

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA"
T I M I S O A R A
Facultatea de construcții
Catedra de construcții hidrotehnice
și îmbunătățiri funciare

DUMITRU ARSENIU

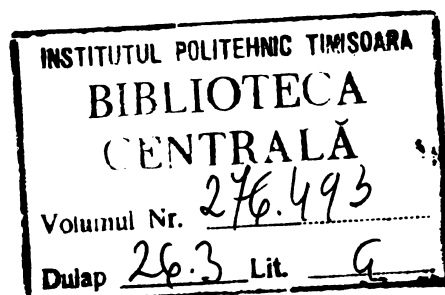
CONTRIBUTII LA CALCULUL HIDRAULIC AL
CASTELELOR DE ECHILIBRU

- Teză de doctorat -

Conducător științific
Prof.emerit ing. VICTOR GHEORGHIU

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

TIMIȘOARA , 1974



CUVINT INAINTE ,

Volumul de față cuprinde cercetările teoretice și experimentale efectuate în cadrul tezei de doctorat în perioada 1966-1974.

Conținutul tezei este împărțit în două părți tratând castelele de echilibru simple respectiv castele de echilibru de tip special.

Fiecare parte cuprinde trei subdiviziuni și anume :

Partea întâi - A - Inchiderea totală bruscă

B - Deschiderea totală bruscă

C - Manevre parțiale izolate și manevre combinate

Partea doua - D - Castele de echilibru perfect pneumatice

E - Castele de echilibru parțial pneumatice

Castele de echilibru cu secțiune exponențial variabile

F - Verificări experimentale

O parte a rezultatelor a fost publicată într-un articol în revista "Studii și cercetări de mecanică aplicată", în cinci articole în revista "Hidrotehnica" și în două articole în "Buletinul științific și tehnic" al I.P.T.

De asemenea autorul a prezentat un număr de cinci comunicări la diferite sesiuni de comunicări științifice ținute la Institutul de construcții București și la Institutul politehnic "Traian Vuia" Timișoara.

După ce a fost dactilografiată într-o primă versiune totalizând peste 1000 pagini, lucrarea a trebuit restrânsă conform indicațiilor rectoratului I.P.T., astfel încît în varianta finală s-a redus la mai puțin de 600 pagini. Au fost eliminate paragrafele conținînd prezentarea rezultatelor cunoscute din literatură, paragrafele de concluzii care însoțeau fiecare capitol, paragrafele conținînd terminologia și unele teoreme importante din domenii moderne ale matematicii utilizate în cadrul tezei.

Prezentarea rezultatelor obținute s-a făcut aproape exclusiv prin păstrarea reprezentărilor grafice și eliminarea tabelor numerice. De asemenea s-au eliminat anumite materiale auxiliare ca lista notațiilor utilizate în cadrul lucrării, lista tabelor, lista figurilor, etc.

Autorul își cere anticipat scuze pentru eventualele neclărități care ar putea să apară datorită acestor eliminări, păstrînd materialele eliminate la dispoziția celor interesați în mod special.

De asemenea regretă faptul că la cîteva figuri, prin multiplicare la dispozitivul "Xerox" au apărut unele defecțiuni în special la dhenare, defecțiuni care lipsesc la figurile originale.

Extinderea relativ mare a lucrării se explică prin aceea că studiile au cuprins relativ multe probleme și în același timp s-a căutat să se meargă de fiecare dată în adîncime, cu finalizarea rezultatelor sub formă de tabele, grafice și formule utilizabile în proiectare și cu verificări comparative minuțioase ale rezultatelor teoretice obținute în cadrul tezei.

Conținutul tezei este redactat sub forma unui curs didactic, cu explicații și relații intermediare care permit urmărirea fără dificultate a metodelor utilizate, ceea ce de asemenea explică numărul mare de pagini al tezei.

Autorul mulțumește pe această cale conducătorului științific prof.emerit ing.Victor Gheorghiu pentru sfaturile utile primite pe parcursul cercetării și în mod special pentru sprijinul părintesc acordat în faza finală la definitivarea tezei.

De asemenea autorul mulțumește întregului colectiv al Catedrei de construcții hidrotehnice și îmbunătățiri funciare pentru ajutorul dat în toate fazele elaborării tezei și în mod deosebit profesorului dr.ing.Mihai Bălă care a pus la dispoziție standul experimental și a impulsionat elaborarea tezei.

Autorul ,

C U P R I N S

Partea întâi : Castele de echilibru simple

A . Inchiderea totală bruscă

Cap.I - <u>Problema stabilirii ecuației oscilațiilor sub formă diferențială</u>	
- Concluzii la capitolul întâi	1
Cap.II - <u>Problema nivelurilor extreme</u>	
- Prima integrare a ecuației oscilațiilor	7
- Determinarea analitică a nivelurilor extreme	12
- Metode rapide de determinare a nivelurilor extreme bazate pe tabele numerice și reprezentări grafice	18
- Relații aproximative	33
- Utilizarea metodei de aproximație Krîlov-Bogoliubov	55
- Metoda liniarizării echivalente (variantă originală)	73
- Utilizarea metodei liniarizării, varianta Prașil	86
- Utilizarea calculatorului "IRIS"	92
Cap.III - <u>Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme</u>	
- Determinarea intervalului de timp între două elongații extreme prin metoda Simpson	102
- Determinarea limitei cvasi-semiperioadelor când timpul crește nemărginit (metoda Simpson)	116
- Determinarea semiperioadelor prin metoda integrării aproximative a lui Legendre	120
- Determinarea limitei cvasi-semiperioadelor când timpul crește nemărginit (metoda Legendre)	130
- Prima cvasi-semiperioadă (metoda Simpson)	137
- Determinarea primei cvasi-semiperioade (metoda Legendre)	143
- Determinarea celei de a doua și de a treia cvasi-semiperioade (metoda Legendre)	152
- Determinarea primei cvasi-semiperioade cu ajutorul calculatorului "IRIS" (metoda Krîlov-Bogoliubov)	156
- Formule aproximative pentru determinarea cvasi-semiperioadelor	159
Cap.IV - <u>Problema legii de oscilație</u>	
- Utilizarea metodei variaționale pentru determinarea legii de oscilație în prima cvasi-semiperioadă	173

- Legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă Verificări (Escande)	186
- Legea de oscilație în următoarele cvasi-semipe- riode (metoda Ritz)	193
- Legea de oscilație în următoarele cvasi-semiperioade Verificări (Escande)	206
- Utilizarea metodei liniarizării (varianta Prașil) Verificări	213
- Utilizarea metodei Krîlov-Bogoliubov. Verificări	221
B.- <u>Deschiderea totală bruscă</u>	
Cap. I - <u>Problema stabilirii ecuației diferențiale</u>	
- Deducerea ecuației cvasi-oscilațiilor folosind metoda variațională	226
Cap. II - <u>Problema nivelului minim (saltul minim)</u>	
- Integrația ecuației cvasi-oscilațiilor (metoda Krîlov-Bogoliubov)	234
- Privire critică asupra formulelor aproximative existente	242
- Stabilirea unei formule aproximative	253
- Testarea formulei aproximative propuse	257
Cap. III - <u>Probleme de stabilitate a mișcării cvasi-oscilatorii</u>	
- Stabilirea sistemului în primă aproximație. Stabilitatea la mici oscilații	263
- Determinarea funcției Liapunov în cazul micilor oscilații și studiul stabilității cu ajutorul ei	270
- Cîteva inegalități noi și o discuție relativă la coeficientul de siguranță la stabilitate	276
- Cercetări privind stabilitatea bazate pe teoria Poincare-Bendixon (cazul marilor oscilații)	284
- Asupra unui criteriu care permite delimitarea domeniului micilor oscilațiuni	293
C.- <u>Manevre parțiale izolate și manevre combinate</u>	
Cap. I - <u>Inchidere parțială rapidă urmată de o închidere totală rapidă</u>	
- Concluzii	304
Cap. II - <u>Deschidere parțială rapidă urmată de o deschidere totală rapidă</u>	
- Concluzii	311
D.- <u>Castele de echilibru perfect pneumatice</u>	
Cap. I - <u>Inchiderea totală rapidă. Modelul matematic</u>	
- Deducerea ecuației cvasi-oscilațiilor utilizînd metoda variațională	314

Cap.II - <u>Inchiderea totală rapidă.Niveluri extreme</u>	
- O primă integrare a ecuației oscilațiilor	322
- Determinarea analitică a nivelurilor extreme succesive	326
- Calculul nivelelor extreme cu calculatorul "Olivetti programma lol"	333
E.- <u>Castele de echilibru parțial pneumatice</u>	
<u>Castele de echilibru cu secțiune exponențial variabilă</u>	
Cap.I - <u>Inchiderea totală bruscă</u>	
- Castele parțial pneumatice.Cîteva elemente teoretice	341
- Castele cu secțiune exponențial variabilă.Stabilirea modelului matematic	347
- Castele cu secțiune exponențial variabilă.Determi- narea saltului maxim	353
F.- <u>Verificări ale rezultatelor teoretice</u>	
Cap.I - <u>Castele cilindrice simple.Utilizarea rezultatelor altor cercetări</u>	
- Verificări utilizînd rezultate ale ISCIF-București	358
- Verificări utilizînd rezultate ale prof.dr.ing. M.Bălă	389
- Utilizarea rezultatelor experimentale ale lui G.Naber	398
Cap.II - <u>Inchiderea totală bruscă. Utilizarea rezultatelor proprii</u>	
- Descrierea standului experimental	429
- Studiul aducțiunii	433
- Castele de echilibru simple	437
- Castele de echilibru perfect pneumatice	447
- Castele de echilibru parțial pneumatice	470
<u>Concluzii</u>	473
<u>Bibliografie</u>	510

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE
 INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul I - PROBLEMA ECUATIEI OSCILATIILOR SUB FORMA
 DIFERENTIALA

& 8.- Concluzii la capitolul intii*

Acest prim capitol nu are un caracter unitar, în el fiind concentrate paragrafe care au servit ca bază unor dezvoltări ulterioare din cuprinsul celorlalte capitole.

Primul paragraf în care se tratează deducerea ecuației oscilațiilor folosind ecuația lui Bernoulli a fost scris cu scopul de a preciza ipotezele simplificatoare utilizate cât și pentru a preciza anumite notații.

Avînd în vedere pe de o parte existența numai în literatura românească de specialitate a unor lucrări ca /2-M/, /1-P/, /2-P/, /1-B/, /4-M/, etc., în care sînt prezentate sinteze destul de complete ale principalelor cunoștințe din domeniul castelelor de echilibru simple, iar pe de altă parte volumul oarecum exagerat al tezei am scos paragrafele care aveau un caracter monografic, menținîndu-l pe acesta ca strict necesar. Se mai întîlnesc pe parcurs aliniate cu caracter monografic și în cadrul altor paragrafe, aliniate strict necesare dezvoltării logice a capitolelor respective.

În cadrul paragrafului se obține ecuația oscilațiilor sub formă diferențială dimensională.

În cel de al doilea paragraf se caută a se da o formă rațională adimensională ecuației oscilațiilor, mai corect ecuației

* *Conținutul acestui capitol a fost publicat în [2-A], [3-A], și [20-A]*

A-I-8-2

cvasi-oscilațiilor.

În literatura de specialitate nu am întâlnit o discuție a infinității de moduri în care se poate adimensionaliza această ecuație și cu atât mai puțin nu am întâlnit criterii care să permită a se afirma care dintre modurile de adimensionalizare este rațional a fi utilizate.

În lucrare se ajunge la un sistem de mărimi de referință, denumit sistem rațional care conduce la forma adimensională, denumită rațională a ecuației cvasi-oscilațiilor. Acest mod de relativizare a mărimilor dimensionale satisface următoarele două criterii* și este interesant de menționat că este singurul care le satisface și anume :

1.- Sistemul mărimilor de referință să caracterizeze intrinsec amenajarea hidraulică și să nu mai fie legat, în limitele curgerii turbulent pătratice, de un anumit regim inițial permanent. Este de menționat că mărimea T_* din sistemul Calame-Gaden satisface acest criteriu dar mărimea Z_* din același sistem nu îl satisface.

2.- Forma ecuației adimensionale să fie invariantă cu caracteristicile amenajării hidraulice adică să nu se schimbe nici la trecerea de la o amenajare la alta și nici în cadrul aceleiași amenajări, la trecerea de la un regim inițial la alt regim inițial.

Satisfacerea acestor două criterii a permis elaborarea unor metode grafice și grafo-analitice de rezolvare superioare celor prezentate în literatură deoarece permit construirea o singură dată a tabelelor cu suficient de multe linii sau a graficelor la o scară convenabilă și utilizarea lor la orice castel de echilibru simplu și pentru orice regim inițial.

Aceste mărimi de referință raționale sînt :

* Ulterior s-a mai adăugat un criteriu referitor la imposibilitatea apariției nedeterminărilor de tip $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$ pentru valori extreme ale variabilei

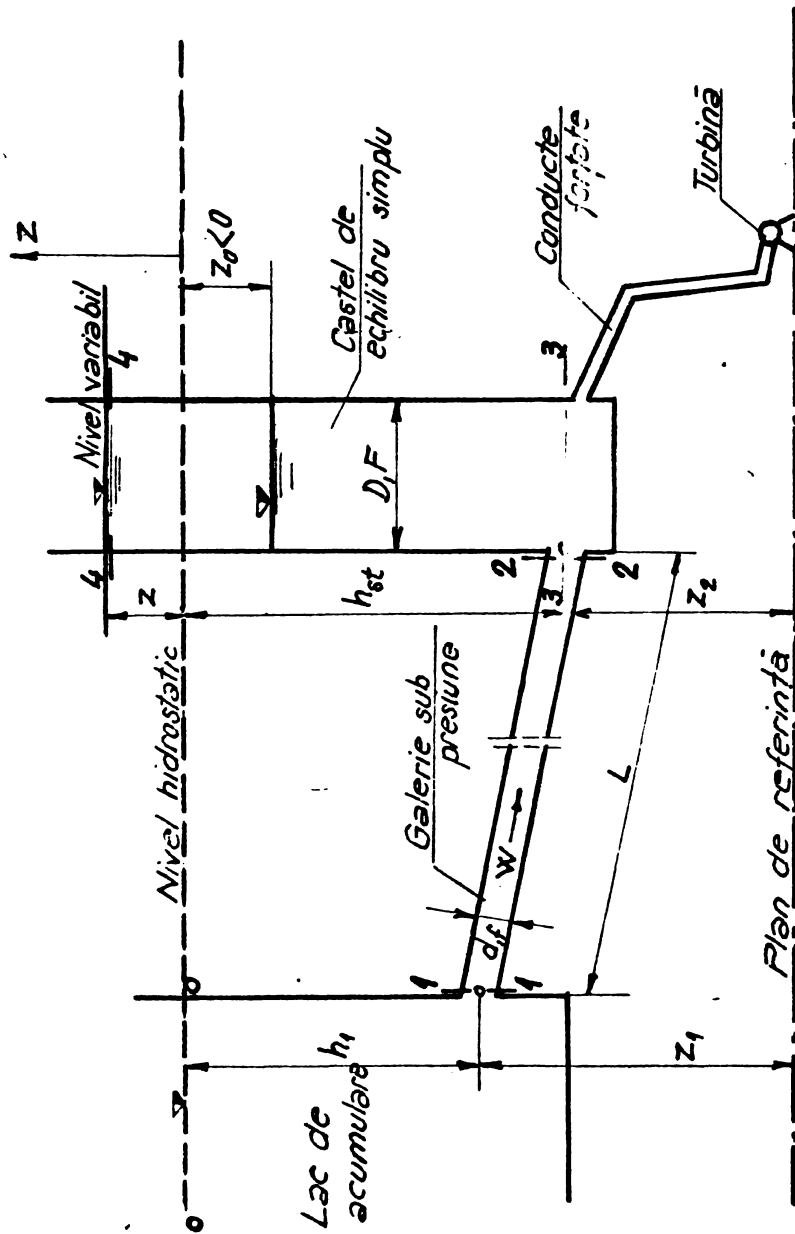


Fig. 1 (1)

Schema de principiu a unei amenajări cu castel simplu

A-I-8-3

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_e F} = \frac{LF}{Kf} \quad (*)$$

$$T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}$$

în care :

d = diametrul galeriei de aducțiune dacă aceasta este circulară ; la alte secțiuni se va lua de patru ori raza hidraulică a galeriei ;

f = aria secțiunii transversale a galeriei ;

λ_e = coeficient de rezistență echivalent de tip Darcy al aducțiunii, definit de relația

z_0 = cota nivelului inițial al nivelului apei în castelul de echilibru, axa oz fiind verticală, orientată ascendent și cu originea la nivelul hidrostatic ;

L = lungimea galeriei de aducțiune ;

w_0 = viteza inițială a apei în galeria de aducțiune ;

g = accelerația gravitațională ;

F = aria secțiunii transversale a castelului de echilibru.

În cazul în care galeria de aducțiune este compusă din tronsoane de diferite secțiuni se calculează o secțiune echivalentă și acestea se consideră în formulele de mai sus.

Cu ajutorul mărimilor de referință de mai sus se introduc nedeterminatele adimensionale corespunzătoare cotei nivelului apei și timpului :

$$S = \frac{z_0}{Z_*}, \quad \tau = \frac{t}{T_*}$$

Ecuația rațională adimensională a cvasi-oscilațiilor devine atunci :

$$\frac{d^2 S}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{dS}{d\tau} \right| \frac{dS}{d\tau} + S = 0$$

* Mărimea Z_* este similară parametrului $S = \frac{C^2 R f}{2gF}$ utilizat de A.A. Morozov pentru determinarea primelor două niveluri extreme la închiderea totală bruscă. C = coeficient Chézy al aducțiunii, R = raza hidraulică a galeriei de aducțiune.

A-I-8-4

Acest mod de a trata problema pune clar în evidență o proprietate remarcabilă a castelelor de echilibru simple și anume faptul că cele două condiții inițiale de tip Cauchy, care determină unicitatea soluției ecuației de mai sus nu sînt independente așa cum se observă din expresiile lor analitice :

$$\zeta = \zeta_0 \implies \begin{cases} \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 < 0 \\ \frac{d\mathcal{S}}{d\zeta} = \sqrt{-2\mathcal{S}_0} \end{cases}$$

Conținutul acestui paragraf a fost inclus în articolul publicat de autor în revista "Hidrotehnică" în anul 1971 /2-A/.

În paragraful al treilea este tratată problema deducerii aceleiași ecuații diferențiale a oscilațiilor pe o cale originală utilizînd metodele specifice calculului variațional. În plus se dă și expresia explicită a potențialului cinetic al lui Lagrange ce apare în integrala de acțiune care reprezintă formularea analitică a principiului lui Hamilton [3-A]

Se menționează că autorul a mai utilizat cu rezultate bune metodele variaționale și în alte probleme de mecanica fluidelor și hidraulică și a publicat în revistele "Studii și cercetări de mecanică aplicată" și "Buletinul științific și tehnic al I.P.T." rezultatele referitoare la curgerea laminară unidimensională în conducte de secțiune circulară sau rectangulară /4-A/, /5-A/, /14-A/ și referitoare la curgerea turbulentă în conducte sub presiune /6-A/, /15-A/.

În cel de al patrulea paragraf se reproduc cîteva elemente de teorie calitativă, care vor fi utilizate ulterior. Este un paragraf introductiv în acest capitol al matematicii în care au fost strînse cîteva teoreme importante, avînd aplicabilitate la castele de echilibru. Se dă în acest paragraf o demonstrație originală faptului că la închiderea bruscă a obturatorului nu se poate ajunge

A-I-8-5

la o mișcare periodică, ceea ce evident ar fi putut să fie demonstrat și pe alte căi.

În paragraful cinci au fost adunate câteva definiții și teoreme dintr-un domeniu al matematicii aflat în plină dezvoltare /5-V/, /8-V/, /14-M/ și care începe să fie aplicat din ce în ce mai mult deși încă timid în științele tehnice, /16-M/, /7-I/, /3-D/. Este vorba de analiza funcțională. Cea mai importantă teoremă din cadrul acestui paragraf este teorema variațională a lui Laggenbach. Teoria prezentată în cadrul acestui paragraf este aplicată în paragraful al șaselea. În cel de al șaselea paragraf se determină, utilizând metodele analizei funcționale și făcând abstracție de natura fizică a termenilor, funcționala pentru care soluția ecuației cvasi-oscilațiilor este extremală. Se obține pe această cale o importantă confirmare a rezultatelor de până aici și anume s-a regăsit pe această cale funcționala stabilită în cadrul utilizării metodei variaționale (principiul lui Hamilton), funcțională obținută acolo pe baza unor considerații fizice, energetice deci principial prin altă metodă. Se introduce în acest paragraf operatorul neliniar al cvasi-oscilațiilor : ^[20-A]

$$P_x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \frac{1}{2}c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

și se demonstrează că acest operator este diferențial, cu diferențială în sens Gateaux (DP)(y)z liniară în z și continuă cu y pe mulțimea M_0 funcțiilor continue de clasă $C^{(2)}$ care satisfac condiții la limită omogene. Se demonstrează că, pe aceeași mulțime, diferențiala Gateaux a operatorului P este un operator simetric pentru orice pereche de funcții pentru care Schwarzianul raportului este o funcție continuă. De asemenea se demonstrează, în condițiile unor inegalități energetice suplimentare, pozitivitatea și mărginirea diferențialei Gateaux. Din cele de mai sus rezultă imediat că operatorul neliniar al cvasi-oscilațiilor este un operator potențial, iar în final se demonstrează existența și unici-

A-I-8-6

tatea problemei variaționale echivalente problemei găsirii soluției ecuației diferențiale neliniare a cvasi-oscilațiilor.

În cel de al șaptelea paragraf se face o serie de considerații privind modelarea hidraulică în general și privind modelarea fenomenului oscilațiilor în masă în special. Se arată că tratarea rațională adimensională a ecuației oscilațiilor pune în evidență faptul că criteriul determinatⁿ este criteriul inițial $S_0 = \text{idem}$, denumit criteriul pierderii inițiale de energie. Satisfacerea acestui criteriu este posibilă fie urmînd calea clasică a modelării hidraulice, ajungîndu-se astfel la modelarea Froude fie urmînd o cale specifică castelilor de echilibru pe care în lipsa unei terminologii consacrate am denumit-o modelare fără similitudine geometrică.

În cea de a doua cale se ajunge fie la legile modelării Durand generalizate în care se consideră trei scări independente $\tilde{\sigma}_f$, $\tilde{\sigma}_L$ și $\tilde{\sigma}_{z_0}$ sau chiar se poate ajunge o generalizare a legilor modelării Durand generalizate în care se consideră patru scări independente $\tilde{\sigma}_L$, $\tilde{\sigma}_{z_0}$, $\tilde{\sigma}_f$ și $\tilde{\sigma}_k$ ($\tilde{\sigma}_{\lambda_0}$)

Relațiile din cadrul acestui paragraf au fost publicate parțial în articolul /2-A/.

Cu acest ultim paragraf se încheie primul capitol al tezei capitol care conține atît unele paragrafe cu caracter monografic cît și unele paragrafe în care sînt expuse cercetări ale autorului.

A-II-1-1

PARTEA INTII A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

CASTELE DE ECHILIERU SIMPLE

Cap.II.- Problema nivelurilor extreme& 1.- Prima integrare a ecuației oscilațiilor

După cum s-a arătat în cap.I, în cazul închiderii totale rapide, problema care se pune din punct de vedere matematic este integrarea ecuației oscilațiilor, ecuație diferențială neliniară de ordinul doi :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{dt} \right| \frac{d\xi}{dt} + \xi = 0 \quad (1-1)$$

cu condițiile inițiale de tip Cauchy :

$$t_0 = t_0 \longrightarrow \xi = \xi_0$$

$$\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{t_0} = \sqrt{-2\xi_0} \quad (1-2)$$

Studiul unei ecuații neliniare, în general, este tratat în multe lucrări, deosebindu-se următoarele metode principial diferite

a.- metoda în care se face o primă integrare exactă și o a doua integrare numerică (aproximativă) ;

b.- metode bazate pe liniarizarea-ecuației ;

c.- metode variaționale ;

d.- metode topologice ;

e.- metoda parametrului mic ;

f.- metoda variației constantelor.

În prezenta lucrare se vor utiliza doar primele trei metode deoarece metoda topologică dă rezultate prea slabe la acest tip de ecuație, metoda parametrului mic nu se aplică deoarece în ecuație

A-II-1-2

nu apare un parametru mic, iar metoda variației constantelor conduce, pentru asemenea condiții inițiale, la calcule foarte lungi, dacă se urmărește o precizie suficientă a soluției. În plus față de aceste metode, se va da și o metodă originală de rezolvare a ecuației (1-1) cu condițiile inițiale (1-2).

În acest paragraf se va face o primă integrare a ecuației (1-1).

În acest scop este necesar a se face o schimbare a ambelor nedeterminate care apar în ecuația oscilațiilor și anume în locul funcției ξ se ia ca nouă funcție $\xi = \frac{d\zeta}{dt}$, iar în locul variabilei t se consideră o nouă variabilă ζ .

