aplicate relațiile corespunzătoare unei rețele rectangulare cu pași inegali pe orizontală și verticală .

Se baleiază astfel toate cele trei rețele în cursul unei iterații. După fiecare 10 iterații se face o corecție a potențialului magnetic vector pe baza  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$  .

Reziduul maxim este comparat cu reziduul limită pentru a decide reluarea iterațiilor. Reziduul maxim , definit ca în (5.27) este selectat printre reziduurile celor trei rețele . Se imprimă la fiecare iterație valoare și locul său , precum și numărul iterației.

Se face o serie de calcule considerând fierul nesaturat, până la stabilizarea soluției și apoi după afișarea rezultatului se reîncepe o altă serie de iterații pentru care permeabilitatea este funcție de fluxul prin anumite secțiuni cheie.

Acceptând relația (5.42) pentru curba de magnetizare , permeabilitatea magnetică  $\mu$  devine :

$$\mu = K^{\frac{n}{n-2}} \cdot B^{-\frac{2}{n-2}} \quad (5.47)$$

Experiența arată că luând fluxul de calcul în diverse secțiuni ca diferență simplă dintre valorile potențialului vector (în punctele ce delimitează secțiunea ) în iterația anterioară , convergența este slabă, putând apare chiar oscilații ale reziduului maxim.

Dacă procesul tinde spre o stabilizare a valorilor lui  $A$ , nu vor fi diferențe mari între valorile lui  $A$  în același punct de la o iterație la alta. De aceea pentru două puncte  $p$  și  $q$  între care există distanța geometrică  $\overline{pq}$  , în iterația  $i$  fluxul se va calcula după relația (5.48) luând în considerație ultimele două iterații cu ponderea de 40 % respectiv 60 % .

$$\Phi_{pq}^i = 0,4 [A_p^{i-2} - A_q^{i-2}] + 0,6 [A_p^{i-1} - A_q^{i-1}] \quad (5.48)$$

Valoarea inducției introdusă în relația (5.40) sau (5.47) va fi:

$$B_{pq}^i = \frac{\Phi_{pq}^i}{\overline{pq}} \quad (5.49)$$

După stabilizarea valorilor lui  $A$  în cele trei rețele , se poate satisface condiția de abandon a iterațiilor, reziduul maxim inferior reziduului limită  $KLLM$ . Se imprimă rezultatele în finalul programului.

In decursul explorării celor trei rețele în modul descris

de fig.5.10 apar situații tip care se repetă, situații în care relația de calcul se particularizează conform configurației locale. Apare necesară scrierea unor subrutine pentru aceste situații tip, reduse ca număr, situațiile tip întâlnite sînt reduse în fig. 5.18.

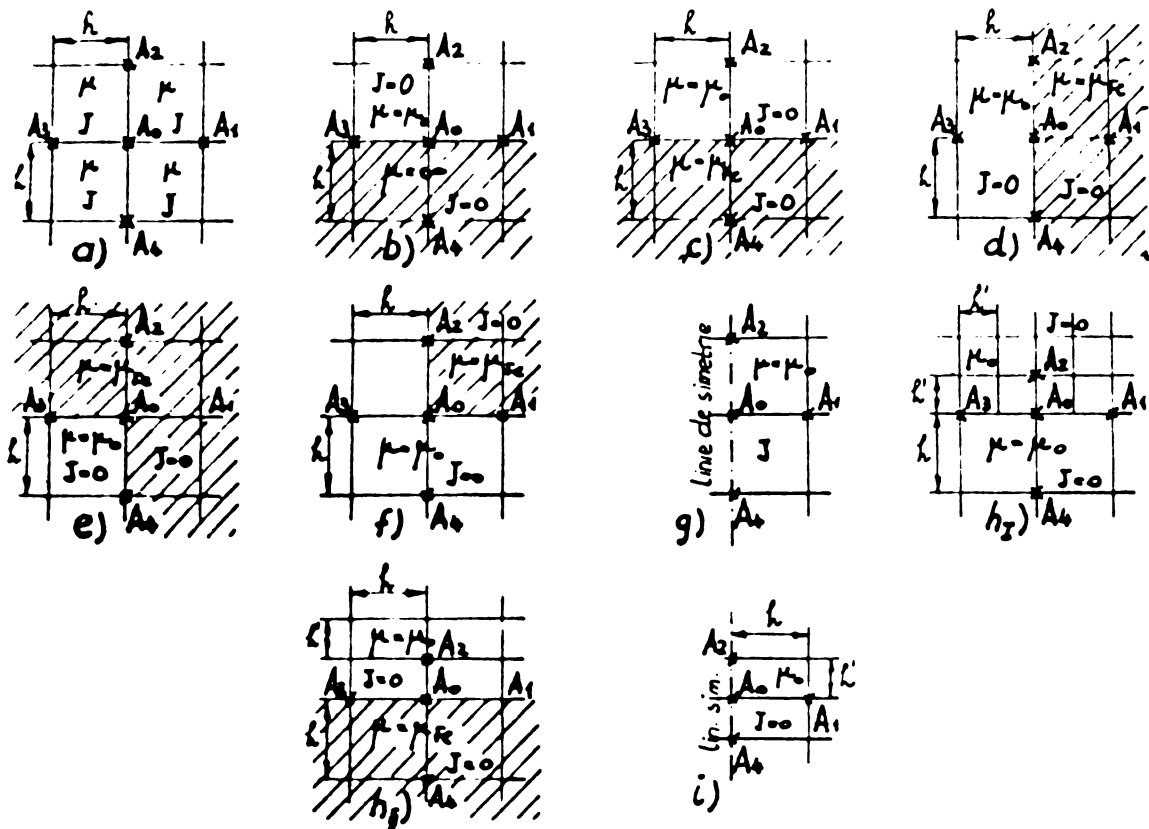


Fig.5.18

Situații tip pentru care s-au scris subprograme

După cum se vede în Fig.5.18 avem pentru :

- rețele rectangulare cu pași egali :
  - a - Nodul de calcul este înconjurat de elemente care au aceeași permeabilitate  $\mu$  și  $J \neq 0$  sau  $J = 0$ .
  - b - Nodul de calcul situat pe o frontieră orizontală separînd două domenii de  $\mu = \mu_0$  și  $\mu = \infty$
  - c - Nodul de calcul situat pe o frontieră orizontală separînd două domenii de  $\mu = \mu_0$  și  $\mu = \mu_{Fe}$  unde  $\mu_{Fe}$  e dat de relația (5.47) .
  - d - Nodul de calcul situat pe o frontieră verticală separînd două domenii de  $\mu = \mu_0$  și  $\mu = \mu_{Fe}$
  - e - Nodul de calcul situat într-un " colț " în care trei elemente sînt cu  $\mu = \mu_{Fe}$  și unul singur cu  $\mu = \mu_0$
  - f - Nodul de calcul situat într-un "colț" în care trei elemente sînt cu  $\mu = \mu_0$  și unul singur cu  $\mu = \mu_{Fe}$
  - g - Nodul de calcul este situat pe o linie de simetrie verticală.
- Rețele rectangulare cu pași neegali :



h - Nodul de calcul situat pe o linie de trecere între rețele cu dimensiuni diferite.

i - Nodul de calcul e situat pe linia de simetrie a configurației (în rețea cu pași inegali)

Programul principal apelează subprogramele scrise pentru situațiile de mai sus în timpul baleierii configurației generale din fig. 5.15. Se câștigă spațiu memorie prin apelul subprogramelor deoarece aplicarea unei singure relații de calcul pentru orice punct, al oricărei rețele, presupune descrierea topologiei discretizării prin tablouri ce conțin toate proprietățile rețelei: pași pe orizontală și verticală, permeabilitatea celor patru elemente înconjurătoare, densitatea de curent în aceste elemente. Descrierea topologiei rețelei necesită un spațiu memorie de 5 + 6 ori mai mare decât spațiul necesar pentru depunerea rezultatelor calculelor: valorile lui A în nodurile rețelei. Deci sacrificiul eleganței programului este pe deplin justificat.

Fără a detalia calculele în interiorul rețelelor, fig. 5.19 prezintă organigrama principală a programului de calcul a reactanței minime. Blocurile organigramei sînt descrise în cele ce urmează:

1. Introducerea date de intrare.

$\omega$  - factorul de suprarelașare. Valoarea inițială se ia conform indicațiilor din literatură, egală cu 1,6+1,8

$C_0$  - este termenul liber al expresiei (5.19) El se compune din produsul  $\mu_0 J \cdot h^2$ , unde J este densitatea curentului dh, dv - dimensiunile pe orizontală și pe verticală ale celor trei rețele.

$H_i, V_i$  - coordonatele punctelor ce definesc geometria echivalentă în tablourile A1, A2, A3. Aceste puncte sînt reprezentate în fig. 5.15. Ele s-au ales de asemenea manieră ca orice creștătură normală să poată fi aproximată cu conturul echivalent descris de fig. 5.15.

$P_k$  - coordonatele punctelor a căror potențial vector va fi stocat pentru două iterații anterioare iterației în curs. Aceasta pentru a face posibil calculul descris de relațiile (5.47), (5.48), (5.49)

$\mu_0$  - permeabilitatea magnetică a vidului

I - curentul pentru care se face calculul permanenței.

$\epsilon$  - eroarea admisă în calculul potențialului vector A

2. Se imprimă enunțul problemei și datele de intrare pentru care se face calculul.

3. Se pregătesc datele auxiliare necesare, în special reperajul corect al creștăturii descrise prin coordonatele generale  $III_i$   $IV_i$ .
4. Anulare conținut tablouri și variabile. Deși în mod normal toate variabilele neasignate ce apar prima dată în cursul programului, după lansarea execuției lui sînt puse pe zero de către sistemul de exploatare, măsura se dovedește uneori salutară.
5. Contorul iterațiilor se pune 1 iar KRIT negativ. Subprogramul de calcul al permeabilității elementelor situate în fier la fiecare apel verifică valoarea KRIT. Dacă  $KRIT \neq 0$  se dă permeabilității magnetice  $\mu_r = \frac{\mu_{sp}}{\mu_0}$  o valoare constantă, calculată de către utilizator din curba de magnetizare (porțiunea nesaturată) și introdusă în subrutina PERM. Dacă  $KRIT = 0$ , se procedează la calculul expus prin relațiile (5.47), (5.48), (5.49).
6. Test de selectare a primelor două iterații.
- 7- La prima iterație este evident că valorile iterațiilor 1-2 și i-1 trebuiesc anulate. Pentru  $i = K\emptyset NT = 2$  valorile anterioare sînt anulate, iar cele actuale sînt luate din soluția iterației N° 1. Nu putem lua valorile iterației în curs drept valori actuale, deoarece baleierea configurației se face conform fig. 5.10 și apar situații în care fluxul în punctele cheie nu poate fi calculat decît pe baza valorilor lui A din iterația anterioară. De exemplu pentru verticala  $III1 + 1 = III212$  permeabilitatea părții din dreapta (fig. 5.15) este determinată de potențialul punctelor situate în partea superioară, încă nebalanțate (tabloul A2).  
Pentru  $K\emptyset NT = i > 2$  lucrurile decurg normal, existînd deja două iterații anterioare.
8. Se baleiază toate cele trei rețele în modul descris anterior.
9. Se selectează locul și valoarea rezidului maxim din cele trei rețele.
10. Test asupra preciziei soluției.
11. Precizia nu a fost atinsă, se imprimă, rezidul, locul său și numărul iterației.
12. Dacă  $K\emptyset NT$  este multiplu de 10 se face o corecție a potențialului vector pentru accelerarea convergenței.
13. Calculul corecției și efectuarea ei.
14. Imprimarea valorii  $\emptyset HdI$  și a corecției  $\Delta A$
15. Este necesară o nouă corecție? da, dacă diferența între curentul I de calcul și  $\emptyset HdI$  este mai mare decît 1%.
16. Se pregătesc cele necesare pentru a facilita o nouă corecție.

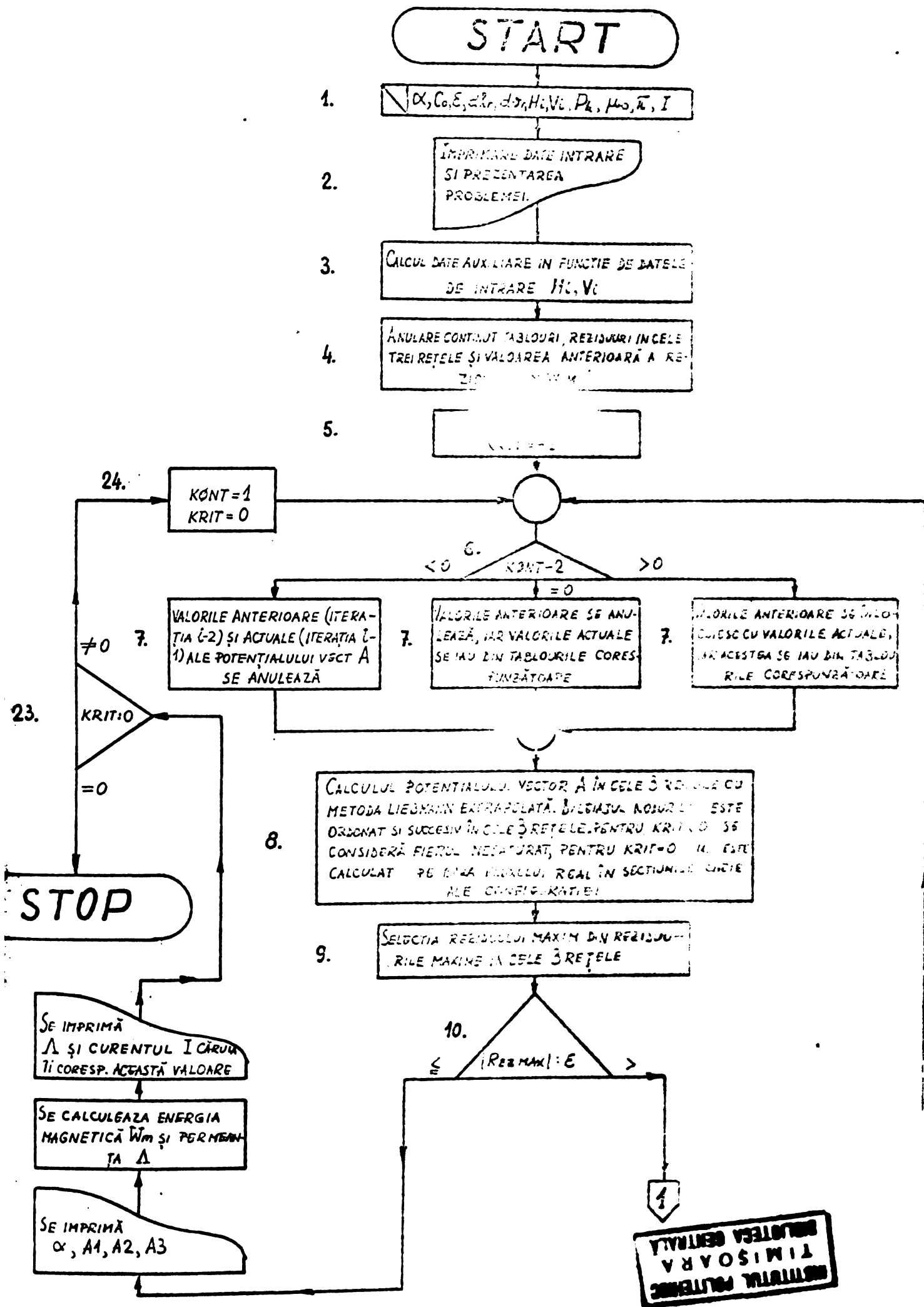


Fig. 5.19. Organigrama programului Poisson 1.

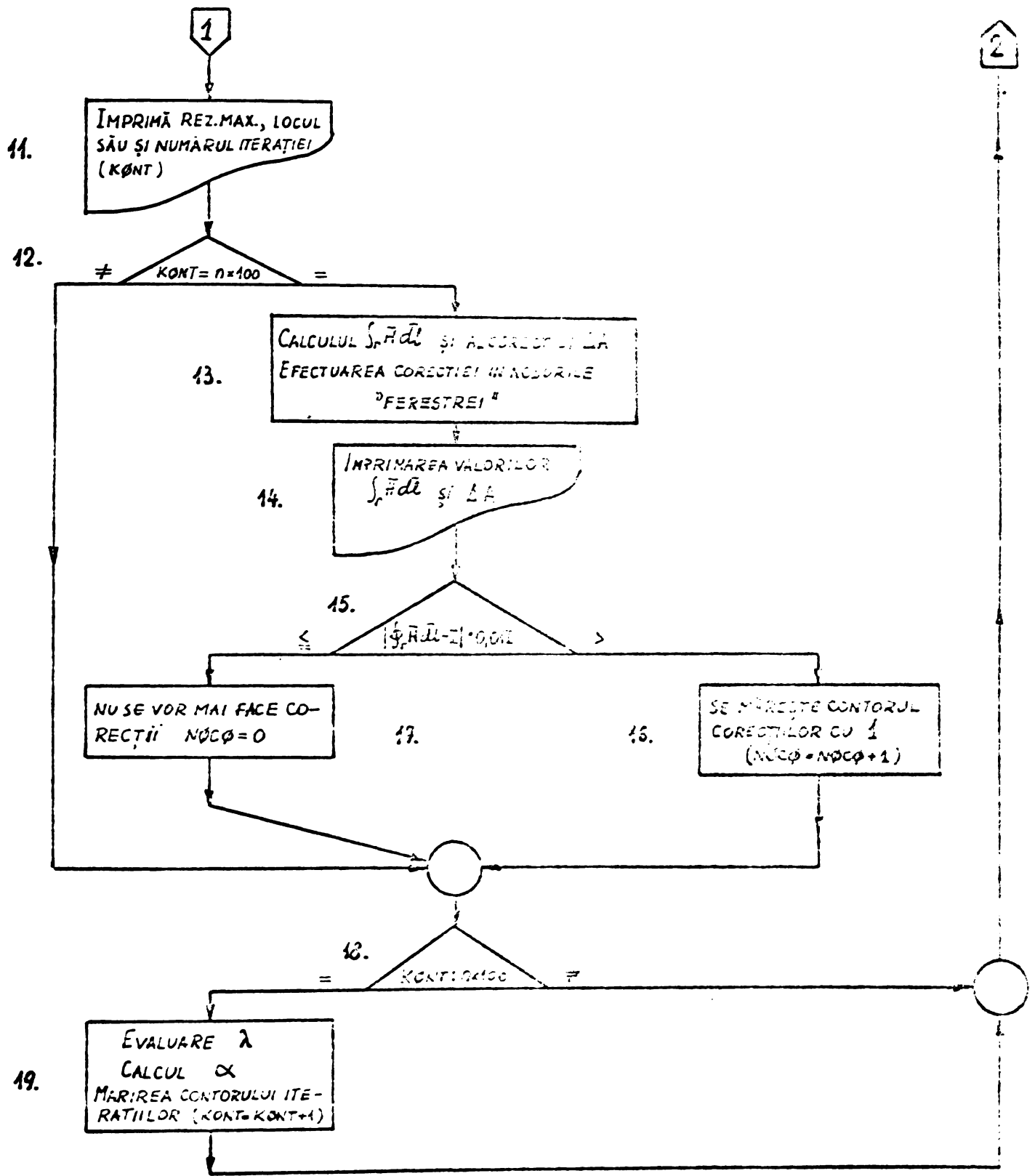


Fig 5.19 (continuation)

INSTITUTUL POLITEHNIC  
TIMIȘOARA  
BIBLIOTECA CENTRALĂ

17. Se opresc corecțiile ulterioare.
18. Dacă  $K_{\text{ONT}}$  este un multiplu de 100 se apreciază factorul de suprarelaxare cu ajutorul procedurii descris prin relațiile (5.23), (5.28).
19. Evaluarea noii valori a lui  $\omega$ .
20. Se imprimă soluția (valorile lui  $A$  în cele trei rețele) și valoarea lui  $\omega$  pentru care s-a obținut.
21. Se calculează permeanța  $\Lambda$  din energia magnetică  $W_m$  conform procedurii descris în § 5.5.
22. Se imprimă permeanța  $\Lambda$  și curentul  $I$  pentru care s-a calculat.
23. Soluția imprimată corespunde fierului saturat?
24. Se pregătesc condițiile calculului permeanței  $\Lambda$  pentru fier saturat.

#### 5.6.2.1 Rezultate obținute

Programul , POISSON 1, rezultat prin detalierea organigramei din fig.5.19 este aplicabil oricărei crestături de tip trapezoidal ce se poate echivala cu o crestătură similară celei prezentate în fig. 5.17 . Situațiile tip expuse în fig.5.18 au fost tratate în subprograme separate, ușor apelabile. Corecția de potențial prin  $\oint H dl$  a fost rezolvată în general, în interiorul programului principal prin apelul unor subrutine ce facilitează calculul termenilor din expresia (5.35) pentru configurația amintită. De asemenea integrările necesare estimării energiei magnetice au fost rezolvate prin câteva subrutine capabile să acopere toate situațiile întâlnite; domeniu cu  $\mu_0$ , cu  $\mu_r$  sau frontieră între domenii cu  $\mu$  diferit și densitate de curent diferită .

Programul POISSON 1 , este destul de lung( 890 cartelo) iar spațiul memorie necesar este funcție de finețea discretizării domeniului. Pentru o discretizare cu un număr de noduri comparabil cu numărul nodurilor discretizării pentru SORSELF 1 , programul obiect are aproximativ aceeași lungime ca programul obiect SORSELF 1 . Deci dificultățile sînt comparabile din punctul de vedere al necesarului de memorie.

Programul POISSON 1 a fost aplicat unei configurații echivalente crestăturii din fig.4.3 pentru care s-a calculat soluția problemei de câmp prin metoda elementelor finite. Dimensiunile corespunzătoare din fig.5.20 sînt următoarele :

$$b_1 = 10.5 ; b_1' = 9 ; b_2 = 7.5 ; b_2' = 6 ; b_3 = 5.25 ; b_4 = 3 ; h_1 = 4,5 ; h_2 = 0,75$$
$$h_2 = 9 ; h_3 = 3.75 ; h_4 = 1.875 ; h_5 = 0.75 ; \alpha = 2/3.$$

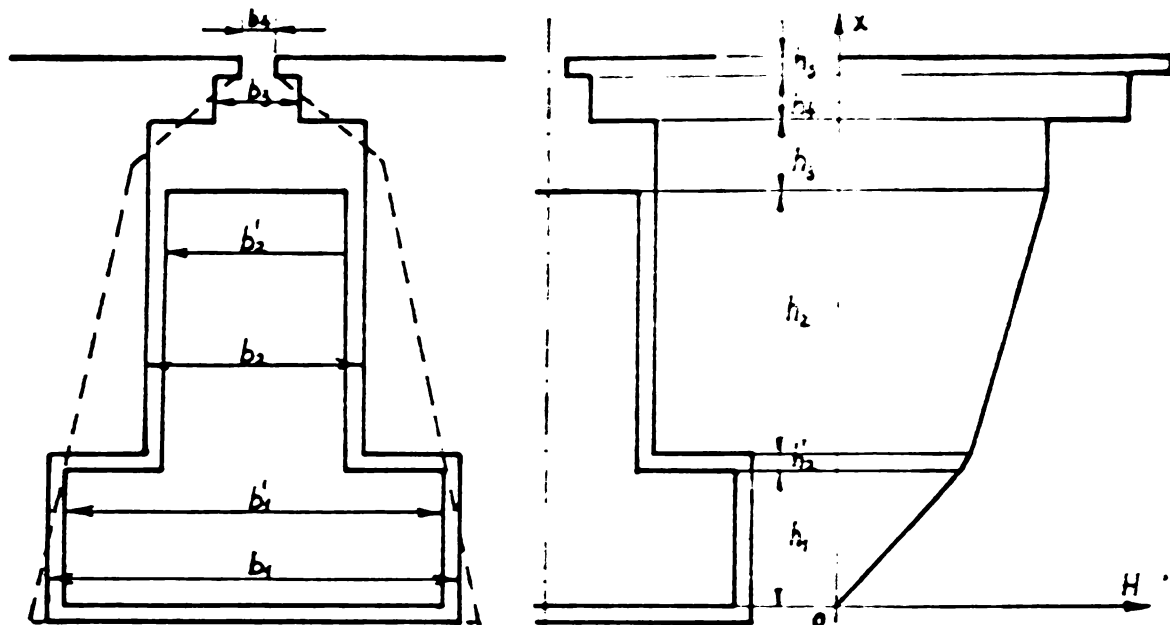


Fig. 5.20

S-au făcut mai multe rulări, pentru valori diferite ale densității de curent. S-a lucrat cu  $\omega = \alpha = 1,65$  și s-a corectat potențialul vector conform principiului expus în § 5.4. În fig. 5.21 și fig. 5.22 sînt prezentate două soluții obținute pentru  $J = 14,147$  A/mm<sup>2</sup>, respectiv  $J = 21,22$  A/mm<sup>2</sup>.

Pentru a avea un termen de comparație al rezultatelor obținute prin metoda diferențelor finite s-a calculat permeanța de dispersie după metoda expusă în [B26] și [B 32] considerînd  $\mu_{Fe} = \infty$  și traseul liniilor de cîmp perpendicular pe linia de simetrie, pentru creștătura echivalentă din fig. 5.20.

$$\lambda_c = \frac{1}{I^2} \iiint H_x^2 dv \quad (5.50)$$

În cele 6 zone ce apar de-a lungul axei ox, cîmpul H are expresia :

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{I_1}{b_1 h_1} x & ; & & H_{II} &= \frac{I_1}{b_1} + \frac{I_1'}{b_1 h_2'} x & ; & & H_{III} &= \frac{I_1 + I_1'}{b_2} + \frac{I_2}{b_2 h_2} x \\ H_{IV} &= \frac{I}{b_2} & ; & & H_V &= \frac{I}{b_3} & ; & & H_{VI} &= \frac{I}{b_4} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Curenții parțiali  $I_1, I_1', I_2$  sînt definiți astfel :

$$\begin{aligned} I_1 &= b_1' h_1 J \\ I_2 &= b_2' h_2 J \\ I_1' &= b_2' h_2' J \end{aligned} \quad (5.52)$$

iar elementele de volum, ca mai jos pentru lungimea egală cu unitatea :

$$\begin{aligned} dv_{I} &= b_1 dx & ; & & dv_{II} &= b_1 \cdot \alpha x & ; & & dv_{III} &= b_2 dx \\ dv_{IV} &= b_2 dx & ; & & dv_V &= b_3 \cdot \alpha x & ; & & dv_{VI} &= b_4 dx \end{aligned} \quad (5.53)$$

Făcînd calculele, se obține pentru permeanța specifică  $\lambda_c$  expresia:

$$\lambda_c = \frac{h_3}{b_2} + \frac{h_4}{b_3} + \frac{h_5}{b_4} + \frac{1}{3} \left( \frac{h_1}{b_1} + \frac{h_2}{b_1} \right) \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \alpha \cdot \frac{h_2 + h_2'}{h_1} \right]^2} + \frac{1}{3} \frac{h_1'}{b_1} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{h_1 + \alpha h_2'}{\alpha h_2} \right]^2} +$$

$$+ \frac{h_2^2 \cdot h_1 / b_1}{\left[ h_1 + \alpha (h_2 + h_2') \right]^2} + \frac{h_2}{b_2} \left\{ \frac{(h_1 + \alpha h_2') [h_1 + \alpha (h_2 + h_2')]}{\left[ h_1 + \alpha (h_2 + h_2') \right]^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{h_1 + \alpha h_2'}{\alpha h_2} \right]^2} \right\}$$

Valoarea numerică a permeanței specifice  $\lambda_c$  calculată cu dimensiunile date mai sus, pentru  $\alpha$  definit drept raportul

$$\alpha = \frac{b_2'}{b_1} \quad (5.55)$$

este:  $\lambda_c = 1.8094646 \quad (5.56)$

Această valoare se poate compara cu valorile permeanței specifice  $\lambda_c$  calculate în tabelul 4.5 pentru creștătura trapezoidală originală din fig.4.22. Datorită modului de a echivala creștătura trapezoidală, expus în fig.5.20 este justificat să obținem valori  $\lambda_c$  ceva mai mari decât cele date în tabelul 4.5 pentru calcule efectuate conform [B26] și [B 6y].

Valorile permeanței specifice  $\lambda_c$  calculate din soluția de câmp prin diverse metode sînt date mai jos ; de asemenea rulările pentru doi curenți foarte diferiți sînt date sub forma unui tabel comparativ.

Tabel de prezentare a două rulări pentru valori diferite ale densității de curent J .