În acest caz, rezultă că derivata a doua $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ care apare în ecuația (1-1) va trebui înlocuită după cum urmează :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d(\xi^2)}{d\xi} \quad (1-3)$$

Ecuația (1-1) poate fi scrisă atunci sub forma următorului sistem înlănțuit de ecuații :

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi^2)}{d\xi} + \xi^2 + 2\xi &= 0 & ; \xi > 0 \\ \frac{d(\xi^2)}{d\xi} - \xi^2 + 2\xi &= 0 & ; \xi \leq 0 \end{aligned} \quad (1-4)$$

Mișcarea începe de la momentul t_0 și se desfășoară pînă la momentul t_1 , care corespunde primului nivel extrem al apei în castelul de echilibru (nivel maxim), cu valori pozitive ale derivatei ξ , deci în acest interval de timp este valabilă prima ecuație din (1-4). După ce a depășit primul nivel extrem, deci din momentul t_1 și pînă în momentul t_2 în care este atins al doilea nivel extrem (nivel minim), mișcarea se produce cu valori negative ale derivatei ξ , deci în acest interval de timp se utilizează cea de a doua ecuație a sistemului (1-4). În continuare, generalizînd, atunci cînd mișcarea se desfășoară între momentul t_{2j} , că-

A-II-1-3

ruia îi corespunde un nivel ξ_{2j} minim al apei în castelul de echilibru, și momentul τ_{2j+1} , cărui îi corespunde nivelul maxim ξ_{2j+1} , (o mișcare la care nivelul apei urcă în castel și deci $\dot{\xi} \geq 0$) modelul matematic al mișcării este reprezentat de prima ecuație a sistemului (1-4). Evident, când mișcarea se desfășoară între momentele τ_{2j+1} și τ_{2j+2} , adică de la un nivel maxim ξ_{2j+1} la un nivel minim ξ_{2j+2} , atunci avem o mișcare în care nivelul apei coboară în castel și deci $\dot{\xi} \leq 0$, modelul matematic al mișcării este reprezentat de a doua ecuație a sistemului (1-4).

Această folosire succesivă a celor două ecuații care alcătuiesc sistemul (1-4) justifică atributul care li s-a dat de ecuații "înlănțuite". Mai mult, prin integrarea primei ecuații apar două constante de integrare. Acestea se determină rezolvind o problemă Cauchy, cunoscând condițiile inițiale la momentul τ_0 . Din ecuația integrată, cu constantele cunoscute se pot obține valorile ξ_1 și $\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_1$ în momentul τ_1 , moment în care se produce trecerea de la prima ecuație a sistemului (1-4), la a doua ecuație a aceluiași sistem. Aceasta permite ca, după integrarea celei de a doua ecuații a sistemului (1-4), pentru determinarea constantelor de integrare să se ia drept condiții inițiale, corespunzătoare momentului τ_1 chiar valorile determinate folosind prima ecuație a sistemului. Generalizând, după integrarea succesivă a ecuațiilor din sistemul (1-4) constantele de integrare se determină succesiv, luând drept condiții inițiale pentru o ecuație valori finale determinate cu cealaltă ecuație, rezolvată anterior. În acest fel se constată că problema se rezolvă din aproape în aproape. Există o ușurare oarecare a calculelor, datorită faptului că în punctele de racordare a soluțiilor celor două ecuații diferențiale, care sînt puncte în care nivelurile apei ocupă poziții extreme în castelul de echilibru, derivata $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau}$ se anulează.

A-III-1-4

Pentru discuția făcută a fost necesară scrierea sistemului sub forma (1-4).

Se observă însă că cele două ecuații ale sistemului (1-4) se pot strânge și într-o formă unică :

$$\frac{d(\xi^2)}{d\xi} - (-1)^j \xi^2 + 2\xi = 0 \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \dots \\ \tau_{j-1} \leq \tau < \tau_j \end{matrix} \quad (1-5)$$

În funcția necunoscută ξ^2 se observă că ecuația (1-5) este o ecuație liniară și neomogenă de ordinul întâi. Forma generală a unei ecuații liniare și neomogene, cu funcția y și variabila x de ordinul întâi, este : [10-M], [6-L]

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1-6)$$

După cum este cunoscut, soluția generală a unei astfel de ecuații este :

$$y = e^{-\int P dx} \left[C + \int Q e^{\int P dx} dx \right] \quad (1-7)$$

Identificând ecuațiile (1-5) și (1-6) rezultă că :

$$\begin{aligned} P &= -(-1)^j \\ Q &= -2\xi \end{aligned} \quad (1-8)$$

Soluția generală a ecuației (1-5), prin aplicarea formulei (1-7) devine :

$$\xi^2 = e^{(-1)^j \xi} \left[C - 2 \int \xi e^{(-1)^j \xi} d\xi \right] \quad (1-9)$$

Integrala care apare în (1-9) se efectuează aplicând metoda de integrare prin părți :

$$\int \xi e^{-(-1)^j \xi} d\xi = -(-1)^j \xi e^{-(-1)^j \xi} + (-1)^j \int e^{-(-1)^j \xi} d\xi = -(-1)^j \xi e^{-(-1)^j \xi} - e^{-(-1)^j \xi} \quad (1-10)$$

Introducând (1-10) în soluția generală aceasta devine :

$$\xi^2 = C e^{(-1)^j \xi} + 2(-1)^j \xi + 2 \quad (1-11)$$

Renotând constanta și extrăgând rădăcina pătrată din ambii membri, se obține forma căutată a soluției generale, rezultată dintr-o primă integrare a ecuației oscilațiilor :

$$\xi = -(-1)^j \sqrt{2} \sqrt{C_j e^{(-1)^j \xi} + (-1)^j \xi + 1} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \dots \\ \tau_{j-1} \leq \tau < \tau_j \end{matrix} \quad (1-12)$$

Se observă că pentru rezolvarea problemei nivelurilor extreme este suficientă această primă integrare a ecuației oscilațiilor, nefiind necesară și o a doua integrare a acestei ecuații. Într-adevăr, acest lucru se bazează pe anularea derivatei $\dot{\xi}$ în punctele în care ξ este extrem. De aceea ecuația soluția generală (1-12) poate servi pentru determinarea din aproape în aproape a nivelurilor extreme. Acest lucru constituie obiectul paragrafului următor.

PARTEA INTII A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDACASTELE DE ECHILIBRU SIMPLECap.II.- Problema nivelurilor extreme& 2.- Determinarea analitică a nivelurilor extreme

In paragraful anterior, dintr-o primă integrare a ecuației oscilațiilor s-a obținut :

$$\dot{\xi} = - (-1)^j \sqrt{2} \cdot \sqrt{C_j e^{(-1)^j \xi} + (-1)^j \xi + 1} \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2-1)$$

Folosind această relație, așa cum s-a arătat, se pot determina succesiv nivelurile extreme ξ_j . Ordinea calculelor este următoarea: cu ajutorul condițiilor inițiale se determină constanta C_1 , apoi nivelul extrem ξ_1 , constanta C_2 , nivelul extrem ξ_2 , ..., constanta C_{j-1} , nivelul extrem ξ_j , constanta C_j , nivelul extrem ξ_{j+1} , ..., etc.

Determinarea constantei C_1

Constanta C_1 se determină făcând în relația (2-1) $j = 1$, $\xi = \xi_0$, $\dot{\xi}_0 = \sqrt{-2\xi_0}$:

$$\sqrt{-2\xi_0} = \sqrt{2} \sqrt{C_1 e^{-\xi_0 - \xi_0 + 1}} \quad (2-2)$$

Ridicând la pătrat se poate determina constanta C_1 :

$$\boxed{C_1 = e^{\xi_0}} \quad (2-3)$$

Introducând valoarea constantei de integrare în soluția generală (2-1) aceasta devine :

$$\dot{\xi} = \sqrt{2} \sqrt{-e^{\xi_0 - \xi} - \xi + 1} \quad ; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \quad (2-4)$$

Determinarea nivelului maxim

Nivelul maxim ξ_1 se determină ținând cont de faptul că acestui nivel îi corespunde $\dot{\xi} = 0$. Din ecuația (2-4), se obține atunci ecuația în care necunoscuta este ξ_1 :

$$-e^{\xi_0 - \xi_1} - \xi_1 + 1 = 0 \quad (2-5)$$

Ecuația (2-5) se poate pune sub următoarele două forme echivalente care vor fi folosite în viitor :

$e^{-\xi_0} = \frac{e^{-\xi_1}}{1 - \xi_1}$	(2-6)
$\xi_0 = \xi_1 + \ln(1 - \xi_1)$	

Se observă că structura ecuației nu permite explicitarea în funcțiile elementare cunoscute a necunoscutei ξ_1 .

Vom presupune însă mai departe că prin rezolvarea ecuației (2-5) sau (2-6) s-a determinat valoarea nivelului maxim ξ_1 .

Determinarea constantei C_2

Pentru determinarea constantei C_2 , se pleacă tot de la soluția generală (2-1) în care se face $j = 2$, $\xi = \xi_1$, $\dot{\xi} = 0$:

$$C_2 e^{\xi_1} + \xi_1 + 1 = 0 \quad (2-7)$$

$$\boxed{C_2 = -(1 - \xi_1) e^{-\xi_1}} \quad (2-8)$$

Determinarea nivelului minim

Introducînd constanta C_2 în ecuația oscilațiilor, aceasta capătă forma :

$$\dot{\xi} = -\sqrt{2} \sqrt{-(1 + \xi_1) e^{\xi - \xi_1} + \xi + 1} \quad ; \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \quad (2-9)$$

Pentru determinarea nivelului minim ξ_2 , în ecuația oscilațiilor (2-9) se face $\xi = \xi_2, \dot{\xi}_2 = 0$. Se obține în acest fel ecuația în care ξ_2 apare ca singura necunoscută :

$$-(1 + \xi_1) e^{\xi_2 - \xi_1} + \xi_2 + 1 = 0 \quad (2-10)$$

Ecuația (2-10) se poate pune sub următoarele două forme echivalente care vor fi folosite în viitor :

$$\boxed{\frac{e^{\xi_1}}{1 + \xi_1} = \frac{e^{\xi_2}}{1 + \xi_2}} \quad (2-11)$$

$$\boxed{\xi_1 - \ln(1 + \xi_1) = \xi_2 - \ln(1 + \xi_2)}$$

Se observă că nici necunoscuta ξ_2 nu poate fi explicitată din ecuațiile de mai sus.

Determinarea constantei C_3

Pentru determinarea constantei C_3 , în soluția generală (2-1) se face $j = 3, \xi = \xi_3, \dot{\xi}_3 = 0$:

$$-(1 + \xi_2) e^{\xi_2 - \xi_3} - \xi_3 + 1 = 0 \quad (2-12)$$

sau :

$$\boxed{C_3 = -(1 - \xi_2) e^{\xi_2}} \quad (2-13)$$

Determinarea nivelului maxim

Introducând constanta C_3 în ecuația oscilațiilor, aceasta capătă forma :

$$\dot{\xi} = \sqrt{2} \sqrt{-(1 - \xi_2) e^{\xi_2 - \xi} - \xi + 1} \quad ; \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_3 \quad (2-14)$$

Pentru determinarea nivelului maxim ξ_3 , în ecuația oscilațiilor (2-14) se face $\xi = \xi_3$, $\dot{\xi}_3 = 0$. Se obține în acest fel o ecuație cu necunoscuta ξ_3 :

$$-(1 - \xi_2) e^{\xi_2 - \xi_3} - \xi_3 + 1 = 0 \quad (2-15)$$

Ecuația (2-15) se poate pune sub următoarele două forme echivalente care vor fi folosite :

$$\boxed{\frac{e^{-\xi_2}}{1 - \xi_2} = \frac{e^{-\xi_3}}{1 - \xi_3}} \quad (2-16)$$

$$\boxed{\xi_2 + \ln(1 - \xi_2) = \xi_3 + \ln(1 - \xi_3)}$$

Procedând așa din aproape în aproape se ajunge la determinarea constantei C_j

Se pot obține astfel formule generale de calcul.

Determinarea constantei C_j

Pentru determinarea constantei C_j , se face în soluția generală $\xi = \xi_{j-1}$, $\dot{\xi}_{j-1} = 0$:

$$C_j e^{(-1)^j \xi_{j-1}} + (-1)^j \xi_{j-1} + 1 = 0 \quad (2-17)$$

sau :

$$C_j = - \left[1 + (-1)^j \xi_{j-1} \right] e^{-(-1)^j \xi_{j-1}} \quad (2-18)$$

Determinarea nivelului extrem

Introducînd constanta C_j în ecuația oscilațiilor, aceasta capătă forma :

$$\dot{\xi} = -(-1)^j \sqrt{2} \sqrt{-\left[1 + (-1)^j \xi_{j-1} \right] e^{(-1)^j (\xi - \xi_{j-1})} + (-1)^j \xi + 1} ; \quad \tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j \quad (2-19)$$

Pentru determinarea nivelului extrem ξ_j , în ecuația oscilațiilor (2-19) se face $\xi = \xi_j$, $\dot{\xi}_j = 0$. Se obține în acest fel ecuația care prin rezolvare dă valoarea necunoscutii ξ_j :

$$-\left[1 + (-1)^j \xi_{j-1} \right] e^{(-1)^j (\xi_j - \xi_{j-1})} + (-1)^j \xi_j + 1 = 0 \quad (2-20)$$

Ecuația (2-20) se poate pune și sub următoarele două forme echivalente, mai convenabile din punct de vedere al calculelor :

$$\frac{e^{(-1)^j \xi_{j-1}}}{1 + (-1)^j \xi_{j-1}} = \frac{e^{(-1)^j \xi_j}}{1 + (-1)^j \xi_j} \quad (2-21)$$

$$(-1)^j \xi_{j-1} - \ln \left[1 + (-1)^j \xi_{j-1} \right] = (-1)^j \xi_j - \ln \left[1 + (-1)^j \xi_j \right]$$

Relațiile (2-21) se mai pot încă prelucra ținînd cont de relațiile :

$$\begin{array}{ll} (-1)^j \xi_{j-1} > 0 & (-1)^j \xi_{j-1} = |\xi_{j-1}| \\ \implies & \\ (-1)^j \xi_j < 0 & (-1)^j \xi_j = -|\xi_j| \end{array} \quad (2-22)$$

Ținând cont de aceste relații și folosind funcția modul, relațiile (2-21) pot fi puse sub forma echivalentă :

$$\frac{e^{|\xi_{j-1}|}}{1+|\xi_{j-1}|} = \frac{e^{-|\xi_j|}}{1-|\xi_j|} \quad (2-23)$$

$$\ln(1-|\xi_{j-1}|) - |\xi_{j-1}| = \ln(1-|\xi_j|) + |\xi_j|$$

Rezumînd rezultatele acestui paragraf :

- soluția generală după a primă integrare a ecuației oscilațiilor :

$$\xi = -(-1)^j \sqrt{2} \sqrt{C_j e^{(-1)^j \xi} + (-1)^j \xi + 1} \quad ; \quad \xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j$$

$j = 1, 2, 3, \dots$

- determinarea constantelor de integrare C_j :

$$C_1 = -e^{\xi_0}$$

$$C_j = -[1 + (-1)^j \xi_{j-1}] e^{(-1)^j \xi_{j-1}} = -(1 + |\xi_{j-1}|) e^{-|\xi_{j-1}|} \quad ; \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

- ecuații care permit determinarea nivelurilor extreme ξ_1, ξ_j :

$$\xi_0 = \xi_1 + \ln(1 - \xi_1)$$

$$\ln(1 + |\xi_{j-1}|) - |\xi_{j-1}| = \ln(1 - |\xi_j|) + |\xi_j| \quad ; \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

sau

$$\frac{e^{|\xi_{j-1}|}}{1+|\xi_{j-1}|} = \frac{e^{-|\xi_j|}}{1-|\xi_j|} \quad ; \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

PARTEA INTII A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA
CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Cap.II.- Problema nivelurilor extreme

& 3.- Metode rapide de determinare a nivelurilor extreme
bazate pe tabele numerice și reprezentări grafice

Pentru ca relațiile stabilite pînă acum să poată fi utilizate cu ușurință în proiectare, se dau în acest paragraf o serie de tabele și reprezentări grafice ajutătoare, care să permită determinarea rapidă a nivelurilor extreme.

Unul din marile avantaje ale acestor tabele și reprezentări grafice, care le face superioare metodelor utilizate pînă în prezent este acela că, datorită sistemului de referință rațional utilizat, ele sînt unice, aceleași pentru orice amenajare hidrotehnică cu castel de echilibru simplu. Aceasta permite ca, în special reprezentările grafice să fie făcute o singură dată la o scară convenabilă și să poată fi folosite aceleași reprezentări grafice pentru calculul tuturor castelurilor.

a.- Metodă analitică rapidă de determinare a primului nivel

maxim z_1

Pentru determinarea rapidă a primului nivel maxim z_1 , se va da o metodă rapidă de determinare a primului nivel maxim adimensional ξ_1 , care, odată cunoscut permite, printr-o simplă înmulțire cu mărimea de referință Z_* să determinăm valoarea căutată z_1 .

Metoda se poate aplica atât analitic, prin utilizarea datelor din tabelul Nr.1, cât și grafic, folosind graficul Nr.1.

A-II-3-2

Metoda se bazează pe ecuația anterior dedusă, care permite calculul mărimii necunoscute S_1 , dacă se cunoaște mărimea inițială S_0 :

$$-S_0 = -S_1 - \ln(1 - S_1) \quad (3-1)$$

Pentru rezolvarea rapidă a ecuației, în tabelul Nr.1 sînt trecute în două coloane valorile S_0 , respectiv S_1 , care se corespund prin relația (3-1). Acest tabel a fost construit alegîndu-se un pas convenabil pentru S_1 și s-a calculat valoarea corespunzătoare S_0 prin relația (3-1).

Exemplu de calcul : Se cunoaște $S_0 = -0,100$

Se cere $S_1 = ?$

Din tabelul Nr.1 se citește :

$$S_0 = -0,099267 \dots\dots\dots S_1 = 0,38200$$

$$S_0 = -0,100508 \dots\dots\dots S_1 = 0,38400$$

Aplicînd interpolarea liniară rezultă :

$$\Delta(-S_0) = 0,001241 \dots\dots\dots \Delta S_1 = 0,002$$

$$0,000733 \dots\dots\dots x = \frac{1,466}{1241} = 0,00118$$

$$\text{Deci } S_1 = 0,38200 + 0,00118 = 0,38318$$

Se observă că prin folosirea tabelului 1, determinarea nivelului maxim S_1 comportă doar o operație de interpolare.

b.- Metodă rapidă grafo-analitică de determinare a primului nivel maxim z_1

Această metodă se bazează pe reprezentarea grafică a funcției

$S_1 = S_1(S_0)$ reprezentare bazată pe datele înscrise în tabelul Nr.1.

Precizia metodei, ca la orice metodă grafică este legată în primul rînd de scările utilizate. Avînd în vedere că graficul este valabil pentru orice amenajare hidrotehnică este recomandabil a se realiza

A-II-3-3

la o scară cît mai mare și în orice caz mai mare decît este scara la care el este reprezentat în lucrare.

Din motive lesne de înțeles el a fost reprezentat în lucrarea de față de mărimea unei pagini. Avînd graficul Nr.1, se intră cu valoarea cunoscută pe axa prizontală $-S_0$, se duce o verticală pînă la intersecția cu curba $S_1 = S_1(-S_0)$. Din acest punct de intersecție se duce o orizontală care indică pe axa verticală valoarea adimensională S_1 a saltului maxim.

Să cercetăm cîteva valori particulare pentru curba din graficul Nr.1 .

Din ecuația (3-1) rezultă că :

$$a.) -S_0 \longrightarrow 0 \implies S_1 \longrightarrow 0$$

$$\frac{dS_0}{dS_1} = 1 - \frac{1}{1-S_1} = -\frac{S_1}{1-S_1} \longrightarrow 0 \quad (3-2)$$

$$\frac{dS_1}{d(-S_0)} = \frac{1}{S_1} - 1 \longrightarrow \infty$$

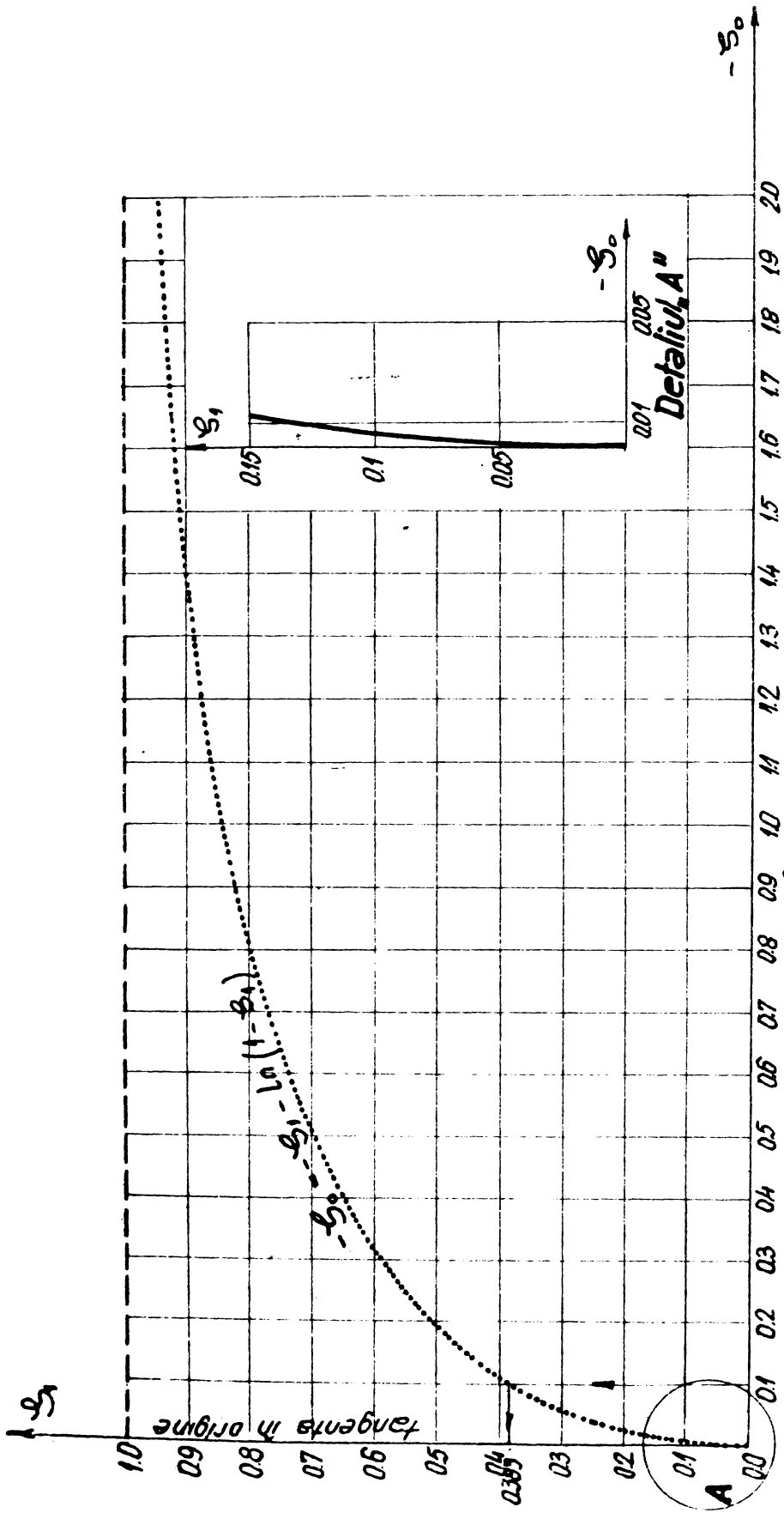
Deci curba $S_1 = S_1(-S_0)$ trece prin origine și în acest punct are tangenta verticală.

$$b.) -S_0 \longrightarrow \infty \implies S_1 \longrightarrow 1$$

$$\frac{dS_1}{d(-S_0)} = \frac{1}{S_1} - 1 \longrightarrow 0 \quad (3-3)$$

Deci curba $S_1 = S_1(-S_0)$ are ca asimptotă orizontala care trece prin punctul $S_1 = 1$.

Se justifică în acest fel și interpretarea dată mărimei de referință raționale Z_* , de a fi chiar saltul maxim în castel atunci cînd pierderea inițială de energie $S_0 \longrightarrow -\infty$.



Graficul Nr.1(1)

Reprezentarea functiei - S_0 = - S_1 - ln(1 - S_1)

A-II-3-5

Exemplu de calcul

Se cunoaște : $\xi_0 = -0,100$

Se cere : $\xi_1 = ?$

Executînd construcția grafică după cum s-a indicat mai sus, construcție indicată și pe graficul din fig.Nr.1 se citește

$$\xi_1 = 0,383.$$

c.- Metodă rapidă grafo-analitică de determinare a nivelurilor extreme - z_j , folosind două curbe

Această metodă a fost expusă de autor într-un articol publicat în revista "Hidrotehnica".^[2-A]

Ea se bazează pe relația analitică, stabilită în paragraful anterior, între două niveluri consecutive, în care nivelul ξ_j este cunoscut, iar nivelul următor ξ_{j+1} este necunoscut :

$$|\xi_j| - \ln(1 + |\xi_j|) = -|\xi_{j+1}| - \ln(1 - |\xi_{j+1}|) ; j = 1, 2, 3, \dots \quad (3-4)$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații se reprezintă grafic funcțiile :

$$\begin{aligned} f_1(|\xi|) &= -\ln(1 - |\xi|) - |\xi| \\ f_2(|\xi|) &= -\ln(1 + |\xi|) + |\xi| \quad ; \quad |\xi| < 1 \end{aligned} \quad (3-5)$$

Prima funcție a fost studiată și reprezentată în graficul Nr.1, ea fiind chiar curba cu care se determina primul nivel extrem ξ_1 .

Deoarece s-a arătat că $\xi_1 < 1$, iar celelalte nivele-s mai mici în modul decît primul maxim, rezultă că a doua curbă se poate trasa numai pentru un interval de variație a lui $|\xi|$, cuprins între 0 și 1. Să cercetăm valorile particulare la cele două extremități ale intervalului :

$$\begin{aligned}
 \text{a.) } |S| \longrightarrow 0 &\implies f_2(|S|) \longrightarrow 0 \\
 \frac{df_2}{d(|S|)} &= \frac{|S|}{1+|S|} \longrightarrow 0
 \end{aligned}
 \tag{3-6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b.) } |S| \longrightarrow 1 &\implies f_2(|S|) \longrightarrow 1 - \ln 2 = 0,306853 \\
 \frac{df_2}{d(|S|)} &= \frac{1}{2} = \operatorname{tg} \theta \implies \theta \cong 26^{\circ}34'
 \end{aligned}
 \tag{3-7}$$

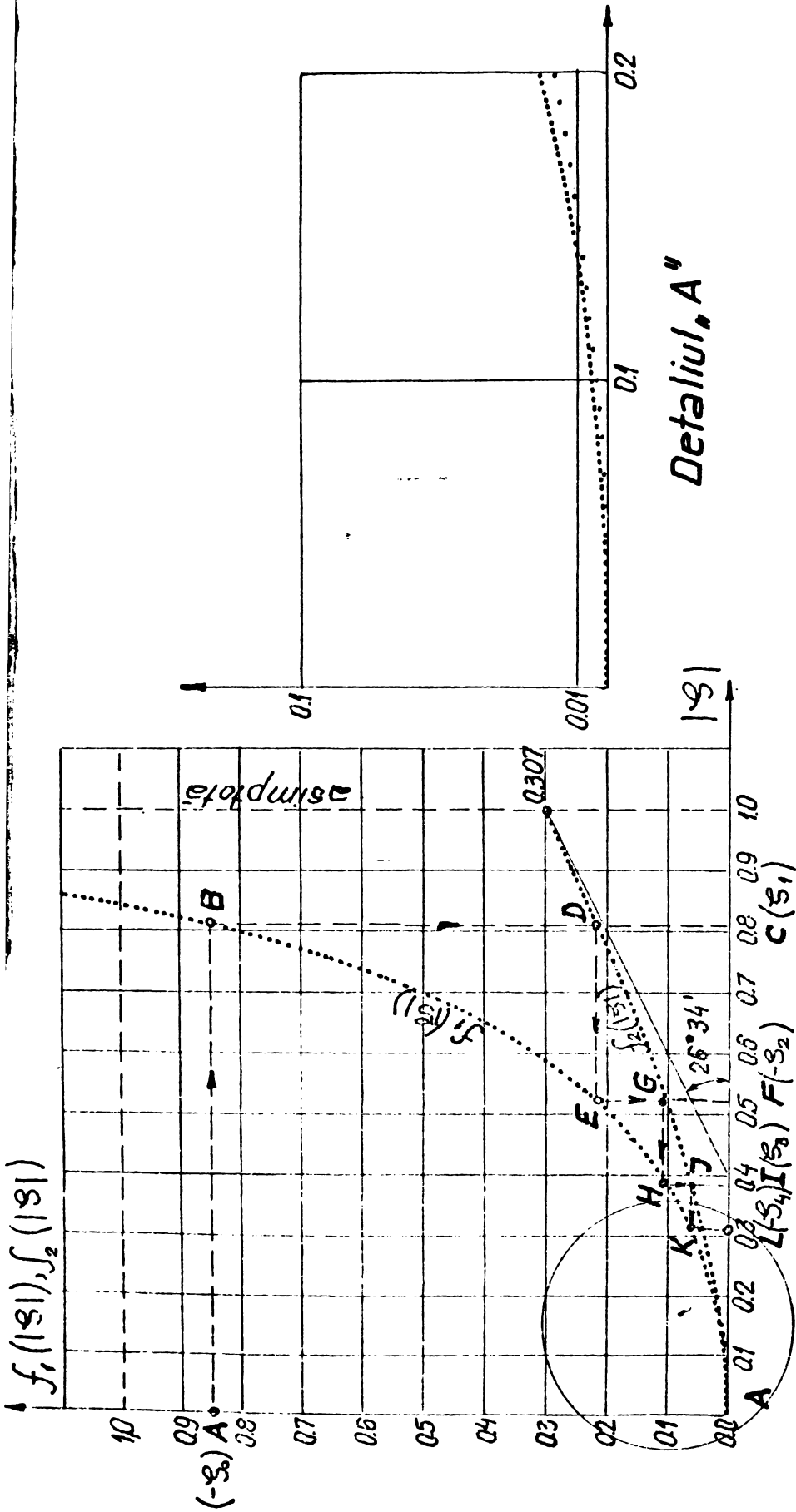
Rezumînd, rezultă că ambele curbe din graficul Nr.2 vor avea în origine tangenta orizontală, curba f_1 avînd pentru valoarea $|S|=1$ o asimptotă verticală iar curba f_2 avînd pentru valoarea $|S|=1$ tangenta înclinată cu $26^{\circ}34'$ față de axa orizontală.

Valorile necesare reprezentării grafice a curbei f_2 au fost calculate în tabela Nr.2, cu un pas suficient de mic pentru $|S|$ pentru a putea fi folosite și pentru determinări analitice. Într-adevăr metoda grafică rapidă expusă aici se poate transpune imediat analitic, însă în acest caz metoda cîștigînd în precizie, pierde din rapiditate.

Bine înțeles, deoarece aceste două curbe sînt valabile pentru orice amenajare cu castel de echilibru simplu este indicat ca pentru calculele efective, scara de reprezentare a acestor două curbe să fie cît mai mare.

Cu graficul Nr.2 determinarea nivelurilor extreme se face în felul următor, care se poate urmări și pe grafic unde au fost trecute punctele respective și ordinea lor de determinare.

Se cunoaște valoarea S_0 . Se introduce în grafic punînd pe axa verticală $-S_0 = f_1(|S_0|)$ (punctul A), se duce o orizontală pînă la intersecția cu curba $f_1(|S|)$ (punctul B), iar din punctul de intersecție se duce o verticală care determină pe axa $|S|$ pe $|S_1| = S_1$



Detaliul, A''

Graficul Nr. 2 (2)

Reprezentarea functiilor: $f_1(|s|) = -|s| - \ln(1-|s|)$
 $f_2(|s|) = |s| - \ln(1+|s|)$

A-II-3-B

(punctul C). In același timp această verticală intersectează și curba $f_2(1 \leq 1)$ (punctul D). Din punctul D se duce o orizontală care intersectează curba $f_1(1 \leq 1)$ (punctul E). Verticala din acest punct de intersecție determină pe axa orizontală $|\xi_2| = -\xi_2$ (punctul F), și în același timp intersectează curba $f_2(1 \leq 1)$ (punctul G), de unde se continuă în mod analog, cît este necesar.

d.- Metodă rapidă grafo-analitică de determinare a nivelurilor extreme ξ_j , folosind o singură curbă

Avînd în vedere că prin folosirea sistemului rațional de mărimi de referință, calculele care trebuiesc făcute sînt aceleași pentru orice amenajare, se poate dezvolta mai mult partea pregătitoare, astfel încît determinarea efectivă a nivelurilor extreme, în diferite cazuri concrete să se facă și mai repede. După cum s-a mai arătat, ecuația unică ce leagă două extreme consecutive este :

$$|\xi_j| - \ln(1 + |\xi_j|) = -|\xi_{j+1}| - \ln(1 - |\xi_{j+1}|) \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3-8)$$

Se poate construi un tabel și ridica o curbă care să dea pe $|\xi_{j+1}|$ ca funcție de $|\xi_j|$ pentru o serie de valori $|\xi_j|$.

In tabelul Nr.3 sînt trecute un număr de douăzeci de perechi $|\xi_j|, |\xi_{j+1}|$ care verifică ecuația (3-8).

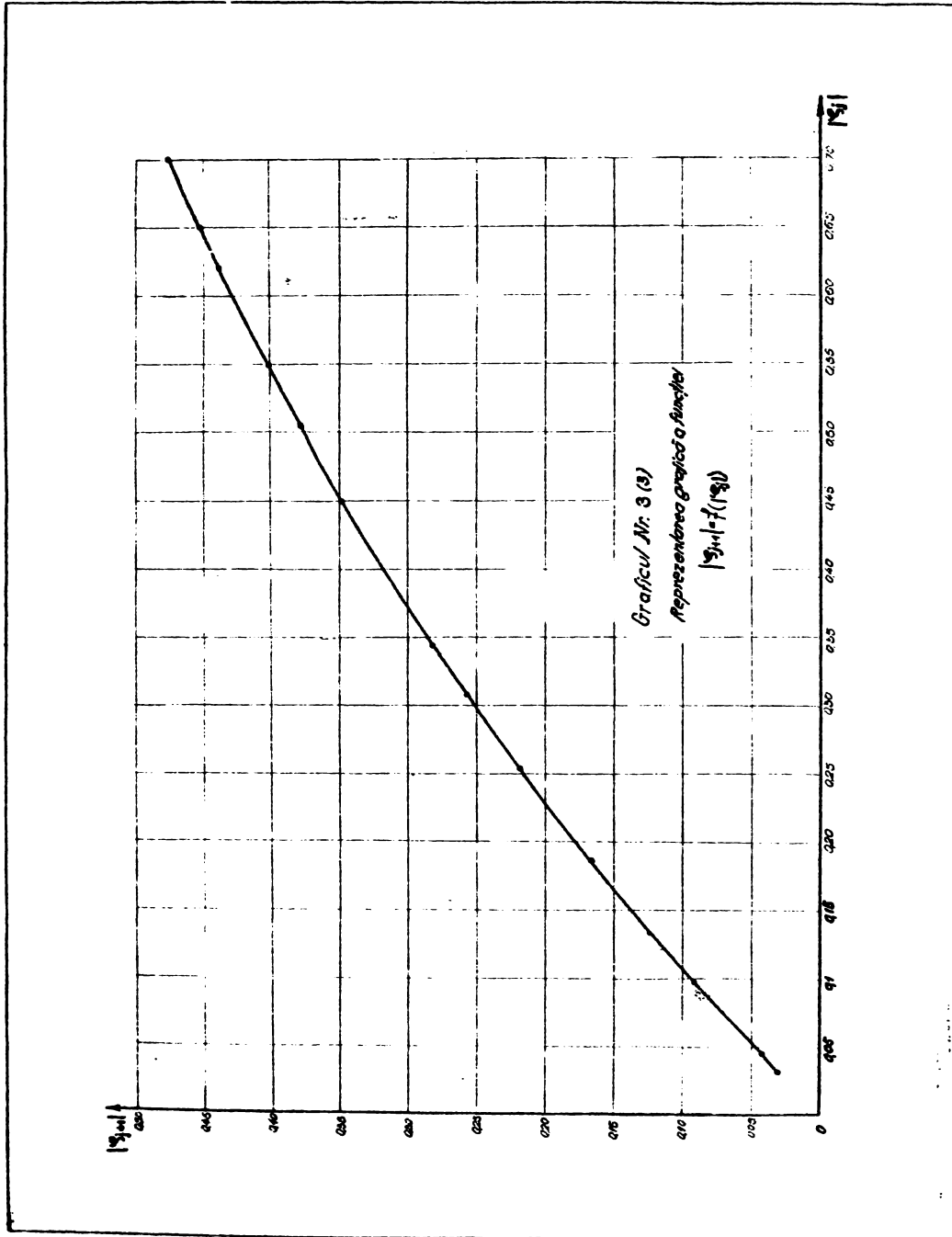
Aceste valori au servit la construirea graficului Nr.3.

Cu acest grafic, care este necesar să se construiască la o scară cît mai mare, se lucrează în felul următor :

- se determină mai întîi nivelul maxim ξ_1 , prin metoda analitică (a), sau grafo-analitică (b) ;

- cu ajutorul lui ξ_1 (punctul A), din reprezentarea grafică Nr.3 în care se ia $|\xi_j| = \xi_1$ se determină $|\xi_{j+1}| = -\xi_2$ (punctul C) ;

A-II-3-9



A-II-3-10

- în continuare se ia $|\xi_j| = -\xi_2$ (punctul C_2) și din graficul Ir.3 va rezulta $|\xi_{j+1}| = \xi_3$ (punctul E_1).

Procedeul se repetă în continuare cit este necesar.

Tabela Nr.1

$$\xi_0 = \xi_1 + \ln(1 - \xi_1) = f_1(1 - \xi_1)$$

$-\xi_0$	ξ_1	$-\xi_0$	ξ_1
0,0000005	0,0010000	0,0003440	0,0260000
0,0000020	0,0020000	0,0003712	0,0270000
0,0000045	0,0030000	0,0003995	0,0280000
0,0000080	0,0040000	0,0004288	0,0290000
0,0000125	0,0050000	0,0004592	0,0300000
0,0000181	0,0060000	0,0004907	0,0310000
0,0000246	0,0070000	0,0005232	0,0320000
0,0000322	0,0080000	0,0005568	0,0330000
0,0000407	0,0090000	0,0005914	0,0340000
0,0000503	0,0100000	0,0006272	0,0350000
0,0000610	0,0110000	0,0006640	0,0360000
0,0000726	0,0120000	0,0007019	0,0370000
0,0000852	0,0130000	0,0007408	0,0380000
0,0000989	0,0140000	0,0007809	0,0390000
0,0001136	0,0150000	0,0008220	0,0400000
0,0001294	0,0160000	0,0008642	0,0410000
0,0001462	0,0170000	0,0009075	0,0420000
0,0001640	0,0180000	0,0009519	0,0430000
0,0001828	0,0190000	0,0009974	0,0440000
0,0002027	0,0200000	0,0010439	0,0450000
0,0002236	0,0210000	0,0010916	0,0460000
0,0002456	0,0220000	0,0011404	0,0470000
0,0002686	0,0230000	0,0011902	0,0480000
0,0002927	0,0240000	0,0012412	0,0490000
0,0003178	0,0250000	0,0012930	0,0500000
0,0013460	0,0510000	0,0030430	0,0760000
0,0014000	0,0520000	0,0031260	0,0770000
0,0014560	0,0530000	0,0032100	0,0780000
0,0015130	0,0540000	0,0032950	0,0790000
0,0015700	0,0550000	0,0033820	0,0800000
0,0016290	0,0560000	0,0034690	0,0810000

1

2

A-II-3-11

- S.	S ₁	- S.	S ₁
0,001688	0,057000	0,003557	0,082000
0,001750	0,058000	0,003665	0,083000
0,001812	0,059000	0,003739	0,084000
0,001875	0,060000	0,003831	0,085000
0,001939	0,061000	0,003924	0,086000
0,002005	0,062000	0,004019	0,087000
0,002072	0,063000	0,004115	0,088000
0,002140	0,064000	0,004212	0,089000
0,002209	0,065000	0,004311	0,090000
0,002279	0,066000	0,004410	0,091000
0,002350	0,067000	0,004511	0,092000
0,002422	0,068000	0,004613	0,093000
0,002496	0,069000	0,004716	0,094000
0,002571	0,070000	0,004820	0,095000
0,002647	0,071000	0,004925	0,096000
0,002724	0,072000	0,005032	0,097000
0,002802	0,073000	0,005141	0,098000
0,002881	0,074000	0,005250	0,099000
0,002962	0,075000	0,005361	0,100000
0,005588	0,102000	0,012875	0,152000
0,005815	0,104000	0,013236	0,154000
0,006050	0,106000	0,013603	0,156000
0,006289	0,108000	0,013975	0,158000
0,006534	0,110000	0,014353	0,160000
0,006784	0,112000	0,014737	0,162000
0,007038	0,114000	0,015127	0,164000
0,007298	0,116000	0,015522	0,166000
0,007563	0,118000	0,015923	0,168000
0,007833	0,120000	0,016330	0,170000
0,008109	0,122000	0,016742	0,172000
0,008389	0,124000	0,017161	0,174000
0,008675	0,126000	0,017585	0,176000
0,008966	0,128000	0,018015	0,178000
0,009262	0,130000	0,018451	0,180000
0,009564	0,132000	0,018893	0,182000
0,009870	0,134000	0,019341	0,184000
0,010183	0,136000	0,019795	0,186000
0,010500	0,138000	0,020255	0,188000

3

A-11-3-12

- S ₀	S ₁	- S ₀	S ₁
0,010823	0,140000	0,020721	0,190000
0,011151	0,142000	0,021193	0,192000
0,011485	0,144000	0,021672	0,194000
0,011824	0,146000	0,022156	0,196000
0,012169	0,148000	0,022647	0,198000
0,012519	0,150000	0,023144	0,200000
0,023647	0,202000	0,038352	0,252000
0,024156	0,204000	0,039030	0,254000
0,024672	0,206000	0,039714	0,256000
0,025194	0,208000	0,040406	0,258000
0,025722	0,210000	0,041105	0,260000
0,026257	0,212000	0,041811	0,262000
0,026798	0,214000	0,042525	0,264000
0,027346	0,216000	0,043246	0,266000
0,027901	0,218000	0,043975	0,268000
0,028461	0,220000	0,044711	0,270000
0,029029	0,222000	0,045454	0,272000
0,029603	0,224000	0,046205	0,274000
0,0301834	0,226000	0,046964	0,276000
0,0307707	0,228000	0,047730	0,278000
0,0313647	0,230000	0,048504	0,280000
0,0319655	0,232000	0,049286	0,282000
0,032573	0,234000	0,050075	0,284000
0,033187	0,236000	0,050872	0,286000
0,0338087	0,238000	0,051677	0,288000
0,034437	0,240000	0,052490	0,290000
0,035072	0,242000	0,053311	0,292000
0,035714	0,244000	0,054140	0,294000
0,036363	0,246000	0,054977	0,296000
0,037019	0,248000	0,055822	0,298000
0,037682	0,250000	0,0566749	0,300000
0,057536	0,302000	0,081865	0,352000
0,058406	0,304000	0,082956	0,354000
0,059283	0,306000	0,084057	0,356000
0,060169	0,308000	0,085167	0,358000
0,061064	0,310000	0,086287	0,360000
0,061966	0,312000	0,087417	0,362000
0,062878	0,314000	0,088557	0,364000

4

5

A-II-3-13

- ξ_0	ξ_1	- ξ_0	ξ_1
0,063797	0,316000	0,089706	0,366000
0,064726	0,318000	0,090966	0,368000
0,065662	0,320000	0,092035	0,370000
0,066608	0,322000	0,093215	0,372000
0,067562	0,324000	0,094405	0,374000
0,068525	0,326000	0,095605	0,376000
0,069497	0,328000	0,096815	0,378000
0,070478	0,330000	0,098036	0,380000
0,071467	0,332000	0,099267	0,382000
0,072466	0,334000	0,100508	0,384000
0,073473	0,336000	0,101760	0,386000
0,074490	0,338000	0,103023	0,388000
0,075515	0,340000	0,104296	0,390000
0,076550	0,342000	0,105580	0,392000
0,077594	0,344000	0,106875	0,394000
0,078648	0,346000	0,108185	0,396000
0,079711	0,348000	0,109498	0,398000
0,080783	0,350000	0,110826	0,400000
0,112165	0,402000	0,149480	0,452000
0,113515	0,404000	0,151136	0,454000
0,114876	0,406000	0,152806	0,456000
0,116249	0,408000	0,154489	0,458000
0,117633	0,410000	0,156186	0,460000
0,119028	0,412000	0,157897	0,462000
0,120435	0,414000	0,159621	0,464000
0,121854	0,416000	0,161359	0,466000
0,123285	0,418000	0,163112	0,468000
0,124727	0,420000	0,164878	0,470000
0,126181	0,4220000	0,166659	0,472000
0,127648	0,424000	0,168454	0,474000
0,129126	0,426000	0,170264	0,476000
0,130616	0,428000	0,172088	0,478000
0,132119	0,430000	0,173926	0,480000
0,133634	0,432000	0,175780	0,482000
0,135161	0,434000	0,177649	0,484000
0,136701	0,436000	0,179532	0,486000
0,138253	0,438000	0,181431	0,488000
0,139818	0,440000	0,183345	0,490000
0,141396	0,442000	0,185274	0,492000

6

- S.	S ₁	- S.	S ₁
0,142987	0,444000	0,187286	0,494000
0,144591	0,446000	0,189179	0,496000
0,146207	0,448000	0,191155	0,498000
0,147837	0,450000	0,193147	0,500000
0,198198	0,505000	0,364252	0,630000
0,203350	0,510000	0,372858	0,635000
0,208606	0,515000	0,381651	0,640000
0,213969	0,520000	0,390637	0,645000
0,219440	0,525000	0,399822	0,650000
0,225023	0,530000	0,409211	0,655000
0,230718	0,535000	0,418810	0,660000
0,236529	0,540000	0,428625	0,665000
0,242458	0,545000	0,438663	0,670000
0,248508	0,550000	0,448930	0,675000
0,254681	0,555000	0,459434	0,680000
0,260981	0,560000	0,470183	0,685000
0,267409	0,565000	0,481183	0,690000
0,273970	0,570000	0,492444	0,695000
0,280666	0,575000	0,503973	0,700000
0,287501	0,580000	0,515780	0,705000
0,294477	0,585000	0,527874	0,710000
0,301598	0,590000	0,540266	0,715000
0,308868	0,595000	0,552966	0,720000
0,316291	0,600000	0,565984	0,725000
0,323870	0,605000	0,579333	0,730000
0,331609	0,610000	0,593025	0,735000
0,338512	0,615000	0,607074	0,740000
0,347584	0,620000	0,621492	0,745000
0,355829	0,625000	0,636294	0,750000
0,651497	0,755000	1,240264	0,880000
0,667116	0,760000	1,277833	0,885000
0,683170	0,765000	1,317275	0,890000
0,699676	0,770000	1,358795	0,895000
0,716655	0,775000	1,402585	0,900000
0,734128	0,780000	1,448878	0,905000
0,752117	0,785000	1,497946	0,910000
0,770648	0,790000	1,550104	0,915000
0,789745	0,795000	1,605729	0,920000
0,809438	0,800000	1,665267	0,925000

7

8

A-II-3-15

$- \xi_0$	ξ_1	$- \xi_0$	ξ_1
0,829756	0,805000	1,729260	0,930000
0,850731	0,810000	1,798368	0,935000
0,872399	0,815000	1,873410	0,940000
0,894798	0,820000	1,955422	0,945000
0,917969	0,825000	2,045732	0,950000
0,941957	0,830000	2,146093	0,955000
0,966810	0,835000	2,258876	0,960000
0,992581	0,840000	2,387407	0,965000
1,019330	0,845000	2,536558	0,970000
1,047120	0,850000	2,713879	0,975000
1,076022	0,855000	2,932023	0,980000
1,106113	0,860000	3,214710	0,985000
1,137481	0,865000	3,615170	0,990000
1,170221	0,870000	4,303317	0,995000
1,204442	0,875000	∞	0

Tabela Nr.2

$$f_2(|\xi|) = |\xi| - \ln(1 + |\xi|)$$

$ \xi $	$f_2(\xi)$	$ \xi $	$f_2(\xi)$
0,0010000	0,0000005	0,026000	0,000332
0,0020000	0,0000020	0,027000	0,000358
0,0030000	0,0000045	0,028000	0,000385
0,0040000	0,0000080	0,029000	0,000413
0,0050000	0,0000125	0,030000	0,000441
0,0060000	0,0000179	0,031000	0,000471
0,0070000	0,0000244	0,032000	0,000501
0,0080000	0,0000318	0,033000	0,000533
0,0090000	0,0000403	0,034000	0,000565
0,0100000	0,0000497	0,035000	0,000599
0,0110000	0,0000601	0,036000	0,000633
0,0120000	0,0000714	0,037000	0,000668
0,0130000	0,0000838	0,038000	0,000704
0,0140000	0,0000971	0,039000	0,000741
0,0150000	0,0001114	0,040000	0,000779
0,0160000	0,0001267	0,041000	0,000818