Tabel 5.1

Caracteristici ale rulării programului POISSON 1.	J=14,14 A/mm <sup>2</sup>	J=21,22A/mm <sup>2</sup>
$\lambda_c$ calculat prin expresia $\lambda_c = \mu_0^{-1} \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{e}_y$	$\lambda_c = 0,8984$	$\lambda_c = 0,7853458$
$\lambda_c$ calculat prin expresia $\lambda_c = \frac{1}{\mu_0} \iint \delta \mathbf{H} \cdot d\mathbf{e}_y$	$\lambda_c = 0,9012$	$\lambda_c = 0,8094662$
curentul total din creștătură	I=1400 A	I = 2100 A
Raportul $\mu_r/\mu_0$ pentru fierul nesaturat.	$\mu_r/\mu_0 = 1000$	$\mu_r/\mu_0 = 1000$
Valorile maxime ale inducției la baza dintelui.	0,936 Tesla	1,236 Tesla
Valorile medii ale inducției în istm.	1,4826 Tesla	1,9437 Tesla
factorul de suprarelaxare $\omega$	$\omega = \text{fix} = 1,65$	$\omega = \text{fix} = 1,65$
număr total de iterații.	1000	600
timp calcul	21'54"	13'52"
Valorile reziduuului maxim în cele 3 rețele și coordonatele lui de rețea.	MAX1 = $0,80 \cdot 10^{-2}$ (1,21) MAX2 = $0,55 \cdot 10^{-6}$ (6,11) MAX3 = $0,16 \cdot 10^{-7}$ (1,2)	MAX1 = $0,14 \cdot 10^{-2}$ (1,21) MAX2 = $0,38 \cdot 10^{-6}$ (6,11) MAX3 = $0,26 \cdot 10^{-7}$ (1,2)

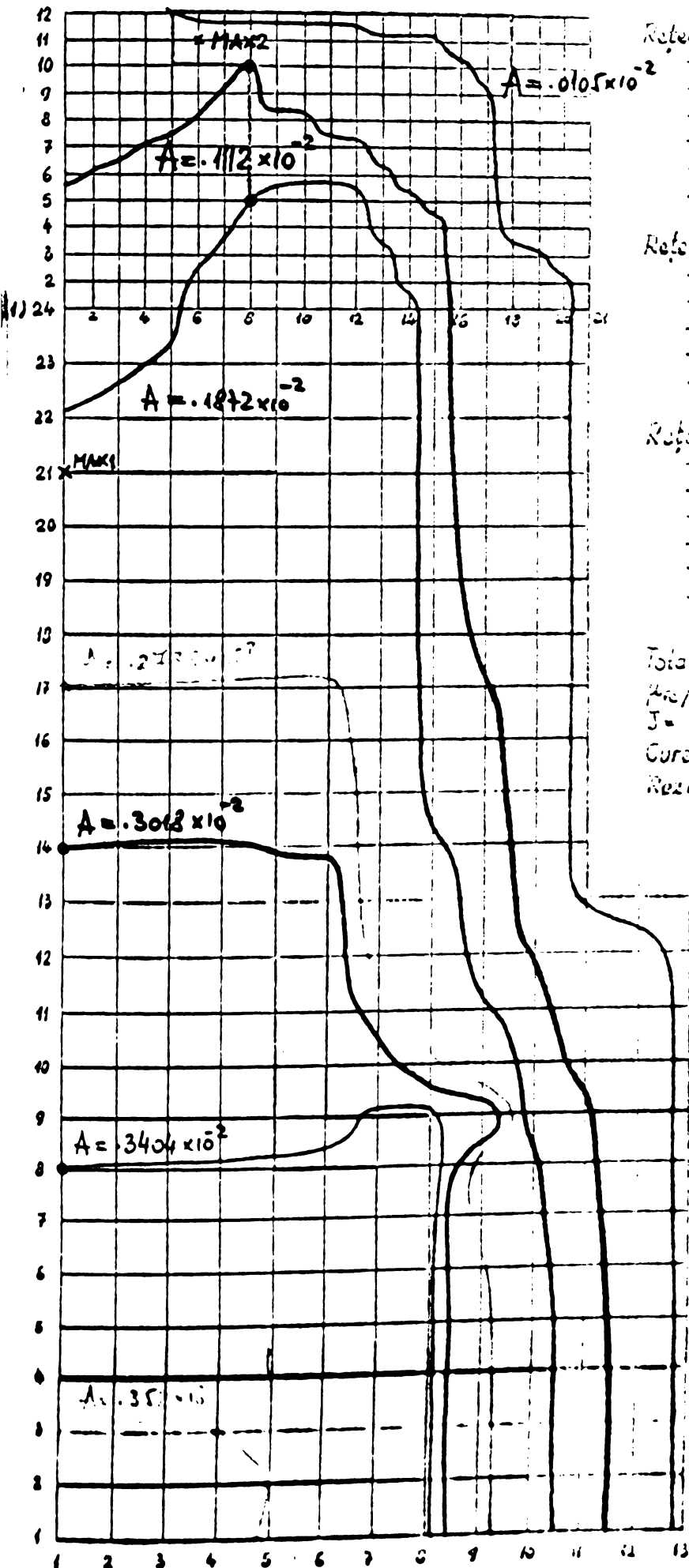
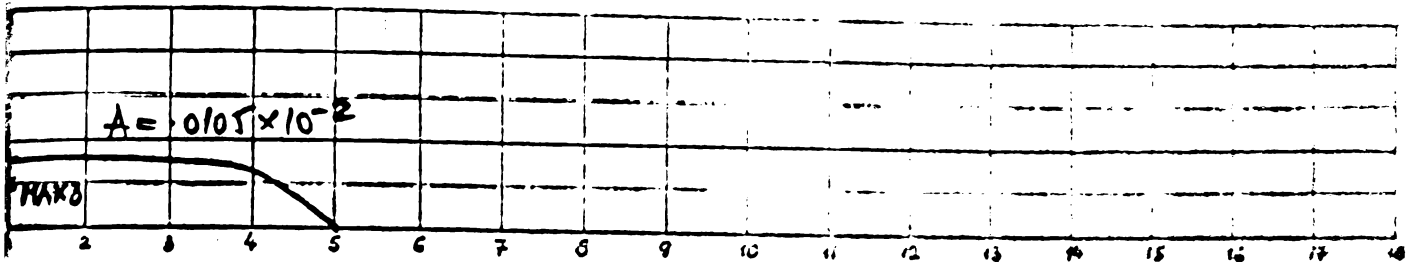
continuare Tabel 5.1

Valorile procentuale ale reziduuului maxim din rețeaua 1 față de potențialul vector în punctul în care apare reziduul maxim.	$MAX1\% = \frac{80 \times 10^{-3}}{214 \times 10^{-2}}$ $= 0,3675\%$	$MAX1\% = \frac{14 \times 10^{-2}}{2215 \cdot 10^{-2}}$ $= 0,615\%$
Câte corecții de potențial al punctelor din fereastră s-au făcut și care era valoarea corecției.	1 corecție după iterația 500 $\Delta A_{500} = .10739 \times 10^{-3}$	3 corecții după iterațiile 200, 300 și 500 $\Delta A_{200} = .32676 \times 10^{-3}$ $\Delta A_{300} = .28551 \times 10^{-3}$ $\Delta A_{500} = .24960 \times 10^{-3}$
Valoarea maximă a potențialului vector după terminarea iterațiilor și locul ei, în coordonate de rețea :	$A1(1,2) = .3523 \times 10^{-2} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-1}$	$A1(1,2) = .4844 \times 10^{-2} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-1}$
Cum s-a luat în considerație forma curbei de magnetizare $B = f(H)$ și valorile constantelor $K$ și $n$ .	$B = KH^{1-\frac{2}{n}}$ $K = 1,19$ $n = 2,20$	$B = KH^{1-\frac{2}{n}}$ $K = 1,19$ $n = 2,20$
Aprecierea corectitudinii soluției prin evaluarea integralei $\oint H dl$ , care ar trebui să fie egală cu $I$	$\oint H dl = 1359A$	$\oint H dl = 1801,8A$

Conform datelor din Tabelul 5.1. pentru cazul  $I = 1400 \text{ A}$  posedăm o soluție satisfăcătoare a problemei de câmp, în timp ce pentru curentul  $I = 2100 \text{ A}$  chiar după 600 iterații. și 3 corecții de potențial sîntem departe de soluție. Valoarea integralei  $\oint H dl$  reprezintă abia 85,8 % din curentul excitației, iar inducția magnetică din istm este inferioară valorii calculate pentru  $I = 1400 \text{ A}$ . Erorile față de soluția corectă, judecate prin prisma valorii procentuale a reziduuului maxim sînt însă comparabile. Prima tendință după analiza acestui Tabel și a rezultatelor intermediare ar fi să mărim numărul de iterații păstrînd aceleași condiții de lucru. O rulare în acest spirit care a durat aproximativ 40' a fost încercată pentru  $I = 2100 \text{ A}$ , fără corecții ale potențialului vector. În final reziduul maxim a atins valori exagerate, iterațiile depărtîndu-se de soluția problemei de câmp. La iterația 1912,  $MAX1 = 0,19 \text{ wb} \cdot \text{m}^{-1}$ , adică de 37,5 ori mai mare decît valoarea maximă a potențialului vector după a 600-a iterație ! Numai între iterația 1600 și 1912 el a crescut de 10 ori!

Pentru a putea formula niște concluzii cu privire la condiția de abandon a iterațiilor se analizează Fig. 5.23 care reprezintă evoluția valorii maxime a potențialului vector în rețeaua  $N \cong 1$  în punctul de coordonate de rețea (1,2) și reziduul maxim





**Rețeaua 1**

- uniformă cu pași egali  $h=0.15\text{mm}$
- 252 puncte active
- linie simetrie  $H=1; V=1, \dots, 24$
- linie  $A=0$   $H=13; V=1, \dots, 13$  +  $H=12; V=13$  +  $H=11; V=13, \dots, 24$
- linie separație față de rețea  $H=1, \dots, 13; V=1$
- linie separație rețea 1-rețea 2  $H=1, \dots, 13; V=24$

**Rețeaua 2**

- uniformă cu pași egali  $h=0.375\text{mm}$
- 243 puncte active
- linie simetrie  $H=1; V=1, \dots, 12$
- linie  $A=0$   $H=21; V=1, \dots, 4$  +  $H=5, 20; V=4$  +  $H=18; V=4, \dots, 12$
- linie separație rețea 2-rețea 3  $H=1, \dots, 19; V=12$

**Rețeaua 3**

- devenă separată din cauza scării
- pas pe orizontală  $h=0.375\text{mm}$
- pas pe verticală  $v=0.06\text{mm}$
- 85 puncte active
- linie simetrie  $H=1; V=1, \dots, 6$
- linie  $A=0$   $H=19; V=1, \dots, 6$  +  $H=1, \dots, 18; V=6$

Total puncte active : 550

$\mu_{\text{rețea}}$  - maximum 1000

$J = 14,14 \text{ A/mm}^2$

Curent total : 1400A

Reziduu maxim în rețele și coordonatele sale

$\text{MAX1} = 0.8 \times 10^{-8} \text{ W/cm}^2 \quad (1, 21)$

$\text{MAX2} = 0.88 \times 10^{-6} \text{ W/cm}^2 \quad (6, 11)$

$\text{MAX3} = 0.16 \times 10^{-2} \text{ W/cm}^2 \quad (1, 2)$

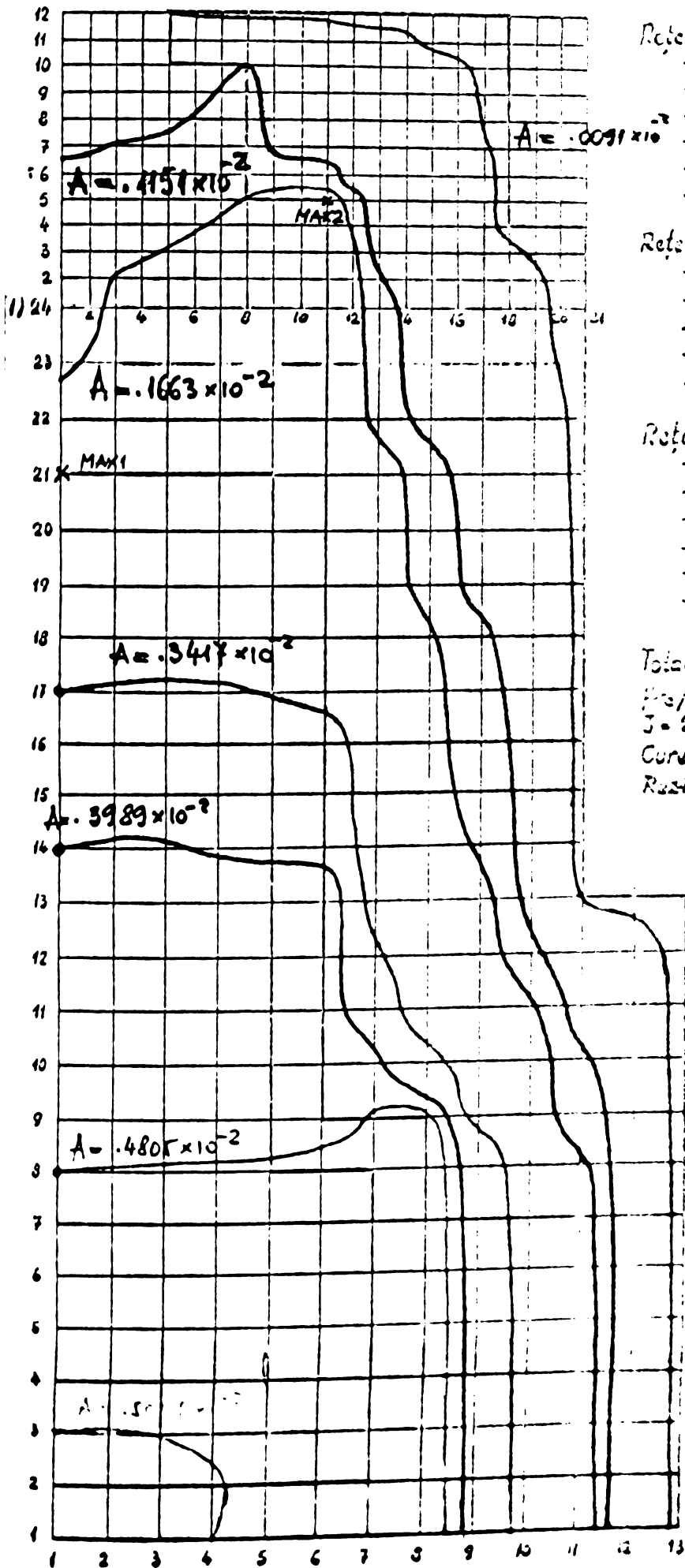
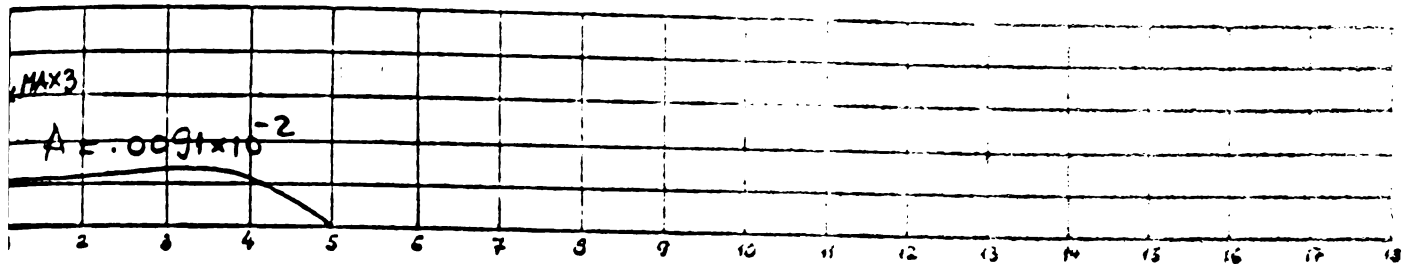
$\lambda_1 = 0.8784$

Număr iterații : 1000

Timp de calcul : 21' 54"

Fig. 5.21

Soluția problemei de timp obținută prin metoda diferențelor finite.



**Rețeaua 1**

- uniformă cu pași egali  $h = 0.75 \text{ mm}$
- 252 puncte active
- linie simetrie  $H = 1, V = 1, 24$
- linie  $A=0$   $H=13, V=1, 20 + H=42, V=13 + H=1, V=13, 24$
- linie separatoare față de rețea  $n = 1, 13, V = 1$
- linie separatoare rețea 1-rețea 2  $H = 9, 13, V = 24$

**Rețeaua 2**

- uniformă cu pași egali  $h = 0.375 \text{ mm}$
- 213 puncte active
- linie simetrie  $H = 1, V = 1, 12$
- linie  $A=0$   $H = 21, V = 1, 4 + H = 20, V = 4 + H = 10, V = 4, 12$
- linie separatoare rețea 2-rețea 3  $H = 1, 10, V = 12$

**Rețeaua 3**

- densitate separat în curba scării
- pași de control  $h = 0.375 \text{ mm}$
- pași pe verticală  $V = 0.06 \text{ mm}$
- 35 puncte active
- linie simetrie  $H = 1, V = 1, 6$
- linie  $A=0$   $H = 15, V = 1, 6 + H = 1, 18, V = 6$

Total puncte active : 550

Preț/zi - maximum 1000

$J = 21.22 \text{ A/mm}^2$

Current total : 2100A

Răziduu maxim în rețele și coordonatele sale

MAX1	$14 \times 10^{-2}$	(1, 24)
MAX2	$38 \times 10^{-2}$	(11, 5)
MAX3	$24 \times 10^{-2}$	(4, 4)

$\lambda_c = 7853$

Număr iterații 600

Time de calcul 13'52"

Fig. 5.22

Soluția problemei de timp de calcul prin metoda diferențelor finite.

din aceeași rețea.

Incepînd cu iterația 460 reziduul maxim pentru cazul  $I=2100A$  rămîne constant, egal cu  $.14 \times 10^{-4} \text{ wb.m}^{-1}$ . Trebuie deci abandonat procesul de calcul, avînd soluția ?

In cazul  $I = 1400 A$  reziduul maxim scade continuu. Trebuie continuată bucla iterațiilor ?

Spre capetele intervalului se constată însă pentru valoarea maximă a potențialului vector o tendință de instabilitate. Rezultă că atît un număr mare de iterații, cît și corecții dese ale potențialului vector provoacă același fenomen de instabilitate a soluției în cazul  $\omega = 1,65$ .

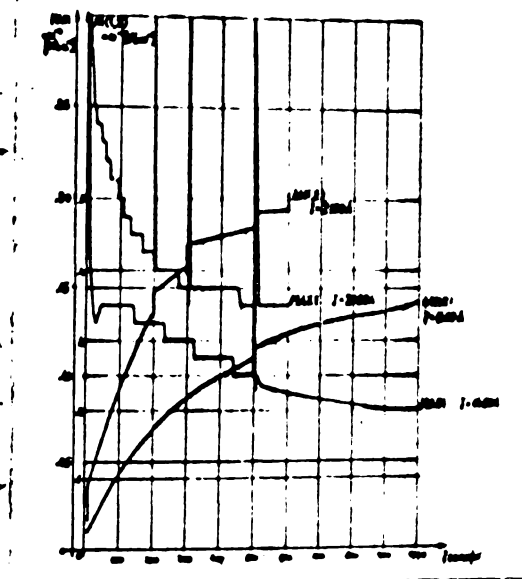


Fig.5.23

Evoluția reziduului și a potențialului vector pentru cele 2 cazuri studiate.

Analiza rezultatelor obținute ne conduce la formularea următoarei strategii pentru controlul numărului de iterații .

- cu un  $\omega$  mare ( $\omega = 1,35$  de exemplu) efectuarea a 100 iterații, după care se aplică o corecție de potențial în nodurile "terestrei",
- cu un  $\omega$  mai mic se fac din nou 100 iterații și ultima corecție de potențial .
- Se micșorează  $\omega$  și se controlează după fiecare  $20 \div 50$  iterații valoarea  $\oint \vec{H} dI$ . Cînd aceasta atinge valoarea curentului din interiorul curbei după care a fost calculată, se opresc iterațiile.

Se remarcă faptul că certitudinea unei soluții corecte este greu de dobîndit, fiind necesară o mare experiență în aplicarea metodei diferențelor finite la diverse configurații. Dar ceea ce trebuie subliniat este faptul că se poate obține soluția problemei și pe această cale.

5.6.3 Programul pentru valoarea maximă a reactanței.

POISSON 2

Ca și în cazul ilustrat de fig.5.14 b s-a neglijat curbura suprafețelor. Configurația de calcul este redată astfel în fig.5.24.

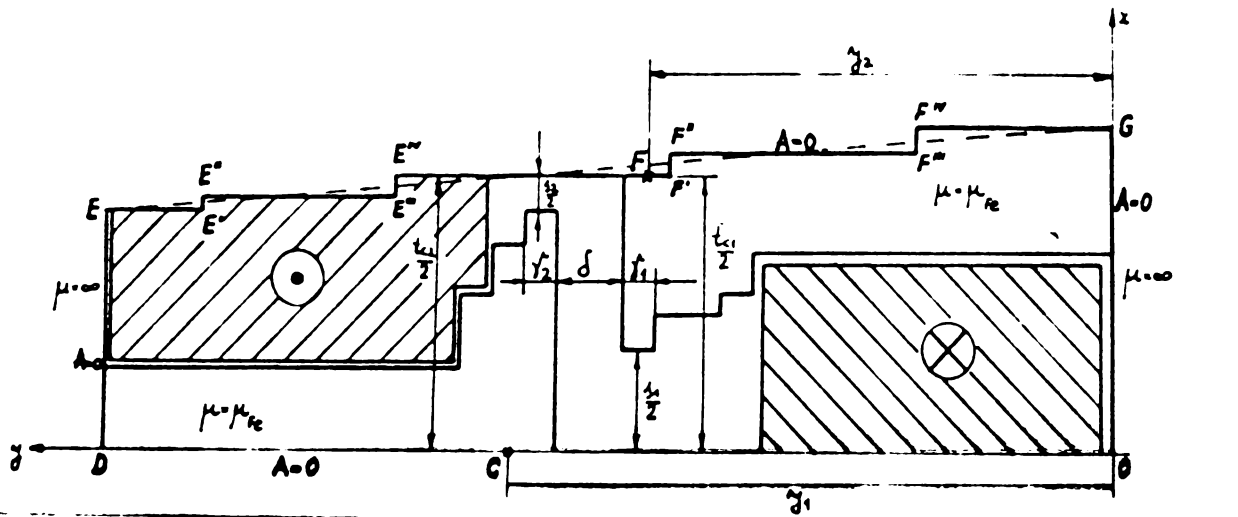


Fig.5.24

Programul POISSON 2 nu a fost definitivat, motiv pentru care în cele ce urmează se vor expune particularitățile de care s-a ținut cont în scrierea lui. Similar cu situația analizată prin metoda elementelor finite ( fig.4.24) se pune problema poziționării corecte a punctelor C și F din fig.5.24. Ar trebui apreciată adâncimea de pătrundere a câmpului în dintelă de pe fața opusă celei ce poartă dintelă de grup de făcut, motiv pentru care se procedează prin tatonări succesive. Ordonatele  $y$  ale punctelor C și F sînt fixate la început la o adâncime depășind puțin înălțimea istmului. Se va face un calcul pentru această poziție arbitrară, urmînd să se analizeze variația potențialului de-a lungul liniilor OC și EF. Dacă curba  $A = f(y)$  dă o variație "focșată", nenaturală, poziția punctelor C și F nu este corect aleasă. Ea se va modifica în sensul arătat de fig.5.25.

În fig. 5.25 a și 5.25 b segmentele  $Oa$ ,  $ab$ ,  $bd$ ,  $de$ , corespund respectiv izolației de creștătură în partea inferioară, zonei ocupate de conductoare, zonei ocupată de pană și izolație și zonei corespunzătoare întrefierului.

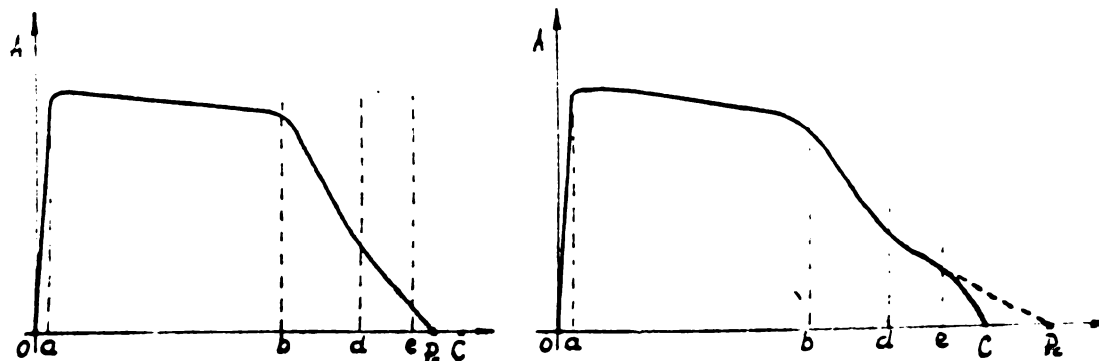


Fig.5.25

In fig.5.25a poziția punctului C este necorespunzătoare, el fiind situat după  $P_0$  ( punct corect ales ) în zona unde deja  $A = 0$  .In fig.5.25 b,din contra, C este situat în zona unde în mod natural  $A \neq 0$  . Deci punctul corect ales este mai departe.

Față de figura 5.14b și 5.15 unde explorarea nodurilor se făcea paralel cu linia de simetrie,în programul scris pentru configurația din fig.5.24 explorarea se va face perpendicular pe dreapta OD,paralel cu OE, respectiv OG.

In acest mod numărul situațiilor tip întâlnite în decursul explorării unei verticale se reduce simțitor,ceea ce facilitează scrierea programului . In linii generale cele opt situații-tip analizate anterior se repetă ,subprogramele scrise putând fi utilizate și la al doilea program. Ceea ce apare diferit,este linia de simetrie frântă pe traseul  $\overline{EF}$  .In nodurile E' și E'' situația se prezintă ca în fig.5.26.

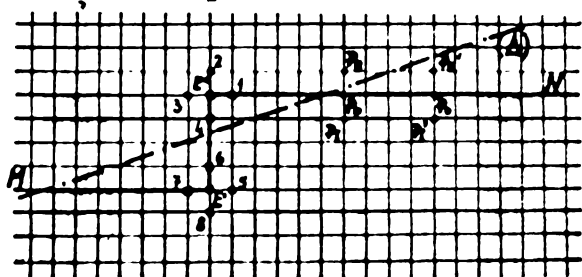


Fig. 5.26

( $\Delta$ ) - linia de simetrie reală  
 $ME'E''N$  - Linia de simetrie echivalentă.

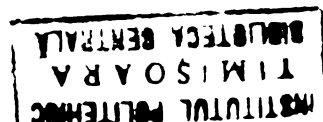
$\Delta$  - Linia de simetrie reală  
 $ME'E''N$  - Linia de simetrie echivalentă

Pentru calculul potențialului vector în E' se utilizează punctele 5,6,7,8 situate sub linia de simetrie reală și existente în tabloul ce conține valorile lui A în aceeași ordine respectivă.In calculul potențialului vector în E'' intervin punctele 2 și 3 situate în afara rețelei.In virtutea definiției liniei  $ME'E''N$  trebuie să existe (este impusă ) relația :  $A_3 = A_1$  pentru punctul E'' și  $A_2 = A_4$  pentru punctul E''.

Deci punctele 2 și 3 inexistente ,se înlocuiesc în expresia de calcul prin punctele 4 ,respectiv 1 . Ipoteza este falsă.Ar trebui introdusă valoarea potențialului în punctele simetrice față de ( $\Delta$ ) ,ceea ce este imposibil.

In mod similar, pentru un punct oarecare  $P_0$  situat pe porțiunea dreaptă a liniei de simetrie echivalente  $ME'E''N$  ,aproximația  $A_{P_0} = A_{P_1}$  poate genera erori ,cu atât mai mari,cu cât linia echivalentă este mai departe de linia de simetrie reală ( $\Delta$ ) .Evident pentru punctul  $P_0'$  ipoteza  $A_{P_0'} = A_{P_1'}$  este falsă.

Erorile pot fi mari dacă zona de traversat are variații pronunțate pentru potențialul vector A. Cu siguranță în zona ocupată de conductoare această variație este neînsemnată.Să este pronunțată



în zona apropiată întrefierului. Din fericire numărul punctelor afectate aici este redus, deci eroarea globală se poate presupune că nu se mărește sensibil. Reziduurile în zona respectivă vor fi ceva mai mari, însă în condițiile impunerii unei limite rezonabile pentru reziduul maxim, se poate atinge această valoare fără a mări exagerat numărul iterațiilor.

Programul POISSON 2 a fost scris, însă trecerea la metoda elementelor finite a oprit munca tocmai în fața de eliminarea a erorilor de sintaxă și punerea sa la punct.

Motivele pentru care a fost preferată metoda elementelor finite se găsesc expuse în capitolul concluzii .

CAP. 6 UTILIZAREA TRANSFORMĂRII CONFORME  
PENTRU REZOLVAREA ANALITICĂ A PROBLEMEI  
DE CÂMP ELECTROMAGNETIC.

Notiță istorică

Încă în deceniul al șaptelea al secolului XIX fizicienii (Hildebrandt, Kirchhoff) au utilizat transformarea conformă pentru soluționarea problemelor de scurgere laminară a fluidelor sau trecerea curentului prin plăci metalice.

Progresele realizate în teoria câmpurilor potențiale (Riemann-Schwarz, Study) și în domeniul funcțiilor de variabilă complexă au permis rezolvarea analitică a problemei de câmp de tip Dirichlet pentru creștătura singulară, deschisă, de adâncime infinită în anul 1901 (Carter), iar pentru creștătura singulară, deschisă, de adâncime finită în anul 1921 (Frey). Frey [B1] mai are meritul de a fi sistematizat informațiile existente până la el în utilizarea transformării conforme pentru studiul mașinilor electrice. În 1938 Adam [I 1] rezolvă problema pentru cazul creștăturilor semideschise, iar mai recent, în 1971, N. Morath [B2] tratează în mod unitar problema creștăturii adânci, a creștăturii semideschise cu înălțimea istmului finită și a creștăturii semideschise cu înălțimea istmului infinit mică, printr-o singură transformare.

Problema canalelor de ventilație din miezurile magnetice a impus găsirea unor tehnici numerice de determinare a constantelelor de transformare și integrarea ecuației diferențiale rezultate. Abia în 1961 [B3], [B4], [B5] s-au obținut rezultate pentru cazul a două creștături infinite adânci situate față în față, decalat.

Prin metoda transformării conforme se facilitează prin urmare rezolvarea unor probleme de frontieră pentru structurile necilindrice :

- mașini cu frontiere crestate,
- mașini sincrone cu poli aparenti,
- mașini excentrice, etc.

fie explicit, prin ecuații, fie implicit, pe cale grafică.

Utilizând tehnici grafice, Fukushima, Nasar, Saunders [B6] au reușit să transforme conform o mașină sincronă cu poli aparenti în două plane paralele.

În studiul analitic al câmpului, mult timp s-a considerat imperativ necesară valoarea constantă a potențialului electric sau magnetic pe armături. Există însă posibilitatea unui studiu analitic și în cazul unei variații oarecare a potențialului pe armăturile transformate [B5], [B8], [B22]. Disertația lui Sonntag [B8] poate fi

citată pentru cazul studiului câmpului de dispersie între poli aparenti ai unei mașini sincrone cînd potențialul magnetic se consideră linear crescător, în lungul corpului polului, spre întrefier.