1

A-II-3-18

151	$f_2(151)$	151	$f_2(151)$
0,0170000	0,0001429	0,042000	0,000858
0,0180000	0,0001601	0,043000	0,000899
0,0190000	0,0001782	0,044000	0,000941
0,0200000	0,0001974	0,045000	0,000983
0,0210000	0,0002175	0,046000	0,001027
0,0220000	0,0002385	0,047000	0,001071
0,0230000	0,0002605	0,048000	0,001116
0,0240000	0,0002835	0,049000	0,001163
0,0250000	0,0003074	0,050000	0,001210
0,055000	0,001459	0,260000	0,028888
0,060000	0,001731	0,270000	0,030983
0,065000	0,002025	0,280000	0,033140
0,070000	0,002341	0,290000	0,035358
0,075000	0,002679	0,300000	0,037636
0,080000	0,003039	0,310000	0,039973
0,085000	0,003420	0,320000	0,042368
0,090000	0,003822	0,330000	0,044821
0,095000	0,004246	0,340000	0,047330
0,100000	0,004690	0,350000	0,052515
0,110000	0,005160	0,360000	0,055189
0,120000	0,005667	0,370000	0,057917
0,130000	0,006212	0,380000	0,060696
0,140000	0,006797	0,390000	0,063528
0,150000	0,010238	0,400000	0,066410
0,160000	0,011580	0,410000	0,069343
0,170000	0,012996	0,420000	0,072326
0,180000	0,014486	0,430000	0,075357
0,190000	0,016047	0,440000	0,078436
0,200000	0,017678	0,450000	0,081564
0,210000	0,019380	0,460000	0,084738
0,220000	0,021149	0,470000	0,087958
0,230000	0,022986	0,480000	0,091224
0,240000	0,024889	0,490000	0,094535
0,250000	0,026856	0,500000	0,097890
0,510000	0,097890	0,760000	0,194686
0,520000	0,101290	0,770000	0,199021
0,530000	0,104732	0,780000	0,203387
0,540000	0,108218	0,790000	0,207784
0,550000	0,111745	0,800000	0,212213

2

3

A-II-3-17

$ s $	$f_2(s)$	$ s $	$f_2(s)$
0,560000	0,115314	0,810000	0,216673
0,570000	0,118924	0,820000	0,221164
0,580000	0,122585	0,830000	0,225684
0,590000	0,126266	0,840000	0,230234
0,600000	0,129996	0,850000	0,234814
0,610000	0,133766	0,860000	0,239424
0,620000	0,137574	0,870000	0,244062
0,630000	0,141420	0,880000	0,248728
0,640000	0,145304	0,890000	0,253423
0,650000	0,149225	0,900000	0,258146
0,660000	0,153182	0,910000	0,262897
0,670000	0,157176	0,920000	0,267675
0,680000	0,161206	0,930000	0,272480
0,690000	0,165072	0,940000	0,277312
0,700000	0,169372	0,950000	0,282171
0,710000	0,173507	0,960000	0,287056
0,720000	0,177676	0,970000	0,291967
0,730000	0,181879	0,980000	0,296903
0,740000	0,186115	0,990000	0,301865
0,750000	0,190384	1,000000	0,306853

Tabela Nr.3

$$s_j - \ln(1 + |s_j|) = -|s_{j+1}| - \ln(1 - |s_{j+1}|)$$

$ s_j $	$ s_{j+1} $
0,03100	0,03034
0,04400	0,04273
0,09700	0,09110
0,13400	0,12300
0,18800	0,16704
0,25600	0,21730
0,30800	0,25538
0,34800	0,28224
0,38400	0,30540
0,452000	0,34678
0,50500	0,37700

A-II-3-18

$ \xi_j $	$ \xi_{j+1} $
0,55000	0,40138
0,59000	0,42212
0,62000	0,43712
0,65000	0,45168
0,70000	0,47501
0,77000	0,50580
0,84500	0,53655
0,95000	0,57842
0,99500	0,59190

A-II-4-1

A.- INCHIDERE TOTALA RAPIDA . CASTELE SIMPLE

II.- Problema nivelurilor extreme& 4.- Relații aproximative

În prezentul paragraf se dau câteva relații aproximative care să permită determinarea analitică rapidă și suficient de exactă a nivelurilor extreme. În literatura de specialitate se cunosc câteva astfel de formule privind calculul primului nivel extrem și a celui de al doilea nivel extrem, din care se vor cita cele mai cunoscute :
relația empirică lui Vogt :

$$\frac{x_1}{x_0} = \sqrt{\varepsilon + \left(\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^2} - \frac{1+2\varepsilon}{2+3\varepsilon} ; \quad \varepsilon = \frac{Lf}{gF} \frac{\omega_0^2}{x_0^2} \quad (4-1)$$

relația lui Calame și Gaden :

$$x_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{Lf}{gF}} \left(1 - \frac{2}{3} p_0 + \frac{1}{9} p_0^2\right) ; \quad x_2 = -\omega_0 \sqrt{\frac{Lf}{gF}} (1 - 2p_0) \quad (4-2)$$

În cursul acestui paragraf vor fi comparate rezultatele formulelor aproximative propuse atât cu formulele aproximative Vogt și Calame și Gaden cât și cu soluția exactă, calculată prin rezolvarea ecuației obținută la paragraful anterior, formulându-se și concluziile care se impun din această comparație. De asemenea se vor da și relații noi.

Pentru sistematizarea expunerii, relațiile aproximative vor fi obținute în cadrul unor subpuncte, notate a, b, c, d.

a.) Pentru început să găsim o relație aproximativă între pozițiile a două niveluri extreme notate S_j și S_{j+1} ($j=1,2,3,\dots$)

A-II-4-2

Deoarece ξ_j nu este un nivel extrem, relația este valabilă cu începere de la primul nivel extrem ξ_1 .

Pentru aceasta vom face apel la relația exactă între aceste două niveluri, obținută la paragraful anterior printr-o primă integrare a ecuației oscilațiilor :

$$\frac{e^{|\xi_j|}}{1+|\xi_j|} = \frac{e^{-|\xi_{j+1}|}}{1-|\xi_{j+1}|} \quad (4-3)$$

Pentru a obține relația căutată, se dezvoltă la început în serie exponențialele :

$$e^{|\xi_j|} = 1 + |\xi_j| + \frac{|\xi_j|^2}{2!} + \frac{|\xi_j|^3}{3!} + \frac{|\xi_j|^4}{4!} + \frac{|\xi_j|^5}{5!} + \frac{|\xi_j|^6}{6!} + \dots \quad (4-4)$$

$$e^{-|\xi_{j+1}|} = 1 - |\xi_{j+1}| + \frac{|\xi_{j+1}|^2}{2!} - \frac{|\xi_{j+1}|^3}{3!} + \frac{|\xi_{j+1}|^4}{4!} - \frac{|\xi_{j+1}|^5}{5!} + \frac{|\xi_{j+1}|^6}{6!} + \dots$$

Se înlocuiește (4-4) în (4-3), efectuându-se produsul mezilor și al extremilor :

$$1 + \frac{|\xi_j|^2}{2} \frac{1 + \frac{|\xi_j|}{3} + \frac{|\xi_j|^2}{12} + \frac{|\xi_j|^3}{60} + \frac{|\xi_j|^4}{360} + \dots}{1 + |\xi_j|} = 1 + \frac{|\xi_{j+1}|}{2} \frac{1 - \frac{|\xi_{j+1}|}{3} + \frac{|\xi_{j+1}|^2}{12} - \frac{|\xi_{j+1}|^3}{60} + \frac{|\xi_{j+1}|^4}{360} + \dots}{1 - |\xi_{j+1}|} \quad (4-5)$$

Deoarece $|\xi_j|, |\xi_{j+1}| < 1$, rezultă că seriile (4-4) sînt rapid convergente.

[1-D], [5-L]

În lucrările ~~/8/~~, ~~/32/~~ se folosește această metodă a dezvoltării în serie pentru studiul oscilațiilor mecanice, însă deoarece acolo se păstrează forma dimensională, în care variabila dimensională poate lua valori supraunitare mari, seriile sînt mai lent convergente de aceea și rezultatele sînt mai puțin precise decît în cazul de față. La castelele de echilibru obișnuite se obțin în cazurile uzuale valori $|\xi_j|, |\xi_{j+1}| < 0,4$.

Se observă că pentru $|\xi_{j+1}| \rightarrow 1$, fracția din membrul drept

A-II-4-3

al relației (4-5) $\rightarrow \infty$, valoarea $|\xi_{j+1}| = 1$ constituind deci o singularitate pentru membrul drept al ecuației (4-5). Evident, în apropierea acestui punct seria respectivă este destul de slab convergentă. De aceea este rațional a căuta să se ocolească această singularitate, înlocuind seria respectivă cu o alta, avînd o convergență mai rapidă. Pentru aceasta se notează fracțiile :

$$F_-(|\xi_{j+1}|) = \frac{1 - |\xi_{j+1}|}{1 - \frac{|\xi_{j+1}|}{3} + \frac{|\xi_{j+1}|^2}{12} - \frac{|\xi_{j+1}|^3}{60} + \frac{|\xi_{j+1}|^4}{360} + \dots} \quad (4-6)$$

$$F_+(|\xi_j|) = \frac{1 + |\xi_j|}{1 + \frac{|\xi_j|}{3} + \frac{|\xi_j|^2}{12} + \frac{|\xi_j|^3}{60} + \frac{|\xi_j|^4}{360} + \dots}$$

Trecînd la limită pentru valorile variabilelor care tind la zero se obține :

$$\lim_{|\xi_{j+1}| \rightarrow 0} F_-(|\xi_{j+1}|) = 1 \quad (4-7)$$

$$\lim_{|\xi_j| \rightarrow 0} F_+(|\xi_j|) = 1$$

deci valoarea zero nu conduce la o creștere nemărginită a fracțiilor.

Folosind metoda identificării coeficienților, adică scriind :

$$F(|\xi|) = a + b|\xi| + c|\xi|^2 + d|\xi|^3 + \dots \quad (4-8)$$

și identificînd (4-8) succesiv cu cele două relații din (4-6) se obțin valorile coeficienților nedeterminați și în final :

$$F_-(|\xi_{j+1}|) = 1 - \frac{2}{3} |\xi_{j+1}| - \frac{11}{36} |\xi_{j+1}|^2 - \frac{4}{135} |\xi_{j+1}|^3 + \frac{11}{6480} |\xi_{j+1}|^4 + \dots \quad (4-9)$$

$$F_+(|\xi_j|) = 1 + \frac{2}{3} |\xi_j| - \frac{11}{36} |\xi_j|^2 + \frac{4}{135} |\xi_j|^3 - \frac{11}{6480} |\xi_j|^4 + \dots$$

Introducînd expresiile (4-9) în ecuația (4-5), aceasta din urmă devine :

$$\frac{|\xi_j|^2}{1 + \frac{2}{3} |\xi_j| - \frac{11}{36} |\xi_j|^2 + \frac{4}{135} |\xi_j|^3 - \frac{11}{6480} |\xi_j|^4 + \dots} = \frac{|\xi_{j+1}|^2}{1 - \frac{2}{3} |\xi_{j+1}| - \frac{11}{36} |\xi_{j+1}|^2 - \frac{4}{135} |\xi_{j+1}|^3 + \frac{11}{6480} |\xi_{j+1}|^4 + \dots} \quad (4-10)$$

Se face în proporția (4-10) produsul mezilor și al extremilor. După reducerea termenilor asemenea și reținerea doar a termenilor de grad mai mic ca șapte, se obține :

$$\begin{aligned} |\xi_j|^2 - \frac{2}{3} |\xi_j|^2 |\xi_{j+1}| - \frac{4}{135} |\xi_j|^2 |\xi_{j+1}|^3 + \frac{11}{6480} |\xi_j|^2 |\xi_{j+1}|^4 &= \\ = |\xi_{j+1}|^2 + \frac{2}{3} |\xi_{j+1}|^2 |\xi_j| + \frac{4}{135} |\xi_{j+1}|^2 |\xi_j|^3 + \frac{11}{6480} |\xi_{j+1}|^2 |\xi_j|^4 & \end{aligned} \quad (4-11)$$

Avînd în vedere că, în orice caz $|\xi_j|, |\xi_{j+1}| < 1$ se observă că eroarea făcută este neglijabilă, chiar pentru probleme științifice ; cu atît mai mult eroarea este neglijabilă într-o problemă tehnică cum este cea de față.

În relația (4-11), trecînd toți termenii în primul membru și descompunînd în factori :

$$(|\xi_j| + |\xi_{j+1}|) \left[|\xi_j| - |\xi_{j+1}| - \frac{2}{3} |\xi_j| |\xi_{j+1}| - \frac{4}{135} |\xi_j|^2 |\xi_{j+1}|^2 - \frac{11}{6480} (|\xi_j| - |\xi_{j+1}|) |\xi_j|^2 |\xi_{j+1}|^2 \right] = \quad (4-12)$$

Deoarece primul factor nu se poate anula la nici un moment

A-II-4-5

finit se obține următoarea ecuație între două niveluri succesive extreme, ecuație în care $|S_j|$ se consideră cunoscut și $|S_{j+1}|$ se consideră necunoscut :

$$\frac{11}{6480} |S_{j+1}|^3 - \left(\frac{4}{135} + \frac{11}{6480} |S_j| \right) |S_{j+1}|^2 - \frac{1 + \frac{2}{3} |S_j|}{|S_j|^2} |S_{j+1}| + \frac{1}{|S_j|} = 0 \quad (4-13)$$

Într-o primă aproximație, se vor neglija primii doi termeni în ecuația de mai sus, care sînt în valoare absolută mult mai mici decît termenii păstrați (sub 1 %).

În acest fel se obține următoarea relație extrem de simplă între două elongații extreme succesive : [9-A]

$$\boxed{|S_{j+1}| \approx \frac{|S_j|}{1 + \frac{2}{3} |S_j|}} \quad (4-14)$$

sau

$$\boxed{\left| \frac{S_{j+1}}{S_j} \right| = - \frac{S_{j+1}}{S_j} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} |S_j|} = 1 - \frac{2}{3} \frac{|S_j|}{1 + \frac{2}{3} |S_j|}} \quad (4-15)$$

Pe baza relației (4-14) s-a construit tabelul Nr.1(4) și s-a ridicat graficul Nr.1(). Pe același grafic s-a reprezentat și relația exactă între $|S_{j+1}|$ și $|S_j|$, obținută la paragraful anterior. Se observă o suprapunere aproape perfectă a celor două curbe

În tabelul Nr.1(5) sînt date valorile raportului $\left| \frac{S_{j+1}}{S_j} \right|$ iar în graficul Nr.2() este redată reprezentarea grafică a variației acestui raport.

Se observă că amortizarea oscilațiilor, caracterizată prin raportul $\left| \frac{S_{j+1}}{S_j} \right|^*$ este mai puternică la valori mari ale lui raportul tinzînd la unu (lichid perfect) atunci cînd $|S_j| \rightarrow 0$ (regim hidrostatic), ceea ce este în concordanță cu fizica fenomenului, * în teoria oscilațiilor mecanice logaritmul acestui raport poartă numele de decrement logaritmice —

A-II-4-6

în regim hidrostatic apa comportându-se ca un lichid perfect.

Față de relația (4-14), relația (4-15) permite o reprezentare grafică avantajoasă deoarece intervalul care variază $\left| \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \right|$ este mai mic decât intervalul în care variază $|\xi_j|$.

O relație care să conducă la erori și mai mici se obține dacă termenii de gradul doi și trei în $|\xi_{j+1}|$ din ecuația (4-13) se înlocuiesc cu valorile lor date de (4-14). Se obține atunci în locul ecuației (4-13) ecuația :

$$\frac{11}{6480} \frac{|\xi_j|^3}{(1 + \frac{2}{3} |\xi_j|)} - \left(\frac{4}{135} + \frac{11}{6480} |\xi_j| \right) \frac{|\xi_j|^2}{(1 + \frac{2}{3} |\xi_j|)^2} - \frac{1 + \frac{2}{3} |\xi_j|}{|\xi_j|^2} |\xi_{j+1}| + \frac{1}{|\xi_j|} = 0 \quad (4-16)$$

Explicitînd $|\xi_{j+1}|$ din ecuația de mai sus se obține :

$$|\xi_{j+1}| = \frac{\xi_j}{1 + \frac{2}{3} |\xi_j|} - \left[\frac{|\xi_j|}{1 + \frac{2}{3} |\xi_j|} \right]^4 \frac{96 + 64 |\xi_j| + \frac{11}{3} |\xi_j|^2}{3240} \quad (4-17)$$

Din relația (4-17) se vede clar că influența termenilor neglijați în relația (4-14) este în orice caz de sub 0,001 din cei păstrați.

Din această cauză se poate afirma că relația (4-14) este suficient de exactă pentru scopuri tehnice, ea avînd și marele avantaj al simplității, cu alte cuvinte sporul de precizie adus de formula (4-17) față de formula (4-14) nu justifică forma mai complicată.

Să analizăm și eroarea făcută prin păstrarea în fracțiile

$F_+(|\xi_j|)$ și $F_-(|\xi_{j+1}|)$ numai a unui număr finit de termeni.

Pentru determinarea acestei erori, se observă că există relația :

$$\frac{e^{-|\xi_{j+1}|}}{1 - |\xi_{j+1}|} = 1 + \frac{|\xi_{j+1}|^2}{2} \frac{1}{F_-(|\xi_{j+1}|)} \quad (4-18)$$

A-II-4-7

în care în $\bar{F}_-(|\xi_{j+1}|)$ au fost menținuți o infinitate de termeni.

Din relația de mai sus se poate explicita $\bar{F}_-(|\xi_{j+1}|)$:

$$\bar{F}_-(|\xi_{j+1}|) = \frac{|\xi_{j+1}|^2(1-|\xi_{j+1}|)}{2(e^{-|\xi_{j+1}|} - 1 + |\xi_{j+1}|)} \quad (4-19)$$

Analog și relația :

$$\frac{e^{|\xi_j|}}{1+|\xi_j|} = 1 + \frac{|\xi_j|^2}{2} \frac{1}{F_+(|\xi_j|)} \quad (4-20)$$

în care în $F_+(|\xi_j|)$ au fost menținuți o infinitate de termeni.

Din relația de mai sus se poate explicita $F_+(|\xi_j|)$:

$$F_+(|\xi_j|) = \frac{|\xi_j|^2(1+|\xi_j|)}{2(e^{|\xi_j|} - 1 - |\xi_j|)} \quad (4-21)$$

Evident eroarea făcută, este cu atît mai mare cu cît valoarea argumentelor este mai mare. Se va considera cazul unor valori exagerat mari, luîndu-se pentru $|\xi_j|$, $|\xi_{j+1}|$ valoarea 0,5, respectiv 0,4. Eroarea absolută făcută în cazul lui $F_+(|\xi_j|)$ prin considerarea numai a unui număr finit de termeni este atunci :

$$E_+(|\xi_j|=0,5) = F_+(0,5) - \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{11}{36} \cdot 0,25 + \frac{4}{135} \cdot 0,125 + \frac{11}{6480} \cdot 0,0625\right) = -0,069542 \quad (4-22)$$

Această eroare introdusă de păstrarea unui număr finit de termeni, conduce la următoarea eroare absolută a termenului în care apare

$F_+(|\xi_j|)$:

$$E_t^+ = 1 + \frac{|\xi_j|}{2} \frac{1}{F_+(|\xi_j|)} - \left[1 + \frac{|\xi_j|}{2} \frac{1}{\tilde{F}_+(|\xi_j|)} \right] = 0,005177 \quad (4-23)$$

A-II-4-8

în care s-a notat cu $\tilde{F}_+(|S_j|)$ valoarea aproximativă corespunzătoare unui număr finit de termeni.

Eroarea relativă a termenului introdusă de această aproximație este de :

$$\varepsilon_t^+ = \frac{E_t^+}{1 + \frac{|S_j|^2}{2} \frac{1}{F_+(|S_j|)}} = 0,00471 \quad (4-24)$$

Pentru eroarea introdusă prin considerarea unui număr finit de termeni în cazul seriei $F_-(|S_{j+1}|)$ se obține următoarea evaluare :

$$E_-(|S_{j+1}|=0,4) = F_-(0,4) - \left(1 - \frac{2}{3} \cdot 0,4 - \frac{11}{36} \cdot 0,16 - \frac{4}{135} \cdot 0,064 + \frac{11}{6480} \cdot 0,0256\right) = 0,000002 \quad (4-25)$$

Eroarea absolută a termenului în care apare $F_-(|S_{j+1}|)$, generată de păstrarea unui număr finit de termeni în seria $F_-(|S_{j+1}|)$ este de :

$$E_t^-(|S_{j+1}|) = 1 + \frac{|S_{j+1}|^2}{2} \frac{1}{F_-(|S_{j+1}|)} - \left[1 + \frac{|S_{j+1}|^2}{2} \frac{1}{\tilde{F}_-(|S_{j+1}|)}\right] = -0,000004 \quad (4-26)$$

Eroarea relativă a termenului, introdusă de această aproximație este de :

$$\varepsilon_t^- = \frac{E_t^-}{1 + \frac{|S_{j+1}|^2}{2} \frac{1}{F_-(|S_{j+1}|)}} = 0,000034 \quad (4-27)$$

Se observă că suma celor două erori relative, conduce la următoarea majorare a erorii totale relative :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^+ + \varepsilon_t^- < 0,5\% \quad (4-28)$$

Această majorare a erorii relative totale este considerată ca foarte bună pentru relațiile folosite în hidraulică în general

A-II-4-9

și în domeniul castelelor de echilibru în special.

b.) Acest punct are drept scop obținerea unei formule care să permită calculul direct al extremului de ordinul j , ξ_j , dacă este cunoscut primul extrem ξ_1 .

Este cunoscut faptul că formulele date în literatură nu permit calculul direct al unui nivel extrem ξ_j , decît dacă este cunoscută valoarea nivelului extrem anterior ξ_{j-1} . Aceasta face ca atunci cînd se urmărește calculul unui nivel extrem ξ_j , să fie necesar calculul succesiv al tuturor celor $j-1$ nivele extreme anterioare.

În prezenta lucrare se va da o formulă care să evite necesitatea calculului tuturor nivelurilor extreme intermediare și să permită calculul direct al nivelului ξ_j dacă se cunoaște nivelul maxim ξ_1 sau eventual un alt nivel extrem, de indice $k < j$ notat ξ_k , anterior nivelului ξ_j pe care dorim a-l calcula.

Se va analiza cazul în care se cunoaște nivelul ξ_1 , generalizarea la celălalt caz este evidentă.

Pentru aceasta, reluăm relația care leagă două nivele succesive și o punem sub forma :

$$|\xi_j| = \frac{|\xi_{j-1}|}{1 + \frac{2}{3} |\xi_{j-1}|} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{|\xi_{j-1}|}} \quad (4-29)$$

În relația de mai sus se poate înlocui $|\xi_{j-1}|$ în funcție de $|\xi_{j-2}|$ și astfel :

$$|\xi_j| = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{|\xi_{j-2}|}}} \quad (4-30)$$

A-II-4-10

Continuând în același mod, după un număr finit de înlocuiri se obține fracția :

$$|\xi_j| = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3} + \dots + \frac{1}{\frac{2}{3} + |\xi_1|}}}} \quad (4-31)$$

Să demonstrăm prin metoda inducției complete că relația (4-28) poate fi pusă sub forma mai simplă :

$$|\xi_j| = \frac{|\xi_1|}{1 + \frac{2(j-1)}{3} |\xi_1|} = \frac{\xi_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} \xi_1} \quad (4-32)$$

Tinând cont de faptul că $\xi_{2p} < 0$ și $\xi_{2p+1} > 0$, relația de mai sus poate fi scrisă și sub următoarea formă convenabilă :

$$\xi_j = (-1)^{j-1} \frac{\xi_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} \xi_1} \quad ; \quad j \geq 1 \quad (4-33)$$

Prima etapă în aplicarea metodei inducției complete este etapa de verificare.

Intr-adevăr, făcînd în relația (4-33) se obține egalitatea banală $\xi_1 = \xi_1$. Pentru $j=2$, se obține :

$$\xi_2 = \frac{-\xi_1}{1 + \frac{2}{3} \xi_1} \quad (4-34)$$

care este chiar relația (4-29) dintre două extreme succesive, particularizată pentru valoarea $j=2$.

Deci relația (4-33) se verifică pentru valorile inițiale $j=1$

și $j=2$.

In continuare urmează etapa de inducție propriu zisă. Se presupune relația satisfăcută pentru j (4-33) și trebuiește demonstrat că, în această ipoteză, relația este valabilă și pentru $j+1$ adică :

$$\xi_{j+1} = (-1)^j \frac{\xi_1}{1 + \frac{2j}{3} \xi_1} \quad (4-35)$$

Intr-adevăr, conform relației care leagă două nivele succesive :

$$|\xi_{j+1}| = \frac{|\xi_j|}{1 + \frac{2}{3} |\xi_j|} = \frac{\frac{\xi_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} \xi_1}}{1 + \frac{2}{3} \frac{\xi_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} \xi_1}} = \frac{\xi_1}{1 + \frac{2j}{3} \xi_1} \quad (4-36)$$

Tinând cont că semnele sînt astfel încît satisfac relația :

$$|\xi_{j+1}| = (-1)^j \xi_{j+1} \quad (4-37)$$

rezultă imediat din relația (4-36), relația (4-35) care trebuia demonstrată.

In literatură este cunoscută și recomandată relația Calame și Gaden ^{[1-c], [1-J], [2-M]} /10/, /11/, /12/, relație de asemenea aproximativă, care dă valoarea primului minim după primul maxim, notat ca și în prezenta lucrare cu z_2 :

$$z_2 = v_0 \sqrt{\frac{L_f}{gF}} (-1 + 2p_0) = v_0 \sqrt{\frac{LF}{gf}} (-1 + 2p_0) \quad (4-38)$$

in care parametrul adimensional p_0 are expresia :

A-II-4-12

$$p_0 = \frac{F \omega_0^2}{\omega_0 \sqrt{\frac{L_f}{gF}}} = \frac{-\alpha_0}{v_0 \sqrt{\frac{L_f}{gF}}} \quad (4-39)$$

Tinînd cont de relațiile care există între parametrii adimensionali ai lui Calame și Gaden și parametrii adimensionali utilizați în prezenta lucrare :

$$p_0 = - \frac{\alpha_0}{Z_*} \frac{Z_*}{\omega_0 \sqrt{\frac{L_f}{gF}}} = \frac{-\xi_0}{\sqrt{-2\xi_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{-2\xi_0} \quad (4-40)$$

$$\frac{\omega_0}{Z_*} \sqrt{\frac{L_f}{gF}} = \omega_0 \frac{k_f}{LF} \sqrt{\frac{L_f}{gF}} = \frac{\omega_0 k_f}{F} \sqrt{\frac{f}{gLF}} = \sqrt{-2\xi_0}$$

formula Calame și Gaden (4-38) devine :

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2}{Z_*} = \sqrt{-2\xi_0} (-1 + \sqrt{-2\xi_0}) \quad (4-41)$$

În tabelul Nr.3(6) și în reprezentarea grafică Nr.3() se dau date comparative privind determinarea primului nivel minim după primul maxim, atât prin folosirea ecuațiilor exacte de la capitolul I, cât și utilizînd formulele (4-41) Calame și Gaden și (4-34) propusă de autor.

c.) În cadrul prezentului punct se pune problema stabilirii unei formule aproximative de calcul a lui ξ_1 în funcție de parametrul pierderii inițiale de energie ξ_0 .

Această problemă a fost pusă în special datorită următoarelor două considerente :

- formulele stabilite la punctul anterior permit calculul direct al oricărui nivel extrem, în funcție de primul nivel extrem ξ_1 . Este deci firesc a se da și o formulă care să permită cal-

A-II-4-13

culul rapid al acestui prim nivel maxim ξ_1 în funcție de parametrul inițial ξ_0 .

- formula cea mai folosită în literatură, datorată lui Calame și Gaden prezintă unele deficiențe care vor fi analizate în cele ce urmează.

Relația dată de Calame și Gaden este :

$$Z_{\max} = \xi_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{L_F}{gF}} \left(1 - \frac{2}{3} p_0 + \frac{1}{9} p_0^2 \right) \quad (4-39)$$

Transcrisă în variabilele adimensionale ale lucrării de față formula lui Calame și Gaden capătă forma :

$$\xi_1 = \sqrt{-2\xi_0} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{-2\xi_0} - \frac{1}{18} \xi_0 \right) \quad (4-40)$$

Se consideră și relația exactă care există între ξ_0 și ξ_1 .
relație dedusă la capitolul I :

$$\xi_0 = \xi_1 + \ln(1 - \xi_1) \quad (4-41)$$

Să cercetăm comportarea celor două relații la cele două extremități, adică pentru $\xi_0 \rightarrow 0$ și pentru $\xi_0 \rightarrow -\infty$.

Pentru aceasta vom compara limitele pe care le obținem atât pentru ξ_1 , cât și pentru primele două derivate în raport cu ξ_0 .

Pentru aceasta se vor calcula la început aceste derivate.

Relația exactă

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_0} = 1 - \frac{1}{\xi_1} \quad (4-42)$$

$$\frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} = \left(1 - \frac{1}{\xi_1} \right) \frac{1}{\xi_1^2}$$

A-II-4-14

Relația Calame și Gaden

$$\frac{d\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0} = -\frac{1}{\sqrt{-2\mathfrak{S}_0}} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{-2\mathfrak{S}_0} - \mathfrak{S}_0\right) \quad (4-43)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0^2} = \frac{1}{\sqrt{-2\mathfrak{S}_0}} \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{S}_0}\right)$$

Cercetînd acum valorile la limită se obține :

Relația exactă

$$\mathfrak{S}_0 \rightarrow 0 \implies \mathfrak{S}_1 \rightarrow 0$$

$$\frac{d\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0} \rightarrow -\infty \quad (4-44)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0^2} \rightarrow -\infty$$

$$\mathfrak{S}_0 \rightarrow -\infty \implies \mathfrak{S}_1 \rightarrow 1$$

$$\frac{d\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0} \rightarrow 0 \quad (4-45)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0^2} \rightarrow 0$$

Relația Calame și Gaden

$$\mathfrak{S}_0 \rightarrow 0 \implies \mathfrak{S}_1 \rightarrow 0$$

$$\frac{d\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0} \rightarrow -\infty \quad (4-46)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{S}_1}{d\mathfrak{S}_0^2} \rightarrow -\infty$$

A-II-4-15

$$\begin{aligned} \xi_0 \longrightarrow -\infty &\implies \xi_1 \longrightarrow \infty \\ \frac{d\xi_1}{d\xi_0} &\longrightarrow -\infty \\ \frac{d^2\xi_1}{d\xi_0^2} &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (4-47)$$

Se observă că în cazul în care $\xi_0 \rightarrow -\infty$, formula Calame și Gaden dă valori ξ_1 complet diferite de relația exactă, deci eronate, de aceea este de așteptat ca ea să dea valori cu atât mai apropiate de cele exacte cu cât ξ_0 este mai aproape de zero.

Se propune o relație aproximativă care să nu prezinte aceste dezavantaje ale formulei Calame și Gaden, de forma :

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{-2\xi_0}}{1 + \frac{1}{x}\sqrt{-2\xi_0}} \left(1 - \frac{x-1}{x^2} \frac{\sqrt{-2\xi_0}}{1 + \frac{1}{x}\sqrt{-2\xi_0}} \right) \quad (4-48)$$

$x = \text{constanta}$

Această relație, oricare ar fi valoarea constantei nedeterminate se satisface toate condițiile la limită satisfăcute de relația exactă.

Prelucrând relația (4-48) se obține :

$$\xi_1 = \sqrt{-2\xi_0} \frac{x^2 + \sqrt{-2\xi_0}}{(x + \sqrt{-2\xi_0})^2} \quad (4-49)$$

Din relația se mai sus rezultă o ecuație de gradul doi în x

$$x^2(\sqrt{-2\xi_0} - \xi_1) - 2x\xi_1\sqrt{-2\xi_0} + (-2\xi_0)(1 - \xi_1) = 0 \quad (4-50)$$

A-II-4-16

De aici pentru constanta necunoscută x :

$$x = \frac{\sqrt{-2\xi_0}}{\sqrt{-2\xi_0 - \xi_1}} \left[\xi_1 + \sqrt{\xi_1 - (1 - \xi_1)\sqrt{-2\xi_0}} \right] \quad (4-51)$$

Cu ajutorul relației (4-51) s-a construit tabelul Nr.4(7), din care se observă că valorile lui x nu sînt chiar constante, dar nici nu sînt prea împrăștiate. S-a considerat pentru x o variație de forma :

$$x = a + \frac{b}{1 + \sqrt{-2\xi_0}} \quad (4-52)$$

Coeficienții a și b s-au determinat prin metoda celor mai mici pătrate a lui Gauss.

Pentru calculul noilor constante a și b s-a construit tabelul Nr.5(8) .

Au rezultat valorile :

$$b = 2,9468 \cong 3$$

$$a = 2,9709 \cong 3$$

Cu aceste valori :

$$x \cong 3 \left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{-2\xi_0}} \right) \quad (4-53)$$

Pentru a constata calitatea relației propuse pentru parametrul x s-a calculat coeficientul de regresie r , calculele fiind trecute în tabelul Nr.6(9). S-a obținut valoarea 0,9652, ceea ce indică faptul că corelația propusă pentru x este apreciată ca foarte bună. Coeficientul de corelație r s-a calculat cu ajutorul formulelor /3-T/, /7-P/, /2-Y/, /6-I/ :

A-II-4-17

$$r = \frac{\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0)}{n G_x G_y} = \frac{\sum x_i y_i - n x_0 y_0}{n G_x G_y} \quad (4-54)$$

$$G_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_0)^2}{n-1}} \quad ; \quad G_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_0)^2}{n-1}}$$

Se obține astfel relația aproximativă :

$$\xi_1 = 1 - \frac{3}{2} \frac{(2 + \xi_0)(3 + \sqrt{2\xi_0})}{(3 + 2\sqrt{2\xi_0} - \xi_0)^2} \quad (4-55)$$

Cu ajutorul relației (4-55) s-a întocmit tabelul Nr.7(10) din care se constată că formula dă rezultate destul de apropiate de rezultatele metodei exacte.

Rezultate încă mai bune se constată că dă formula puțin modificată, care se adoptă în final :

$$\xi_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + \xi_0)(3 + \sqrt{2\xi_0})}{(3 + 2\sqrt{2\xi_0} - \xi_0)} \mathcal{H}(2,1 + \xi_0) \quad (4-56)$$

În formula de mai sus s-a utilizat funcția unitate a lui Heaveside, frecvent folosită în teoria distribuțiilor, notată cu \mathcal{H} și definită prin :

$$\mathcal{H}(2,1 + \xi_0) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 2,1 + \xi_0 \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } 2,1 + \xi_0 < 0 \end{cases} \quad (4-57)$$

La efectuarea derivatelor, se menționează că derivata funcției Heaveside este nulă.

Introducerea acestei funcții s-a făcut pentru a nu se obține

A-II-4-18

valori $\xi_1 > 1$.

Se observă că formula (4-56) acoperă bine întreg domeniul de variație a lui ξ_0 . (tabelul Nr.8(11) și graficul Nr.5 (8)).

Calculînd coeficientul de corelație (tabelul Nr.9(12)) al formulei propuse se obține valoarea $r = 0,9995$ ceea ce indică o corelație deosebit de bună. Din analiza datelor prezentate în acest punct rezultă că formula Calame și Gaden este excelentă pentru valori $|\xi_0|$ suficient de mici, însă pentru valori mari $|\xi_0|$, și valori eronate, erorile crescînd nemărginit odată cu creșterea lui $|\xi_0|$.

Formula (4-56) propusă acoperă bine tot domeniul posibil de variație al lui ξ_0 . Este adevărat că valorile uzuale ale lui

ξ_0 în cazul castelelor de echilibru utilizate în sistemele hidroenergetice se situează în domeniul în care formula Calame și Gaden dă valori bune; aceasta nu exclude însă posibilitatea ca alte amenajări cu castele de echilibru folosite în sistemele de irigații, alimentări cu apă, etc să conducă și la valori mari $|\xi_0|$ în care caz formula Calame și Gaden dă valori greșite.

Avantajele formulei propuse față de formula Calame și Gaden sînt următoarele :

- valorile funcției ξ_1 , ca și ale primelor două derivate a lui ξ_1 în raport cu ξ_0 coincid cu valorile exacte pentru cazurile limită $\xi_0 \rightarrow 0$ și $\xi_0 \rightarrow -\infty$;
- domeniul de valabilitate al formulei este mult mai mare, extinzîndu-se între $\xi_0 = 0$ și $\xi_0 = -\infty$;
- în cazurile uzual întîlnite la castelele de echilibru formula propusă dă rezultate tot atît de exacte ca și formula Calame;
- eroarea dată de formulă este de sub 1 % în cazurile uzuale, în cazurile cu totul excepționale în care $\xi_0 < -1$, eroarea maximă dată de formulă nu depășește 5 %, ea descrescînd rapid odată cu scăderea lui $|\xi_0|$.

A-II-4-19

Calcululele numerice au fost făcute folosind lucrarea ~~16/4-H/~~.

d.) Odată determinată relația care permite calculul primului maxim ξ_1 în funcție de denivelarea inițială ξ_0 a nivelului (4-56) se pot transforma relațiile care permit calculul unui nivel extrem oarecare astfel încât să se exprime un nivel oarecare nu în funcție de nivelul maxim ξ_1 ci în funcție de denivelarea inițială ξ_0 .

$$\xi_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\frac{2(j-1)}{3} + \frac{1}{\xi_1}} = \frac{(-1)^{j-1}}{\frac{2(j-1)}{3} + \frac{1}{1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + \xi_0)(3 + \sqrt{-2\xi_0})}{(3 + 2\sqrt{-2\xi_0} - \xi_0)^2} \mathcal{H}(2,1 + \xi_0)}}} \quad (4-58)$$

Relația (4-58) se poate încă prelucra, renunțându-se la funcția lui Heaveside de la numitor. Se obține :

$$\xi_j = \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{-2\xi_0} \left(9 + \frac{64}{7} \sqrt{-2\xi_0} - \frac{38}{7} \xi_0 - \frac{1}{2} \xi_0 \sqrt{-2\xi_0} \right)}{\frac{2(j-1)}{3} \sqrt{-2\xi_0} \left(9 + \frac{64}{7} \sqrt{-2\xi_0} - \frac{38}{7} \xi_0 \right) + (3 + 2\sqrt{-2\xi_0} - \xi_0)^2} \quad (4-59)$$

sau încă :

$$\xi_j = (-1)^{j-1} \frac{3 \sqrt{-2\xi_0} \left(126 + 128 \sqrt{-2\xi_0} - 76 \xi_0 - 7 \xi_0 \sqrt{-2\xi_0} \right)}{2 \left[189 + 126(j+1) \sqrt{-2\xi_0} - 2(128j+19) \xi_0 - 4(19j+2) \xi_0 \sqrt{-2\xi_0} + 7(2j+1) \xi_0^2 \right]} \quad (4-60)$$

sau încă :

$$\xi_j \approx (-1)^{j-1} \frac{3 \sqrt{-2\xi_0} \left(126 + 128 \sqrt{-2\xi_0} - 76 \xi_0 \right)}{2 \left[189 + 126(j+1) \sqrt{-2\xi_0} - 2(128j+19) \xi_0 - 4(19j+2) \xi_0 \sqrt{-2\xi_0} \right]} \quad (4-61)$$

A-II-4-20

Interesează în mod special expresia primului minim de după primul maxim ($j=2$). După calcule elementare, din (4-60)

$$\xi_2 = -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{6,3 + 2,1 \sqrt{-2\xi_0} + 3\xi_0 + \xi_0 \sqrt{-2\xi_0}}{6,3 + 12,6 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{55}{3}\xi_0 - \frac{16}{3}\xi_0 \sqrt{-2\xi_0} + \frac{7}{6}\xi_0^2} \right] \quad (4-62)$$

Renunțând la anumiți termeni se obține relația aproximativă mai simplă căutată :

$$\xi_2 = -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \sqrt{-2\xi_0} - 4\xi_0} \right] \quad (4-63)$$

Rezultatele obținute prin aplicarea relației (4-63) și compararea lor cu rezultatele obținute prin aplicarea relațiilor exacte și a formulei Calame și Gaden sînt date în tabelul Nr.10(13) și în reprezentarea grafică Nr.5(9), eroarea relativă fiind în cazurile uzuale sub 1 % și nedepășind 5 % pentru valori excepțional de mari ale parametrului $|\xi_0|$.

Aceste date confirmă aprecierile calitative anterioare privind superioritatea formulelor date în prezenta lucrare față de formulele Calame și Gaden.

Pentru calculul unui nivel extrem oarecare aplicarea formulei generale (4-61) este destul de greoaie, de aceea este de recomandat determinarea mai întîi a nivelului extrem ξ_1 și apoi aplicarea relației generale (4-33) care este mult mai simplă.

T A B E L nr.8(11)

Formula Calame si Gaden $S_1 = \sqrt{-2S_0} (1 - \frac{1}{3} \sqrt{-2S_0} - \frac{1}{18} S_0)$

$S_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + S_0)(3 + \sqrt{-2S_0})}{(3 + 2\sqrt{-2S_0} - S_0)^2}$ Relatie aproximativă propusă

Ecuația exactă $S_0 = S_1 + \ln(1 - S_1)$

$-S_0$	$\sqrt{-2S_0}$	$2,1 + S_0$	$3 + 2\sqrt{-2S_0} - S_0$	$\frac{10(2,1 + S_0)(3 + \sqrt{-2S_0})}{7(3 + 2\sqrt{-2S_0} - S_0)^2}$	$1 - \frac{1}{3}\sqrt{-2S_0} - \frac{1}{18}S_0$	S_1 (relatie propusă)	S_1 (Calame si Gaden)	S_1 (Ecuația exactă)
0,000491	0,03133	2,099509	3,06315	0,96899	0,989585	0,03101	0,03100	0,03100
0,000999	0,04466	2,099002	3,09032	0,95597	0,985168	0,04403	0,04400	0,04400
0,005032	0,10032	2,094968	3,20567	0,90292	0,966839	0,09708	0,09699	0,09700
0,009870	0,14050	2,090130	3,29087	0,86598	0,953716	0,13402	0,13400	0,13400
0,020255	0,20127	2,079745	3,42280	0,81171	0,934035	0,18809	0,18799	0,18800
0,039714	0,28183	2,060286	3,60337	0,74396	0,908263	0,25604	0,25598	0,25600
0,060169	0,34690	2,039831	3,75397	0,69208	0,887711	0,30792	0,30795	0,30800
0,079711	0,39928	2,020289	3,87827	0,65227	0,871335	0,34773	0,34791	0,34800
0,100508	0,44846	1,999492	3,99743	0,61641	0,856097	0,38359	0,38393	0,38400
0,149480	0,54677	1,950520	4,23302	0,54895	0,826047	0,45105	0,45166	0,45200
0,198198	0,62958	1,901802	4,45736	0,49633	0,801158	0,50367	0,50439	0,50500
0,248508	0,70492	1,851492	4,65835	0,45158	0,778833	0,54842	0,54901	0,55000
0,301598	0,77666	1,798402	4,85492	0,41165	0,757868	0,58835	0,58861	0,59000
0,347584	0,83377	1,752416	5,01512	0,38159	0,741387	0,61841	0,61815	0,62000
0,399822	0,89423	1,700178	5,18828	0,35157	0,724135	0,64843	0,64754	0,65000
0,503973	1,00397	1,596027	5,51191	0,30049	0,693341	0,69951	0,69609	0,70000
0,699676	1,18294	1,400324	6,06556	0,22744	0,644578	0,77256	0,76250	0,77000
1,019330	1,42782	1,080670	6,87497	0,14462	0,580689	0,85538	0,82912	0,84000
2,045732	2,02274	0,054268	9,09121	0,00471	0,439404	0,99529	0,88880	0,95000
4,303317	2,93376	0	13,17084	0,00000	0,261153	1,00000	0,76616	0,99500

A H T A

TABEL Nr. 9(12)

Calculul coeficientului de regresie $r = \frac{\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sqrt{\sum (x_i - x_0)^2} \sqrt{\sum (y_i - y_0)^2}} = \frac{1,694776977}{1,695562142} = 0,9995$

$$x_i = \frac{10}{7} \frac{(2,1 + 5)(3 + 2\sqrt{-23})}{(3 + 2\sqrt{-23} - 5)^2} \quad \sum x_i = \frac{10,52922}{20} = 0,52646; \quad x_0 = \frac{10}{20} = 0,5; \quad \sum (x_i - x_0)^2 = 1,7247667360; \quad \sqrt{\sum (x_i - x_0)^2} = 1,313304$$

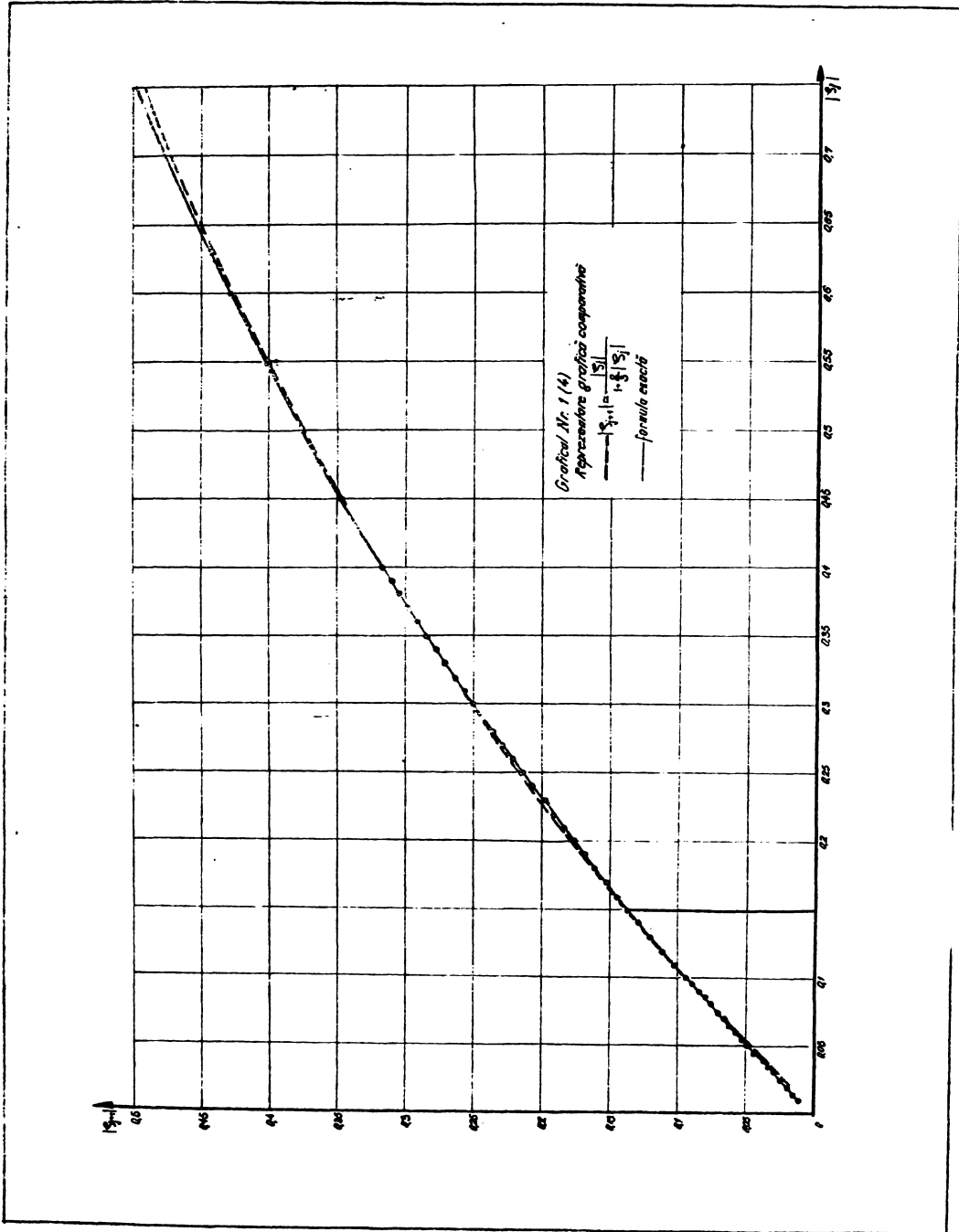
$$y_i = S_i \quad (\text{dat de ecuația exactă}); \quad y_0 = \frac{\sum y_i}{10} = \frac{9,41700}{20} = 0,47085; \quad \sum (y_i - y_0)^2 = 1,6668505500; \quad \sqrt{\sum (y_i - y_0)^2} = 1,291066$$