Această scurtă notiță istorică nu și-a propus prezentarea exhaustivă a literaturii, legată de transformarea conformă pe coordonatele istorice și domenii de utilizare, ci punctarea cîtorva etape în direcția temei de cercetare.

### 6.1. Definiții și principii utilizate în transformarea conformă.

Existența acestei scurte treceri în revistă a noțiunilor matematice utilizate în studiul transformării conforme se impune din cauza :

- ambiguităților legate de pluralitatea definițiilor pentru aceeași noțiune ;
- necesitatea de a unifica notații și definiții pentru obținerea unor rezultate numerice pe baza algoritmilor definite.

#### 6.1.1. Stabilirea funcției de transformare

O configurație poligonală dată în planul  $z = x + jy$  se poate transforma punct cu punct, prin intermediul unei funcții  $z = f(t)$  într-o altă configurație din planul  $t = r + js$ , păstrînd :

- izogonalitatea segmentelor (păstrarea unghiului de intersecție a segmentelor),
- conformitatea segmentelor (proporționalitatea segmentelor elementare).

Possibilitățile de transformare a interiorului sau exteriorului poligoanelor drepte sau curbe sînt tratate în literatură [B7], [B 5] în care ce urmează se va utiliza exclusiv transformarea Schwarz-Christoffel a interiorului unui poligon format din segmente de dreaptă în planul  $Z$ , în semiplanul superior  $t$  astfel ca imaginile tuturor poligonului din planul  $z$  să se ordoneze pe axa reală a semiplanului  $t$ .

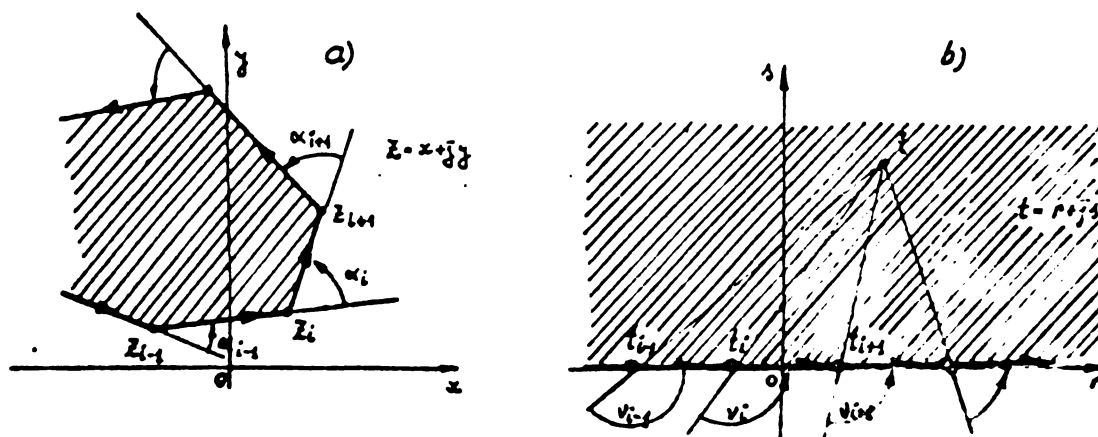


Fig.6.1 Cu privire la transformarea Schwarz-Christoffel



Funcția de transformare  $z = f(t)$  se obține integrând ecuația diferențială :

$$\frac{dz}{dt} = S(t-t_1)^{-\frac{\alpha_1'}{\pi}} \cdot (t-t_2)^{-\frac{\alpha_2'}{\pi}} \dots (t-t_n)^{-\frac{\alpha_n'}{\pi}} \quad (6.1)$$

în care :  $\alpha_i' = \pi - \alpha_i$

$\alpha_i$  - unghiurile "pe stînga" făcute de două laturi ale poligonului în vârful  $Z_i$ , cînd laturile poligonului sînt parcurse în sens trigonometric,

$t_i$  - imaginile vîrfurilor  $Z_i$  ale poligonului, ordonate astfel ca :

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n \quad (6.2)$$

S - constantă de scală și de rotație.

Imaginile a trei vîrfuri ale poligonului transformat le putem aranja în mod arbitrar pe axa reală a semiplanului t, restul constantelor  $t_i$  obținîndu-se prin rezolvarea sistemului de ecuații ;

$$Z_k = f(t_k) \quad k = 1, \dots, n-3 \quad (6.3)$$

în care perechile  $Z_k, t_k$  reprezintă poziția vîrfurilor poligonului în planul z, respectiv imaginile lor pe axa reală a semiplanului t (cu excepția celor trei perechi fixate arbitrar).

Constanța de scală și de rotație S se determină evaluînd reziduul funcției  $z = f(t)$  pentru un vîrf al poligonului obținut prin intersecția la infinit a două drepte paralele, adică într-un punct pentru care unei variații infinit mici a lui t în planul t îi corespunde un salt finit în planul z (distanța între cele două laturi paralele). Dacă nu există un astfel de vîrf al poligonului în planul z, S rezultă din compararea dimensiunilor și orientării unui segment din planul z cu imaginea sa din planul t.

Valorile și numărul unghiurilor  $\alpha_i$  din (6.1) pot fi teoretic oarecare. Insa dacă unghiurile  $\alpha_i$  nu sînt un multiplu de  $\pi/4$  sau  $\pi/2$  integrarea ecuației este dificilă, eventual imposibilă.

Pentru poligoane cu două unghiuri nemultiplu de  $\pi/2$  și restul unghiurilor <sup>multiplu</sup> de  $\pi/2$  ecuația (6.1) poate fi integrată cu ajutorul integralelor Euler sau transformare în integrale eliptice.

Pentru mai mult de două unghiuri nemultiplu de  $\pi/2$  singura cale de integrare a ecuației (6.1) este cea numerică.

Apare prin urmare o primă limitare în aplicarea transformării conforme, în sensul că doar frontiere poligonale drepte, avînd unghiuri multiplu de  $\pi/2$  pot conduce la integrale rezolvabile.

In general prin transformarea Schwarz-Christoffel rezultă trei categorii de integrale :

1. Integrale rezolvabile prin funcții elementare

Este cazul în care  $z = f(t)$  apare sub forma :

$$z = \int \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \quad (6.4)$$

$P(t)$  și  $Q(t)$  fiind funcții algebrice raționale de  $t$ .

Poligonul transformat are numai două vârfuri în care  $\alpha_i$  este multiplu impar de  $\pi/2$ , restul vârfurilor poligonului avînd unghiuri multiplu par de  $\pi/2$ .

2. Integrale rezolvabile prin funcții speciale.

Pentru poligoanele avînd trei, maximum patru unghiuri multiplu impar de  $\pi/2$  și un număr oarecare de unghiuri multiplu par de  $\pi/2$ , prin integrarea ecuației (6.1)

rezultă integrale eliptice sau o combinație de integrale eliptice, evaluabile cu ajutorul funcțiilor speciale.

Integralele obținute pentru frontiere cu număr de unghiuri multiplu impar de  $\pi/2$  mai mare decît patru se numesc hiporeliptice.

Există unele cazuri în care este posibilă reducerea lor la integrala eliptică [B 9 pag. 194.]

3. Integrale rezolvabile numai numeric.

Dacă integrala nu se poate încadra în primele două categorii rămîne să se încerce o integrare numerică.

Dificultatea capitală constă în faptul că în momentul evaluării integralei încă nu se cunosc abscisele imaginilor vîrfurilor poligonului în planul  $t$ . Se impun iterații succesive și o bună experiență pentru accelerarea convergenței.

În cele ce urmează se vor da elementele necesare evaluării integralelor rezolvabile prin funcții speciale.

6.1.2 Integrale și funcții eliptice.

O integrală :

$$I = \int R(t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}) dt \quad (6.5)$$

este eliptică dacă ecuația :

$$P(t) = a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0$$

- nu are simultan  $a_0 = a_1 = 0$

- nu are rădăcini multiple

și dacă  $R$  este o funcție rațională de  $t$  și  $\sqrt{P(t)}$

O integrală de tipul (6.5) descris mai sus se poate totdeauna pune sub forma unei combinații liniare a trei tipuri de integrale

eliptice descrise mai jos. Dacă o integrală de tipul (6.5) se poate exprima printr-o combinație liniară de funcții elementare (în număr finit) ea se numește pseudoeliptică.

Se dau formele canonice ale celor trei tipuri de integrale eliptice.

Integrala eliptică normală de speța I

Notăția Jacobi

$$\int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{u_1} du = u_1 = \operatorname{sn}^{-1}(\varphi, k) \quad (6.6)$$

Notăția Legendre :

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\nu}{\sqrt{1-k^2\sin^2\nu}} = F(\varphi, k) \quad (6.7)$$

corespondența între cele două notații este dată de :

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{sn} \nu \\ \nu &= \operatorname{am}(u_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Forma canonică a integralei eliptice normale de speța II

Notăția Jacobi

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{u_1} \operatorname{dn}^2(u) du = E(u_1) \quad (6.9)$$

Notăția Legendre :

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\nu} d\nu = E(\varphi, k) \quad (6.10)$$

Forma canonică a integralei eliptice normale de speța III

Notăția Jacobi :

$$k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a \int_0^{u_1} \frac{m^2 u du}{1-k^2 m^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \Pi_J(u_1, a) \quad (6.11)$$

Notăția Legendre :

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, \alpha^2, k) &= \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \quad (6.12) \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\nu}{(1-\alpha^2 \sin^2 \nu) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \nu}} = \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 m^2 u} = \Pi(u_1, \alpha^2) \end{aligned}$$

Pentru a exprima legătura între cele două notații se utilizează convențiile următoare . Dacă :

$$\alpha^2 = k^2 m^2 a \quad (6.13)$$

$$t = \operatorname{sn} u \quad (6.14)$$

$$\varphi = \operatorname{sn} \nu = \operatorname{sn} u_1 \quad (6.15)$$

și dacă :

$$\alpha^2 = 1 \text{ sau } \alpha^2 = k^2 \quad (6.16)$$

atunci :

$$\Pi(u_1, \alpha^2) = u_1 + \frac{m a}{\operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a} \Pi_J(u_1, a) \quad (6.17)$$

În expresiile celor trei tipuri de integrale eliptice s-au utilizat notațiile :

$k$  - modulul integralei

poate avea în principiu orice valoare reală sau imagină.

În aplicațiile ingineresti se face însă astfel de transformări [ B9 pag. 3] încît să avem:

$$0 < k \leq 1 \quad (6.18)$$

Modulul complementar  $k'$  se definește astfel:

$$k' = \sqrt{1-k^2} \quad (6.19)$$

$\gamma$  sau  $\varphi$  - argumentul integralei .

$\gamma$  sau  $\varphi$  pot fi la rîndul lor reale sau complexe, însă în general se înțelege că :

$$0 < \gamma \leq 1 \quad (6.20)$$

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.21)$$

Transformările pentru argument real necuprins în limitele (6.20) și (6.21) se dau în [B9 pag.12] iar pentru argument complex în [B9 pag. 38 și pag.12].

Dacă :

$$\gamma = 1 \quad (6.22)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (6.23)$$

Integralele eliptice se numesc complete și se scriu :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\nu}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \nu}} = \int_0^k du = F(\pi/2, k) = K(k) = K \quad (6.24)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \nu} d\nu = \int_0^k dn^2 \mu du = E(\pi/2, k) = E(k) = E \quad (6.25)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\nu}{(1-\alpha^2 \sin^2 \nu) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \nu}} = \int_0^k \frac{du}{1-\alpha^2 \sin^2 \mu} = \Pi(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k) = \Pi(\alpha^2, k) \quad (6.26)$$

Proprietățile integralelor astfel definite ,dezvoltările în serie corespunzătoare, precum și transformările posibile se găsesc sub formă de compendiu în [B9], [B12], [B13].

În notația Jacobi inversa funcției integralei eliptice de speța I este sinusul eliptic notat  $sn$  sau sinus amplitudine.

Iacă :

$$u(\gamma, k) = u = \int_0^{\gamma} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\nu}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \nu}} = F(\varphi, k) \quad (6.27)$$

atunci :

$$\gamma = \sin \varphi = sn(u, k) = sn u \quad (6.28)$$

iar :

$$\varphi = am(u, k) = am u \quad (6.29)$$

este "amplitudine de  $u$ ", cu notația "am"

În general  $u$  poate fi complex, de forma :

$$u = \gamma + j\delta \quad (6.30)$$

Funcția "sn" este o funcție complexă dublu periodică, impară.

Ea are determinarea principală în domeniul hașurat din fig. 6.2.a.

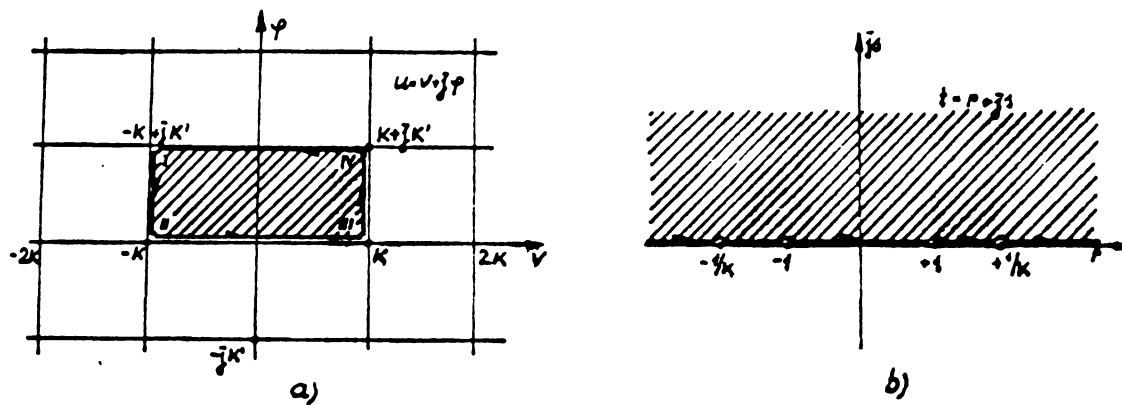


Fig.6.2. Domeniul de existență a funcției snu.

"snu" este o funcție eliptică impară de ordinul doi avînd un pol simplu de reziduu  $1/k$  în orice punct congruent cu  $jK'$  și un pol simplu de reziduu  $-1/k$  în orice punct congruent cu  $2K + jK'$ .

$K'$  este integrala eliptică completă de speța I de modul  $k'$

$$K' = F(\pi/2, k') = K(k') \quad (6.31)$$

Se definește cosinusul eliptic de  $u$  și modul  $k$  notat  $cn(u, k) = cnu$

$$cn u = \sqrt{1 - m^2 u} = cn(u, k) \quad (6.32)$$

și funcția eliptică :

$$dn u = \sqrt{1 - k^2 m^2 u} = dn(u, k) \quad (6.33)$$

ce apar în dezvoltările ulterioare.

Funcția "cnu" este o funcție eliptică pară de ordinul doi avînd un pol simplu de reziduu  $-j/k$  în orice congruent cu  $2K + jK'$

Funcția "dnu" este o funcție eliptică pară de ordinul doi avînd puncte singulare congruente cu  $jK'$  sau  $3jK'$ . Aceste puncte sînt poli simpli de reziduu  $-j$ , respectiv  $+j$ .

Se pot defini [B9 pag.19] și alte funcții eliptice, însă în evaluările ulterioare au importanță doar cele remarcate prin relațiile (6.28), (6.32) și (6.33).

### 6.1.3 Funcții speciale utilizate în evaluarea integralelor eliptice.

Pentru evaluarea integralei eliptice de speța III este necesară definirea funcției Zeta a lui Jacobi :

$$\begin{aligned} Z(u, k) &= \int_0^u (dn^2 u - \frac{E}{K}) du = E(u, k) - \frac{E}{K} u \\ &= E(\beta, k) - \frac{E}{K} F(\beta, k) \end{aligned} \quad (6.34)$$

unde :

$$\beta = am(u, k) \quad (6.35)$$

Există încă un mod de definire echivalent cu (6.34) :

$$Z(\beta, k) = \frac{k^2 \sin \beta \cos \beta (1 - k^2 \sin^2 \beta)}{K} \int_0^K \frac{m^2 u \cdot du}{1 - k^2 \sin^2 \beta \sin^2 u} \quad (6.36)$$

$Z(u_1)$  este o funcție impară de  $u_1$ , cu perioada  $2K$ .

Dacă se evaluează integrala eliptică de tipul III prin dezvoltări în serii Fourier, apare necesitatea introducerii funcțiilor theta ale lui Jacobi.

$$\theta(u) = \mathcal{N}_0(v) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos(2mv) \quad (6.37)$$

$$H(u) = \mathcal{N}_1(v) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \sin[(2m-1)v] \quad (6.38)$$

$$H_1(u) = \mathcal{N}_2(v) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \cos[(2m-1)v] \quad (6.39)$$

$$\theta_1(u) = \mathcal{N}_3(v) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos(2mv) \quad (6.40)$$

în care :

$$q = \text{nomul lui Jacobi} \quad q = e^{-\frac{\pi k'}{k}} \quad (6.41)$$

$$v = \frac{\pi \cdot u}{2K} \quad (6.42)$$

Cu (6.34) evaluarea integralii eliptice de tipul III (notația Jacobi) se face astfel :

$$\Pi_j(\mu, \alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{N}_0(\mu - \alpha)}{\mathcal{N}_0(\mu + \alpha)} + \mu Z(\alpha) \quad (6.43)$$

De remarcat faptul că transformările făcute [B9 .pag.12] nu conduc la rezultate utilizabile în calculul unei metode de rezolvare a sistemului obținut prin transformare, rezolvare expusă în [B14].

#### 6.1.4. Probleme legate de evaluarea integralelor și funcțiilor eliptice.

Pentru a face posibilă evaluarea integralelor și funcțiilor eliptice există o bogată literatură [B9] , [B10] , [B11] , [B12] , [B13] care dă fie tabele și grafice pentru formele standard ale funcțiilor și integralelor eliptice , fie dezvoltările în serie corespunzătoare .Formele standard sînt caracterizate prin argumente  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  și module  $0 < k \leq 1$

Dacă intervin argumente complexe, prin relațiile de transformare citate se aduc expresiile sub forma unei combinații de forme standard.

Lucrul cu abace și tabele este specific unui calcul manual și nu poate fi programat pentru a fi trecut pe un ordinator.

Programarea ce are la bază dezvoltările în serie nu duce la rezultate corecte din următoarele motive :

- convergența seriei este neuniformă în raport cu domeniul de variație a modulului  $k$ , fapt ce face ca numărul termenilor necesari să fie destul de des de ordinul  $n \times 10$ ,
- erorile de rotunjire se acumulează rapid și devin esențiale pentru un număr de termeni ce depășește ordinul de mărime  $20 \div 30$ .

Erorile de rotunjire apar la înmulțiri și împărțiri. Ori fiecare termen al seriei conține evaluarea unei funcții trigonometrice și mai multe înmulțiri și împărțiri.

Utilizarea preciziei extinse sau a preciziei duble nu rezolvă problema cumulării erorilor.

În consecință evaluarea formelor standard cu ajutorul unui calculator folosind dezvoltările în serie trebuie fără excepție evitată. Cu atât mai mult cu cât pentru înlăturarea acestor dificultăți, analiza numerică a pus la punct procedee de obținere a funcțiilor și integralelor eliptice standard ca limită comună a două șiruri [B15].

Programele scrise în precizie simplă sau dublă conform acestui principiu se găsesc în Scientific Subroutines Package (S.S.P.) al firmei IBM, procurabil la orice centru de calcul - care utilizează sau nu un ordinator IBM - Eroarea de rotunjire în acest caz este aceea ce afectează un singur element al șirului, deci nu este o eroare cumulată. Convergența acestor șiruri este atât de bună, încât niciodată nu am fost nevoit să utilizez precizia dublă pentru calculele efectuate în acest mod.

### 6.2 Problema câmpului de dispersie al creștăturii

Se acceptă următoarele definiții pentru fluxul de dispersie al creștăturii și întrefierului :

- fluxul de dispersie al creștăturii este constituit de liniile de câmp conținute în interiorul zonei parcurse de curent, limitată spre întrefier de curba  $C_1$  din fig. 6.3 ce unește vîrfurile dinților adiacenți,

- fluxul de dispersie al întrefierului este constituit de liniile de câmp cuprinse între curba  $C_1$  și linia de câmp care încă nu înlănțuie înfășurarea de pe partea opusă.

R. Richter [B18 cap.M32] numește fluxul de dispersie al întrefierului "scăpări prin capetele dinților". Atît fluxul de dispersie al creștăturii, cît și cel al întrefierului (capetelor de dinți) depind numai de solenauța creștăturii considerate, nefiind influențate de solenauțiile creștăturilor învecinate [B18].

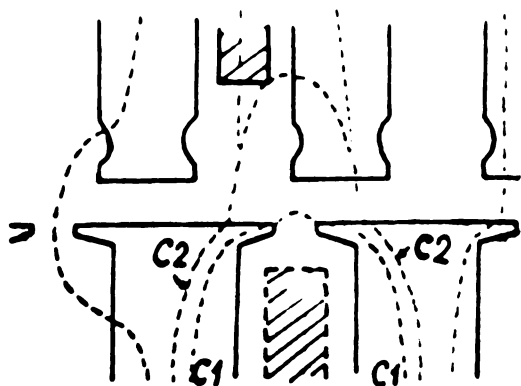


Fig.6.3  
referitor la delimitarea  
fluxului de dispersie a  
creștăturii.

În măsura în care aceasta constituie o simplificare, se poate considera că fluxul de dispersie al creștăturii este constituit la rândul său din trei componente corespunzătoare următoarelor zone :

- zona ocupată de conductoarele înfășurării,
- zona ocupată de pana de presare a bobinei,
- zona capului de dinte.

Considerând această împărțire, prin transformare conformă a fost calculată componenta corespunzătoare zonei ocupată de pană. Calculele precum și valorile permeanței zonei ocupată de pană se găsesc după cum urmează :

- pană trapezoidală : [B26 pag.68], [B30]
- pană semicirculară : [B29]
- pană de mașină sincronă " [B30], [B26]

Pentru zona ocupată de conductoarele înfășurării calculul permeanței de dispersie nu reclamă o transformare conformă a domeniului. Crestătura trapezoidală se reduce la o creștătură cu pereții paraleli, pentru care calculul se face ușor urmărind considerente energetice.

Pentru zona capului de dinte problema se reduce la calculul câmpului între doi pereți paraleli, dacă istmul are pereți paraleli suficienți de înalți. Altfel se apelează la transformări conforme simple [B9].

O tratare unitară a problemei câmpului de dispersie a creștăturii trebuie să facă transformarea interiorului poligonului din fig. 6.4.a în semiplanul superior  $t$  din fig. 6.4.b.

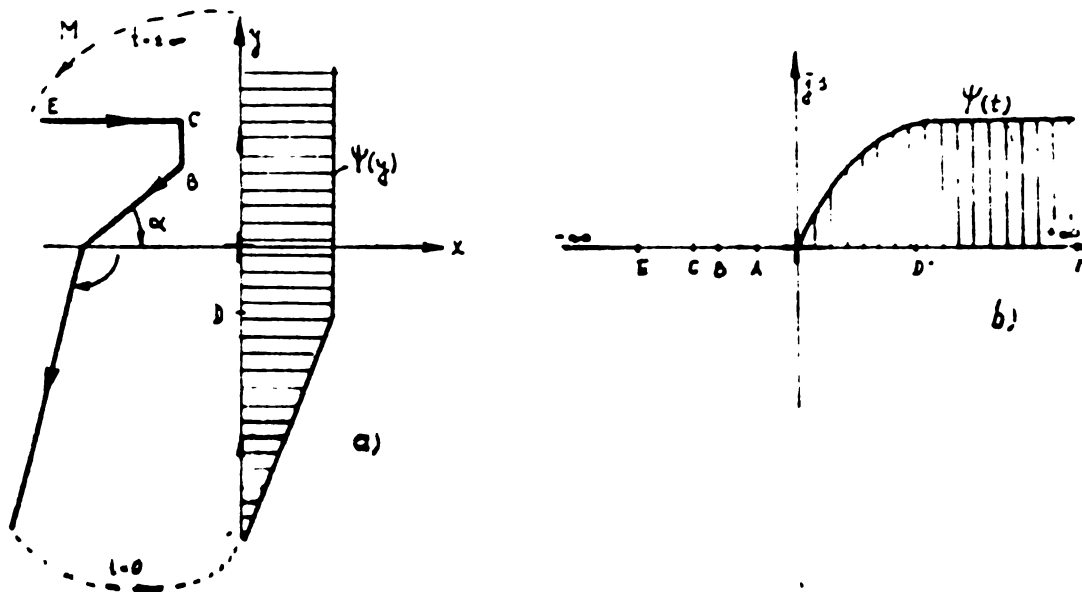


Fig.6.4. Transformarea unei jugetări de creștătură din planul  $z = x + jy$  în semiplanul superior  $t = u + jv$



Acest mod de tratare implică următoarele inconveniente :

- spre întrefier și la fundul creștăturii trebuie considerată închiderea poligonului din planul  $z$  la infinit, ceea ce alterează fenomenul atât în zona întrefierului, cât și la fundul creștăturii.
- în zona corespunzătoare părții ocupată de curent potențialul magnetic variază liniar în planul  $z$  și într-un mod foarte greu de precizat în zona corespunzătoare a planului  $t$ ,
- nu orice valori ale unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi luate în considerație din cauza integralei rezultată prin transformarea Schwartz - Christoffel .

Deși fluxul de dispersie de creștatură nu este afectat de solenația creștăturilor vecine , valoarea lui și cea a fluxului de dispersie al întrefierului este influențată de poziția dinților sau creștăturilor de pe fața opusă creștăturii studiate. În planul  $z$  formularea problemei devine prin urmare complicată; trebuie calculate valorile permeanțelor de dispersie pentru diverse poziții relative ale creștăturii studiate față de creștatură de pe fața opusă ,trebuie obținută curba variației permeanței de dispersie în funcție de decalajul  $D$  din fig. 6.5 .Există în mod evident două situații limită :

- creștătura studiată este în fața unei creștături de pe fața opusă ( fig.6.5 a) , ceea ce corespunde unui minim al permeanței de dispersie,
- creștătura studiată se găsește în fața unui dinte de pe fața opusă,(fig. 6.5 b) ,ceea ce corespunde maximumului permeanței de dispersie.

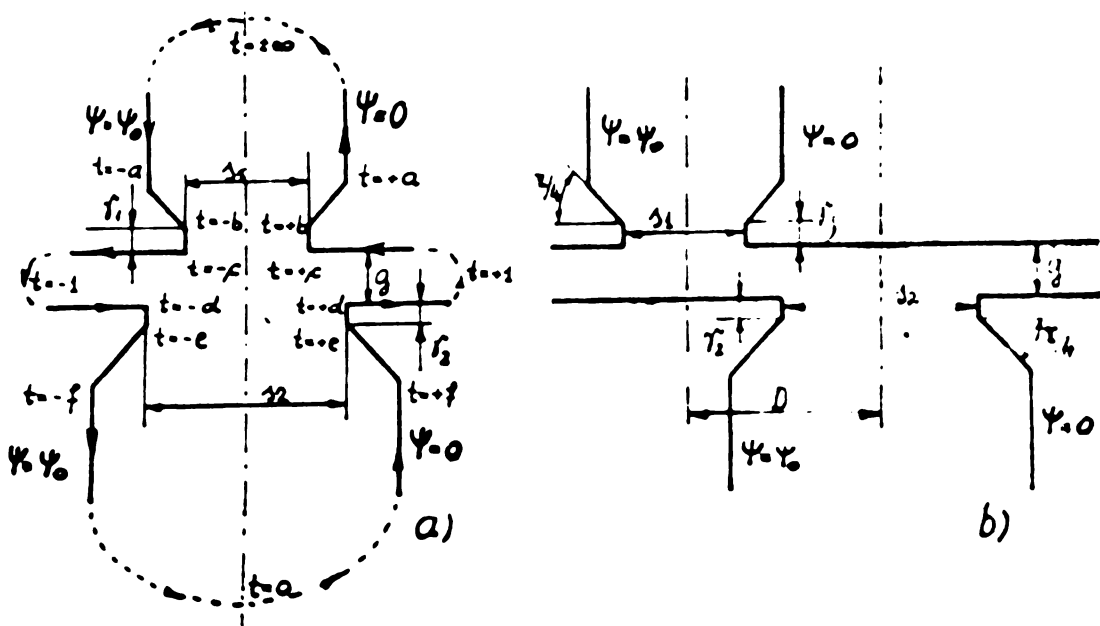


Fig.6.5 Poziții relative succesive pentru 2 creștături situate în stator și rotor

Modul de variație între aceste extreme poate fi găsit prin transformarea conformă, dar pornind de la cele două valori calculate cu precizie se poate apela la o metodă combinată de măsurători și calcul pentru precizarea formei variației permeanței în funcție de decalajul D. Ca metodă de măsurare se poate face apel la un model magnetic sau electrocinetic.

Se poate analiza eficacitatea transformării conforme în soluționarea cazurilor limită.

Pentru două creștături semideschise situate față în față - fig. 6.5a - unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  din fig. 6.4 a. au fost approximate cu unghiuri multiplu de  $\pi/4$ . Cele trei abscise arbitrare au fost alese de asemenea manieră, încât în semiplanul superior  $t$  să rezulte o situație convenabilă.

Exploatând simetria figurii rezultă integrala de transformare.

$$z = S \int \sqrt{\frac{4(t^2-b^2)(t^2-e^2)(t^2-c^2)(t^2-d^2)}{(t^2-a^2)(t^2-f^2)}} \cdot \frac{dt}{t^2(t^2-1)} \quad (6.44)$$

Din cauza constantelor de transformare  $a, b, c, d, e, f$  necunoscute în momentul integrării, expresia (6.44) este imposibil de evaluat. Dacă unghiurile multiplu de  $\pi/4$  se înlocuiesc cu unghiuri multiplu de  $\pi/2$  obținem situația din fig. 6.6 a. și integrala de transformare dată de (6.45).