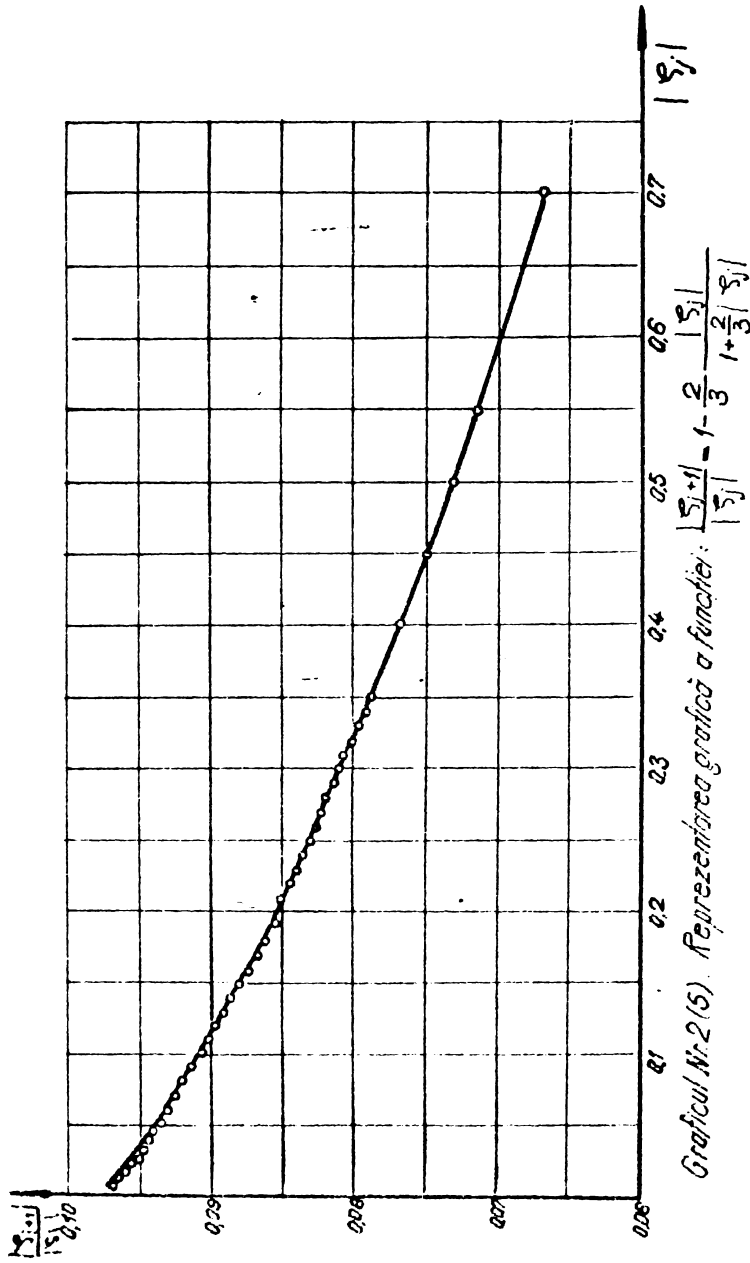
$$\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0) = 1,6947769770$$

A-H-4-33

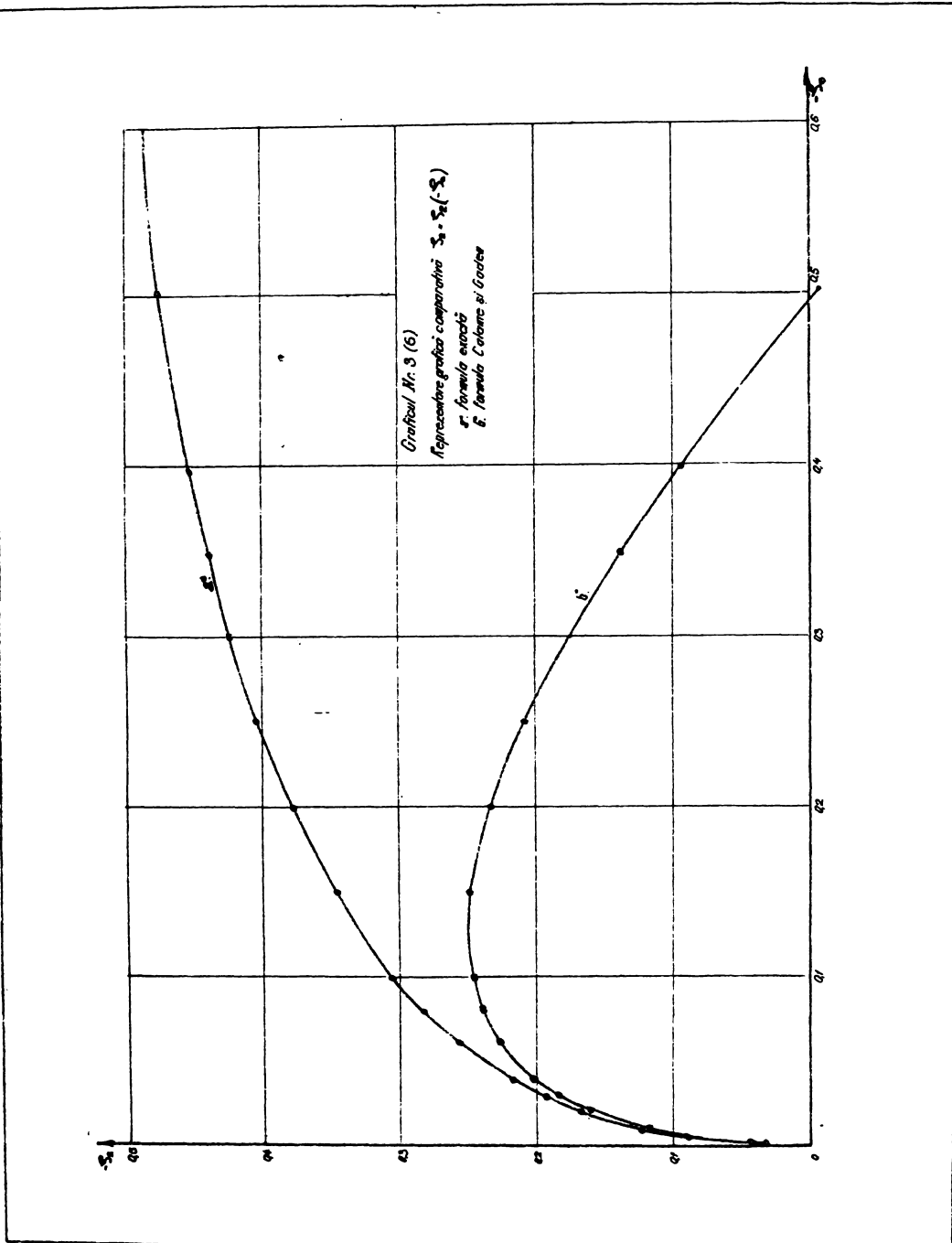
x_i	$x_i - x_0$	$(x_i - x_0)^2$	y_i	$y_i - y_0$	$(y_i - y_0)^2$	$(x_i - x_0)(y_i - y_0)$
0,96899	0,44253	0,1958328009	0,03100	0,43985	0,1934680225	0,1946468205
0,95597	0,42951	0,1844788401	0,04400	0,42685	0,1822009225	0,1833363435
0,90292	0,37646	0,1417221316	0,09700	0,37385	0,1397638225	0,1407395710
0,86598	0,33952	0,1152738304	0,13400	0,33685	0,1134679225	0,1143673120
0,81171	0,28525	0,0813675625	0,18800	0,28285	0,0800041225	0,0806829625
0,74396	0,21750	0,0473062500	0,25600	0,21485	0,0461605225	0,0467298750
0,69208	0,16562	0,0274299844	0,30800	0,16285	0,0265201225	0,0269712170
0,65227	0,12581	0,0158281561	0,34800	0,12285	0,0150921225	0,0154557585
0,61641	0,08995	0,0080910025	0,38400	0,08685	0,0075429225	0,0078121575
0,54895	0,02249	0,0005058001	0,45200	0,01885	0,0003553225	0,0004239365
0,49633	-0,03013	0,0009078169	0,50500	-0,03415	0,0011662225	0,0010289395
0,45158	-0,07488	0,0056070144	0,55000	-0,07915	0,0062647225	0,0059267520
0,41165	-0,11481	0,0131813361	0,59000	-0,11915	0,0141967225	0,0136796115
0,38159	-0,14487	0,0209873169	0,62000	-0,14915	0,0222457225	0,0216073605
0,35157	-0,17489	0,0305865121	0,65000	-0,17915	0,0320947225	0,0313315435
0,30049	-0,22597	0,0510624409	0,70000	-0,22915	0,0525098225	0,0517810255
0,22744	-0,29902	0,0894129604	0,77000	-0,29915	0,0894907225	0,0894518330
0,14462	-0,38184	0,1458017856	0,84500	-0,37415	0,1399882225	0,1428634360
0,00471	-0,52175	0,2722230625	0,95000	-0,47915	0,2295847225	0,2499965125
0,00000	-0,52646	0,2771601316	0,99500	-0,52415	0,2747332225	0,2759440090

A-11-4-36

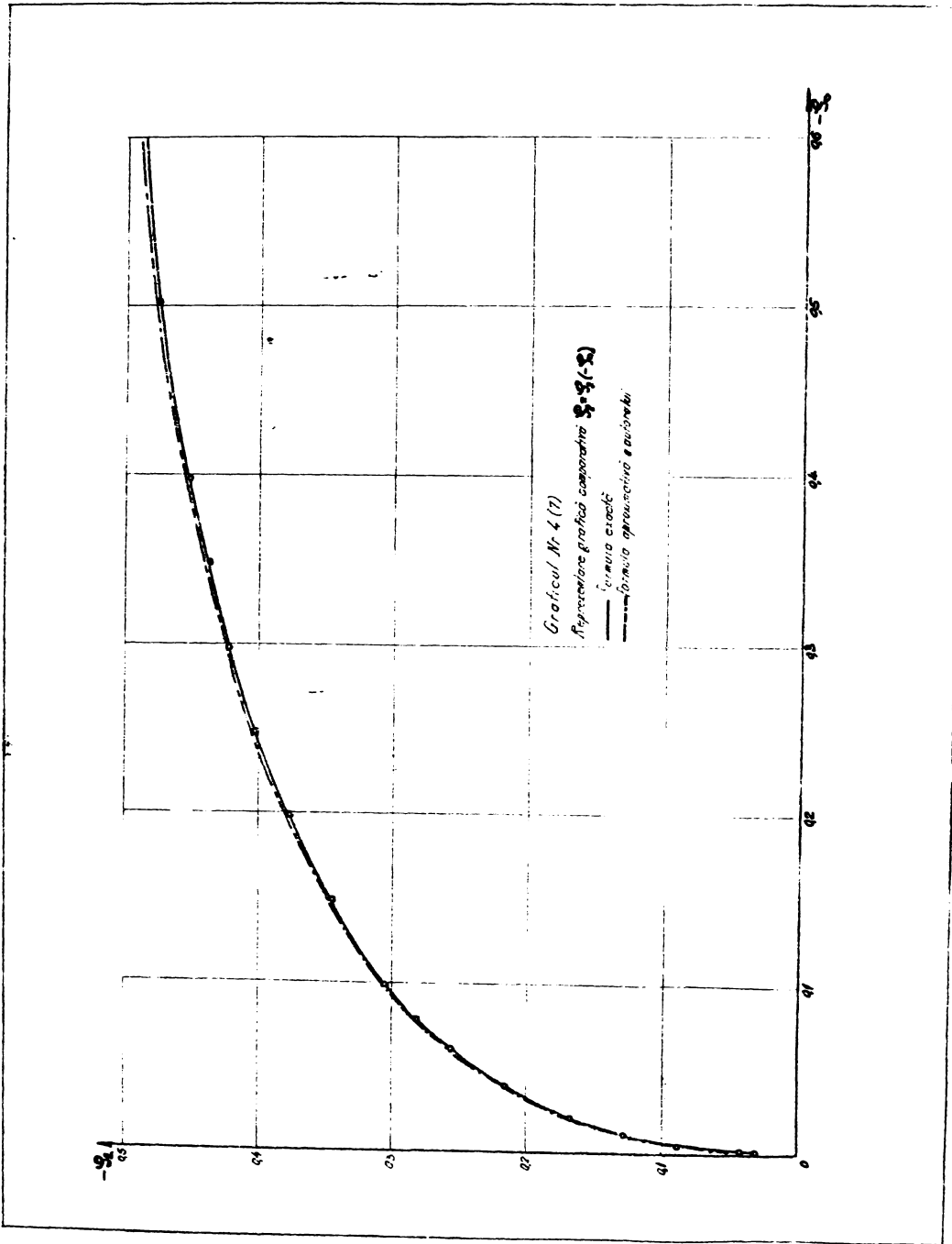




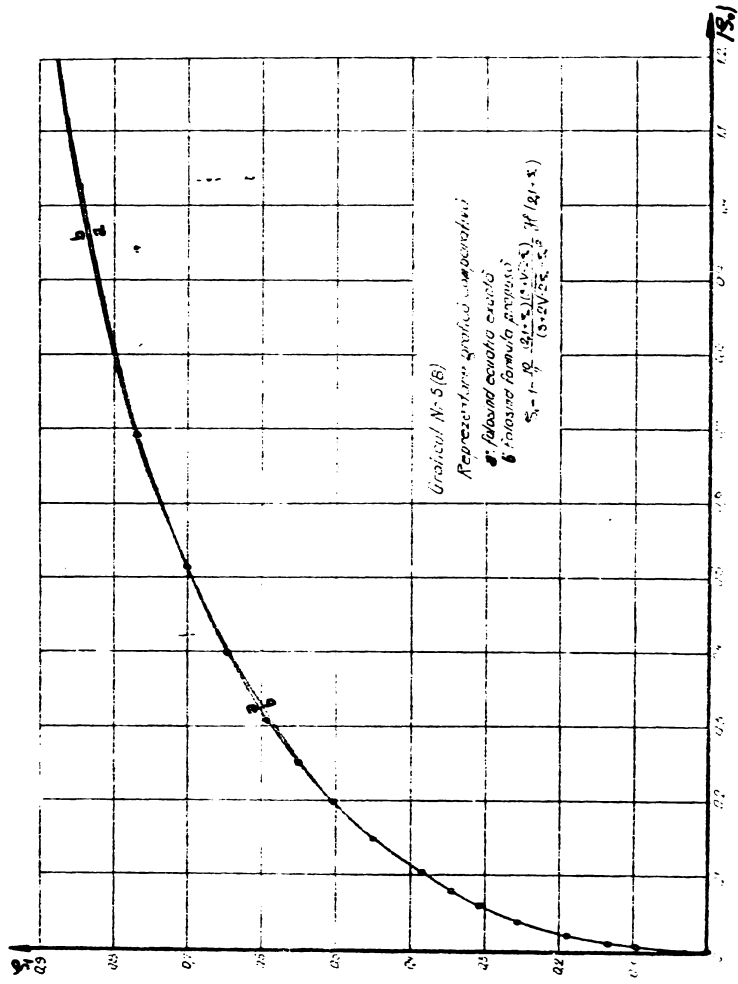
A-II-4-38



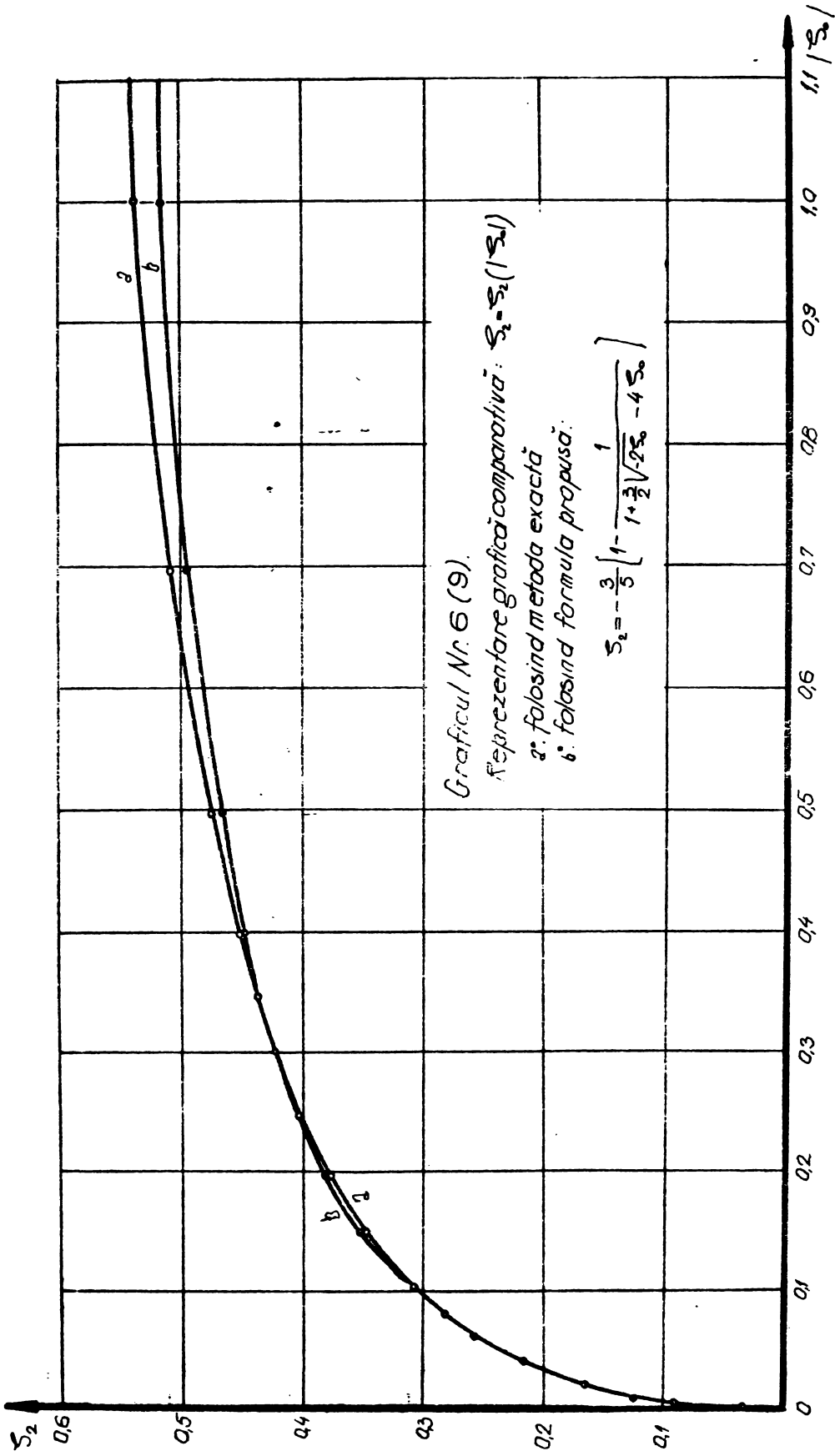
A-I-4-39



A-II-4-40



INSTITUTUL POLITEHNIC
TIMISOARA
BIBLIOTECA CENTRALA



& 5.- Utilizarea metodei de aproximație Krilov-Bogoliubov

Această metodă își are originea în lucrările lui J.L.La-grange. Ea a fost dezvoltată apoi pe larg de către van der Pol /6-7/. În stadiul inițial metoda a fost folosită pe baze intuitive, fără a avea un suport teoretic. Acest suport îl constituie lucrările lui Krilov și Bogoliubov din anul 1937, care au rezolvat problema domeniului de valabilitate a metodei și problema aproximațiilor de ordin superior /8-4/.

Metoda de aproximație Krilov-Bogoliubov este aplicabilă cu bune rezultate chiar în cazul unei amortizări tari, cu condiția ca elongația și viteza inițială a mișcării să fie suficient de mici, eroarea făcută în determinarea a două elongații extreme consecutive fiind sub 2 %.

Se va expune pe scurt metoda sub formă generală și apoi se va utiliza metoda pentru rezolvarea ecuației oscilațiilor în castele de echilibru la închiderea totală.

Se consideră ecuația generală de tipul :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon [f_1(\dot{x}) + \gamma_1(x)] \quad (5-1)$$

în care ε este un parametru care caracterizează amortizarea, relativ mic.

Se caută soluția ecuației sub formă armonică :

$$x = a(t) \cos [\omega t + \varphi(t)] = a(t) \cos \alpha(t) \quad (5-2)$$

Se cere în plus ca oscilațiile să fie astfel încât amplitudinea a și faza φ să fie funcții de timp cu variație lentă, proporționale cu parametrul mic ε și definite de ecuațiile cu

A-II-5-2

variabile separabile :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \varepsilon B(a)\end{aligned}\quad (5-3)$$

Se caută soluția ecuației (5-1) sub forma :

$$x = a \cos \alpha + \varepsilon u_1(a, \alpha) + \varepsilon^2 u_2(a, \alpha) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \alpha) \quad (5-4)$$

în care $u_j(a, \alpha)$ sînt funcții periodice de α cu perioada 2π iar a și α ca funcții de t satisfac ecuațiile diferențiale cu variabile separabile :

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a) \quad (5-5)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a)$$

Se determină acum funcțiile $u_j(a, \alpha)$, $A_j(a)$, $B_j(a)$, $j = 1, 2, \dots, m$ astfel încît ecuația diferențială (5-1) să fie satisfăcută cu o aproximație de ordinul $O(\varepsilon^{m+1})$.

Determinarea acestor funcții nu comportă dificultăți principale, dar practic calculele se efectuează pentru $m = 1$, cel mult pentru $m = 2$, deoarece îmbunătățirea preciziei soluției prin folosirea aproximațiilor de ordin superior nu este justificată de îngreunarea care apare la efectuarea calculelor. Aplicabilitatea practică a metodei este determinată nu atît de convergența dezvoltării (5-4) cînd $m \rightarrow \infty$, cît mai ales de proprietățile asimptotice de aproximare a soluției cînd $\varepsilon \rightarrow 0$ pentru un m dat.

Condițiile inițiale ce se presupun cunoscute sînt

$$a(t_0) = a_0, \quad \alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Funcțiile u_j , A_j , B_j se determină prin efectuarea

A-II-5-3

a două cuadraturi.

Din prima relație (5-5) rezultă :

$$t = t_0 + \int_{a_0}^a \frac{da}{\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a)} \quad (5-6)$$

Din această relație se obține a ca funcție de timp și se înlocuiește în a doua relație (5-5) care devine :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^t [\varepsilon B_1(t) + \varepsilon^2 B_2(t) + \dots + \varepsilon^m B_m(t)] dt \quad (5-7)$$

Fiind determinate acum funcțiile $a(t)$ și $\alpha(t)$, se înlocuiesc în (5-4) și se obține soluția aproximativă căutată $x = x(t)$.

Considerațiile făcute mai sus au presupus cunoscute funcțiile $u_j(a, t)$, $A_j(a)$, $B_j(a)$. În alegerea acestor funcții există un anumit grad de arbitrarieitate, care poate fi folosit impunând condiția ca din dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor $u_j(a, \alpha)$ să lipsească prima armonică (termeni în $\sin x$ și $\cos x$), adică să avem satisfăcute relațiile :

$$\int_0^{2\pi} u_j(a, \alpha) \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$\int_0^{2\pi} u_j(a, \alpha) \sin \alpha d\alpha = 0$$

$j = 1, 2, \dots, m \quad (5-8)$

Se mai poate arăta că dacă în dezvoltările (5-5) neglijăm termenii de ordinul $O(\varepsilon^{m+1})$, atunci introducem în expresia lui $x(t)$ o eroare de ordinul $O(\varepsilon^m)$, deci nu are sens să păstrăm în dezvoltarea lui $x(t)$ termenul ce conține ε^m , fiind suficient a ne opri la termenul ce conține pe ε^{m-1} .

Se obțin astfel următoarele formule pentru calculul soluției ecuației (5-1) :

Prima aproximatie

$$x_I = a \cos \alpha$$

$$t(a) = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{A_1(a)} \quad \text{prin inversare } a = a(t)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t B_1(a) dt$$

(5-9)

$$A_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1(-\omega a \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha$$

$$B_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} \mathcal{Y}_1(a \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha$$

A doua aproximatie

$$x_{II} = a \cos \alpha + \varepsilon u_1(a, \alpha)$$

(5-10)

$$t(a) = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{A_1(a) + \varepsilon A_2(a)} \quad \text{prin inversare } a = a(t)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t [B_1(a) + \varepsilon B_2(a)] dt$$

$$u_1(a, \alpha) = -\frac{C_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k(a) \cos k\alpha + D_k(a) \sin k\alpha}{k^2 - 1}$$

$$C_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{Y}_1(a \cos \alpha) + \mathcal{F}_1(-\omega a \sin \alpha)] d\alpha$$

$$C_k(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{Y}_1(a \cos \alpha) + \mathcal{F}_1(-\omega a \sin \alpha)] \cos k\alpha d\alpha; \quad k = 2, \dots$$

$$D_k(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{Y}_1(a \cos \alpha) + \mathcal{F}_1(-\omega a \sin \alpha)] \sin k\alpha d\alpha$$

$$A_1(a) = \frac{D_1(a)}{2\omega}$$

$$B_1(a) = \frac{C_1(a)}{2\omega a}$$

$$A_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left(2A_1 B_1 + a_1 A_1 \frac{dB_1}{da} \right) + \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \left[u_1 \Psi_1'(a \cos \alpha) + (A_1 \cos \alpha B_1 \sin \alpha + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \alpha}) f_1'(-\omega a \sin \alpha) \right] \sin \alpha d\alpha$$

În cazul particular, care interesează lucrarea de față, în care $\Psi_1(x) \equiv 0$ și $f_1(x)$ este egală cu produsul $a|x| \dot{x}$ formulele capătă o formă mai simplă. Dacă a nu este mic dar condițiile inițiale sînt suficient de mici se poate introduce parametrul adimensional mic ε cu relația :

$$\varepsilon = ax_0 \tag{5-11}$$

Ecuția generală (5-1) în acest caz capătă forma :

$$\ddot{x} \pm \frac{\varepsilon}{x_0} |\dot{x}| \dot{x} \pm \omega^2 x = 0 \tag{5-12}$$

Rezultă, că funcția $f_1(x)$ cu x de forma (5-2) depinde numai de \sin și anume este o funcție pară în α deoarece :

$$f_1(x) = f_1(-\omega a \sin \alpha) = \begin{cases} \frac{\omega^2 a^2}{x_0} \sin^2 \alpha & \text{pentru } \sin \alpha \geq 0 \\ -\frac{\omega^2 a^2}{x_0} \sin \alpha & \text{pentru } \sin \alpha \leq 0 \end{cases} \tag{5-13}$$

Avînd în vedere paritatea funcției f_1 , ea se va dezvoltă într-o serie Fourier numai de cosinusuri :

$$f_1(-\omega a \sin \alpha) = f_1 \left[\omega a \cos \left(\alpha + \frac{\sqrt{1}}{2} \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\omega a) \cos k \left(\alpha + \frac{\sqrt{1}}{2} \right) \tag{5-14}$$

Comparînd această dezvoltare cu cea scrisă anterior în

A-II-5-6

cazul formei generale a ecuației diferențiale a oscilațiilor rezultă :

$$C_k(a) = F_k(\omega a) \cos \frac{k\pi}{2} \quad ; \quad D_k(a) = -F_k(\omega a) \sin \frac{k\pi}{2} \quad (5-15)$$

Rezultă atunci :

$$A_1(a) = - \frac{F_1(\omega a)}{2\omega} \quad (5-16)$$

$$B_1(a) = 0$$

In acest fel, pentru ecuația (5-12) relațiile care dau prima aproximație a soluției sînt :

$$x_I = a \cos \alpha \quad (5-17)$$

$$t(a) = t_0 - \frac{2\omega}{\varepsilon} \int_{x_0}^a \frac{da}{F_1(\omega a)} \quad \text{prin inversare}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega (t - t_0)$$

Se observă că în această primă aproximație frecvența vibrației este independentă de amplitudine și egală cu frecvența vibrațiilor neamortizate.