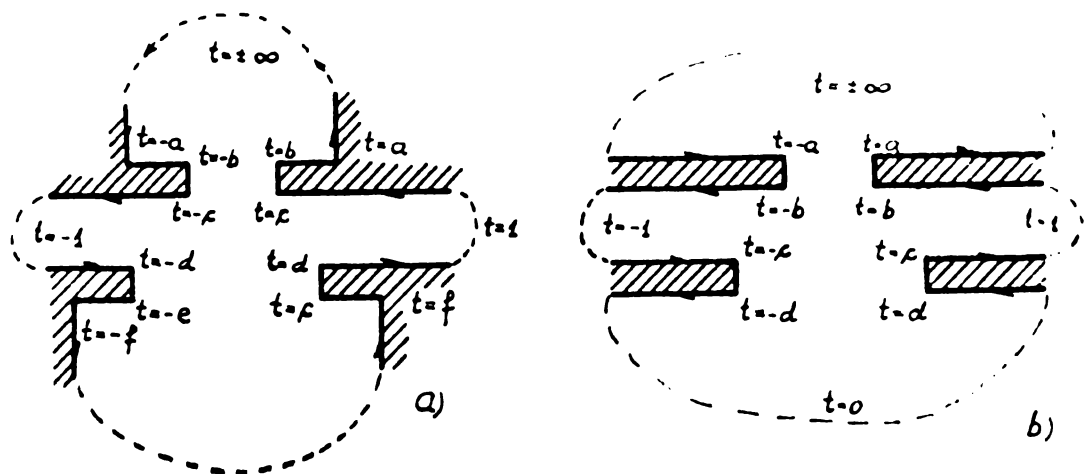


Fig. 6.6 Aproximări succesive ale situației din fig. 6.5.a

$$z = S \int \sqrt{\frac{(t^2-b^2)(t^2-c^2)(t^2-d^2)(t^2-e^2)}{(t^2-a^2)(t^2-f^2)}} \cdot \frac{dt}{t^2(t^2-1)} \quad (6.45)$$

O astfel de integrală hipereliptică se poate evalua când se cunosc valorile  $a, b, c, d, e, f$ .

Făcând substituția :

$$t^2 = z \quad (6.46)$$

$$dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \quad (6.47)$$

obținem pentru (6.45) :

$$z = S \int \frac{z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4}{\sqrt{z^2 + \beta_1 z + \beta_2}} \cdot \frac{dz}{2z(z-1)} \quad (6.48)$$

în care :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ \alpha_2 &= b^2 c^2 + b^2 d^2 + b^2 e^2 + c^2 d^2 + c^2 e^2 + d^2 e^2 \\ \alpha_3 &= -(b^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 e^2 + b^2 d^2 e^2) \\ \alpha_4 &= b^2 c^2 d^2 e^2 \end{aligned} \quad (6.49)$$

și :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 - a^2 - f^2 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \alpha_1(a^2 + f^2) + a^2 f^2 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \alpha_2(a^2 + f^2) + \alpha_1 a^2 f^2 \\ \beta_4 &= -\alpha_3(a^2 + f^2) + \alpha_2 a^2 f^2 \\ \beta_5 &= -\alpha_4(a^2 + f^2) + \alpha_3 a^2 f^2 \\ \beta_6 &= \alpha_4 a^2 f^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Sub formă restrînsă (6.48) se poate scrie :

$$z = S \int \frac{R(z)}{2\sqrt{P(z)}} dz \quad (6.51)$$

Deoarece gradul polinomului  $P(z)$  este impar, iar  $R(z)$  este o funcție rațională de  $z$  ce prin descompunere în fracții simple devine :

$$R(z) = z^2 + (\alpha_1 + 1)z + (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 1}{z-1} - \frac{\alpha_4}{z} \quad (6.52)$$

toți termenii rezultanți ai integralei (6.51) se pot exprima ca o combinație liniară a două integrale de bază date sub forma generală conform [B9 pag.253] ;

$$\Gamma_i = \int \frac{z^i dz}{\sqrt{P(z)}} \quad (6.53)$$

$$\lambda_m = \int \frac{dz}{(z-f)^m \sqrt{P(z)}} \quad (6.54)$$

$m$  și  $i$  sînt întregi, inclusiv zero .

Integralele  $\lambda_m$  și  $\Gamma_i$  se evaluează prin relațiile de recurență :

$$\Gamma_i = \int \frac{z^i}{\sqrt{P(z)}} dz = \frac{1}{2i-2p+1} \left[ 2z^{i-2p} \sqrt{P(z)} - \sum_{j=1}^{2p-1} (2i-2p-j+1) \beta_j \int \frac{z^{i-j}}{\sqrt{P(z)}} dz \right] \quad (6.55)$$

Dacă  $f$  este o rădăcină a polinomului  $P(z) = 0$ , avem :

$$\lambda_m(z, f) = \int \frac{dz}{(z-f)^m \sqrt{P(z)}} = \frac{2}{(1-2m)P'(z)} \left[ \frac{\sqrt{P(z)}}{(z-f)^m} + \sum_{j=1}^{2p} \frac{2m-j-1}{2(j+1)!} P^{(j)}(f) \int \frac{dz}{(z-f)^{m+j} \sqrt{P(z)}} \right] \quad (6.56)$$

unde :

$$P^{(j)}(f) = \left[ \frac{d^j}{dz^j} P(z) \right]_{z=f} \quad (6.57)$$

Dacă  $f$  nu este o rădăcină a polinomului  $P(z) = 0$ , avem

$$\lambda_m(z, \delta) = \frac{1}{2(1-m)P(\delta)} \left[ \frac{2\sqrt{P(z)}}{(z-\delta)^{m-1}} + \sum_{j=1}^{2p+1} \frac{2m-j-2}{j!} P^{(j)}(z) \int \frac{dz}{(z-\delta)^{m-1}\sqrt{P(z)}} \right] \quad (6,58)$$

pentru  $m \neq 1$

In relațiile (6.55), (6.56), (6.58)  $p$  este un număr întreg prin care gradul impar al polinomului  $P(z)$  se exprimă astfel :

$$\text{gradul polinomului} = 2p + 1$$

(pentru cazul integralei (6.48)  $p = 3$  )

Calea de evaluare descrisă pentru expresia (6.48) nu presupune valorile  $a, b, c, d, e, f$ , cunoscute. Dar din cauza expresiilor rezultate, metoda este inoperantă, întrucît rezolvarea și temului de ecuații rezultat prin înlocuirile (6.3) nu mai este posibilă.

Situația nu se îmbunătățește sensibil nici pentru aproximarea celor două creștături față în față prin configurația din fig.6.6.b. Integrala de transformare este :

$$z = \int \frac{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)(t^2-c^2)(t^2-d^2)}}{t^2(t^2-1)} dt \quad (6.59)$$

Urmin? același procedeu de evaluare se obține un polinom  $P(z)$  de gradul 5, adică  $p=2$ . Relațiile de recurență citate (6.55), (6.56), (6.58) sînt utilizabile și în acest caz, concluziile fiind identice. Prin urmare determinarea valorii minime a permeanței întrefierului pentru creștătura semideschisă prin metoda transformării conforme este imposibilă. La fel se procedează și pentru valoarea maximă a permeanței. Situația este prezentată în fig.6.7 ;

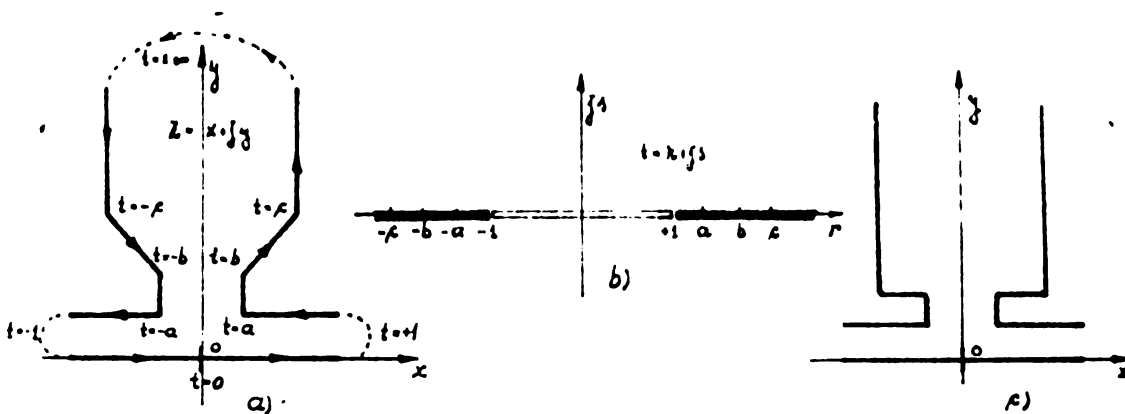


Fig.6.7

Integrala de transformare este :

$$z = \int \sqrt{\frac{4(t^2-a^2)^2(t^2-b^2)}{t^2-c^2}} \cdot \frac{dt}{t(t^2-1)} \quad (6.60)$$

Integrala (6.60) este hipereliptică. După trecerea unghiurilor multiplu de  $\pi/4$  în unghiuri multiplu de  $\pi/2$  (6.60) devine :

$$z = \int \sqrt{\frac{2(t^2-a^2)(t^2-b^2)}{t^2-c^2}} \cdot \frac{dt}{t(t^2-1)} \quad (6,60')$$

Pentru întrefieruri foarte mari și deschideri mici ale creștăturii (mașini sincrone, motoare lineare) e posibil a considera creștăturile față în față din fig. 6.6a. ca două creștături independente. În acest caz, foarte îndepărtat de situațiile uzual întâlnite în mașinile asincrone, câmpul de dispersie al creștăturii și întrefierului se poate calcula cu transformarea conformă dată mai jos pentru configurația din fig. 6.8 ;

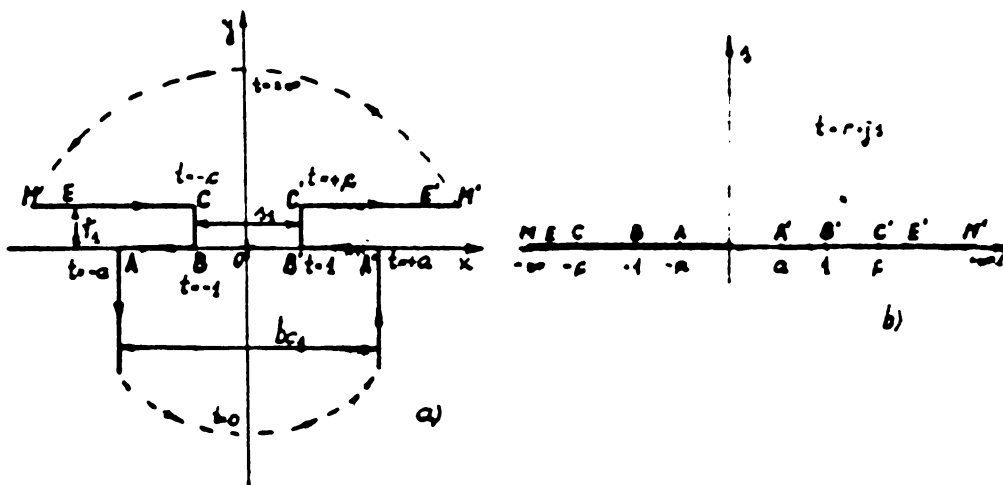


Fig. 6.8

Expresiile obținute prin integrarea ecuației de transformare sînt originale, sau cel puțin nu figurează printre transformările întâlnite în literatura consultată.

Se alege un astfel de sistem de axe încît să se exploateze simetria figurii. Aplicînd transformarea Schwartz - Christoffel obținem :

$$\frac{dz}{dt} = S \frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t^2 - c^2)(t^2 - 1)}{t^2 - a^2}} \quad (6.61)$$

Pentru polul  $t = 0$  se poate scrie :

$$t = R e^{i\varphi} \quad (6.62)$$

$$dt = j R e^{i\varphi} d\varphi \quad (6.63)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\frac{bc_1}{2} - jy}^{\frac{bc_1}{2} - jy} dz = -j S \int_{\pi}^0 \sqrt{\frac{(-c^2 X - 1)}{-a^2}} d\varphi \quad (6.64)$$

de unde rezultă constanta de scală și de rotație S.

$$S = -\frac{bc_1}{\pi} \cdot \frac{a}{\rho} \quad (6.65)$$

Se fac substituțiile :

$$\mu^2 = \frac{t^2 - a^2}{1 - a^2} \quad (6.66)$$

cu modulul ;

$$k^2 = \frac{1 - a^2}{c^2 - a^2} < 1 \quad (6.67)$$

$$t^2 = a^2 + (1-a^2) \operatorname{sn}^2 u \quad (6.68)$$

$$2t dt = 2(1-a^2) \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \cdot du \quad (6.69)$$

și se obține integrala expresiei (6.67):

$$Z = \int \sqrt{\frac{[a^2 - t^2 + (1-a^2) \operatorname{sn}^2 u] \cdot [a^2 - 1 + (1-a^2) \operatorname{sn}^2 u]}{(1-a^2) \operatorname{sn}^2 u}} \cdot \frac{(1-a^2) \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u}{a^2 + (1-a^2) \operatorname{sn}^2 u} du \quad (6.70)$$

Relația (6.70) se poate transforma în continuare :

$$Z = \int \frac{(1-a^2) \sqrt{c^2 - a^2}}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{dn}^2 u \cdot \operatorname{cn}^2 u}{1 - \frac{a^2-1}{a^2} \operatorname{sn}^2 u} du \quad (6.71)$$

Înlocuind în (6.71) factorul lui  $\operatorname{sn}^2 u$  prin expresia :

$$\alpha^2 = \frac{a^2-1}{a^2} < 0 \quad (6.72)$$

se obține integrala :

$$Z = -\frac{bc_1}{\varepsilon} \frac{(1-a^2)(c^2-a^2)}{a \cdot c} \int \frac{\operatorname{cn}^2 u \cdot \operatorname{dn}^2 u}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} du \quad (6.73)$$

În condițiile (6.67) și (6.72) integrala din (6.73) se încadrează în tipul descris de relația 362.1. din [B] pag. 210] ceea ce duce la :

$$Z = \frac{bc_1}{\varepsilon} \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \left[ E(u) + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} k^2 \cdot u + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} (\alpha^2 - k^2) \Pi(u, \alpha^2) \right] \quad (6.74)$$

În expresia (6.74) constantele de integrare  $a$  și  $c$  apar fie explicit, fie implicit, prin  $\alpha^2$  și  $k^2$ . Ele trebuie să fie determinate în funcție de geometria creștăturii transformate. Sistemul de ecuații (6.3) se va obține din (6.74) impunând condițiile :

$$Z = s_1/2 \quad \text{ceea ce corespunde la } t = 1$$

și

$$Z = s_1/2 + j\delta_1 \quad \text{ceea ce corespunde la } t = c.$$

Pentru  $t = 1$ . (6.75)

avem :  $\operatorname{sn}^2 u = 1$  (6.76)

$$u = F(\operatorname{arcsin} 1, k) = K \quad (6.77)$$

$$E(\operatorname{arcsin} 1, k) = E \quad (6.78)$$

Integrala eliptică de speța III din (6.74) se evaluează după ce se pune sub forma Jacobi prin utilizarea funcției  $\delta$  theta, conform relației (6.43) din § 6.1.3.

$$\begin{aligned} \Pi(K, \alpha^2) &= K + \frac{\operatorname{sn} \delta}{\operatorname{cn} \delta \cdot \operatorname{dn} \delta} \Pi_{\delta}(K, \delta) \\ &= K + \frac{\operatorname{sn} \delta}{\operatorname{cn} \delta \cdot \operatorname{dn} \delta} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(K-\delta)}{\Theta(K+\delta)} + K Z(\delta) \right] \end{aligned} \quad (6.79)$$

în care :

$$\operatorname{sn}^2 \delta = \alpha^2 / k^2 \quad (6.80)$$

Conform [B] pag. 314] :

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(K-\delta)}{\Theta(K+\delta)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta_1(-\delta)}{\Theta_1(\delta)} = 0 \quad (6.81)$$

așa că :

$$\Pi(K, \alpha^2) = K + K \cdot Z(\delta) \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} \quad (6.82)$$

Prima ecuație a sistemului de determinare a constantelor a și c va fi deci :

$$\frac{a_1}{2} = \frac{bc_1}{\pi} \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \left[ E - k^2 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \cdot K + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} (\alpha^2 - k^2) \left( K + K Z(\delta) \cdot \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} \right) \right] \quad (6.83)$$

Pentru  $t = c$

avem :

$$n^2 \mu = 1/k^2 \quad (6.84)$$

$$\mu = F(\arcsin(1/k), k) = K + jK' \quad (6.85)$$

$$E(\arcsin(1/k), k) = E + j(K' - E') \quad (6.86)$$

$$\Pi(K + jK', \alpha^2) = K + jK' + \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} \Pi_j(K + jK', \alpha^2) \quad (6.87)$$

în care  $m^2 \delta$  este definit ca în relația (6.80)

Conform [B5 pag.221] :

$$\Pi_j(K + jK', \alpha^2) = j \frac{\pi \delta}{2K} + (K + jK') Z(\delta) \quad (6.88)$$

Impunând pentru  $Z$  valoarea  $\frac{a_1}{2} + j\hat{y}_1$  va trebui să găsim aceeași parte reală a expresiei ca în cazul relației (6.83), ceea ce se verifică:

$$\frac{a_1}{2} + j\hat{y}_1 = \frac{bc_1}{\pi} \frac{a \sqrt{c^2 - a^2}}{c} \left\{ \left[ E - k^2 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} K + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} (\alpha^2 - k^2) \left( K + K Z(\delta) \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} \right) \right] + \right. \\ \left. + j \left[ -E' + K' \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} (\alpha^2 - k^2) \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} \left( K' Z(\delta) + \frac{\pi \delta}{2K} \right) \right] \right\} \quad (6.89)$$

În relațiile (6.83) și (6.89) se pot face substituțiile :

$$a^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2} = \frac{1}{1 - k^2 m^2 \delta} = \frac{1}{dn^2 \delta} \quad (6.90)$$

$$c^2 = \frac{k^2 - a^2}{k^2(1 - \alpha^2)} = \frac{k^2 cn^2 \delta}{k^2 dn^2 \delta} = \frac{cn^2 \delta}{dn^2 \delta} \quad (6.91)$$

Sistemul de ecuații definind constantele transformării a și c se poate pune sub formă compactă :

$$\frac{a_1}{bc_1} = j \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} E - \left[ \frac{m\delta \cdot dn\delta}{cn\delta} - Z(\delta) \right] K \right\} \quad (6.92)$$

$$\hat{y}_1 = j \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{m\delta}{cn\delta \cdot dn\delta} E' + \left[ \frac{k^2 m^3 \delta}{cn\delta \cdot dn\delta} + Z(\delta) \right] K' + \frac{\pi \delta}{2K} \right\} \quad (6.93)$$

Caracterul imaginar al membrilor drepti ai relațiilor (6.92) și (6.93) este doar aparent, deoarece conform definiției lui  $m^2 \delta$  din (6.80) rezultă :

$$-m^2 \delta = \frac{\alpha^2}{k^2} = \frac{a^2 - 1}{k^2 a^2} < 0 \quad (6.94)$$

Sistemul de ecuații (6.92) , (6.93) se poate rezolva printr-o metodă grafoanalitică, fie prin iterații succesive după algoritmul expus în [B35] . În traducerea algoritmului expus în [B35] este imperativ necesară evaluarea integralelor eliptice  $E, K, K'$  precum și a funcțiilor eliptice  $sn, cn, dn$  în modul discutat la § 6.1.4.

6.3. Rezolvarea problemei de câmp din planul  $z$  pe baza soluției din planul  $t$ .

Prin transformarea conformă potențialul electric sau magnetic al punctului nu se modifică , rămânând egal cu al imaginii, [B1] , [B5] iar fluxul ce trece printr-o suprafață delimitată de dreapta ce unește imaginile a două puncte (în planul  $t = r + js$ ) este egal cu fluxul ce trece prin suprafața delimitată de cele două puncte în planul  $z = x + jy$ .

Dacă variația potențialului magnetic sau electric de-a lungul frontierei din planul  $z$  este descrisă de funcția  $\Psi(z)$ , se poate obține - cel puțin în mod teoretic - funcția  $\Psi'(t)$  ce descrie variația potențialului magnetic sau electric de-a lungul axei absciselor din planul  $t$  prin intermediul funcției de transformare  $z = f(t)$ .

În general se operează cu potențialul complex definit astfel:

$$w(z) = \Psi(z) + j\mathcal{P}(z) \quad (6.95)$$

în care :

$$\mathcal{P}(z) = \text{Im}(w(z)) \quad (6.96)$$

este funcția flux magnetic sau electric , iar :

$$\Psi(z) = \text{Re}(w(z)) \quad (6.97)$$

este funcția potențial (scalar) magnetic sau electric.

Să presupunem că pe axa  $r$  a absciselor din planul  $t = r + js$  se cunoaște variația potențialului scalar  $\Psi'(r)$ . Atunci într-un punct oarecare al semiplanului  $t$ , potențialul complex determinat de variația  $\Psi'(r)$  a potențialului scalar va fi :

$$w(t) = \Psi(t) + j\mathcal{P}(t) = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+rt}{(1+r^2)(t-r)} \cdot \Psi'(r) dr \quad (6.98)$$

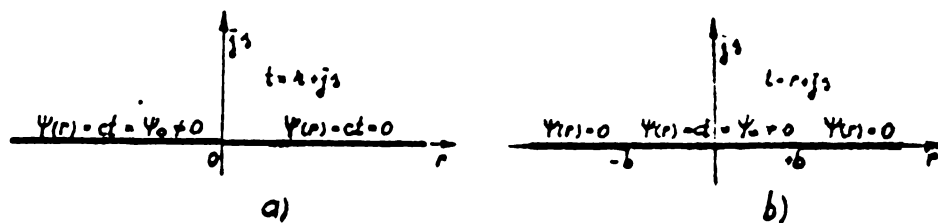
În general, de-a lungul axei  $r$  există  $m$  porțiuni echipotențiale , porțiunea  $a$  a  $n$ -a având potențialul  $\Psi'_n$  . Dacă zona  $a$  a  $n$ -a este delimitată de abscisele  $r_n$  și  $r_{n+1}$ , potențialul complex într-un punct oarecare al semiplanului  $t$  va fi :

$$w(t) = \Psi(t) + j\mathcal{P}(t) = \frac{j}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} (\Psi'_n - \Psi'_{n+1}) \ln \frac{1 + \sqrt{1+r_n^2}}{t - r_{n+1}} + \Psi'_m \quad (6.99)$$

Se caută o transformare conformă (sau mai multe , succesive) de asemenea manieră încît în final în semiplanul superior  $t$  să rezulte una din cele două situații caracteristice redată în fig. 6.9 , adică două plane echipotențiale , cu potențialele scalare



diferite (fig.6.9.a) și o fișie de lățime constantă, echipotențială, adiacentă la două plane avînd același potențial (fig.6.9.b) .



Cele două situații limită în semiplanul superior  $t$   
Fig. 6.9.

Pentru cazul particular al semiaxelor echipotențiale din fig.6.9 a potențialul complex devine :

$$w(t) = \Psi(t) + j\varphi(t) = -\frac{j}{\tau} \Psi_0 \ln t \quad (6.100)$$

iar pentru cazul ilustrat de fig.6.9.b.;

$$w(t) = \Psi(t) + j\varphi(t) = -\frac{j}{\tau} \Psi_0 \ln \frac{t-b}{t+b} \quad (6.101)$$

Scrind în (6.100) și (6.101)  $t = r + js$ , separînd partea reală și imaginară se pot formula următoarele concluzii referitoare la soluția problemei de cîmp în planul  $t$  :

a) - pentru configurația din fig.6.9.a. respectiv relația (6.100) ;

- Curbele  $\varphi = ct$ , liniile de cîmp sînt :

$$\text{Im} \left( -j \frac{\Psi_0}{\tau} (j\varphi + \ln \varrho) \right) = -\frac{\Psi_0}{\tau} \ln \varrho = ct \quad (6.102)$$

cercuri cu centrul în originea sistemului de axe  $r, s$  avînd raza egală cu :

$$R = \frac{\Psi_0}{\tau} \ln \sqrt{r^2 + s^2} \quad (6.103)$$

În relațiile de mai sus se utilizează notațiile sistemului polar  $\varrho, \gamma$ :

$$\varrho = \sqrt{r^2 + s^2} \quad (6.104)$$

$$\gamma = \text{ardg} \frac{s}{r} \quad (6.105)$$

Fluxul tubului de flux delimitat de 2 cercuri avînd

$$\varrho_1 = ct \text{ și } \varrho_2 = ct \text{ este :} \quad (6.106)$$

$$\Phi = -\frac{\Psi_0}{\tau} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

- Curbele  $\Psi = ct$ , liniile echipotențiale, ortogonale liniilor de cîmp sînt :

$$\text{Re} \left( -j \frac{\Psi_0}{\tau} (j\varphi + \ln \varrho) \right) = \frac{\Psi_0}{\tau} \cdot \varphi = ct \quad (6.107)$$

un fascicol de drepte ce trec prin originea reperului  $r, s$  Fig.6.10 a. ilustrează cele spuse mai sus

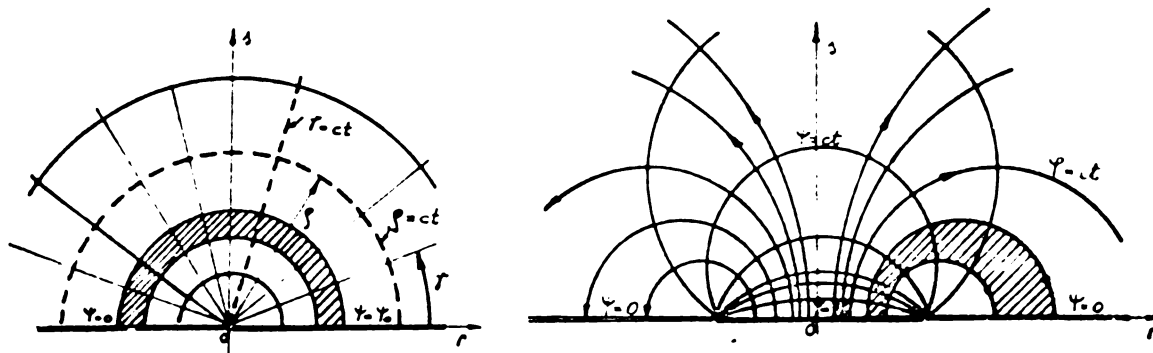


Fig.6.10 Liniiile de câmp și echipotențiale pentru situațiile din fig.6.9.

b) - pentru configurația din fig.1.9.b, respectiv relația(6.104)  
 - Curbele  $\varphi = ct$ , linii de câmp sînt :

$$\Im \left[ -j \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{(l-b)^2 + s^2}{(l+b)^2 + s^2} + \frac{\Psi_0}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{s}{r-b} - \operatorname{arctg} \frac{s}{r+b} \right) \right] \quad (6.108)$$

o cercuri cu centrul pe axa absciselor în punctul :

$$s_0 = b \frac{1 + e^\alpha}{1 - e^\alpha} \quad (6.109)$$

$\alpha$  fiind :

$$\alpha = 2\pi \frac{\varphi}{\Psi_0} \quad (6.110)$$

și raza egală cu :

$$R_r = \frac{2b}{1 - e^\alpha} e^{\alpha/2} \quad (6.111)$$

- Curbolo  $\Psi = ct$ , liniile echipotențiale, ortogonale liniilor de câmp sînt :

$$\Re \left[ -j \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{(r-b)^2 + s^2}{(r+b)^2 + s^2} + \frac{\Psi_0}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{s}{r-b} - \operatorname{arctg} \frac{s}{r+b} \right) \right] \quad (6.112)$$

o familie de cercuri cu centrul pe axa ordonatei în punctul:

$$s_0 = \frac{b}{\pm j \sqrt{\pi} \Psi / \Psi_0} \quad (6.113)$$

și raza egală cu :

$$R_s = \frac{b}{\sin(\pi \cdot \Psi / \Psi_0)} \quad (6.114)$$

Pe baza soluției problemei de câmp în planul  $t$  se poate face cu ajutorul funcției de transformare  $z = t(t)$  transferul punct cu punct al spectrului câmpului din planul  $t$  în planul  $z$ , precum și calculul fluxului de dispersie în zonele de interes.

Componentele  $B_x$  și  $B_y$  ale vectorului inducție magnetică în planul  $z$  sînt calculate pe baza relațiilor :

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(z) \quad (6.115)$$

$$B_y = -\frac{\partial}{\partial y} \varphi(z) \quad (6.116)$$

ținând cont de condițiile Cauchy - Riemann pe care le îndeplinește funcția  $W(z) = \Psi(z) + j\Phi(z)$ .

Conjugata inducției  $\bar{B} = B_x + jB_y$  se exprimă :

$$\hat{B} = B_x - jB_y = -\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} + j\frac{\partial \Psi(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} + j\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} - j\left(\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} + j\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x}\right) = j\frac{\partial W(z)}{\partial x} - j\frac{\partial W(z)}{\partial z}$$

Deoarece :

$$(6.117)$$

$$|\hat{B}| = |\bar{B}|$$

$$(6.118)$$

modulul inducției în punctul  $z$  a cărui imagine este  $t$  se exprimă prin :

$$|\bar{B}| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \right| \quad (6.119)$$

iar argumentul :

$$\arg \bar{B} = -\arg \left( j \frac{dw}{dz} \right) \quad (6.120)$$

În linii mari etapele determinării modulului și argumentului inducției în planul  $z$  în punctul  $z_k = x_k + jy_k$ , având imaginea  $t_k$  se conturează astfel :

- se transformă configurația din planul  $z$  în semiplanul superior  $t$  prin intermediul funcției  $z = f(t)$ .

- se găsește funcția potențial complex  $w(t)$  corespunzătoare, în planul  $t$  și se calculează  $\left| \frac{dw}{dt} \right|_{t=t_k}$

- din ecuația diferențială de transformare Schwarz - Christoffel rezultă  $\left| \frac{dt}{dz} \right|_{t=t_k} = \left| 1/\left( \frac{dz}{dt} \right) \right|_{t=t_k}$

- se aplică relațiile (6.119) și (6.120) pentru punctul  $t_k$  corespunzător punctului  $z_k$ .

De cele mai multe ori însă, exprimarea funcției inverse pentru funcția de transformare  $z = f(t)$  este imposibilă, deci determinarea imaginii punctului  $z_k$  pe calea :

$$t_k = f^{-1}(z_k) \quad (6.121)$$

este înlocuită printr-un proces iterativ. Dacă punctul  $z_k$  aparține unei curbe  $C(z)$  se pornește totdeauna de la punctul de intersecție al curbei  $C(z)$  cu frontiera  $F$ , deoarece pentru punctul  $P$  comun celor 2 curbe iterațiile în planul  $t$  se fac numai după o singură variabilă - abscisele  $r$  - frontiera  $F$  fiind întregime aliniată pe axa absciselor semiplanului superior  $t$ .

Procedeu cu totul general de a găsi un algoritm eficient pentru găsirea imaginii unui punct singular  $z_k$  se dovedește grație din cauza celor două variabile ale lui  $t$  ce trebuie modificate de o asemenea manieră încât punctul  $z$  rezultat să se apropie suficient de rapid de cercul de rază  $\varepsilon$  din jurul lui  $z_k$ ,  $\varepsilon$  fiind

eroarea admisă în stabilirea lui  $z_k$

$$\xi \geq |z - z_k| \quad (6.122)$$

Ceea ce trebuie remarcat este că pentru o curbă  $C(z)$  continuă în poligonul transformat din planul  $z$ ,  $t$  variază după o curbă  $C'(t)$  în planul  $t$ ; deci toate funcțiile și integralele eliptice ce intervin în funcția de transformare  $z = f(t)$  vor avea argument complex. De multe ori aceasta poate constitui un dezavantaj serios.

Pentru a ilustra cele afirmate mai sus se va expune algoritmul de calcul al inducției pe linia de întrefier mediu  $C(z)$  din configurația prezentată în fig.6.11.

Justificarea acestei dezvoltări rezidă în faptul că literatura nu prezintă procedee de calcul al inducției pe o curbă oarecare din planul  $z$ . Dacă aceasta ar putea fi numită "problema directă", cea ce s-a făcut pînă acum - transformarea liniilor de câmp și echipotențiale din planul  $t$  în planul  $z$  - ar putea reprezenta rezolvarea "problemei inverse"

Funcția de transformare  $z = f(t)$  se obține integrînd ecuația diferențială rezultată prin transformarea Schwarz - Christoffel :

$$\frac{dz}{dt} = S \frac{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}}{t^2 - 1} \quad (6.123)$$

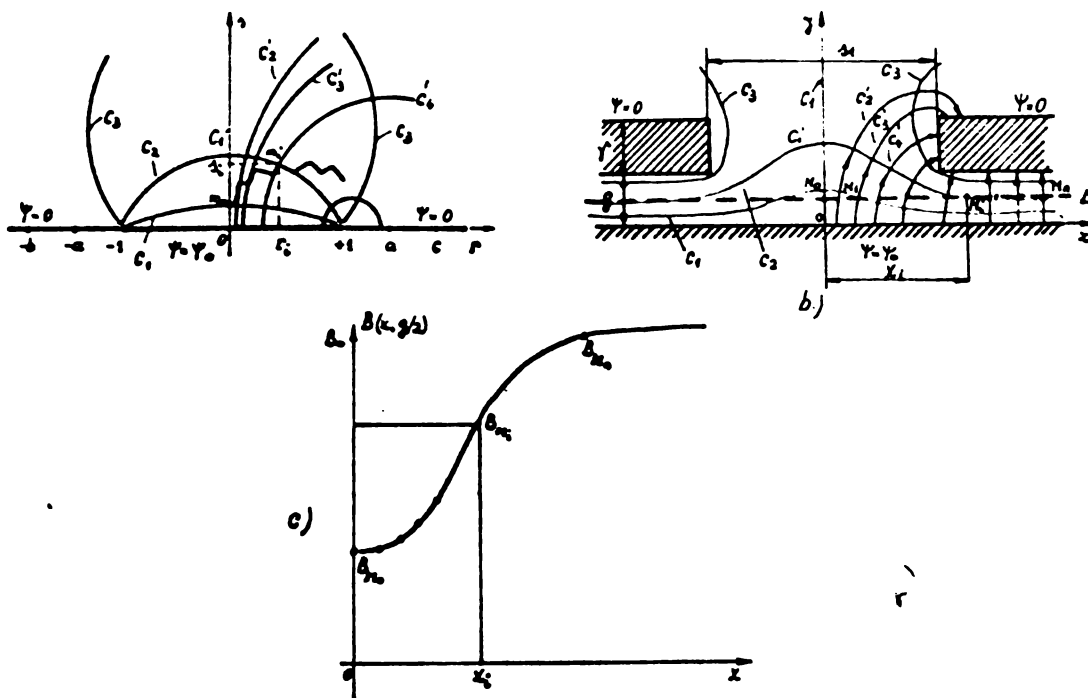


fig. 6.11 Referitor la calculul inducției pe linia de întrefier mediu .

Făcînd substituțiile :

$$k = a/b \quad (k < 1) \quad (6.124)$$

$$t = a \operatorname{sn}(u, k) \quad (6.125)$$

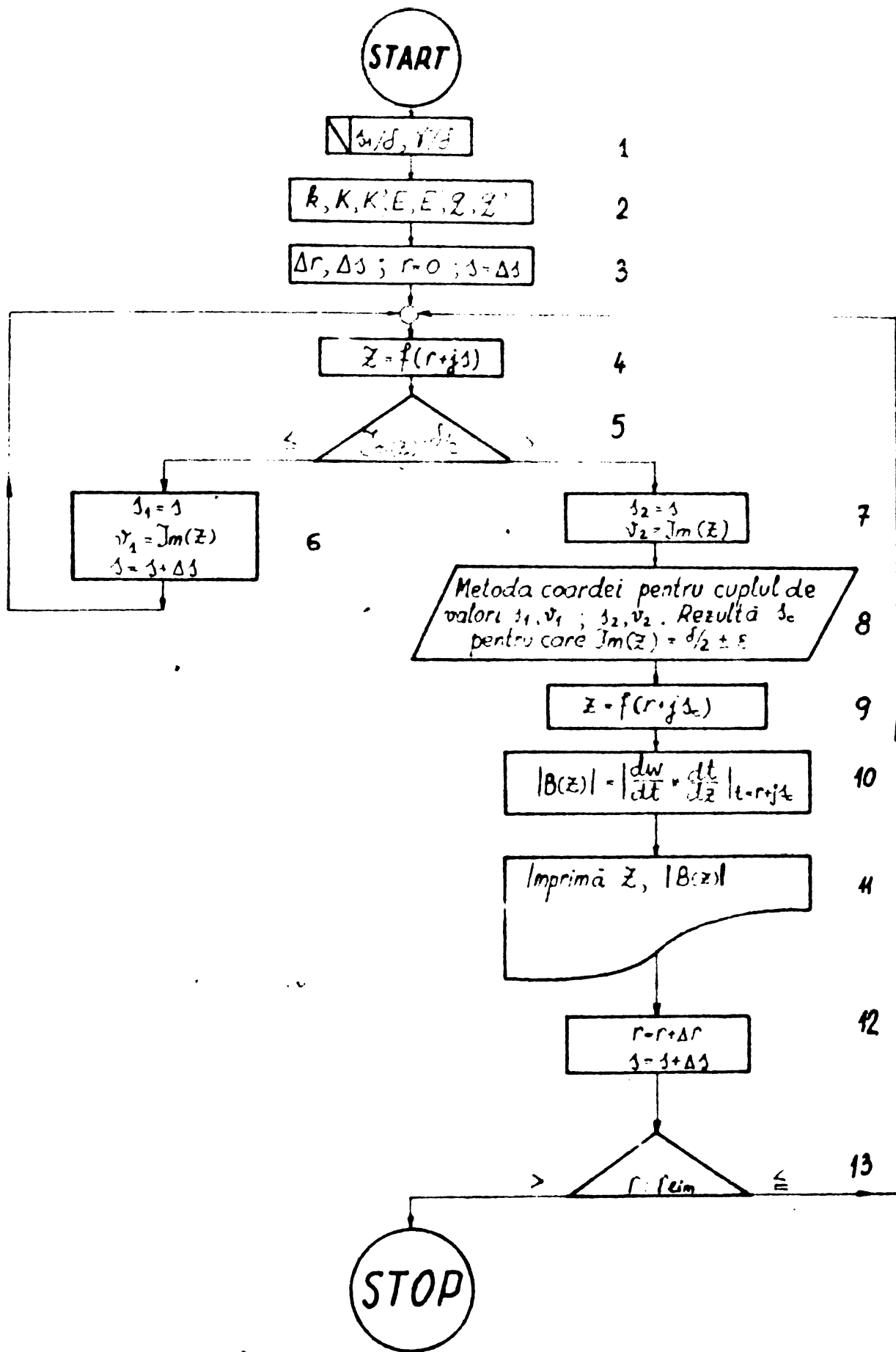


Fig. 6.12 Organigrama de calcul a câmpului  $B = f(z)$  pornind de la soluția problemei în planul  $t = r + js$ .

$$dt = a \operatorname{cn}(u, k) \cdot dn(u, k) \cdot du \quad (6.126)$$

$$\operatorname{sn}(\alpha, k) = \operatorname{sn} \alpha = \frac{1}{a}$$

$$S = \frac{2\delta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} \quad (6.128)$$

Se obține :

$$Z = \frac{2\delta}{\pi} \left\{ \left[ \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{dn \alpha} - Z(\alpha) \right] u + \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \cdot dn \alpha} E(u, k) + \Omega_4 \right\} \quad (6.129)$$

în care :

$$\Omega_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(w+v)}{\sin(w-v)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m \sin(2mw) \cdot \sin(2mv)}{m \cdot \sinh(2mp)} \quad (6.130)$$

cu:

$$w = \pi F(\alpha, k) / (2K)$$

$$v = \pi u / (2K)$$

$$p = \pi K' / K$$

$$q = e^{-2p}$$

Parametrii transformării,  $\alpha$  și  $k = \sin \theta$  se obțin în funcție de geometria configurației din sistemul :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{4}{\pi} \left\{ \left[ \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{dn \alpha} - Z(\alpha) \right] K + \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \cdot dn \alpha} E \right\} \quad (6.135)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1 - \operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{dn}^2 \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot dn \alpha} - Z(\alpha) \right] K' - \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} E' - \frac{\pi \alpha}{2K} \right\} \quad (6.136)$$

Referitor la sistemul (6.135), (6.136), la metodele de rezolvare, aceleași precizări ca și la sistemul (6.92), (6.93).

În planul  $z$  curba  $C(z)$  este dreapta  $\Delta$

Din motive de simetrie se începe cu căutarea imaginii punctului  $M_0$  în planul  $t$ , pentru acest caz  $t$  fiind pur imaginar. În continuare procesul decurge conform organigramei din fig. 6.12 și schiței redată în fig. 6.11 a. Valorile inducției de-a lungul curbei  $C(z)$  se dau în fig. 6.11 c.

Blocurile organigramei de principiu au următoarea semnificație :

1. Introducerea datelor ce caracterizează geometria configurației.
2. Cu valorile rapoartelor  $\delta_1/\delta$  și  $\delta_2/\delta$  și (1.35), (1.36) se calculează modulul  $k$  și abscisa  $\alpha$  a imaginii punctului  $F$  și  $C$ .

Abcisele imaginilor punctelor  $B$  și  $G$  rezultă din (6.124) Utilizând subrutinele date în SSP-ul firmei IBM se calculează pornind de la  $k$  valorile integralelor eliptice de speța I și II :  $K, K', E, E'$ , precum și modulul lui Jacobi  $q, q'$ .

3. Se aleg  $\Delta r$  și  $\Delta s$  în funcție de integrala eliptică de speța I completă (K). Experiența arată că pentru parcurgerea organigramei prin blocul 6 înainte de blocul 7 (adică pentru a determina primul cuplu de valori  $u_1, v_1$  necesare pentru metoda coardei) valoarea inițială a abscisei 's' trebuie să fie  $\approx 0,002 K$
4. Se evaluează (6.129) după ce s-au calculat toți termenii componenți.
5. Se compară  $\text{Im}(z)$  cu ordonata drepte care pentru cazul în speță este  $\delta/2$ . Aici acesta este unica restricție. Abscisa punctului z rezultat interesează mai puțin din următoarele motive:
  - introducerea unei noi restricții pentru abscisă lungeste considerabil timpul de calcul;
  - dacă rezultă puncte prea rare în planul z, se poate modifica  $\Delta r$  în sensul micșorării lui.
6. Se consemnează valorile anterioare ale lui s și  $\text{Im}(z)$  pentru metoda coardei și se mărește partea imaginară a lui t,
7. Apelarea subrutinei bazată pe metoda coardei pentru aflarea valorii lui s ce dă  $\text{Im}(z)$  egal cu  $\delta/2$  în limitele erorii  $\epsilon$  admisă de program.
8. Deoarece :  $v_1 < \delta/2 < v_2$  (6.137)

se caută cu metoda coardei valoarea  $s_0$  a lui s pentru care

$$\text{Im}(z) = \frac{\delta}{2} \pm \epsilon$$

9. Se recalculează coordonatele lui  $z = f(r + js_0)$
10. Cu relația (6.119) se calculează modul inducției în punctul z rezultat.

Pentru cazul studiat relația (6.119) dă expresia concretă:

$$|B(x)| = B_0 \left| \frac{cn\alpha \cdot dn\alpha}{\sqrt{(1 - sn^2\alpha \cdot t^2)(1 - k^2 sn^2\alpha \cdot t^2)}} \right|$$

t fiind  $r + js_0$ , iar  $B_0$  inducția în zona de cimp uniform.

11. Se imprimă rezultatele.
12. Se mărește r și s.
13. Se verifică r cu valoarea limită fixată pentru r. Dacă  $r > r_{lim}$  calculul se oprește. Dacă  $r \leq r_{lim}$  se reiau operațiile de la blocul 4.

Pentru scopul limitat al calculării fluxului ce traversează o suprafață delimitată de dreapta ce unește două puncte situate pe frontieră, problema este mai simplă decât cazul studiat anterior, deoarece procesul iterativ redat în organigrama din fig.6.12 nu are decât o variabilă, imaginea punctului de pe frontieră fiind

mereu de ordonată nulă , adică  $t$  rezultă pur real.

După ce imaginile  $r_1$  și  $r_2$  ale punctelor au fost găsite pe axa absciselor semiplanului  $t$  , fluxul se calculează simplu , aplicând relația :

$$\phi = |\text{Im}(w(r_1 + j.0)) - \text{Im}(w(r_2 + j.0))| \quad (6.138)$$

Se impun următoarele concluzii :

- Dacă configurația din planul  $z$  a fost transformată conform în semiplanul superior  $t$  și constantele transformării au fost determinate în funcție de geometria poligonului din planul  $z$  , problema de câmp din planul  $z$  este complet rezolvată pe baza soluției din planul  $t$ .
- Cu cât funcția de transformare este mai simplă , cu atât mai eficace va fi procesul iterativ definit pentru determinarea în planul  $t$  a imaginilor punctelor din planul  $z$ .

#### 6.4. Posibilități de considerare a saturației

Fără a reprezenta soluția ideală a considerării saturației materialului dintelui , metodele semiempirice descrise în [B19], [B36], [B37], dau rezultate satisfăcătoare pentru calculul reactanțelor de dispersie saturate. Ideea înlocuirii unei creștături cu o pupetolo dinților naturesate, cu o creștătură echivalentă avînd o deschidere mai mare, dar fierul nesaturat, poate fi utilizată și în legătură cu transformarea conformă , deoarece pentru creștătura echivalentă se poate calcula permeanța de dispersie pornind de la soluția exactă a cîmpului.

Să luăm cazul creștăturii semideschise singulare prezentat în fig. 6.13 a .Capul dintelui este saturat de fluxul ce intră prin fețele sale, adică de suma  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$  explicitată în fig. 6.13

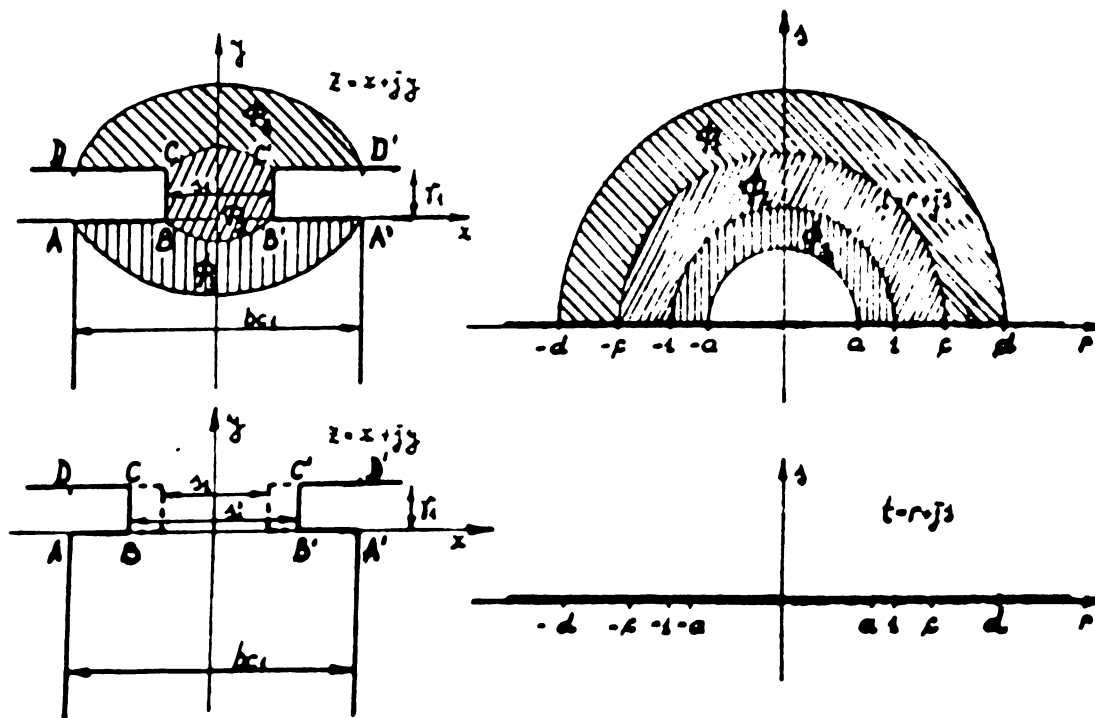


Fig.6.13. Referitor la calculul deschiderii virtuale sub influența saturației.



Punctele D și D' din planul z au coordonatele :

$$z_D = -\frac{b_{c1}}{2} + j \gamma_1 \quad (6.139)$$

$$z_{D'} = +\frac{b_{c1}}{2} + j \gamma_1 \quad (6.140)$$

Imaginile lor din planul t pot fi determinate prin procesul iterativ descris anterior, începînd iterațiile cu valoarea lui  $t = c + \Delta r + j.0$ . Avînd valoarea abcisei "d" se pot exprima cele trei componente ale fluxului  $\emptyset$ .

Ipotezele de lucru :

- Curba de magnetizare  $B = f(H)$  este exprimată analitic prin;

$$B = KH \left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (6.141)$$

în care constantele de material K, n se determină pentru fiecare material, pentru fiecare curbă  $B = f(H)$ , astfel ca aproximația să fie corespunzătoare în zona inducțiilor ce depășesc cotul curbei  $B = f(H)$ . Pentru inducții inferioare acestei limite,  $B_{lim}$ , valoarea permeabilității se consideră constantă.

Relația (1.141) a fost verificată, [B34], [B3], [B31], ea dă bune rezultate în zona inducțiilor  $B \geq B_{lim}$ .

- Corpul dintelui este nesaturat ( $\mu_{Fe} = \infty$ )
- Aproximarea creștăturii semideschise cu poligonul din fig.6.13 .a este satisfăcătoare.
- Se poate considera o inducție medie în capul dintelui, dată de suma fluxurilor  $\emptyset$  și secțiunea caracterizată de înălțimea  $\gamma$  a istmului, deoarece secțiunea reală a capului dintelui crește în zona în care fluxul -sumă crește.

În ipotezele de mai sus, se calculează componentele fluxului:

$$\Phi_1 = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{d}{c} \quad (6.142)$$

$$\Phi_2 = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{f}{1} \quad (6.143)$$

$$\Phi_3 = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{1}{a} \quad (6.144)$$

$$\Phi_4 = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (6.145)$$

Inducția medie prin capul dintelui este :

$$B_{med} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (6.146)$$

iar permeabilitatea relativă a materialului :

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{K^{n/(n-2)}}{B_{med}^{1/(n-2)}} \quad (6.147)$$

în care:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  (6.148)

Procedeul semiempiric de determinare a deschiderii echivalente este următorul :

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = DC \frac{B_{med}}{\mu_0} + (bc_1 - s_1) \cdot \frac{B_{med}}{\mu_r} = \oint_{\Gamma'} \bar{H} d\bar{l} = (s_1 + \Delta l) \frac{B_{med}}{\mu_0} \quad (6.149)$$

în care  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_1'$  sînt curbele ilustrate în fig.6.14.

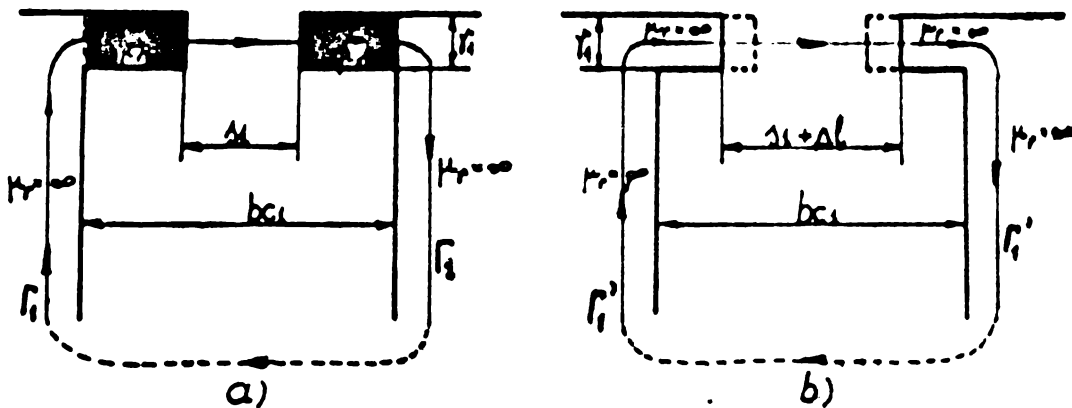


Fig.6.14

Crestătura echivalentă ,de deschidere  $s_1 + \Delta l$  se caracterizează prin :

$$z_B = -\frac{1}{2}(s_1 + \Delta l) + j \cdot 0 \quad (6.150)$$

$$z_{B'} = +\frac{1}{2}(s_1 + \Delta l) + j \cdot 0 \quad (6.151)$$

$$z_C = -\frac{1}{2}(s_1 + \Delta l) + j \cdot f \quad (6.152)$$

$$z_{C'} = +\frac{1}{2}(s_1 + \Delta l) + j \cdot f \quad (6.153)$$

Se face o nouă transformare, se determină din nou abscisele imaginilor punctelor D și D' , se recalculează  $\Delta l$  din relația (6.149) Dacă  $\Delta l < \epsilon$  , adică deschiderea echivalentă s-a stabilizat , procesul se oprește și se calculează pormoanța finală a crestăturii echivalente, ceea ce reprezintă permeanța saturată a crestăturii reale.

#### 6.5. Aproximarea critică a posibilităților de utilizare a transformării conforme în calculul reactanțelor nesaturate.

Utilizarea calculatorului pentru rezolvarea sistemelor de ecuații ce cetermină parametrii transformării (sistemele (6.92), (6.93) și (6.135), (6.136)) și pentru găsir a imaginilor punctelor din planul  $z$  în planul  $t$  printr-un proces iterativ ,face posibilă manipularea expresiilor rezultate prin transformarea conformă în scopul obținerii unor rezultate interesante.

Limitele utilizării transformării conforme ,rezidă în dificultățile legate de transformarea configurațiilor reale. Inșă după

cum s-a semnalat § 6.2 sînt accesibile transformările creștăturilor singulare semideschise și ale creștăturilor deschise plasate față în față și decalat.

Contribuțiile originale aduse în studiul transformării conforme :

- transformarea configurației din fig. 6.8.a.
- punerea la punct a unei metode eficiente de găsire a imaginilor punctelor din interiorul poligonului transformat sau de pe frontiera sa,
- algoritmul de considerare a saturației capului de dinte, diversifică domeniul de utilizare a acestei elegante metode matematice și poate conduce la rezultate interesante.

Acuasta, deoarece considerarea situațiilor limită (creștături față în față sau creștătură în față unui dinte ) așa cum se demonstrează și în capitolele 4 și 5 dă rezultate bune pentru calculul reactanțelor de dispersie saturate la o mașină asincronă. Avantajul esențial al metodei , acela de a oferi o soluție analitică problemei de câmp , poate fi uneori un motiv ce justifică utilizarea ei.

## Cap. 7. Prelucrari și interpretări ale soluției obținute prin metode numerice.

Spre deosebire de soluția analitică ce exprimă în mod elegant și sugestiv rezultatele analizei problemei de câmp (a se vedea cap.6), metodele numerice ne pun la dispoziție tabele de valori (potențialul magnetic vector, inducția, permeabilitatea relativă, etc.) atașate nodurilor și elementelor generate de rețeaua de discretizare pe un model particular. Analiza acestor valori ordonate trebuie făcută cu metode specifice pentru a creea o imagine a fenomenului studiat, iar formularea unei concluzii se poate face numai după tratarea unui mare număr de astfel de analize, conduse pe modele și regimuri de funcționare judicioase alese. Costul unei asemenea investigații este relativ mare, iar investigarea în sine laborioasă. De aceea pînă acum am văzut doar rezultate valabile pentru cazuri particulare, atât în literatura cercetată cît și în laboratoarele institutelor pe care le cunosc. Am preferat soluția următoare : - crearea unui instrument eficace de analiză și punerea la punct a unor metode adecvate de interpretare a rezultatelor pentru cazuri concrete. În spiritul acestei soluții prezentul capitol se ocupă de metodele de interpretare care ne pot sta la îndemînă la un moment dat și la o dotare cu aparatură dată.

### 7.1. Trasarea spectrului liniilor de câmp $\vec{B}$

Spectrul liniilor de câmp este de multe ori un test al corectitudinii soluției obținute. În cap. 4.5.3.4. și 5.6.2.1 s-au trasat linii de câmp pentru configurațiile simple analizate, menționîndu-se că :

- aspectul cunoscut al spectrului pentru cazuri particulare,
- verificarea legii refracției la frontierele dintre zone neomogene din punct de vedere al permeabilității magnetice,
- continuitatea liniilor de câmp în zone omogene,
- identitatea spectrului în părțile separate de o linie de simetrie, constituie probe ale metodei de investigație utilizată.

Avînd tabloul valorilor potențialului magnetic în nodurile rețelei de discretizare se pot trasa curbele de nivel  $A = ct$ , deoarece la o altă scară acestea sînt linii ale câmpului  $\vec{B}$ .

Dacă  $A = ct$ ,  $dA = 0$ , deci :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0 \quad (7.1)$$

Tînd cont de (4,1), (5.5), (5.6) relația (7.1) devine :

$$-B_y dx + B_x dy = 0 \quad (7.2)$$

sau : 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \quad (7.3)$$

ceea ce constituie ecuația diferențială a liniei de câmp  $\vec{B}$ .

În mod practic trasarea spectrului liniilor de câmp se face manual, pe un desen în nodurile caruia au fost înscrise valorile potențialului magnetic vector  $A$ . Interpretarea se face interpolând, fie liniar pentru o soluție obținută cu diferențe finite, fie conform funcției de aproximare corespunzătoare tipului de element utilizat, pentru o soluție provenită din utilizarea metodei elementului finit. Pentru triunghiul simplu se știe (4.5) că funcția de aproximare este un polinom de gradul 1 în  $x$  și  $y$ .

Sistemele de calcul puternice, înzestrate cu trasor sau terminal optic, pot afișa pe baza tabloului în care se găsește soluția, imaginea spectrului pentru un pas  $\Delta A$  ales. Astfel de imagini sînt deosebit de utile deoarece localizează rapid zonele în care solici-tarea magnetică este mare. Trebuie precizat însă faptul că programele pentru trasor și terminal optic sînt voluminoase și pot fi utilizate numai la un calculator cu memorie centrală foarte mare. Costul acestor terminale este ridicat, lăsînd la o parte costul programărilor pentru utilizări variate.

## 7.2. Calculul valorii locale a inducției pentru un punct neaparținînd rețelei de discretizare.

### 7.2.1. Pentru o soluție obținută prin diferențe finite.

Fie segmentul de rețea rectangulară periodică dat în fig.7.1 și punctul  $P(x,y)$  oarecare în care dorim valoarea inducției  $\vec{B}$ . Prima problemă ce trebuie rezolvată dacă se are în vedere un calcul automat, este localizarea elementului în care se găsește  $P(x,y)$ . Altfel este imposibil accesul la valorile potențialului în noduri, proprietăți magnetice și dimensiuni geometrice ale elementului.