In ceea ce privește relațiile care dau soluția în a doua aproximație :

$$x_{II} = a \cos \alpha - \frac{\varepsilon F_0(\omega a)}{\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F_k(\omega a) \cos k(\alpha + \frac{\pi}{2})}{k^2 - 1} \quad (5-18)$$

$$t(a) = t_0 - \frac{2\omega}{\varepsilon} \int_{x_0}^a \frac{da}{F_1(\omega a)} \quad \text{prin inversare} \quad a = a(t)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega (t - t_0) + \varepsilon^2 \int_{t_0}^t B_2(a) dt$$

A-II-5-7

$$u_1(a, \alpha) = - \frac{F_0(\omega a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F_k(\omega a) \cos k(\alpha + \frac{j}{2})}{k^2 - 1}$$

$$A_2(a) = 0$$

$$B_2(a) = \frac{F_1(\omega a)}{8\omega^3 a} \frac{dF_1(\omega a)}{da} - \frac{F_1^2(\omega a)}{4\omega^3 a^2} - \frac{1}{2\omega^3 a^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 F_k^2(\omega a)}{k^2 - 1}$$

Se observă că pentru primele două aproximații se obține o aceeași dependență a amplitudinei primei armonice față de timp. În schimb, în a doua aproximație frecvența vibrației devine funcție de amplitudine printr-un factor de corecție de ordinul ϵ^2 .

Să trecem acum la studiul concret al oscilațiilor care apar în castelele de echilibru la închiderea bruscă, ecuație care a fost dedusă anterior :

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{2} |\dot{\xi}| \dot{\xi} + \xi = 0 \tag{5-19}$$

Pentru studiul acestei ecuații se vor considera două tipuri de condiții inițiale și anume :

a.) se consideră condiții inițiale, poziția ξ și viteza $\dot{\xi}$ corespunzătoare unui nivel extrem oarecare. În mod concret se vor considera condiții inițiale cele corespunzătoare primului nivel maxim :

$$\xi = \xi_1 ; \dot{\xi} = \dot{\xi}_1 \tag{5-20}$$

b.) Se consideră condițiile inițiale reale adică :

$$\xi = \xi_0 ; \dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \tag{5-21}$$

a.) Conform metodei generale prezentate, se introduce parametrul mic adimensional ϵ prin relația ($\xi_1 < 1$; $\xi_1 \rightarrow 1$ când $\xi_0 \rightarrow -\infty$) :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \xi_1 \tag{5-22}$$

A-II-5-8

Prin introducerea acestui parametru, ecuația oscilațiilor capătă forma :

$$\ddot{\xi} + \varepsilon \frac{|\dot{\xi}| \xi}{\xi_1} + \omega_0 = 0 \quad (5-23)$$

In acest caz :

$$f_1(\dot{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_1} \dot{\xi}^2 & \text{pentru } \dot{\xi} \geq 0 \\ -\frac{1}{\xi_1} \dot{\xi}^2 & \text{pentru } \dot{\xi} \leq 0 \end{cases} \quad (5-24)$$

de unde ținând cont că $\omega_0 = 1$:

$$f_1(\omega_0 \cos \alpha) = \begin{cases} \frac{a^2}{\xi_1} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \geq 0 \\ -\frac{a^2}{\xi_1} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (5-25)$$

Avem atunci :

$$F_k(\omega_0) = \frac{a^2}{\sqrt{1-\xi_1}} \left[\int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi_1}}{2}} \cos^2 \alpha \cos k \alpha d\alpha - \int_{\frac{\sqrt{1-\xi_1}}{2}}^{\frac{3\sqrt{1-\xi_1}}{2}} \cos^2 \alpha \cos k \alpha d\alpha + \int_{\frac{3\sqrt{1-\xi_1}}{2}}^{2\sqrt{1-\xi_1}} \cos^2 \alpha \cos k \alpha d\alpha \right] \quad (5-26)$$

Efectuînd integralele de mai sus se obține :

$$F_k(\omega_0) = \frac{2a^2}{\sqrt{1-\xi_1}} \left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+2)} + \frac{1}{2(k-2)} \right] \sin \frac{k\sqrt{1-\xi_1}}{2} \cos k\sqrt{1-\xi_1} \quad (5-27)$$

Pentru $k = 2p$ rezultă din relația de mai sus :

$$F_{2p}(\omega_0) = 0 \quad (5-28)$$

Pentru $k = 2p + 1$ rezultă din aceeași relație :

A-II-5-9

$$F_{2p+1}(\omega a) = \frac{8a^2}{\pi \xi_1} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \quad (5-29)$$

In particular pentru $p = 0$ se obține :

$$F_1(\omega a) = \frac{8a^2}{3\pi \xi_1} \quad (5-30)$$

In cadrul aproximației întâi :

$$\tau_{0fa} = \tau_0 + \frac{3\sqrt{1}}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) \quad (5-31)$$

Explicitînd pe a ca funcție de τ :

$$a(\tau) = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3\sqrt{1}} (\tau - \tau_0)} \quad (5-32)$$

Se scrie acum soluția în aproximația întâi prin metoda Krîlov-Bogoliubov :

$$\xi(\tau) = a \cos \alpha = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3\sqrt{1}} (\tau - \tau_0)} \cos (\alpha_0 + \tau - \tau_0) \quad (5-33)$$

Constantele a_0 și α_0 se determină din condițiile inițiale :

A-II-5-10

$$b = b_1 \implies \xi_1 = a_0 \cos \alpha_0$$

$$\left. \frac{d\xi}{db} \right|_{b=b_1} = -a_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{2a_0}{3\pi} \cos \alpha_0 \right) \quad (5-34)$$

S-a obținut în acest fel sistemul :

$$a_0 \cos \alpha_0 = \xi_1 \quad (5-35)$$

$$a_0 \sin \alpha_0 = \frac{2a_0 \xi_1}{3\pi}$$

Prin ridicarea la pătrat a celor două ecuații și adunarea lor membru cu membru se obține :

$$a_0^2 = \xi_1^2 + \frac{4\xi_1^2 a_0^2}{9\pi^2} \implies a_0 = \xi_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\xi_1^2}{9\pi^2}}} \quad (5-36)$$

Din sistemul (5-35) se obține atunci și valoarea parametrului α_0 :

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{4\xi_1^2}{9\pi^2}} > 0$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{2\xi_1}{3\pi} > 0 \quad (5-37)$$

Având în vedere relațiile (5-37) rezultă că :

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \quad (5-38)$$

A-II-5-11

Revenind atunci la legea de oscilație, ea este acum complet determinată prin determinarea parametrilor α_0 și a_0 :

$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_1}{\sqrt{1 - \frac{4\mathbb{S}_1^2}{9\pi^2}} \left[1 + \frac{2\mathbb{S}_1 (\tau - \tau_1)}{3\pi \sqrt{1 - \frac{4\mathbb{S}_1^2}{9\pi^2}}} \right]} \cos(\alpha_0 + \tau - \tau_1) \quad (5-38)$$

Avînd în vedere că $\mathbb{S}_1 < 1$ rezultă că se pot face aproximațiile :

$$\sqrt{1 - \frac{4\mathbb{S}_1^2}{9\pi^2}} \cong 1$$

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{4\mathbb{S}_1^2}{9\pi^2}} \cong 1 \quad (5-39)$$

Cu aceste aproximații, care introduc o eroare de sub 1 % în determinarea lui \mathbb{S} se obține legea oscilațiilor sub o formă foarte simplă :

$$\mathbb{S} \cong \frac{\mathbb{S}_1}{1 + \frac{2\mathbb{S}_1}{3\pi} (\tau - \tau_1)} \cos(\tau - \tau_1) \quad (5-40)$$

Se observă că ecuația de mai sus satisface condiția inițială $\mathbb{S}(\tau_1) = \mathbb{S}_1$, dar satisface aproximativ condiția inițială de anulare a derivatei.

A-II-5-12

Se poate pune în evidență acum o foarte importantă concordanță între rezultatele obținute în paragraful anterior și rezultatele date de metoda Krîlov-Bogoliubov în prima aproximație. Această concordanță se referă la problema tratată în cadrul prezentului capitol, și anume la problema nivelurilor extreme.

Intr-adevăr conform relației (5-40) pentru nivelul extrem ξ_2 , care are loc la momentul $\tau_2 \cong \tau_1 + \pi$ se obține formula :

$$\xi_{2(\tau)} = \frac{-\xi_1}{1 + \frac{2}{3} \xi_1} \quad (5-41)$$

Pentru un nivel extrem oarecare j , care are loc la momentul $\tau_j = \tau_1 + (j-1)\pi$ se obține, tot din relația (5-40):

$$\xi_{j(\tau)} = \frac{(-1)^{j+1} \xi_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} \xi_1} \quad (5-42)$$

Relațiile (5-41) și (5-42) au fost obținute prin metode principal diferite la paragraful anterior.

Să vedem cum se modifică relațiile dacă trecem la aproximația a doua. In acest caz, după formulele (5-18) :

$$B_2(\alpha) = \frac{16\alpha^2}{9\pi^2 \xi_1^2} - \frac{16\alpha^2}{9\pi^2 \xi_1^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p+1) \frac{64\alpha^4}{\pi^2 \xi_1^2}}{[(2p+1)^2 - 1](2p-1)^2(2p+1)^2(2p+3)^2} \quad (5-43)$$

A-II-5-13

sau :

$$B_2(a) = -\frac{4a^2}{\pi^2 \xi_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{8}{[(2p+1)^2-1][(2p+1)^2-4]^2} = -\frac{4a^2 C}{\pi^2 \xi_1^2} \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{1323} + \frac{1}{12150} + \dots \right) \approx -\frac{0,1628a^2}{\pi^2 \xi_1^2}$$

Pe baza aceluiași formule :

$$\alpha(\xi) = \xi - \xi_1 + \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi} \left(-\frac{0,1628a^2}{\pi^2 \xi_1^2} \right) d\xi = \xi - \xi_1 - \frac{0,1221 \xi_1}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\xi - \xi_1)} \right] \quad (5-44)$$

În fine soluția ξ se obține în a doua aproximație:

$$\xi_{(I)} = a \cos \alpha + \frac{8a^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin (2p+1) \alpha}{(2p+1)[(2p+1)^2-1][(2p+1)^2-4]} = a \cos \alpha + \frac{8a^2}{120\pi} \left(\sin 3\alpha + \frac{1}{21} \sin 5\alpha + \dots \right) \quad (5-45)$$

sau încă :

$$\xi_{(I)} = \frac{\xi_1}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\xi - \xi_1)} \cos \left\{ \xi - \xi_1 - \frac{0,1221 \xi_1}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\xi - \xi_1)} \right] \right\} + \quad (5-46)$$

$$+ \frac{8\xi_1^2}{120\pi \left[1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\xi - \xi_1) \right]^2} \sin 3 \left\{ \xi - \xi_1 - \frac{0,1221 \xi_1}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\xi - \xi_1)} \right] \right\} + \dots$$

Deoarece, așa cum s-a arătat în paragraful anterior, relația (5-41) (obținută și în prima aproximație prin metoda Krilov-Bogoliubov) între două extreme succesive dă o eroare

A-II-5-14

de sub 2 % mărirea preciziei prin folosirea celei de a doua aproximații nu este justificată în problema determinării nivelurilor extreme, întrucît calculele se complică destul de mult. Din punct de vedere tehnic, precizia obținută în prima aproximație este suficientă.

b.) Să trecem acum la utilizarea metodei Krîlov-Bogoliubov în cazul în care se ia condiția inițială corespunzătoare momentului t_0 ; $\xi = \xi_0$.

Conform metodicii generale prezentate se introduce parametrul adimensional mic ε , definit prin relația :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} |\xi_0| \quad (5-47)$$

Prin introducerea acestui parametru adimensional, ecuația oscilațiilor capătă forma :

$$\ddot{\xi} + \varepsilon \frac{|\dot{\xi}| \dot{\xi}}{|\xi_0|} + \xi = 0 \quad (5-48)$$

În acest caz :

$$f_1(\xi) = \begin{cases} \frac{a^2}{|\xi_0|} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \geq 0 \\ -\frac{a^2}{|\xi_0|} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (5-49)$$

sau, ținînd cont că $\omega = 1$:

$$f_1(a \cos \alpha) = \begin{cases} \frac{a^2}{|\xi_0|} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \geq 0 \\ -\frac{a^2}{|\xi_0|} \cos^2 \alpha & \text{pentru } \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (5-50)$$

Pentru funcțiile $F_K(\omega a)$ se obțin atunci expresii similare expresiilor de la subpunctul "a" :

A-II-5-15

$$F_{2p}(wa) = 0$$

$$F_{2p+1}(wa) = \frac{8a^2\omega^2}{\pi |z_0|} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \quad (5-51)$$

În prima aproximație :

$$z(a) = z_0 + \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) \implies a(z) = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3\pi} (z - z_0)} \quad (5-52)$$

Legea de oscilație în prima aproximație capătă forma:

$$S_{(x)} = a \cos \alpha = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3\pi} (z - z_0)} \cos [\gamma + z - z_0] \quad (5-53)$$

Constantele a_0 și z_0 se determină din condițiile inițiale :

$$z = z_0 \implies z_0 = a \cos \gamma$$

$$\left. \frac{dz}{dz} \right|_{z=z_0} = \sqrt{-2z_0} = -a_0 \left[\sin \gamma + \frac{2a_0}{3\pi} \cos \gamma \right] \quad (5-54)$$

S-a obținut în acest fel sistemul :

$$a_0 \cos \gamma = z_0$$

$$a_0 \sin \gamma = -\sqrt{-2z_0} + \frac{2z_0}{3\pi} a_0 \quad (5-55)$$

A-II-5-16

Prin ridicarea la pătrat a celor două ecuații și adunarea lor membru cu membru se obține :

$$a_0^2 = \xi_0^2 - 2\xi_0 + \frac{4\xi_0^2}{9\pi^2} a_0^2 - \frac{4\xi_0}{3\pi} \sqrt{-2\xi_0} a_0 \quad (5-56)$$

Ordonînd termenii ecuației :

$$a_0^2 \left(1 - \frac{4\xi_0^2}{9\pi^2} \right) + \frac{4\xi_0}{3\pi} \sqrt{-2\xi_0} a_0 + 2\xi_0 - \xi_0^2 = 0 \quad (5-57)$$

Făcînd și aici aproximația , justificată de faptul că în general $|\xi_0| < 1$:

$$1 - \frac{4\xi_0^2}{9\pi^2} \cong 1 \quad (6-57)$$

se obține următoarea valoare aproximativă pentru constanta a_0 :

$$a_0 \cong \sqrt{-2\xi_0} \left(1 - \frac{\xi_0}{2} \right) \quad (5-58)$$

Revenind la sistemul (5-55) pentru determinarea parametrului γ :

$$\cos \gamma = \frac{\xi_0}{\sqrt{-2\xi_0} \left(1 - \frac{\xi_0}{2} \right)} < 0 \quad (5-59)$$

$$\sin \gamma = -\sqrt{-2\xi_0} + \frac{2\xi_0 \sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2} \right) < 0$$

Cu această aproximație se obține legea oscilațiilor sub forma :

A-II-5-17

$$\xi = \frac{\sqrt{-2\xi_0} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right) (\tau - \tau_0)} \cos(\tau + \tau_0 - \tau_0) \quad (5-60)$$

Avînd în vedere cele de mai sus rezultă că parametrul τ este cuprins în intervalul :

$$\pi < \tau < \frac{3\pi}{2} \quad (5-61)$$

Pentru a putea determina nivelul maxim ξ_1 trebuiește determinat la început momentul τ_1 corespunzător acestui maxim .

Pentru aceasta se anulează derivata $\frac{d\xi}{d\tau}$, considerînd pentru ξ ecuația (5-60) :

$$\left[1 + \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right) (\tau_1 - \tau_0)\right] \sin(\tau + \tau_1 - \tau_0) + \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right) \cos(\tau + \tau_1 - \tau_0) = 0 \quad (5-62)$$

sau

$$\operatorname{tg}(\tau + \tau_1 - \tau_0) = - \frac{\frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} \left(1 - \frac{\xi_0}{2}\right) (\tau_1 - \tau_0)} < 0 \quad (5-63)$$

$$\frac{3\pi}{2} < \tau + \tau_1 - \tau_0 < 2\pi$$

Procedînd din nou la aproximări rezultă că :

A-II-5-18

$$\cos(\tau + \zeta_1 - \zeta_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + t g^2(\tau + \zeta_1 - \zeta_0)}} \cong 1 \quad (5-64)$$

Rezultă că o primă aproximare a primei cvasi semiperioade $\mathcal{T}_1 = \zeta_1 - \zeta_0$ se obține dacă se consideră :

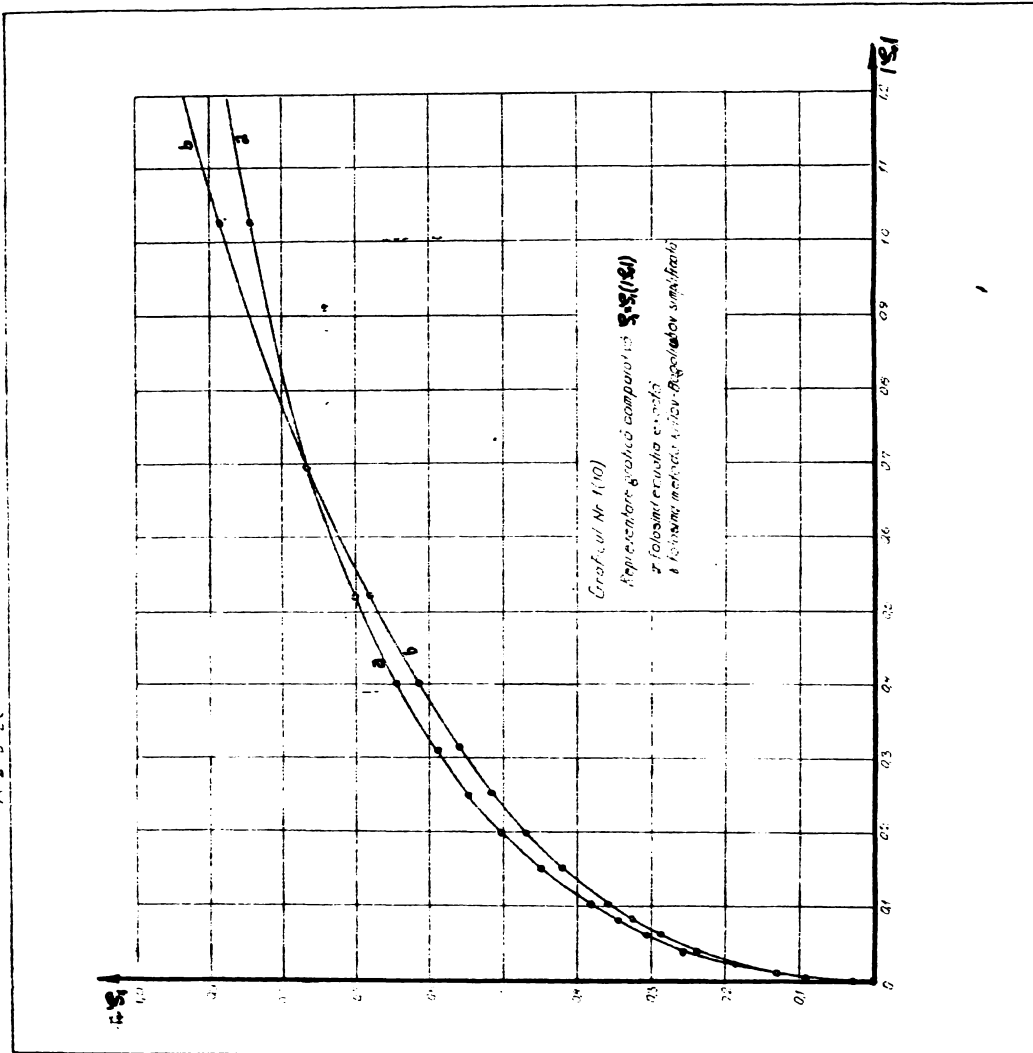
$$\mathcal{T}_1 = 2\pi - \tau \quad (5-65)$$

Revenind cu aceste aproximări în legea de oscilație se obține următoarea formulă aproximativă de calcul a nivelului \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{S}_1 \cong \frac{\sqrt{-2\xi_0} \left(1 - \frac{\mathcal{S}_0}{2}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3} \left(1 - \frac{\mathcal{S}_0}{2}\right)} \quad (5-66)$$

Cu ajutorul formulei (5-66) s-a întocmit tabelul nr.1⁽⁴⁾ și reprezentarea grafică Nr.1 (10). Se constată că valorile, obținute prin aplicarea formulei aproximative (5-66) sînt satisfăcătoare. Pe intervalul $|\xi_0| < 2$, interval întîlnit în mod normal la castele de echilibru, eroarea maximă nu depășește 7%, deși pe lîngă erorile proprii metodei s-ai mai făcut pe parcurs cîteva aproximări.

A-11.5-20



A-II-6-1

6. Metoda liniarizării echivalente (variantă originală)

În general prin liniarizarea unei ecuații neliniare se înțelege înlocuirea ecuației neliniare printr-una liniară, înlocuirea în care se caută ca soluția ecuației liniare să nu se depărteze mult de soluția ecuației neliniare.

Această înlocuire este cerută de necesitatea exprimării analitice explicite a soluției, chiar sub formă aproximativă, exprimare care nu se poate da în cazul ecuației neliniare. În cazul castelilor de echilibru liniarizarea este necesară în special în cazul în care se cercetează stabilitatea oscilațiilor în cazul micilor oscilații, ca și în cazul în care se studiază cuplarea castelilor de echilibru. Trebuie menționat totuși că prin liniarizare se pierd unele caracteristici calitative ale ecuațiilor neliniare.

Liniarizarea constituie deci un mijloc aproximativ de simplificare a dificultăților matematice, aplicabil cu atât mai bine cu cât ponderea termenului neliniar este relativ mai mică și cu cât condițiile inițiale au valori relativ mai mici. De asemenea se recomandă ca intervalul de timp în care ecuația neliniară este înlocuită de cea liniară să nu fie prea mare, întrucât soluțiile celor două ecuații se depărtează continuu.

Pentru un interval de timp mai mare se face liniarizarea ecuației pe mai multe subintervale, tocmai pentru a elimina depărtarea exagerată a soluțiilor.

Având în vedere că, așa cum se va arăta în capitolul următor, în cazul închiderii totale, cvasiperioadele sînt aproximativ egale cu T , începînd cu a doua cvasisemiperioadă, rezultă că începînd din momentul t_0 corespunzător primului nivel maxim, există condiții favorabile aplicării metodei liniarizării, căci

A-II-6-2

ecuația liniarizată are riguros cvasiperioda egală cu \bar{T} . Pentru intervalul de timp din momentul τ_0 al închiderii rapide și pînă în momentul τ_1 al atingerii primului maxim, există condiții mai puțin favorabile de liniarizare căci aici prima cvasisemiperioadă poate diferi sensibil, crescînd odată cu creșterea parametru-ului $|\varepsilon|$.