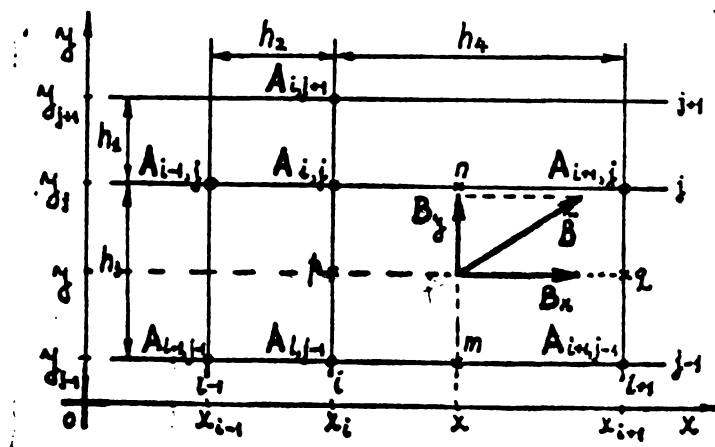


Fig.7.1. Referitor la calculul inducției  $B$  într-o rețea utilizată la metoda diferențelor finite.

Conform relației de definiție :

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\Delta A}{\Delta y} = \frac{A_n - A_m}{h_3} \quad (7.4)$$

Dar :

$$A_m = A_{i,j-1} + (A_{i+1,j-1} - A_{i,j-1}) \cdot \frac{x - x_i}{h_4} \quad (7.5)$$

$$A_n = A_{i,j} + (A_{i+1,j} - A_{i,j}) \cdot \frac{x - x_i}{h_4} \quad (7.6)$$

Deci :

$$B_x = (A_{i,j} - A_{i,j-1}) \left( \frac{1}{h_3} - \frac{x - x_i}{h_3 h_4} \right) + (A_{i+1,j} - A_{i+1,j-1}) \cdot \frac{x - x_i}{h_3 h_4} \quad (7.7)$$

Similar se obține pentru  $B_y$  :

$$B_y = (A_{i,j-1} - A_{i+1,j-1}) \left( \frac{1}{h_4} - \frac{y - y_{j-1}}{h_3 h_4} \right) + (A_{i,j} - A_{i+1,j}) \cdot \frac{y - y_{j-1}}{h_3 h_4} \quad (7.8)$$

Se observă că la frontiera dintre elemente continuitatea componentelor normale a inducției este asigurată. Dacă :

$$x = x_i + \varepsilon \quad (7.9)$$

pentru elementul  $(i, j-1)$ ,  $(i+1, j-1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j)$  avem :

$$B_{x_i + \varepsilon} = \frac{1}{h_3} (A_{i,j} - A_{i,j-1}) \quad (7.10)$$

Făcînd acum :

$$x = x_i - \varepsilon \quad (7.11)$$

ne găsim în elementul  $(i-1, j-1)$ ,  $(i, j-1)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i-1, j)$  unde :

$$B_{x_i - \varepsilon} = \frac{1}{h_3} (A_{i,j} - A_{i,j-1}) \quad (7.12)$$

Determinarea inducției  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$  în modul descris mai sus este afectată de erori provenind de la o variație reală a potențialului între noduri diferită de cea liniară. Sînt valabile deci concluziile formulate la timpul lor cu privire la alegerea pasului discretizării în zonele în care gradientul funcției  $A(x, y)$  este pronunțat.

### 7.2.2. Pentru o soluție obținută prin elemente finite.

Fie segmentul de rețea triunghiulară simplă din fig.7.2. și punctul  $P(x, y)$  în care dorim valoarea inducției  $B$ . Observațiile cu privire la localizarea elementului ce conține punctul  $P$  rămîn valabile și aici. Dar conform ipotezei (4.5) și relațiilor de definire a componentelor  $B_x$  și  $B_y$ , rezultă o valoare constantă pe întreaga suprafață a inducției  $B$ , fapt utilizat anterior în algoritmul de stabilire a permeabilității  $\mu_r$  (§ 4.5.4.3 rel. (4.130) ÷ (4.133)).

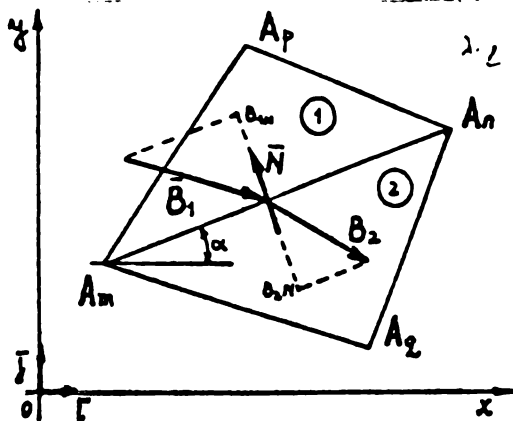


Fig.7.2. Cu privire la conservarea componentei normale a lui  $\vec{B}$  la metoda elementelor finite.

În general dacă pentru două elemente adiacente, modulul inducției este diferit. În ceea ce privește linia lor de separație, prin ipotezele de lucru (criteriul 2 din § 4.3.1.) nu avem informații asupra continuității derivatelor de ordinul I ale funcției  $A(x,y)$ . În continuare se va arăta că pentru orice cuplu de triunghiuri adiacente componenta normală a inducției la linia de separație se conservă. Considerăm pentru aceasta triunghiurile  $(m,n,p)$  și  $(m,q,n)$  din fig.7.2 unde avem :

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ [A_m(x_p - x_n) + A_n(x_m - x_p) + A_p(x_n - x_m)] \vec{i} + [A_m(y_p - y_n) + A_n(y_m - y_p) + A_p(y_n - y_m)] \vec{j} \right\} \quad (7.13)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ [A_m(x_n - x_q) + A_q(x_m - x_n) + A_n(x_q - x_m)] \vec{i} + [A_m(y_n - y_q) + A_q(y_m - y_n) + A_n(y_q - y_m)] \vec{j} \right\} \quad (7.14)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} \right)^2}} \left( - \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} \vec{i} + \vec{j} \right) \quad (7.15)$$

Se vede ușor că :

$$(\vec{B}_1 \cdot \vec{N}) = (\vec{B}_2 \cdot \vec{N}) = \frac{A_m - A_n}{\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}} \quad (7.16)$$

Se precizează că rel. (7.16) nu modifică criteriul 2 din § 4.3.1. într-un sens restrictiv, deoarece derivatele de ordinul I pot fi în general diferite, fără a modifica rel. (7.16) care este în fond legea fluxului magnetic aplicată unei suprafețe care conține linia de separație.

Observațiile referitoare la erorile implicate de dimensiunile rețelei de discretizare în determinarea inducției  $B$ , făcute în capitolele precedente rămân valabile și aici.

### 7.3. Metode de separare a componentelor câmpului total.

Configurațiile simple prezentate în fig.4.22 și 5.20 se bucurau de avantajul deosebit că singura componentă a câmpului total era câmpul de dispersie. Pentru configurație din fig.2.4 analizată în

séria de programe SORSELF2 câmpul total este suma câmpului util și de dispersie. Spectrul acestui câmp poate fi la prima vedere de concentrant, după cum o arată fig.7.3. unde este redat un fragment din configurația fig.2.4 conținând creștăturile 1 și 3. Liniiile câmpului trasat corespund soluției finale pentru rularea nr 1 din tabelul 4.12. Nu s-a respectat scara desenului. S-a redat doar configurația liniilor în funcție de nodurile rețelei din fig.4.32 !

Fig.7.4 prezintă aspectul calitativ al compunerii a două câmpuri cunoscute, care dau un spectru similar celui din fig.7.3 în zona creștăturii.

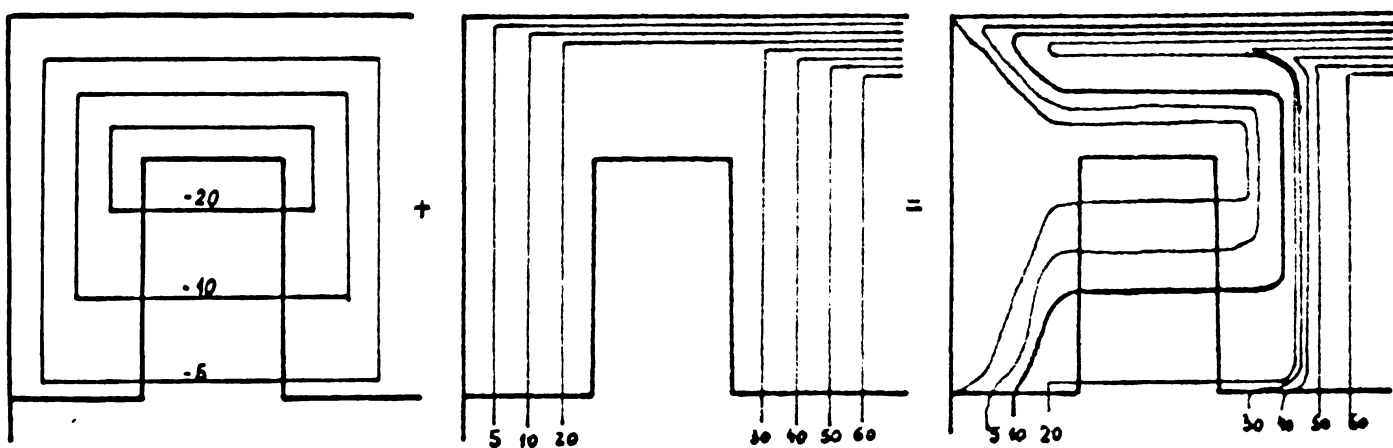


Fig.7.4 Compunerea a două câmpuri cunoscute.

Separarea termenilor sumei din fig.7.3 sau fig.7.4 pune probleme complicate deoarece construirea unei relații suplimentare între acești termeni pentru separarea lor, este dificilă și de utilitate limitată la modelul pentru care a fost construită. Principiul, creștătura poate fi plasată într-o zonă de câmp principal uniform, sau nu. Potrivit acestor situații rezultă relații specifice de separare a componentelor câmpului total.

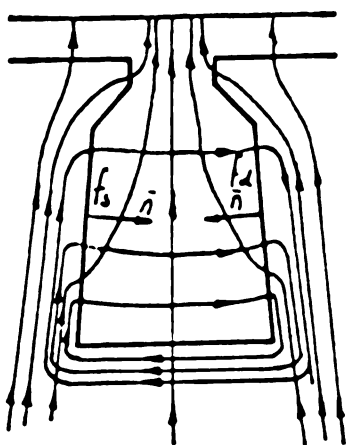


Fig.7.5. Prezintă o creștătură situată într-un câmp principal uniform. Adoptând sensul normalei ca pe figura, avem pentru fața dreaptă (f.d) și stînga (f.s) relațiile

$$\Phi_{fd} = \Phi_{p_d} - \Phi_{\sigma} \quad (7.17)$$

$$\Phi_{fs} = \Phi_{p_s} + \Phi_{\sigma} \quad (7.18)$$

Pentru acest caz, prin ipoteză mai avem :

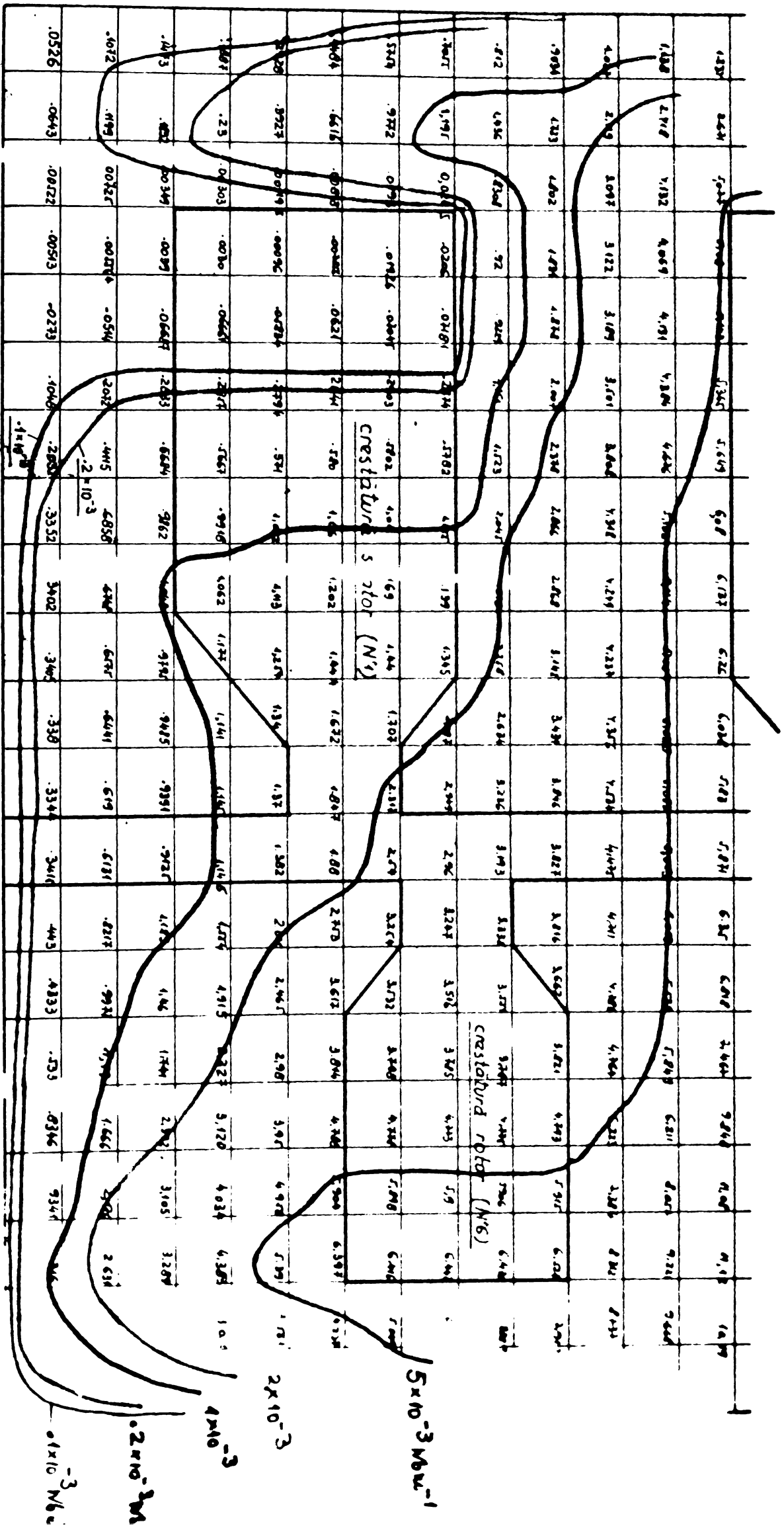
$$\Phi_{p_d} = \Phi_{p_s} \quad (7.19)$$

Fig.7.5 Creștătura în câmp principal uniform.

În relațiile de mai sus s-au utilizat notațiile :

$\Phi_{p_d}$  - flux principal prin fața dreaptă a creștăturii,





- \* Valorile pe trăsura din noduri se multiplică cu 10<sup>-5</sup> și au semnul curentului din rotor
- \* Desenul nu e văcut la scară. El reprezintă un fragment din fig 4.32, executat astfel ca rețeaua să perm. înscrierea
- \* Valorile înscrise provin din rularea N°1 din Tabel 4.12.

Fig 7.3 Exempu de cimp total.

- flux principal prin fața stângă a creștăturii,
- fluxul de dispersie a creștăturii.

Separarea celor trei componente din mărimile calculate ( $\Phi_{r_a}$  și  $\Phi_{r_b}$ ) este acum posibilă. Fig.7.6 prezintă o creștătură plasată în câmp principal neuniform, în ipoteza că sursa de câmp principal este situată pe fața opusă, iar fig.7.7 în ipoteza că sursa de câmp este de aceeași parte a întrefierului. Rezultă pentru tronșoanele figurate bilanșurile de fluxuri din fig.7.6b și 7.7b . .

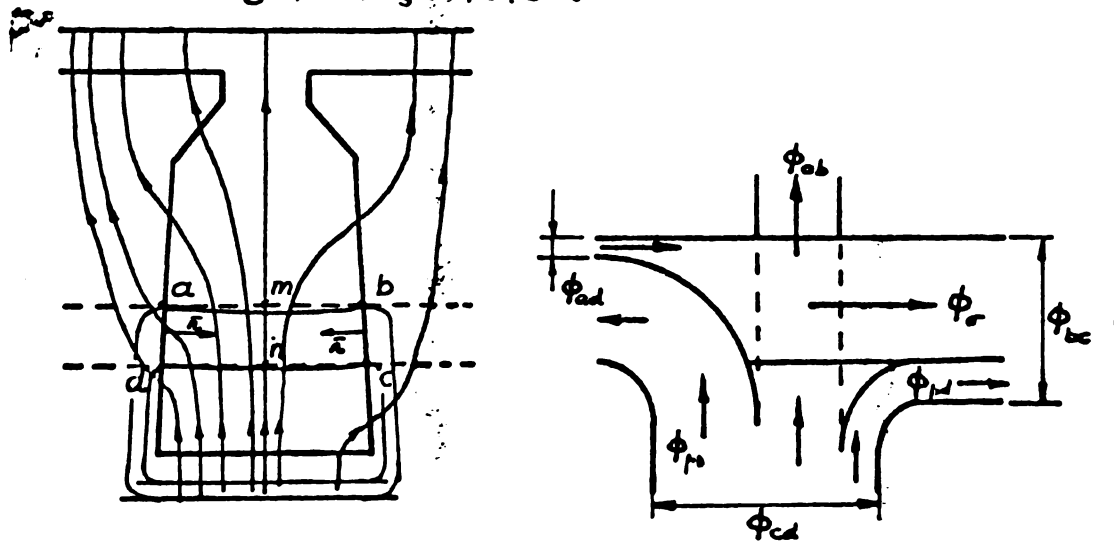


Fig.7.6 Creștătură în câmp principal neuniform.

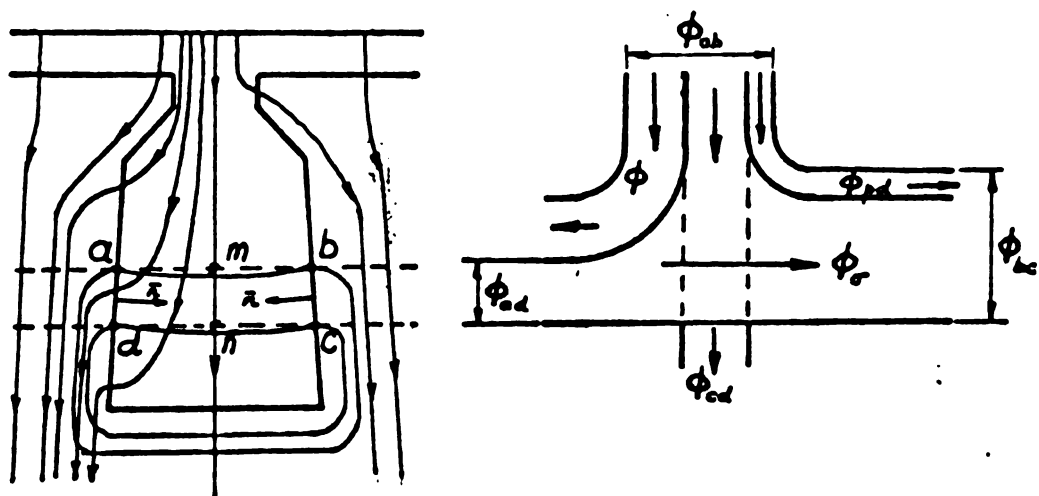


Fig.7.7 Creștătură în câmp principal neuniform.

Se pot scrie relațiile specificate de bilanșurile de fluxuri, plus legea conservării fluxului  $\Phi_{abcd} = 0$ . Rezultă relații prin care se pot separa componentele  $\Phi_{r_a}$ ,  $\Phi_{r_b}$  și  $\Phi_r$ . Cu o precizie suficientă, se poate însă considera că  $\Phi_{r_a}$  este fluxul dintre linia de simetrie și fața dreaptă a creștăturii ( $\Phi_{mb}$  pentru fig.7.6 și  $\Phi_{nc}$  pentru fig.7.7) iar  $\Phi_{r_b}$  cel dintre linia de simetrie și fața stângă a creștăturii ( $\Phi_{ma}$  pentru fig.7.6 și  $\Phi_{nd}$  pentru fig.7.7).

Modul de separare expus este exemplificat prin două exemple numerice. Primul exemplu consideră ca fluxul din planul liniei de simetrie este egal cu fluxul de dispersie, iar al doilea face separarea prin relațiile proprii cazului din fig.7.7. Calculele pentru primul exemplu sînt prezentate compact în Tabelul 7.1 iar în fig.7.3 sînt

desenute elementele ce conțin linia de simetrie a creștăturii și inducția  $B_y$  normală liniei de simetrie. Desenul nu este executat la scară din motive de spațiu și "dilatate" a elementelor din spre intrefier pentru a face inteligibilă partea scrisă. Pentru ca  $B_y$  să fie normală liniei de simetrie, s-a făcut o rotire a elementelor creștăturii astfel ca linia de simetrie să fie axa  $y' = 0$ .

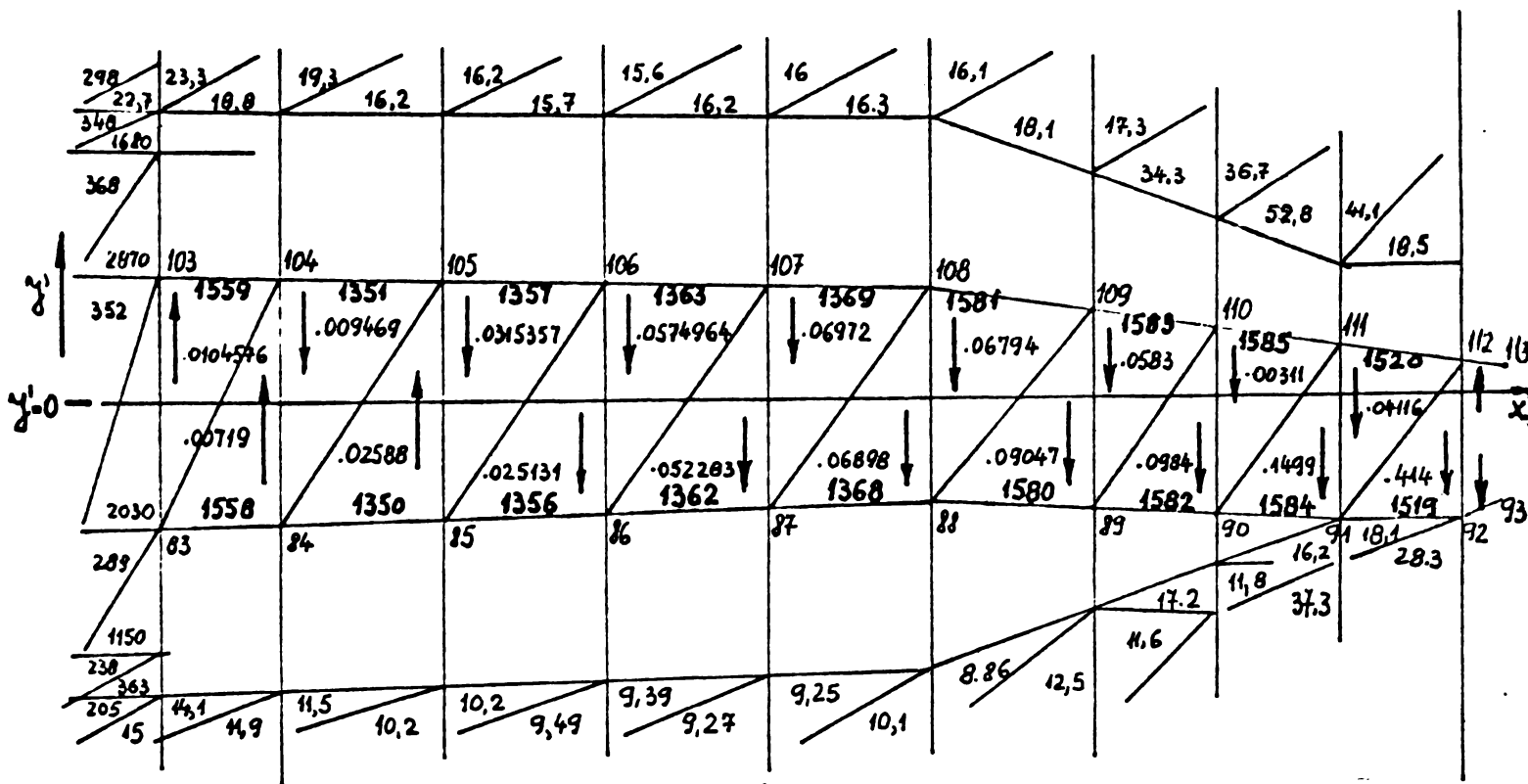


Fig. 7.8 Linia de simetrie și inducția normală  $B_y$ .

În primele 3 coloane ale tabelului 7.1 este reprodusă topologia discretizării segmentului de domeniu analizat. Urmează coordonatele  $x'$  și  $y'$  ale nodurilor în noul reper,  $\Delta$  determinantul (4.9) și coeficienții potențialelor din expresia (4.182). Această parte a tabelului este valabilă pentru orice rulare, pentru orice soluție a problemei de câmp obținută pentru configurația din fig.2.4. În coloana 8 s-au înscris valorile potențialului vector obținute prin rularea nr.4 din tabelul 4.12. Curentul total al creștăturii a fost pentru acest caz  $I = 2160$  A. Cu valorile inducției  $B_y$ , din coloana 9 s-a calculat fluxul  $\Phi_\sigma = 8,23171 \times 10^{-4}$  Wb, ceea ce conduce la o valoare a permeanței de dispersie :

$$\lambda_\sigma = 0,3032679 \quad (7.20)$$

Permeabilitatea relativă  $\mu_r$  a elementelor din fișele adiacente creștăturii este trecută în fig.7.8 pentru a avea o imagine a saturației materialului feromagnetic și a justifica această valoare a permeanței  $\lambda_\sigma$ , care reprezintă abia 17,84% din valoarea teoretică a permeanței creștăturii.

Rezultatul exprimat prin (7.20) poate părea surprinzător. Deaceia

FLEMENT	ORDINEA LOCALA	Y' [mm]	Y' [mm]	$\Delta \times 10^{-6}$ [m <sup>2</sup> ]	COEFICIENTI X10 <sup>+3</sup>	A X10 <sup>-2</sup> [m]	B [T]
1558	104	97.6200	-1.57140	2.387588	-1.3157894	1.0110	+0.0071942
1559	104	96.7620	+1.58590		-0.0067018	1.0110	
1559	104	96.8600	-1.55540		+1.3224913	1.0120	
1559	104	97.6186	+1.57140	2.463420	-0.0258383	1.0110	+0.0104576
1559	104	97.5207	+1.64960		+1.3075318	1.0100	
1559	104	96.7622	-1.58590		-0.2339126	1.0120	+0.0258805
1559	104	96.8611	+1.58588	12.675585	-0.02478213	1.0250	
1559	104	92.5460	-1.37910		+0.0000015	1.0120	
1559	104	96.7622	+1.58590	13.244349	-0.2371788	1.0110	-0.0094696
1559	104	96.5460	-1.58588		+0.2371804	1.0110	
1559	104	92.5152	+1.58588	14.547410	-0.1940768	1.0250	-0.0251311
1559	104	96.7622	-1.58590		+0.0040765	1.0110	
1559	104	92.5152	+1.43840	14.916221	-0.1949405	1.0250	-0.0315357
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.1949405	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	10.977817	-0.2587991	1.0110	-0.0522835
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.2587991	1.0110	
1559	104	92.5152	+1.43840	11.055334	-0.086550	1.0250	-0.0574964
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.086550	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	11.752287	-0.1901205	1.0250	-0.0689812
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.1901205	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	11.756344	-0.257755	1.0250	-0.0697206
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.257755	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	1.990042	-0.2618760	1.0250	-0.0904713
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.2618760	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	2.344101	-0.347472	1.0250	-0.0679406
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.347472	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	2.85616	-0.292760	1.0250	-0.0984651
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.292760	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	3.162455	-0.7976583	1.0250	-0.0583127
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.7976583	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	1.938140	-0.1770245	1.0250	-0.1499855
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.1770245	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	2.158175	-0.8503401	1.0250	-0.0031100
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.8503401	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	1.634249	-0.4444518	1.0250	-0.4141721
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.4444518	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840	1.454064	-0.627608	1.0250	-0.0411623
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.627608	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.3308408	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.3308408	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.1930327	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.1930327	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.292458	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.292458	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.1637869	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.1637869	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.0456532	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.0456532	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.254924	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.254924	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.4106705	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.4106705	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.3693637	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.3693637	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.3382058	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.3382058	1.0250	
1559	104	92.5152	+1.43840		-0.538925	1.0250	
1559	104	96.7622	-1.43840		+0.538925	1.0250	

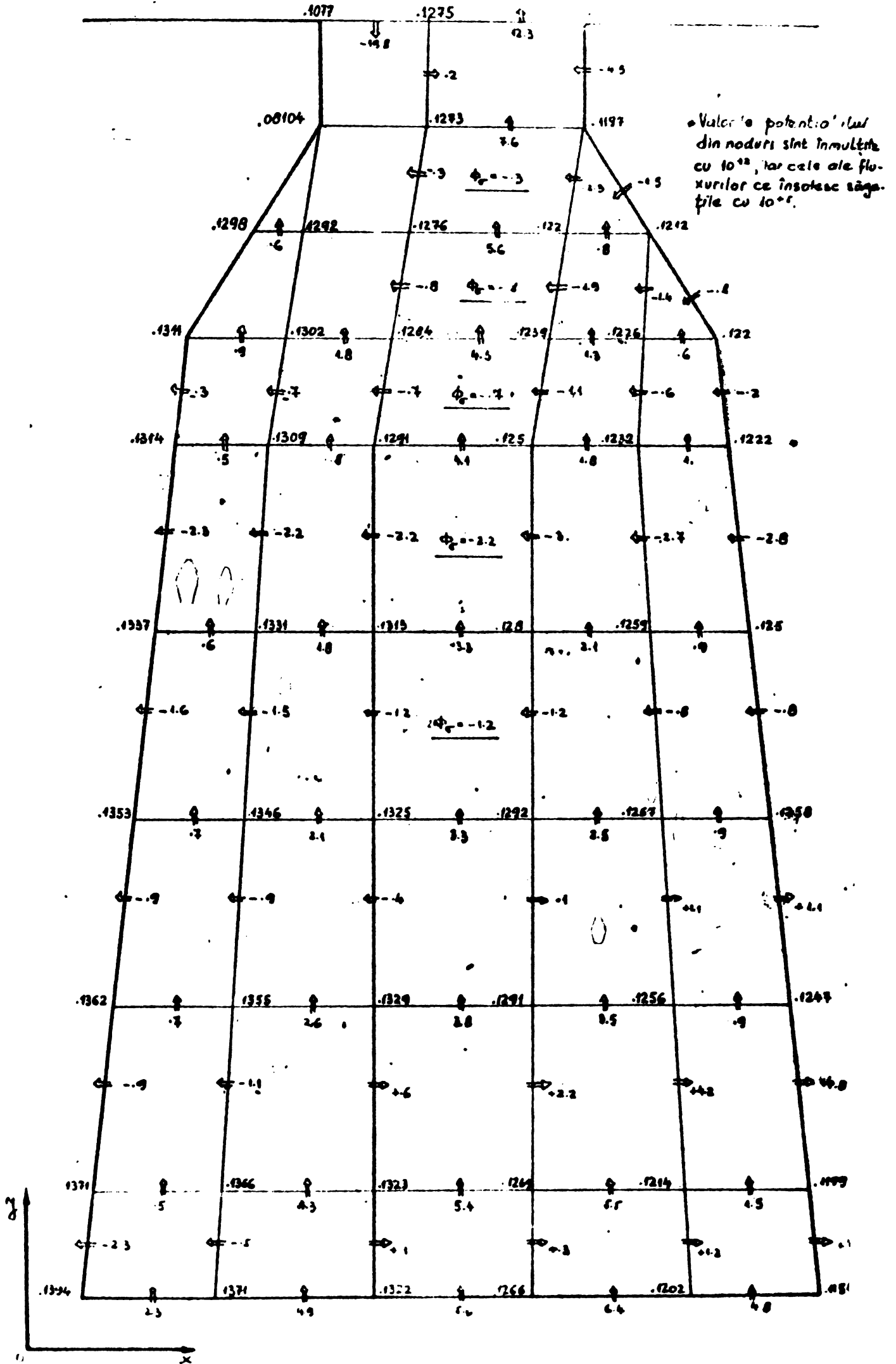


Fig. 7.9. Distribuția la separarea cîmpurilor

s-a executat o rulare a programului SORSELF2 pentru un regim de mers în gol, cu curenții din creștăturile statorice corespunzătorii curentului de mers în gol din fișa tehnică de calcul și s-a aplicat metoda separării componentelor câmpului total pentru cazul câmpului principal neuniform (fig.7.7). S-a impus permeabilitatea relativă  $\mu_r$  constantă și egală cu :

$$\mu_r = 30$$

În aceste condiții valorile potențialului magnetic vector sînt cele trecute pe desenul din fig.7.9 iar valoarea fluxului de dispersie calculat este  $\Phi_\sigma = 5,2 \times 10^{-5}$  Wb, ceea ce pentru curentul din creștătură  $I = 124,2$  A conduce la o valoare a permeanței de dispersie :

$$\lambda_\sigma = 0,3331746 \quad (7.21)$$

Valorile (7.20) și (7.21) sînt în bună concordanță atestînd corectitudinea raționamentelor conduse.

În cap. 4.5.3.4, s-a afirmat că relația :

$$\lambda_\sigma = \frac{A_{fmed} - A_{istm}}{\mu_0 I} \quad (4.161)$$

dă rezultate satisfăcătoare ca precizie pentru  $\lambda_\sigma$ . Ea a fost utilizată în tabelul 4.5, servind drept termen de comparație pentru celelalte metode de calcul expuse. Aplicînd-o cazului din fig.7.9 se obține :

$$\lambda_\sigma = \frac{\frac{A_{01} + A_{02}}{2} - \frac{A_{01} + A_{02}}{2}}{\mu_0 I} = 0,378025 \quad (7.22)$$

Valoarea (7.22) este și de această dată în bună concordanță cu valorile obținute prin celelalte metode ((7.20) și (7.21)) incomparabil mai laborioasă decît calculul simplu din (7.22). În rel. (7.22) s-a introdus pentru  $A_{istm}$  media potențialului vector din punctele 91 și 111 situate sub istm deoarece spectrul câmpului din zona istmului este puternic perturbat de creștătura de pe fața opusă și în mod evident zona de existență a câmpului de dispersie este delimitată de aceste puncte. Rezultă deci sublinierea importantă că analiza spectrului câmpului trebuie să premergă aplicării oricărei metode de separare a câmpului de dispersie și de calcul a permeanței  $\lambda_\sigma$ . Deaceia punerea la punct a unui algoritm general de calcul automat a permeanței  $\lambda_\sigma$  simultan cu obținerea soluției problemei de câmp mi se pare nepotrivită. Într-un sistem conversațional în care imaginea câmpului este afișată pe un terminal optic după fiecare iterație, se pot scrie o serie de subprograme adaptate diverselor situații, condiționînd utilizarea unuia dintre ele de opțiunea utilizatorului care urmărește evoluția fenomenului.

Din păcate la ora actuală prelucrarea rezultatelor se face laborios, răpînd mult din eficacitatea programelor scrise și eleganța sistemului de investigație.

7.4. Calculul cuplului electromagnetic din soluția numerică a problemei de câmp.

În lucrarea [B64] se arată principiul după care se poate obține din soluția numerică a problemei de câmp cuplul ce acționează asupra părților în mișcare, sau forța rezultantă pentru configurații care permit doar deplasări liniare. Voi reda succint ideile de bază fără a expune o aplicație numerică deoarece prin ipotezele de lucru enunțate în 2.2 valoarea curentului rotoric este impusă și nu calculată. Nu am renunțat însă la expunerea principiului, deoarece în afară de rezolvării problemei determinării curenților rotorici printr-un proces iterativ, s-au creat prin seria de programe SORSELF3 premisele calculului cuplului de pornire pentru un rotor în mișcare.

Câmpul magnetic dă naștere unei densități locale de forță  $\vec{f}$  interacționând cu corpurile magnetizabile și prin care trece curent electric. Se presupune că aceste corpuri sînt rigide. Rezultanta forțelor  $\vec{f}$  poate fi un cuplu  $\vec{M}$  sau o forță  $\vec{F}$ , sau un cuplu și o forță, după cum corpul este simetric și are o axă de rotație, nu are axă de rotație, sau are axă de rotație și nu este simetric,

$$\vec{M} = \int [\vec{r} \times \vec{f}] d\tau \quad (7.23)$$

$$\vec{F} = \int \vec{f} d\tau \quad (7.24)$$

Expresia densității de forță  $\vec{f}$  se deduce din bilanțul energetic în care se consideră curentul de deplasare nul ( $\partial D / \partial t = 0$ ) și energia înmagazinată în câmpul electric neglijabilă ( $\int \vec{E} d\vec{D} = 0$ ).

$$\int \left\{ \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}] + \frac{d}{dt} \int_0^{\theta} \vec{H} d\vec{B} + (\vec{E} \cdot \vec{J}) + \frac{ds}{dt} \cdot \vec{f} \right\} d\tau = 0 \quad (7.25)$$

În afara notațiilor cunoscute și utilizate deja, avem deplasarea notată cu  $s$ , deci viteza de deplasare :  $ds/dt$ .

Modelînd materialul magnetic prin relația :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{M}_p \quad (7.26)$$

și utilizînd ecuațiile lui Maxwell, după cîteva transformări [B64] se ajunge la expresia densității  $\vec{f}$  :

$$\vec{f} = [\vec{J} \times (\vec{B} - \vec{M}_p)] - \vec{H} \text{div} \vec{M}_p - \int_0^{\theta} \text{grad} \mu H dH \quad (7.27)$$

unde :

$[\vec{J} \times \vec{B}]$  - forța ce acționează asupra curentului  $\vec{J}$ ,  
 $\vec{H} \cdot \text{div} \cdot \vec{M}_p$  - forța ce acționează asupra unui magnet permanent,

$\int_0^{\theta} \text{grad} \mu H dH$  - forța din fier.

Manipularea relației (7.23) sau (7.24) cu (7.27) este incomodă, mo-

tiv pentru care integrala de volum s-a transformat în intergală de suprafață, pe o suprafață ce înconjoară complet rigidul în mișcare. Această suprafață trebuie să se găsească într-un mediu de permeabilitate magnetică  $\mu = \mu_0$  (aer).

Atunci :

$$\vec{M} = \oint_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{p}] d\sigma \quad (7.28)$$

$$\vec{F} = \oint_{\Sigma} \vec{p} d\sigma \quad (7.29)$$

în care :

$$\begin{aligned} \vec{r} & - \text{vectorul de poziție al elementului de suprafață} \\ \vec{p} & = \mu_0 (\vec{n} \cdot \vec{H}) \cdot \vec{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \vec{n} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \vec{n} \end{aligned} \quad (7.30)$$

iar  $\vec{n}$  este vectorul normalei la suprafața  $\Sigma$  orientat înspre exterior

Expresia cuplului :

$$\vec{M} = \oint_{\Sigma} \left\{ [\vec{r} \times \vec{B}] \cdot \frac{(\vec{n} \cdot \vec{B})}{\mu_0} - [\vec{r} \times \vec{n}] \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} d\sigma \quad (7.31)$$

este simplu de utilizat, deoarece componentele inducției  $\vec{B}$  în orice element sînt calculabile prin (4.152) și (4.153). Rămîne de ales suprafața  $\Sigma$ . Pentru a facilita programarea, pentru elementul triunghiular simplu se alege calea de integrare ce unește centrele de greutate ale triunghiurilor din întrefier, așa cum se arată în fig. 7.10.

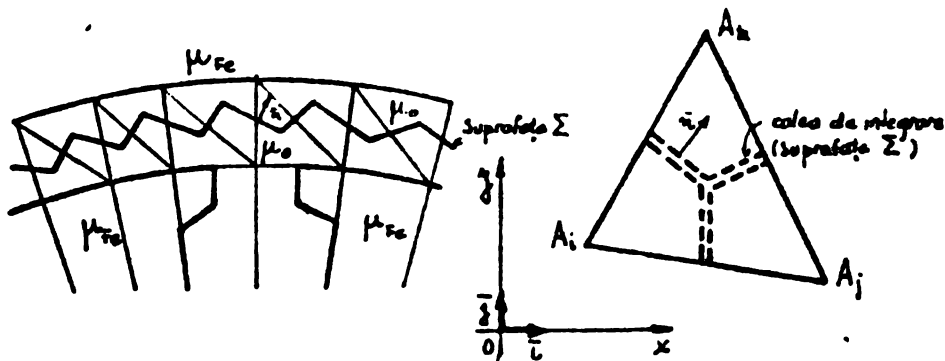


Fig.7.10 Referitor la suprafața  $\Sigma$  de integrare.

Particularizarea expresiilor normalei la segmentele de mediane care sînt luate în considerație nu constituie o problemă, deci expresia (7.31) dă rezultate numerice relativ simplu de obținut.

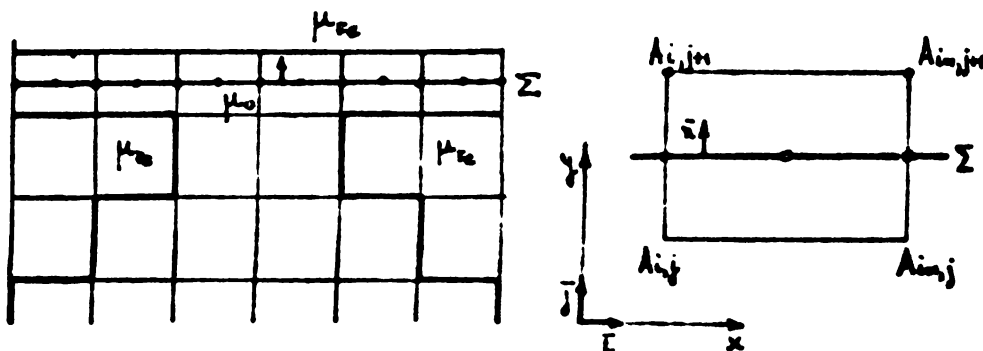


Fig.7.11 Referitor la suprafața  $\Sigma$  de integrare.



Pentru o rețea rectangulară utilizată la metoda diferențelor finite, situația se prezintă ca în fig. 7.11. Trebuie specificat faptul că valoarea forței  $\bar{F}$  sau a cuplului  $\bar{M}$  nu furnizează nici o informație asupra forțelor interne, din rigidul "înbrăcat" de suprafața  $\Sigma$ . În cazul mașinii asincrone discuțiile referitoare la corpuri nerigide și magnetostricțiune [B68] nu au sens, prin urmare rezumatul lucrării [B64] expus mai sus este suficient pentru a efectua un calcul numeric **COMPLET** al forței, respectiv cuplului ce acționează asupra rotului.

**Cap. 8. Insumarea permeanței de dispersie  
a creștăturilor aparținând unei faze.**

**8.1. Constatări referitoare la valorile permeanței de dispersie calculată prin metodele numerice expuse.**

Seria de programe **SORSELF1** permite evaluarea valorii maxime și minime a permeanței de dispersie  $\lambda_r$  la  $\mu = ct$ . Așa cum se constată în cap. 4.5. 3.4. raportul acestor valori este :

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_n} = 2,8 \quad \text{pentru } \mu_r = 100$$

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_n} = 1,13 \quad \text{pentru } \mu_r = 12,5$$

Seria de programe **SORSELF2** permite evaluarea aceluiași raport în condițiile prezenței saturației dată de cîmpul principal. Din rulara nr.3 prezentată în tabel 4.12 se obține pentru creștătura nr.2  $\lambda_m$  iar pentru creștătura nr.1 proximativ valoarea  $\lambda_n$ . Raportul lor este :

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_n} = 1,40$$

pentru  $I_{crest} = 1440A$  și  $\mu_r$  al elementelor înconjurătoare cuprins între  $20 \div 40$ . Seria de programe **SORSELF3** prin soluția problemei de cîmp în cele 6 poziții distincte pune în evidență o valoare medie a acestui raport :

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_n} = 1,8$$

Nu s-a reușit detalierea formei de variație a permeanței în funcție de decalajul dintre axa unei creștături statorice și rotorice, motiv pentru care se va utiliza în continuare o modelare a acestei variații sub forma unui trapez redat în fig.8.1.

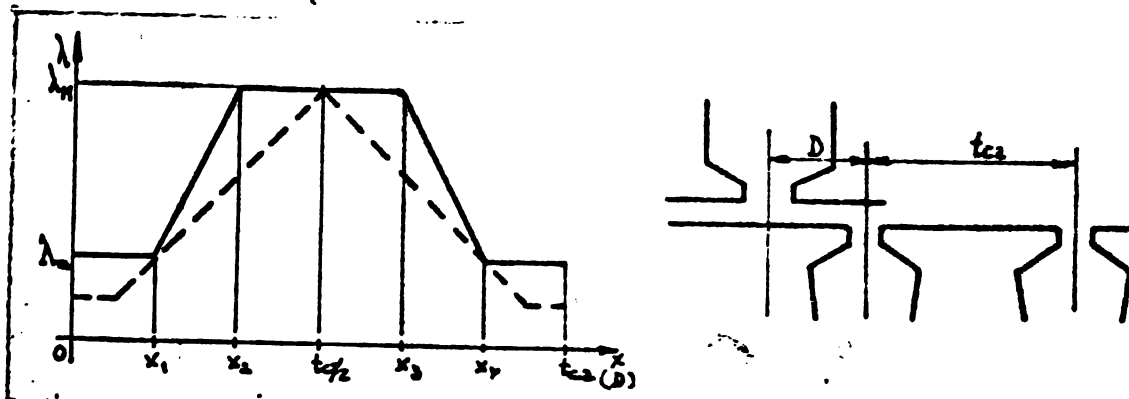


Fig.8.1 Variația permeanței de dispersie în funcție de decalajul  $D$  între axele creștăturilor.

În mod manifest raportul  $\lambda_m/\lambda_n$  depinde de saturația elementelor înconjurătoare, saturație dată de fluxul principal și cel de dispersie. Prin modificarea parametrilor  $x_1, x_2, x_3, x_4$  se poate modela orice formă de variație, așa cum arată în fig. 8.1 linia punctată pentru care  $x_2 = x_3 = t_{c2}/2$ .

### 8.2. Exprimarea variației permeanței totale pe fază în raport cu poziția rotorului.

O fază are  $2pq$  creștături care se găsesc în diverse poziții față de creștăturile rotorice, deci se pune problema însumării a  $2pq$  valori date de funcția  $\lambda-f(x)$  din fig.8.1 pentru decalaje în general distincte. Cele  $2pq$  creștături pentru care urmează a se face însumarea sînt repartizate spațial în grupuri de  $q$  creștături separate prin spații egale cu un pas polar  $\tau = m\tau_c$  creștături.

Fie o creștătura statorică oarecare, avînd numărul de ordine  $k$ , plasată la distanța de  $(k-1)$  creștături statorice de pas  $t_{c1}$ , față de axa creștăturii statorice numerotată 1. Funcția  $\lambda-f(x)$  care va reda variația permeanței acestei creștături în funcție de poziția rotorului pusă în evidență prin distanța  $x$  dintre axa creștăturii statorice numerotată 1 și axa creștăturii rotorice numerotată 1' este :

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_n & \text{pentru } 0 < D < x_1 \\ \frac{\lambda_n - \lambda_m}{x_2 - x_1} D + \frac{x_2 \lambda_n - x_1 \lambda_m}{x_2 - x_1} & \text{pentru } x_1 < D < x_2 \\ \lambda_n & \text{pentru } x_2 < D < x_3 \\ \frac{\lambda_n - \lambda_m}{x_3 - x_2} D + \frac{x_3 \lambda_n - x_2 \lambda_m}{x_3 - x_2} & \text{pentru } x_3 < D < x_4 \\ \lambda_m & \text{pentru } x_4 < D < t_{c2} \end{cases} \quad (8.1)$$

în care :

$D$  - decalajul dintre creștătura statorică  $k$  și vecinele rotorice

$$D = |(k - 1) \cdot t_{c1} - x - i' t_{c2}| \quad (8.2)$$

$$t_{c1} = \pi D_m / N_1 \quad (8.3)$$

$$t_{c2} = \pi D_m / N_2 \quad (8.4)$$

$N_1$  - numărul de creștături statorice

$N_2$  - numărul de creștături rotorice

$D_m$  - diametrul mediu al întrefierului

$i'$  - întreg cu semn rezultat printr-un procedeu de trunchiere a rezultatului împărțirii :

$$i' = \text{Intreg} \left[ \frac{(k-1)t_{c1} - x}{t_{c2}} \right] \quad (8.5)$$

$\lambda_M$  - valoarea maximă a permeanței de dispersie

$\lambda_m$  - valoarea minimă a permeanței de dispersie

fig.8.2 ajută la înțelegerea modului de stabilire a decalajului D

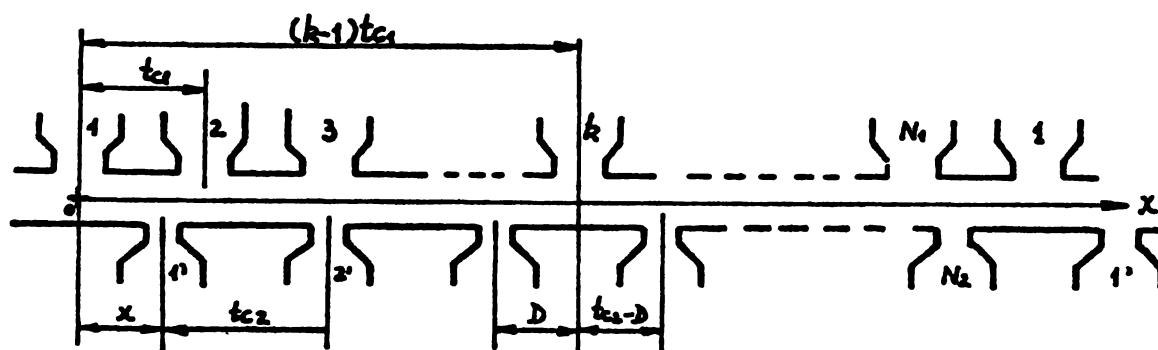


Fig.8.2 Cu privire la stabilirea decalajului D

Se impune, evident, o restricție funcției (3.1) pentru ca relația (8.2) să ne poată da decalajul de calcul :  $\lambda(x)$  trebuie să fie simetrică în raport cu  $x = t_{c2}/2$ . Altfel complicațiile ar fi greu de surmontat. Avînd (8.1) și relațiile (3.2) și (3.5) prin care (8.1) devine calculabilă, se poate efectua însumarea pentru o fază oarecare astfel :

$$\lambda_f(x) = \sum_{ip=1}^{2p} \sum_{iq=1}^q \lambda_k(x) \quad (8.6)$$

în care :

$$k = 2m(ip - 1) + iq \quad (8.7)$$

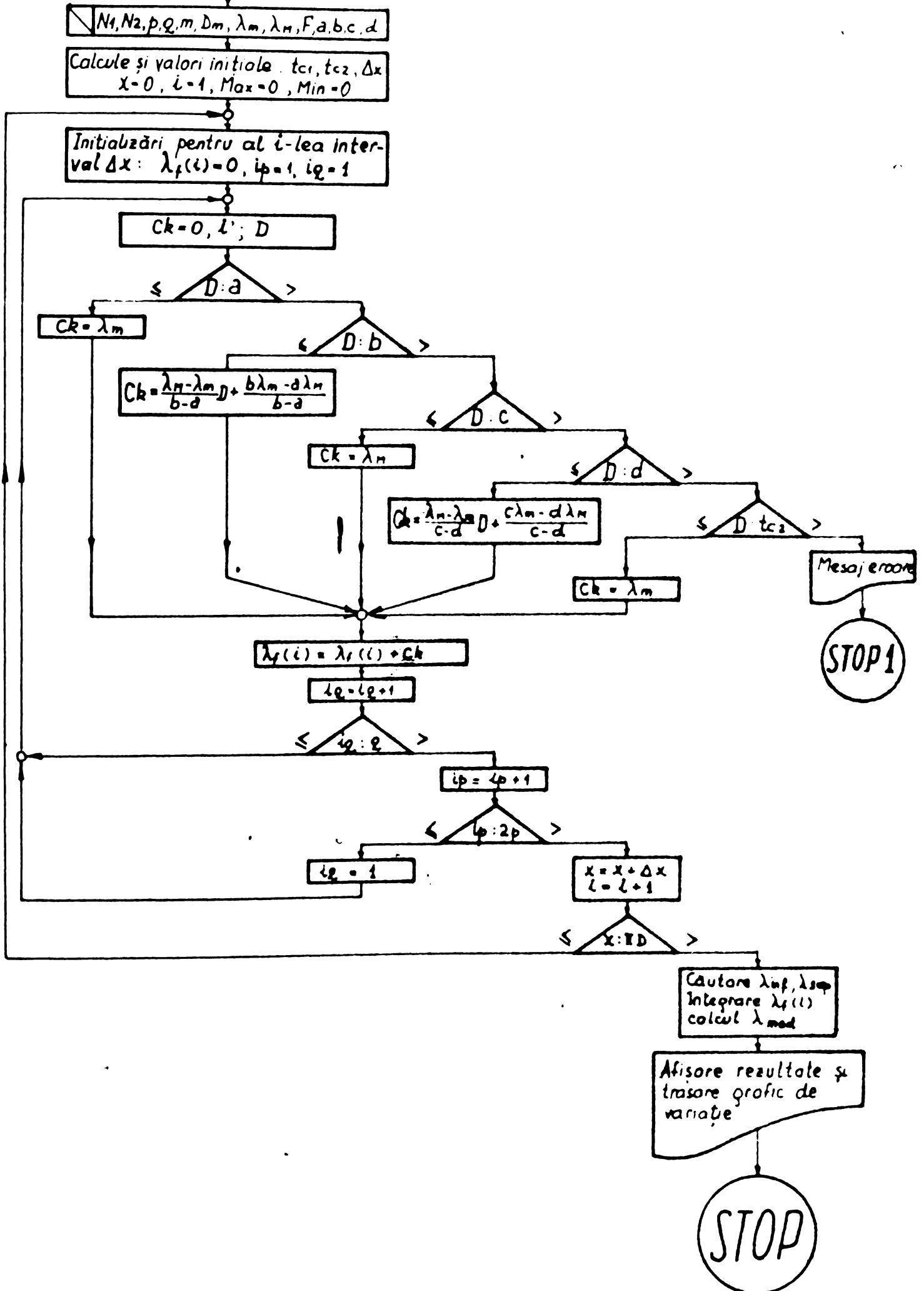
iar :

$ip$  - variabilă întregă cuprinsă între 1 și 2p

$iq$  - variabilă întregă cuprinsă între 1 și q

relația (8.6) este greu de utilizat din cauza variabilelor întregi

(START)



Algoritm program PERMEANȚE

ce intervin:  $i_p, i_q, i'$ . Deaceea se sugerează un calcul numeric pentru evaluarea relației (8.6).

### 8.3. Valoarea medie a permeanței de dispersie pe fază.

Prin forța lucrurilor funcția (8.6) este periodică, de perioadă  $T_x = D_m$ . Pentru un regim în care rotorul execută o rotație interesează valoarea medie a permeanței  $\lambda_{fmed}$  pe o perioadă  $\pi D_m$  și extremele între care se desfășoară variația  $\lambda_f(x)$ ,  $\lambda_{finf}$ ,  $\lambda_{fsup}$ . Ținând cont de calea numerică de calcul și tabelare a funcției  $\lambda_f(x)$  se pot obține valorile căutate astfel:

$$\lambda_{fmed} = \frac{1}{\pi D_m} \int_0^{\pi D_m} \lambda_f(x) dx \quad (8.8)$$

$$\lambda_{finf} = \text{Min} [\lambda_f(x)] \quad (8.9)$$

$$\lambda_{fsup} = \text{Max} [\lambda_f(x)] \quad (8.10)$$

Organigrama programului PERMEANTE prezentată în fig 8.3 arată cum sînt obținute:  $\lambda_f(x)$ ,  $\lambda_{fmed}$ ,  $\lambda_{finf}$  și  $\lambda_{fsup}$ .

În organigrama din fig.8.3 s-a utilizat notațiile anterioare și:

- $c_k$  - contribuția creștăturii  $k$  la permeanța totală a fazei  $m$
- $F$  - finețea pasului de variație a decalajului  $x$
- $\lambda_f(i)$  - valoarea permeanței totale la al  $i$ -lea pas al modificării lui  $x$ .

Integrarea se poate face cu metoda trapezelor (cum s-a efectuat) sau metoda Simpson. Programul PERMEANTE prin marca lui elasticitate oferă posibilitatea studiului permeanței totale pe fază, pentru orice formă a funcției  $\lambda(x)$  dată prin (8.1).

### 8.4. Rezultate numerice.

Programul PERMEANTE a fost rulat în condițiile prezentate sintetic în tabelul 8.1 pentru o mașină avînd:  $N_1 = 54$  creștături;  $N_2 = 36$  creștături;  $t_{c1} = 9,8\text{mm}$ ;  $t_{c2} = 14,6\text{mm}$ ;  $q = 3$  creștături pe pol și fază. Pentru a analiza influența numărului de perechi de poli s-au considerat două variante, una cu  $p = 1$  și alta cu  $p = 3$ , păstrînd însă același pas de creștătură. S-a lucrat cu  $\lambda_p$  și  $\lambda_m$  exprimate în unități arbitrare pentru a facilita reprezentarea grafică a proximitivă la imprimantă a variației  $\lambda_f(x)$  și pentru a da o notă generală programului. Pentru aceleși raport  $\lambda_p/\lambda_m$ , unitatea poate fi oricare, corespunzătoare cazului concret.

TABEL 8.1

Tabel sintetic al rulărilor programului FERMEANCES

Nr. crt.	P	$\lambda_m$	$\lambda_M$	X1	X2	X3	X4	$\lambda_{inf}$	$\lambda_{sup}$	$\lambda_{med}$	$2p_2\lambda_m$	$2p_2\lambda_M$	$\frac{\lambda_{med}}{2p_2\lambda_M}$
1	3	2	10	2	6	8.6	12.6	98.8	104	100.5	36	130	.558333
2	1	2	10	"	"	"	"	31.2	35.2	33.9	12	50	.565000
3	3	2	8	"	"	"	"	83.1	87.	84.2	36	144	.584722
4	3	2	6	"	"	"	"	67.4	70.	68.	36	108	.629629
5	3	2	4	"	"	"	"	51.7	53.	52.	36	72	.722200
6	1	2	4	"	"	"	"	16.8	17.8	17.3	12	24	.720800
7	3	6	3	"	"	"	"	123.7	125.0	124.3	108	144	.863200
8	1	6	8	"	"	"	"	40.8	41.8	40.3	36	48	.833500
9	3	6	15	3	6	8.6	11.6	167.4	174.0	168.5	108	270	.624000
10	3	6	15	3	7	7.6	11.6	156.6	160.2	157.3	108	270	.534400
11	3	6	15	2	7.3	7.3	12.6	165.1	167.3	165.9	108	270	.614400
12	1	6	15	3	6	8.6	11.6	54.	58.8	55.8	36	90	.620000
13	1	6	15	3	7	7.6	11.6	52.2	53.91	53.	36	90	.588800
14	1	6	15	2	7.3	7.3	12.6	55.02	56.5	55.15	36	90	.612777

După cum se remarcă,  $\lambda_{fmed}$  este mult diferit de  $2pq\lambda_m$  sau  $2pq\lambda_n$ . Pentru a găsi un termen de comparație și a putea formula concluziei, s-au considerat pentru fiecare variantă  $\lambda'_{fmed} = 2pq\lambda_{med}$ , unde  $\lambda_{med}$  este valoarea medie pe pas de creșteră  $t_{c2}$  a variației  $\lambda(x)$ . Comparând  $\lambda_{fmed}$  cu această valoare, rezultatele sînt surprinzătoare: aproape independent de numărul de poli sau de parametrii  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,  $\lambda_{fmed}$  este comparabil cu  $\lambda'_{fmed}$  !!

Tabel 8.2 Analiza comparativă a valorilor  $\lambda_{med}$  și  $\lambda'_{fmed}$

p	$\lambda_n/\lambda_m$	$\lambda_{med}$	$\frac{\lambda_{fmed}}{2pq\lambda_m}$	$\frac{\lambda'_{fmed}}{2pq\lambda_m}$	Reprezentarea grafică
3	$\frac{6}{8}$	6,9	0,863	0,863	
1	$\frac{6}{8}$	6,9	0,839	0,863	
3	$\frac{6}{15}$	9,452	0,624	0,630	
1	$\frac{6}{15}$	9,452	0,620	0,630	
3	$\frac{6}{15}$	8,8356	0,584	0,589	
1	$\frac{6}{15}$	8,8356	0,588	0,589	
3	$\frac{6}{15}$	9,267	0,614	0,6178	
1	$\frac{6}{15}$	9,267	0,6127	0,6178	

Constatarea aceasta nu anihilează evident utilitatea programului PERMEANTE, deoarece fără el nu s-ar putea da un răspuns cert întrebării care l-a generat. Pentru a facilita comparația  $\lambda'_{fmed} \sim \lambda_{fmed}$  s-a procedat la o analiză pe tipuri de trapeze, având aceleași valori  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , dar înălțimi diferite sau număr de poli diferiți. S-a întocmit astfel tabelul 8.2 acompaniat de reprezentările grafice din fig. 8.4 ÷ 8.7.

Rezultă că este foarte important să cunoaștem raportul  $\lambda_m/\lambda_m$  pentru a putea însuma corect. Dar acest raport variază cu gradul de saturație, după cum o demonstrează SORSELF1. Este deci destul de greu de aplicat și de această dată un subprogram pentru calculul valorii medii, indiferent de curentul din crestatură. Subprogramul ar trebui inclus într-un program mai general, care pentru o mașină întreagă ar executa rotirile rotorului și ar calcula pentru fiecare poziție reactanța - sumă corespunzătoare condițiilor de lucru.

#### Cap 9 Realizări, perspective, concluzii.

Ținând cont de poziția acestui capitol în lucrare, consider că el trebuie să răspundă la întrebările :

- când și ce metodă de rezolvare a problemei de câmp electromagnetic trebuie aleasă,
- care este costul soluției,
- se pot aborda cu seriile de programe scrise, sau pe baza lucrării și alte probleme de câmp de cât cele tratate,
- în ce direcții se poate extinde cercetarea a cărei primă etapă consider că am încheiat - o,
- care sînt concluziile ce se pot desprinde din parcurgerea materialului.

Fără a relua afirmațiile făcute în capitolele precedente, voi încerca să schițez răspunsul corect la aceste întrebări deoarece ele mi se par firești și importante.

Cînd se enunță o problemă, trebuiesc neapărat precizate și condițiile impuse soluției, mai cu seamă pretențiile în ceea ce privește precizia. Dacă se urmărește doar o estimare calitativă a fenomenelor în primă fază, se face o analiză a configurației reale și se construiesc cîteva modele care este bine să introducă toate simplificările acceptabile. Sînt de părere să se testeze totdeauna aplicabilitatea transformării conforme uneia dintre configurațiile echivalente, deoarece o soluție analitică pentru un model simplificat este fecundă în interpretări și bogată în concluzii. Dacă trebuie recurs la metode numerice este bine să se accepte în primă etapă un model simplificat,



care nu pune probleme legate de memorie și a cărui soluție poate fi obținută rapid. Abia după judecarea soluției corespunzătoare modelului simplificat se poate decide în mod judicios complexitatea modelului cel mai acceptabil. În legătură cu acest procedeu cred că trebuie făcute următoarele constatări cu privire la prețul soluției :

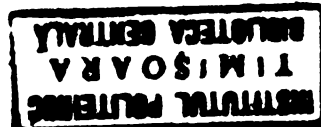
- actualmente centrele de calcul taxează lucrările exclusiv după timpul de calcul, deoarece nu se lucrează în timp partajat. (Time shearing). Costul unei ore de calculator FELIX C-256 este în medie  $2400 \div 3000$  lei . În acest preț se poate utiliza toată dotarea sistemului : 3 discuri, 4 unități de bandă, 2 imprimante.
- se conturează pentru un viitor apropiat sistemul de taxare după timp și spațiu memorie ocupat, inclusiv memorii auxiliare sau alte periferice. (perforatoare de cartele, terminal optic, trasor). Va fi deci esențială programarea cea mai sofisticată pentru a reduce costul unei ore de lucru.
- un analist - programator de calificare medie are normal un timp de  $15 \div 20$  minute de lucru pentru o linie de program, înțelegând faza finală, cu toate testele trecute cu succes.
- asistența tehnică la depanarea programelor abortate în faza de execuție trebuie să fie în general, pentru aceste programe, la nivelul de inginer de sistem cu calificare peste cea medie.

Am omis în mod intenționat observațiile cu privire la munca de creare a algoritmilor, considerând că teza, respectiv seriile de programe SORSELF și POISSON pot sta la dispoziția utilizatorului.

În general, dacă există resurse ieftine de furnizare a topologiei discretizării recomand utilizarea metodei elementelor finite pentru probleme neliniare ce nu pot fi tratate decât numeric. Toate observațiile făcute în cap. 4 cu privire la discretizare și alegerea modului de rezolvare a sistemului generat sînt valabile și trebuie luate în considerație.

Seriile de programe SORSELF au fost structurate pe subrutine descrise în paragrafele capitolului 4. Aceste subrutine sînt utilizabile pentru orice probleme care se rezolvă în modul specific problemei de câmp electromagnetic staționar, plan-paralel în medii neomogene dar izotrope. Orice fenomen descris de o ecuație de tip POISSON poate fi abordat cu aceste programe. Se cer doar ajustări de ordin formal :

- stabilirea corespondențelor între marimi,
- respectarea regulilor de triangularizare,
- cercetarea atentă a condițiilor pe frontieră.



În fond s-a afirmat în locul potrivit (cap.3) că ecuațiile diferențiale de tip Poisson sînt cazuri particulare ale ecuației generale cuasi - armonice ce poate fi aplicată în studiul multor fenomene.

În legătură cu direcțiile în care ar trebui extinsă cercetarea începută și finalizată prin prezenta lucrare, răspunsul nu poate fi categoric deoarece apar posibile nenumărate direcții. Astfel pentru metoda elementelor finite s-ar putea studia :

- modele tridimensionale pentru probleme staționare,
- rezolvarea problemei regimurilor tranzitorii pentru modelul plan - paralel și tridimensional,
- utilizarea poligoanelor cu grad înalt de complexitate sau a poligoanelor curbilinii în studiul problemelor plan - paralele pentru a obține soluții din ce în ce mai precise,
- utilizarea metodelor celor mai potrivite pentru rezolvarea sistemului de ecuații generat, -
- crearea algoritmilor de generare automată a discretizării și de rezolvare simultană a sistemului.

Publicațiile care apar anual în domeniul elementelor finite sînt numeroase și nu trebuie să uităm că azi cercetarea nu mai trebuie făcută pe principiul "solitarilor" , ci a echipelor multidisciplinare.

Metoda diferențelor finite este deasemenea susceptibilă la extinderi în domeniile :

- accelerarea convergenței spre soluție în probleme neliniare,
- problema regimurilor tranzitorii,
- utilizarea rețelelor polare și mixte.

Rezultatele bune obținute în ultimul timp prin perfecționările aduse în aceste direcții, o fac competitivă cu metoda elementelor finite, chiar cînd se tratează neomogenități cu raport mare  $\mu_r/\mu_0$  și cu multe colțuri.

Cît privește transformarea conformă, s-au descris direcțiile (cap.6) în care ar fi utilă o continuare a cercetării :

- configurații complexe și determinarea numerică a constantelor de integrare.

Din cauza rezultatelor obținute prin utilizarea metodei elementelor finite și deoarece :

- discretizarea pentru această metodă deformează mai puțin sau deloc (poligoane curbilinii) frontierele externe și interne ale domeniului de studiu,
- tratarea neomogenităților se face mai simplu,
- este posibilă utilizarea unor metode directe de rezolvare a sistemului de ecuații liniare generat,

eu personal inclin spre utilizarea ei atunci cînd se pune problema unei soluții numerice. De aceea voi selecta din direcțiile posibile de investigație pe cele ce se pot realiza în viitorul imediat cu un efort

minim, pe baza seriilor de programe SORSELF :

- luarea în considerație a curenților induși,
- rezolvarea problemei tranzitorii pentru modelul plan - paralel.

### 9.1. Rezolvarea problemei de câmp descrisă de ecuația difuziei.

În 2.2. s-a arătat că energia totală în prezența curenților induși se exprimă prin rel. (29) :

$$W = \iint_V \left\{ \frac{1}{2\mu} [\nabla \times A]^2 - (\vec{j}_c \cdot \vec{A}) - \int \vec{j}_c d\vec{A} \right\} dv \quad (29)$$

unde  $\vec{j}_c$  - densitatea curenților induși dată de rel. (23) :

$$\vec{j}_c = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (23)$$

Contribuția termenului introdus de curenții induși la ecuația diferențială  $\frac{\partial W_{jt}}{\partial A_i}$  scrisă la nivelul unui element "e" oarecare, delimitat de nodurile i, j, k (detalii în § 4. 3. 2.) va fi :

$$\frac{\partial W_{jt}}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \iint_e \sigma \frac{\partial A}{\partial t} A dx dy \right) = \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial}{\partial t} \iint_e A^2 dx dy \right) \quad (9.1)$$

Rel. (9.1) se transformă ținând cont de (4.10) :

$$\frac{\partial W_{jt}}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma \iint_e (N_i^2 A_i + N_i N_j A_j + N_i N_k A_k) dx dy \right] \quad (9.2)$$

Explicitînd  $N_i, N_j, N_k$  prin (4.11), (4.12), (4.13) se obține :

$$\frac{\partial W_{jt}}{\partial A_i} = C_{ii} \frac{\partial}{\partial t} A_i + C_{ij} \frac{\partial}{\partial t} A_j + C_{ik} \frac{\partial}{\partial t} A_k \quad (9.3)$$

în care :

$$C_{il} = \sigma \iint_e N_i N_l dx dy \quad (9.4)$$

$l = i, j, k$

Respectînd regulile de asamblare a ecuațiilor cînd se buclează nodurile, reguli expuse în § 4.3.3 se obține sistemul de ecuații final, echivalent sistemului (4.45) :

$$[M]\{A\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{A\} + \{TL\} = 0 \quad (9.5)$$

Se introduce prin urmare un termen în plus,  $[C] \frac{\partial}{\partial t} \{A\}$  semnificația celorlalți rămînd aceeași.

În general, variația lui  $\{A\}$  în timp, pe un interval  $\Delta t$  se poate da printr-o relație de interpolare. Cea mai comodă este interpolarea liniară între valorile  $\{A\}_t$  și  $\{A\}_{t+\Delta t}$ . Dacă  $\Delta t$  este suficient de mic, aproximarea liniară este bună. Atunci :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{A\} = \frac{1}{\Delta t} (\{A\}_{t+\Delta t} - \{A\}_t) \quad (9.6)$$

Presupunând cunoscută valoarea lui  $\{A\}$  pentru  $t = 0$  (în general zero) se poate urmări evoluția fenomenului în timp.

Relația (9,5) constituie nucleul algoritmului de rezolvare a problemei. Vor fi deci două mari cicluri iterative :

- la  $t = ct.$  pentru a stabili valoarea finală a lui  $\mu$  ,
- în timp, pentru urmărirea evoluției fenomenului.

Din acest punct, rezolvarea problemei fenomenelor tranzitorii pentru cîmpuri plan - paralele este ușor abordabila. Trebuie suplimentată subrutina MATEQ cu un segment de generare și asamblare a matricii [C] iar programul principal trebuie să realizeze iterațiile în timp. Această fază este acoperită practic în întregime de capacitățile seriei de programe SORSELF .

## 9.2. Alte perspective ale utilizării MEF.

Punînd la punct un model tridimensional cu luarea în considerație a curenților turbionari se poate rezolva problema cîmpului în mașina de inducție cînd se consideră înfășurarea statorică alimentată de la o rețea de tensiune constantă ca modul. Se pot calcula astfel parametri globali ai mașinii, toate mărimile electromecanice a căror necesitate a fost semnalată în cap.2.1. Aceasta ar putea constitui, cred, etapa cea mai însemnată în studiul mașinii de inducție de geometrie și proprietăți de material date. Inșă repet, este o problemă ale cărei dificultăți se vor surmonta în timp util numai de către o echipă.

În faza actuală a seriilor SORSELF, aducînd modificările cerute de (9.5) mi se pare deasemenea interesantă utilizarea metodei în studiul motoarelor liniare unilaterale, pentru determinarea cîmpului și a forțelor de tracțiune și atracție, deoarece așa cum s-a specificat în cap.7.3 soluția numerică permite un calcul de precizie al forțelor ce acționează asupra părții mobile a unui sistem electromecanic de conversie a energiei.

Leasemenea mi se pare deosebit de fertilă aplicarea metodei și a seriilor SORSELF la analiza regimului tranzitoriu al mașinii sincrone cu părți masive importante. În fond o soluție  $A = f(t)$  ar rezolva problema reactanțelor din perioada supratranzitorie și tranzitorie.

Din punct de vedere istoric la început, metoda elementelor finite a fost practic monopolul aplicațiilor în ingineria mecanică, pentru rezolvarea problemelor de cîmpuri de eforturi la comportarea elastică a materialelor. Aici lucrările lui Zienkiewicz și a centrului de cercetări SWANSEA (Anglia) au făcut intrarea glorioasă a metodei în practică pe poarta aplicațiilor practice, fără a avea la început toată

fundamentarea matematică actuală. Deci s-au putea utiliza seriile SORSELF și în rezolvarea problemelor de mecanică statică în domeniul elastic.

Dat fiind că § 9.2 nu și-a propus o trecere în revistă exhaustivă a utilizărilor metodei și a perspectivelor ei, mă opresc aici pentru a desprinde concluziile ce se impun prin parcurgerea materialului prezentat în capitolele 1 ÷ 8.

### 9.3. Concluzii.

Tema impusă cercetării : "Studiul configurației câmpului magnetic în întrefierul mașinii de inducție și influența ei asupra parametrilor de pornire" a fost abordată fără o preferință inițială pentru o metodă sau alta.

Testînd diverse posibilități oferite de unealta matematică pentru efectuarea studiului câmpului din întrefier, s-a avut în mod constant în vedere adîncirea cunoașterii intime a mecanismelor și utilizarea lor pînă la nivelul rezultatelor numerice.

Interpretarea rezultatelor prin prisma ideilor expuse în cap. 2.1 și surmontarea dificultăților apărute în mod inerent în timpul lucrului constituie partea activă a lucrării, care o separă net de aplicații mecanice ale unor lucrări cunoscute din literatură.

Răspunsul la întrebarea : ce facem cu o soluție obținută printr-o metodă sau alta, preocupă azi pe toți cei ce au depășit faza punerii la punct a unei metode inginerești de calcul numeric. Consider că aici mi-am adus contribuția cea mai de seamă, depășind stadiul de construire a unei unelte.

Punerea la punct a seriilor de programe SORSELF operaționale, utilizabile, este deasemenea un succes, originalitatea lor fiind în etapa actuală (marcată încă de dificultăți în transferul de informație concretă) mai puțin importantă decît existența lor. Deși și aici sînt părți originale de semnalat, după cum se vede în § 1.2 ce conține contribuțiile originale ale lucrării.

Cred că s-au creat prin prezenta lucrare premise pentru dezvoltarea ulterioară a unor cercetări utile, etapa inițială fiind finalizată de obținerea unor rezultate numerice interesante.

S-a răspuns la întrebarea : care este valoarea reactanței saturate pentru o geometrie și o sarcină electromagnetică dată, s-au creat prin seria SORSELF condițiile analizei comportamentului mașinii de inducție cu rotorul în mișcare sub influența cuplurilor acționare asupra lui.

## Cup. 10. Condițiile în care s-a desfășurat cercetarea.

La data examenului de admitere pentru doctorat (martie 1970) lucram în colectivul catedrei de Mașini electrice a facultății de Electrotehnică din Timișoara. Prima parte a activității în vederea pregătirii disertației am desfășurat - o în cadrul acestui colectiv care m-a format atât ca student cât și ca cercetător. Gîndurile mele se îndreaptă cu deosebită stimă și considerație spre dascălii mei și doresc să le aduc mulțumiri pentru sprijinul dat și calda înțelegere ce au manifestat-o față de mine și munca mea. Doresc în mod special să mulțumesc conducătorului științific Tov.prof.dr.ing. Ioan Novac al cărui colaborator am fost, Tov. prof. dr.ing. Toma Dordea șef de catedră și Tov. conf.dr.ing. Bernard Opredeck pentru utilele schimburi de idei și colaborarea noastră.

În oct. 1972 am fost transferat la Institutul Politehnic din București, catedra de Mașini electrice în calitate de inginer principal. Aici am fost ajutat de șeful de catedră Tov.prof.dr.ing. Constantin Bălă pentru continuarea lucrărilor de verificare a ideilor rezultate din transformarea conformă, pe modele electrocinetice. Deși nu am introdus în lucrare rezultatele acestei cercetări, pentru a mă încadra în volumul admis, metoda analizei cîmpului pe modele electrocinetice mi-a îmbogățit considerabil orizontul teoretic și practic al preocupărilor mele. Țin să aduc calde mulțumiri Tov. prof.dr.ing. Constantin Bălă pentru sprijinul acordat.

În perioada apr.1974 - sept. 1977 am activat la Universitatea din Constantine (Algeria) ca titular al cursului de Electrotehnică generală. Perioada coincide cu punerea la punct a metodei elementelor finite și mă simt îndatorat față de colectivul Departamentului de Informatică condus în acea perioadă de D-ra Etienne Nedelka pentru sprijinul acordat în perfecționarea cunoașterii calculatoarelor mici și a memoriilor auxiliare. Fără aceste cunoștințe ar fi fost imposibilă implantarea programelor SORSELF2 pe calculatorul MITRA-15 .

Tov.prof.dr.ing. Alexandru Fransua, actualmente șef al catedrei de Mașini electrice în care lucrez după revenirea în țară, îi datorez mulțumiri pentru condițiile ce mi le-a oferit ca să finalizez și redactez teza.

Atît stimaților tovarăși profesori amintiți cât și colegilor care m-au ajutat să cristalizez idei prin discuții aprinse (mă gîndesc în special la as.ing. Marian Mihalache și ing. Jean-Paul Metzger) le mulțumesc încă o dată și fie ca aprecierea muncii depuse să se răsfrîngă și asupra lor, deoarece nimeni n-a lucrat vreodată absolut singur.

B I B L I O G R A F I E

1. FREY, K. Anwendungen der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaues. In : Arbeiten a.d. Elektr. Inst. IV Springer Verlag 1921.
2. MORATH, E. Nutkontraktionsfaktoren für halbgeschlossene Nutten Archiv für Elektrotechnik 54. Band. Heft 3. 1971
3. BINNS, K.J. The magnetic field and centring force of displaced ventilating ducts in machine cores. Proc. IEE vol. 108 Part. C nr. 13 march 1961, p. 64-70.
4. BINNS, K.J. Calculation of some basic flux quantities in induction and other doubly-slotted electrical machines. Proc. IEE vol. III nr. 11 nov. 1964, p. 1847.
5. BINNS, K.J., LAWRENSON, P.L. Analysis and computation of electric and magnetic field problems. Pergamon Press 1963.
6. NASAR, S.A. Electromagnetic theory of electrical machines. Proc. IEE vol. 111 nr. 6 june 1964, p. 1123-1131.
7. KOPPENFELS, W. von, STALLMANN, F. Praxis der konformen Abbildung. Springer Verlag 1959.
8. SONNTAG, J. Berechnung eines zweidimensionalen Randwertproblems 1. Art. mit einer Kontur in Gestalt einer Pollücke mit idealisierten Polschuhen und linearem Potentialanstieg auf dem Polschenkel. Diss. T.U. Berlin 1966.
9. BYRD, P.F., FRIEDMAN, M.D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Springer Verlag 1954.
10. BOEHM, K. Elliptische Funktionen. Ersten Teil. Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Leipzig, G.J. Göschen'sche Verlaghandlung 1910. Zweiter Teil : Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem.
11. RÎJIC, I.M., GRADSTEIN, I.S. Tabele de integrale, sume, serii și produse. Ed. Tehnică București 1955.
12. MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., SONI, R.P. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer Verlag 1966.
13. ȘABAC, Gh. Matematici speciale vol. II EDP București 1965.
14. DORDEA, T. Metodă de efectuare a integralei eliptice, pline, de speța III cu parametru complex. In : Bul. șt. și tehn. al I.P. "Traian Vuia" Timișoara nr. 1 1971.
15. BULIRSCH, R. Numerical calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Handbook Series Special Functions, Numerische Mathematic vol. 7. Springer Verlag 1965.
16. NICOLESCU, L.J., STOKA, M.I. Matematici pentru ingineri vol. I. E.T. București 1969.

17. SEQUENZ, H. Die Wicklungen elektrischer Maschinen. Springer Verlag Wien. I. Wechselstrom Ankerwicklungen 1950. II. Wenderwicklungen 1952. III. Wechselstromsonderwicklungen 1954.
18. RICHTER, R. Maşini electrice vol. I E.T. Bucureşti 1958.
19. GELLER, B., GAMATA, V. Dopolnitelnie polia, momentî i poteri mosci-  
nosti v asinhronnîh maşinah. Izd. Energia Moscva 1964.
20. HELLER, B. Das Luftspaltfeld in Asynchronmaschinen.  
In : Archiv für El. 28. Band Heft 8, p.455-468.
21. WEBER, E. Der Nutungsfaktor in elektrischen Maschinen.  
In : ETZ 1928 Heft 23.
22. BUHGOLT, G. Rasciot elektriceskih i magnitnîh polei.  
Izd. inostrannoî literaturî. Moskva 1961.
23. SZABÓ, I., SAUER, R. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs.  
Springer Verlag.
24. VITKOVITCH, D. Field Analysis. D. Van Nostrand Comp. Ltd. London 1966.
25. MORARU, A., BALA, C. Modèle électrocinétique pour l'étude du champ  
magnétique de fuite du transformateur à cuve écranée. In : Rev.  
Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., Tom 15 (1970) nr. 3, pag.  
515-541.
26. DANIELEVICI, Ia. B., DOMBROSKI, V. V., KAZOVSKI, E. Ia. Parametrii ma-  
şinilor de curent alternativ. E.T. Bucureşti 1968.
27. RICHTER, R. Maşini electrice vol. IV E.T. Bucureşti 1960.
28. ROTHERT, H. Über die Nutstreueung elektrischer Maschinen. Teil I.  
In : Archiv für El. 32. Band Heft 5, 1938, p.306-329.
29. ADAM, F. Beitrag zur Berechnung der Streuleitfähigkeit von halb-  
offenen Nuten mit halbkreisförmigen Keilverschluss.  
In : Archiv für El. 32. Band Heft 12, 1938, p.829-832.
30. JASSE, E., ZIGANKE, L. Beitrag zur Nutstreueung von elektrischen ma-  
schinen. In : Archiv für El. 22. Band Heft 1, 1929, p.177.
31. BINNS, K. J. Cogging torques in induction machines. In :  
Proc. IEE vol. 115 nr. 12 december 1968, p.1783.
32. DORDEA, T. Maşini electrice EDP Bucureşti 1970.
33. FROHNE, H. Über die primären Bestimmungsgrößen der Lautstärke  
bei Asynchronmaschinen. Diss. T.H. Hannover 1959.
34. SORAN, I. F., BOLDEA, I. Metodă grafo-analitică pentru studiul maşi-  
nii asincrone cu rotor masiv. In : Bul. şt. şi tehn. al I.P. "Trai-  
ian Vuia" Timişoara Tom 15 (1970) fasc. 1, p.61-68.
35. SORAN, I. F., SORAN, R. M. Determinarea parametrilor transformării  
conforme pentru crestături ale maşinilor electrice de tip semi-  
închis. In : REA-Electrotehnica 22 (1974) nr. 9-10, p.270-274.
36. CIGANEK, L. Linkage flux under saturated tooth of asynchrons ma-  
chine. In : IEE Transactions P.A.S. Nov. 1968 nr. 11, p.1918-1924.



37. VASILIEVICI, A. Studiul influenței saturației asupra parametrilor mașinilor de inducție. Teză de doctorat I.P. "Traian Vuia" Timișoara 1969.
38. ERDÉLYI, E.A., AHAMED, S.V., BURTNES, R.D. Flux distribution in saturated D.C. machines at no-load. In : IEEE Trans.P.A.S.-84 (1965), p.375.
39. ERDÉLYI, E.A., AHAMED, S.V., HOPKINS, S. Nonlinear theory of synchronous machine on-load. In : IEEE Trans.P.A.S.-85 (1966), p.792-801.
40. F.DE LA VALÉE POUSSIN, LION, A. Calcul iteratif de l'induction magnétique dans les machines électriques. In : R.G.E. Tom 76 (1967) nr.4, p.731-739.
41. JACKSON, R.F., ERDÉLYI, E.A. Combination and separation of coordinates and modular programming for D.C. machine fields. In : IEEE Trans.P.A.S.-86 (1968), p.659.
42. ERDÉLYI, E.A., MULUKUTLA, S.S. Magnetic fields in nonlinear salient-pole alternators. In : IEEE Trans.P.A.S.-87(1968), p.1948.
43. GALAN, N. Aspecte ale calculului cîmpului magnetic în mașini electrice. In : Bul.I.P."Gh.GH.Dej"Buc. Tom XXXIII nr.4 (aug. 1971), p.93-104.
44. AHAMED, S.V., ERDÉLYI, E.A. Flux distribution in D.C. machines on-load and overloads. In : IEEE Trans.P.A.S.-85 (1966), p.960-966.
45. MAMAK, R.S., LAITHWAITE, E.R. Numerical evaluation of inductance and A.C. resistance. In : Proc.IEE Part C vol.108 (1961), pag. 252-258. Monograph 418 U (nov.1960).
46. ZIENKIEWICZ, O.C. La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur. Ediscience Paris 1973.
47. CIARLET, P.G., RAVIART, P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in  $R^n$  with applications to finite element methods. In : Arch.Rational Mech.Anal.-46 (1972), p.177-199.
48. CIARLET, P.G. Sur l'élément de Clough et Tocher. In : Rev.française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle - 8 (1974) serie rouge, p.19-27.
49. PONCET, A. Ecriture d'un code d'éléments finis ; Papier présenté aux journées Eléments finis, Rennes 12-13 mai 1975 (16 pag.).
50. PONCET, A. Rapport au CNRS pour l'année 1973 (35 pag.).
51. GASTINEL, N. Analyse numérique linéaire. Ed.Hermann Paris 1966.
52. DURAND, E. Solutions numériques des équations algébriques. Tome II. Masson & Cie, Editeurs Paris 1961.
53. DÉMIDOVITCH, B., MARON, I. Eléments de calcul numérique (traduit du russe) Editions MIR - Moscou 1973.
54. HALMOS, R.P. Finite - dimensional vector spaces. Van Nostrand Reinhold Company 1958.
55. DIMO, P. Programarea în FORTRAN EDP București 1971.

56. GLOWINSKI, R., MARROCCO, A. Etude numérique du champ magnétique dans un alternateur tetrapolaire par la méthode des éléments finis. In : Computing Methods in Applied Sciences and Engineering Part 1. International Symp. Versailles 17-21 dec.1973 Springer Verlag.
57. AUSSEMS, A. Technique frontale pour la mise en oeuvre des méthodes d'éléments finis. Rapport intern Dep. Inf. Grenoble 30 nov.1972.
58. CAO THO-TRANG Une expérience de cartographie assistée: numérisation d'une carte géologique. In : AFCET Automatismes Tome XIX nr.5, mai 1974, p.271-276.
59. MELOSH, R.J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. In : J.A.I.A.A. nr.1, 1963, p.1631-1637.
60. CRACKEN, D.Mc., DORN, V.S. Numerical Methods and Fortran Programming with Applications in Engineering and Science. John Wiley & Sons Inc. New York 1964.
61. LORD, W., HWANG, J. Convergence and Mesh Subdivision for finite element analysis of non linear magnetic Fields. In : Journal of Naval Electronics Lab. California USA 1974.
62. NEUMAN, S.P., NARASIMHAN, T.N. Mixed explicit-implicit iterative finite element Schema for diffusion type Problems (I.Theory). In : Int. Journal for Num.Meth.in Eng. vol 11, (1977), pag. 309-323. John Wiley & Sons Inc.
63. RAFINEJAD, P. Adaptation de la méthode des éléments finis à la modélisation des systèmes électromécaniques de conversion d'énergie. These Grenoble 1977.
64. REICHERT, K., FREUNDL, H., VOGT, W. The calculation of forces and torques within numerical magnetic field calculation methods. In : Proc.Conf.COMPUMAG, Oxford 1976.
65. GHEORGHIU, I.S. Mașini electrice. Probleme și aplicații. 2 vol. E.T. București 1966.
66. SORAN, I.F. Asupra metodologiei de efectuare a triangularizării manuale în vederea rezolvării unei probleme de câmp electromagnetic prin metoda elementelor finite. In : EEA - Electrotehnica 26 (1978) nr.6, p.218-224.
67. SORAN, I.F. Algoritm de calcul al variației reactanței de dispersie a unei mașini asincrone în funcție de poziția relativă stator-rotor. Comunicare Brașov 17 noiemb.1978.(Publ.în vol.)
68. CARPENTER, C.J. Surface Integral Methods of Calculating Forces on Magnetised Iron Parts. In : Proc.IEE 106 C. 1960.











PURBE-MS-3-24-1980-VE

SOLICITA SISTEMAS PARA INSTALAR EN 7

[The main body of the document contains several paragraphs of text that are extremely faint and illegible due to the quality of the scan. The text appears to be a technical or administrative document.]





.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