În literatură se cunosc mai multe variante ale metodei liniarizării, unele dintre ele bazate pe o rațiune exclusiv matematică, altele bazate și pe elemente fizice.

În continuare în acest paragraf se va prezenta pe scurt metoda liniarizării în varianta denumită liniarizare echivalentă, sub forma sa uzuală și apoi se va utiliza în continuare metoda sub o formă originală, evident superioară metodei usuale.

Metoda liniarizării echivalente este datorată tot lui Krîlov și Bogoliubov.

Spre deosebire însă de metoda de aproximație a lui Krîlov-Bogoliubov aplicată în cazul ecuațiilor neliniare, în care se caută o soluție aproximativă care să satisfacă cît mai bine ecuația neliniară, aici problema se pune invers și anume se caută o ecuație liniară care să fie satisfăcută est mai bine de o anumită soluție.

Concret, se știe că metoda Krîlov-Bogoliubov prezentată la paragraful anterior dă soluția ecuației diferențiale neliniare, de forma generală :

$$\ddot{x} + \varepsilon [f(\dot{x}) + \psi(x)] + \omega^2 x = 0 \quad (6-1)$$

în care ε este un parametru mic, cu o aproximație de ordinul $O(\varepsilon^2)$

Se caută atunci o ecuație liniară de tipul :

$$\ddot{x} + h_* \dot{x} + \omega_*^2 x = 0 \quad (6-2)$$

care să fie verificată de soluția ecuației neliniare obținută prin metoda Krîlov-Bogoliubov prima aproximație, verificarea avînd loc de asemenea pînă termenii insignifianți de ordinul $O(\varepsilon^2)$.

În varianta uzuală parametrul h_* și ω_* au valori constante, astfel încît ecuația liniarizată este o ecuație liniară cu coeficienți constanți. În varianta originală prezentată în acest paragraf, parametrul h_* și ω_* sînt funcții de variabila τ , apropiindu-se astfel mult mai bine ecuația liniarizată de ecuația neliniară.

Cu notațiile utilizate în paragraful anterior se obține pentru ecuația (6-1) :

A-II-6-3

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega a \sin \alpha + \varepsilon (A_1 \cos \alpha - a B_1 \sin \alpha) + O(\varepsilon^2) \\ \ddot{x} &= -a \omega^2 \cos \alpha + \varepsilon (-2\omega A_1 \sin \alpha - 2\omega a B_1 \cos \alpha) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (6-3)$$

Considerăm acum că \dot{x} și \ddot{x} date de (6-3) ar fi și soluțiile ecuației liniare echivalente (6-2) :

$$2 \sin \alpha \left[a h_* (\omega + \varepsilon B_1) + \varepsilon \omega A_1 \right] + \cos \alpha \left[a (\omega_*^2 - \omega^2) + 2\varepsilon (h_* A_1 - \omega a B_1) \right] + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (6-4)$$

Neglijând termenii de ordinul ε^2 se obține următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute, prin anularea coeficienților lui $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}a h_* (\omega + \varepsilon B_1) + \varepsilon \omega A_1 &= 0 \\ a (\omega_*^2 - \omega^2) + 2\varepsilon (h_* A_1 - \omega a B_1) &= 0\end{aligned}\quad (6-5)$$

Prin rezolvarea acestui sistem, în care necunoscutele sînt h_* și ω_* , ω și prin neglijarea termenilor care conțin pe ε^2 :

$$\begin{aligned}h_* &= -\frac{\varepsilon \omega A_1}{a (\omega + \varepsilon B_1)} \\ \omega_*^2 &= \omega^2 + 2\varepsilon \omega B_1\end{aligned}\quad (6-6)$$

După cum s-a arătat la paragraful anterior, pentru ecuația oscilațiilor, în prima aproximație a metodei Krilov-Bogoliubov, în cazul în care se pornește cu condiția inițială ξ_1 :

$$A_1(a) = -\frac{4\omega a^2}{3\pi \xi_1} \quad (6-7)$$

$$B_1(a) = 0$$

A-II-6-4

Inlocuind pe (6-7) în relațiile (6-6) se obține :

$$h_* = \frac{2\omega a}{3\pi} \quad (6-8)$$

$$\omega_* = \omega$$

Rezultă în concluzie că ecuația liniară echivalentă ecuației oscilațiilor este :

$$\ddot{\xi} + \frac{4a}{3\pi} \dot{\xi} + \xi = 0 \quad (6-9)$$

sau încă :

$$\ddot{\xi} + \frac{4\xi_1}{3\pi + 2\xi_1(\tau - \tau_1)} \dot{\xi} + \xi = 0 \quad (6-10)$$

În cazul în care se ia drept condiție inițială ξ_0 :

$$A_1(a) = \frac{-4\omega a^2}{3\pi \xi_0} \quad (6-11)$$

$$B_1(a) = 0$$

$$h_* = \frac{2\omega a}{3\pi} = \frac{-2\omega \xi_0}{3\pi - 2\xi_0(\tau - \tau_0)}$$

$$\omega_* = \omega$$

Ecuația diferențială liniară echivalentă este atunci :

$$\ddot{\xi} - \frac{4\omega \xi_0}{3\pi - 2\xi_0(\tau - \tau_0)} \dot{\xi} + \xi = 0 \quad (6-12)$$

A-II-6-5

Se vor rezolva în continuare ecuația (6-10) determinînd în acest fel nivelul extrem următor nivelului ξ_1 , adică ξ_2 și ecuația (6-12) determinînd pe această cale primul nivel maxim ξ_1 . După cum se observă ecuația (6-10) este o ecuație liniară cu coeficienți variabili de ordinul doi, omogenă.

Se face întîi o schimbare de variabilă, trecîndu-se de la la noua variabilă τ_* definită prin :

$$\tau_* = \left[3\pi + 2\xi_1 (\tau - \tau_1) \right] \frac{1}{2\xi_1} \quad (6-13)$$

Cu această schimbare de variabilă pentru derivate se obțin expresiile :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{d\xi}{d\tau_*} \cdot \frac{d\tau_*}{d\tau} = \frac{d\xi}{d\tau_*} \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau_*} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right) \frac{d\tau_*}{d\tau} = \frac{d^2\xi}{d\tau_*^2} \end{aligned} \quad (6-14)$$

Ecuația diferențială (6-10) devine :

$$\frac{d^2\xi}{d\tau_*^2} + \frac{2}{\tau_*} \frac{d\xi}{d\tau_*} + \xi = 0 \quad (6-15)$$

După cum este cunoscut o asemenea ecuație se rezolvă cău-tînd la început o soluție particulară $\xi_{(1)}$. Se constată că o soluție particulară este :

$$\xi_{(1)} = \frac{\sin \tau_*}{\tau_*} \quad (6-16)$$

$$\frac{d\xi_{(1)}}{d\tau_*} = \frac{\tau_* \cos \tau_* - \sin \tau_*}{\tau_*^2}$$

A-II-6-6

$$\frac{d^2 \xi_{(1)}}{d\tau_*^2} = \frac{2 \sin \tau_* - \tau_*^2 \sin \tau_* - 2 \tau_* \cos \tau_*}{\tau_*^3}$$

Inlocuind în ecuația (6-15) relațiile de mai sus :

$$\frac{2 \sin \tau_* - \tau_*^2 \sin \tau_* - 2 \tau_* \cos \tau_*}{\tau_*^3} + \frac{2 \tau_* \cos \tau_* - 2 \sin \tau_*}{\tau_*^3} + \frac{\sin \tau_*}{\tau_*} \equiv 0 \quad (6-17)$$

Se constată că într-adevăr s-a găsit o soluție particulară. Revenind la variabila τ :

$$\xi_{(1)} = \frac{\sin \frac{1}{2\tau_1} \left[3\tau + 2\tau_1 (\tau - \tau_1) \right]}{\frac{1}{2\tau_1} \left[3\tau + 2\tau_1 (\tau - \tau_1) \right]} = \frac{\sin \left(\frac{3\tau}{2\tau_1} + \tau - \tau_1 \right)}{\frac{3\tau}{2\tau_1} + \tau - \tau_1} \quad (6-18)$$

Mai este necesară găsirea încă unei soluții particulare. Se știe că ea se poate determina cu relația :

$$\xi_{(2)} = \frac{\sin \tau_*}{\tau_*} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{\tau_*} d\tau_*}}{\frac{\sin^2 \tau_*}{\tau_*^2}} = \frac{\sin \tau_*}{\tau_*} \int \frac{e^{-\ln \tau_*^2}}{\frac{\sin^2 \tau_*}{\tau_*^2}} = \frac{\cos \tau_*}{\tau_*} \quad (6-19)$$

sau, în variabila τ :

$$\xi_{(2)} = - \frac{\cos \left(\frac{3\tau}{2\tau_1} + \tau - \tau_1 \right)}{\frac{3\tau}{2\tau_1} + \tau - \tau_1} \quad (6-20)$$

Soluția generală a ecuației (6-10) este atunci :

A-II-6-7

$$\xi = C_1 \xi_{(1)} + C_2 \xi_{(2)} = \frac{C_1 \sin\left(\frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + b - b_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + b - b_1\right)}{\frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + b - b_1} \quad (6-21)$$

Determinarea constantelor se face din condițiile inițiale:

$$b = b_1 \implies \xi = \xi_1 ; \quad \frac{d\xi}{db} = 0 \quad (6-22)$$

Se obține următorul sistem care permite determinarea constantelor de integrare :

$$\frac{2}{3\sqrt{1}} \left(C_1 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + C_2 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} \right) = 1 \quad (6-23)$$

$$\left(\frac{2\xi_1}{3\sqrt{1}} \right)^2 \left[\frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} \left(C_1 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} - C_2 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} \right) - \left(C_1 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + C_2 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} \right) \right] = 0$$

Sistemul (6-23) se pune sub forma echivalentă :

$$C_1 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + C_2 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} = \frac{3\sqrt{1}}{2} \quad (6-24)$$

$$C_1 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} - C_2 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} = \xi_1$$

Rezolvând sistemul de mai sus se determină valorile constantelor de integrare :

$$C_1 = \frac{3\sqrt{1}}{2} \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + \xi_1 \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} \quad (6-25)$$

$$C_2 = -\xi_1 \sin \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1} + \frac{3\sqrt{1}}{2} \cos \frac{3\sqrt{1}}{2\xi_1}$$

Inlocuind în soluția generală (6-21) :

A-II-6-8

$$\xi = \xi_1 \frac{\left(\sin \frac{3\pi}{2\xi_1} + \frac{2\xi_1}{3\pi} \cos \frac{3\pi}{2\xi_1} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{2\xi_1} - \frac{2\xi_1}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2\xi_1} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right)}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\zeta - \zeta_1)} \quad (6-26)$$

Având în vedere identitățile trigonometrice :

$$\sin \frac{3\pi}{2\xi_1} \sin \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right) + \cos \frac{3\pi}{2\xi_1} \cos \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right) = \cos (\zeta - \zeta_1) \quad (6-27)$$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right) \cos \frac{3\pi}{2\xi_1} - \sin \frac{3\pi}{2\xi_1} \cos \left(\frac{3\pi}{2\xi_1} + \zeta - \zeta_1 \right) = \sin (\zeta - \zeta_1)$$

soluția generală se poate pune sub o formă mai simplă :

$$\xi = \xi_1 \frac{\cos (\zeta - \zeta_1) + \frac{2\xi_1}{3\pi} \sin (\zeta - \zeta_1)}{1 + \frac{2\xi_1}{3\pi} (\zeta - \zeta_1)} \quad (6-28)$$

Se observă că dacă în relația de mai sus se face $\zeta = \zeta_1$ se obține, ca verificare, $\xi = \xi_1$.

Relația (6-28) permite calculul nivelelor extreme.

Pentru calculul nivelului extrem ξ_2 , care este primul nivel minim de după primul nivel maxim, se ia în relația (6-28) pentru ζ_2 valoarea $\zeta_1 + \pi$, deoarece pentru această valoare a lui ζ_2 derivata ξ calculată folosind relația (6-28) este aproximativ nulă (diferă de 0 cu termenul aditiv $\frac{4\xi_1^2}{9\pi^2}$) .

Se obține în acest fel :

$$\xi_2 = \frac{-\xi_1}{1 + \frac{2\xi_1}{3}} \quad (6-29)$$

A-II-6-9

Pentru calculul unui nivel extrem oarecare ξ_j , se ia în relația (6-28) pentru z_j valoarea $z_1 + (j-1)T$:

$$\xi_j = \frac{(-1)^{j-1} \xi_1}{1 + \frac{2(j-1)\xi_1}{3}} \quad (6-30)$$

Trebuiește subliniaș faptul că s-au obținut pentru nivelele extreme aceleași soluții ca și în celelalte metode, rezultat care corespunde din punct de vedere tehnic.

In plus, menționez faptul că această identitate a soluțiilor nu este semnalată în literatura de specialitate referitoare la castelele de echilibru și nici în cea, mai amplă, care se referă la oscilatorii mecanici.

Rezultă ca o principală concluzie faptul că prin aplicarea metodei liniarizării, sau prin aplicarea metodei Krilov-Bogoliubov sau prin aplicarea relațiilor aproximative de calcul se obțin rezultate identice, corespunzătoare din punctul de vedere al preciziei calculelor dacă drept condiție inițială se iau valorile corespunzătoare primului nivel maxim (sau ale unui alt nivel extrem). Rezultă că, după ce nivelul apei atinge primul nivel extrem, oscilațiile apei în castel se desfășoară practic ca și cum amortizarea oscilațiilor ar fi liniară și nu pătratică. Faptul că amortizarea este pătratică și nu liniară se manifestă în special în timpul ^{desfășurării} oscilației de la momentul inițial și pînă la atingerea primului nivel extrem.

Să vedem acum ce se întîmplă dacă se iau condițiile inițiale la momentul ξ_0 .

Prin calcule analoge celor utilizate anterior se ajunge la soluția generală :

A-II-6-10

$$\xi = \frac{C_1 \sin\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right) + C_2 \cos\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right)}{-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0} \quad (6-31)$$

Determinarea constantelor se face cu ajutorul condițiilor inițiale :

$$\tau = \tau_0 \implies \xi = \xi_0$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{-2\xi_0} \quad (6-32)$$

În acest scop, se derivează la început ξ din relația (6-31) :

$$\xi = \frac{\left[C_1 \cos\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right) - C_2 \sin\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right) \right] \left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right) - C_1 \sin\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right) - C_2 \cos\left(-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right)}{\left[-\frac{3\pi}{2\xi_0} + \tau - \tau_0\right]^2} \quad (6-33)$$

Valearea constantelor de integrare se obține prin rezolvarea sistemului :

$$\xi_0 = -\frac{2\xi_0}{3\pi} \left(C_1 \sin \frac{-3\pi}{2\xi_0} + C_2 \cos \frac{-3\pi}{2\xi_0} \right) \quad (6-34)$$

$$\sqrt{-2\xi_0} = \frac{4\xi_0^2}{9\pi} \left[\left(C_1 \cos \frac{-3\pi}{2\xi_0} - C_2 \sin \frac{-3\pi}{2\xi_0} \right) \left(\frac{-3\pi}{2\xi_0} \right) + \frac{3\pi}{2} \right]$$

sau încă :

$$C_1 \sin \frac{-3\pi}{2\xi_0} + C_2 \cos \frac{-3\pi}{2\xi_0} = -\frac{3\pi}{2} \quad (6-35)$$

$$C_2 \sin \frac{-3\pi}{2\xi_0} - C_2 \cos \frac{-3\pi}{2\xi_0} = \frac{3\pi}{2\xi_0} \sqrt{-2\xi_0} - \xi_0$$

A-II-6-11

Explicitând constantele :

$$C_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{-2\epsilon_0}}{\epsilon_0} - \epsilon_0 \right) \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0}$$

$$C_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{-2\epsilon_0}}{\epsilon_0} - \epsilon_0 \right) \sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0}$$

(6-36)

Soluția generală capătă atunci forma :

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{-2\epsilon_0}}{\epsilon_0} - \epsilon_0 \right) \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \right] \sin \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right)}{-\frac{3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0} + \\ & + \frac{\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{-2\epsilon_0}}{\epsilon_0} - \epsilon_0 \right) \sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \right] \cos \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right)}{-\frac{3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0} \end{aligned} \quad (6-37)$$

Relația de mai sus se poate pune sub o formă mai simplă, ținând cont de următoarele identități trigonometrice :

$$\sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \sin \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right) + \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \cos \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right) = \cos(\zeta - \zeta_0)$$

(6-38)

$$\sin \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \cos \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right) - \cos \frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} \sin \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2\epsilon_0} + \zeta - \zeta_0 \right) = -\sin(\zeta - \zeta_0)$$

Soluția generală capătă astfel următoarea expresie :

$$\psi = \psi_0 \frac{\cos(\zeta - \zeta_0) + \left(\frac{\sqrt{-2\epsilon_0}}{\epsilon_0} - \frac{2\epsilon_0}{3\sqrt{3}} \right) \sin(\zeta - \zeta_0)}{1 - \frac{2\epsilon_0}{3\sqrt{3}} (\zeta - \zeta_0)} \quad (6-39)$$

A-II-6-12

Pentru a determina pe ξ_1 , se calculează mai întâi derivata :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi_0 \frac{\left[-\sin(\tau-\tau_0) + \left(\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{\xi_0} - \frac{2\xi_0}{3J} \right) \cos(\tau-\tau_0) \right] \left[1 - \frac{2\xi_0}{3J} (\tau-\tau_0) \right] + \frac{2\xi_0}{3J} \left[\cos(\tau-\tau_0) - \frac{2\xi_0}{3J} \sin(\tau-\tau_0) \right]}{\left[1 - \frac{2\xi_0}{3J} (\tau-\tau_0) \right]^2} \quad (6-40)$$

Pentru nivelul extrem ξ_1 , care se realizează în momentul τ_1 , derivata $\dot{\xi}$ se anulează și trecînd la funcția tangentă se obține :

$$\operatorname{tg}(\tau_1 - \tau_0) = \frac{\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{\xi_0} - \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3J} (\tau_1 - \tau_0) + \frac{4\xi_0^2}{9J^2} (\tau_1 - \tau_0)}{1 - \frac{2\xi_0}{3J} (\tau_1 - \tau_0) - \frac{2\sqrt{-2\xi_0}}{3J} + \frac{4\xi_0^2}{9J^2}} \quad (6-41)$$

Intrucît nu s-a mai putut dispune de calculator în scopul rezolvării ecuației (6-41) pentru prima cvasisemiperioadă T_1 , $T_1 = \tau_1 - \tau_0$. s-au considerat valorile mai exacte deduse în cadrul capitolului următor, cît și valorile mai puțin exacte obținute la paragraful anterior prin utilizarea metodei Krilov-Bogoliubov. Se constată că valorile obținute cu metoda Krilov-Bogoliubov verifică mai bine ecuația (6-41), constatarea fiind făcută pe baza datelor numerice cuprinse în tabelul nr.1 (15). Aceasta era de așteptat deoarece între metoda Krilov-Bogoliubov și metoda liniarizării echivalente există o legătură intimă.

După determinarea primei cvasisemiperioade, se poate calcula nivelul maxim cu formula :

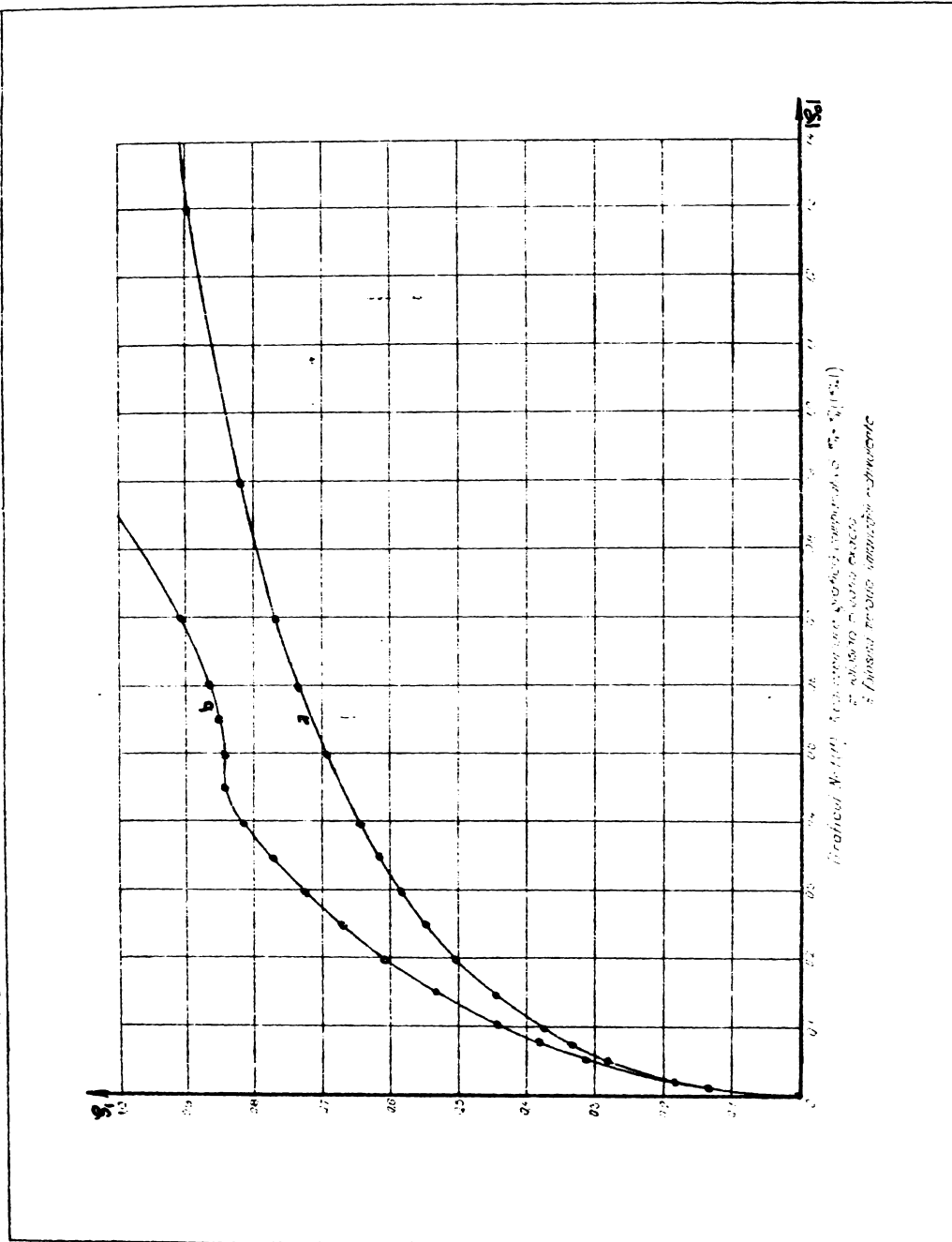
A-II-6-13

$$\xi_1 = \xi_0 \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{\xi_0} - \frac{2\xi_0}{3\pi} \right) \operatorname{tg} \varphi_1}{1 - \frac{2\xi_0}{3\pi} \varphi_1} \cos \varphi_1 \quad (6-42)$$

În tabelul Nr.2 (16) s-au calculat nivelele maxime, considerînd valorile primei cvasisemiperioade în paragraful anterior care verifică suficient de bine ecuația (6-41).

Se constată că se obțin în general valori care depășesc cu cel mult 10 % valorile obținute prin folosirea relațiilor exacte, metoda fiind deci acoperitoare. În graficul Nr.1, s-a⁽¹¹⁾ dat și o reprezentare grafică comparativă.

A-II-6-16



PARTEA INTII A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul II - Problema nivelurilor extreme& 7 . - Utilizarea metodei liniarizării, varianta Praşil

Această metodă de liniarizare are la bază un procedeu de aproximare a energiei specifice disipate, procedeu datorat lui Fr. Praşil se înlocuieşte parabola pierderilor specifice de energie $h_r = f(w)$ prin două drepte, astfel încît, în intervalul $(-v_0, v_0)$ aria cuprinsă între parabolă şi axa ov să fie egală cu aria cuprinsă între drepte şi axa ov (fig. 1(3)a).

Cu variabilele folosite în lucrare se poate scrie :

$$h_r = \frac{K}{2g} v^2 = \frac{K}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (7-1)$$

Trecînd la variabilele adimensionale prin folosirea sistemului raţional de mărimi de referinţă :

$$\frac{h_r}{Z_*} = \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 ; \chi_0 = -\xi_0 \quad (7-2)$$

Relaţia (7-2) a fost reprezentată grafic în fig. 1(3) b ,

Pentru a calcula aria cuprinsă între parabolă şi axa absciselor :

lor :

$$A = 2 \int_0^{\sqrt{-2\xi_0}} \chi d\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right) = \int_0^{\sqrt{-2\xi_0}} \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 d\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^3 \Big|_0^{\sqrt{-2\xi_0}} = -\frac{2}{3} \xi_0 \sqrt{-2\xi_0} \quad (7-3)$$

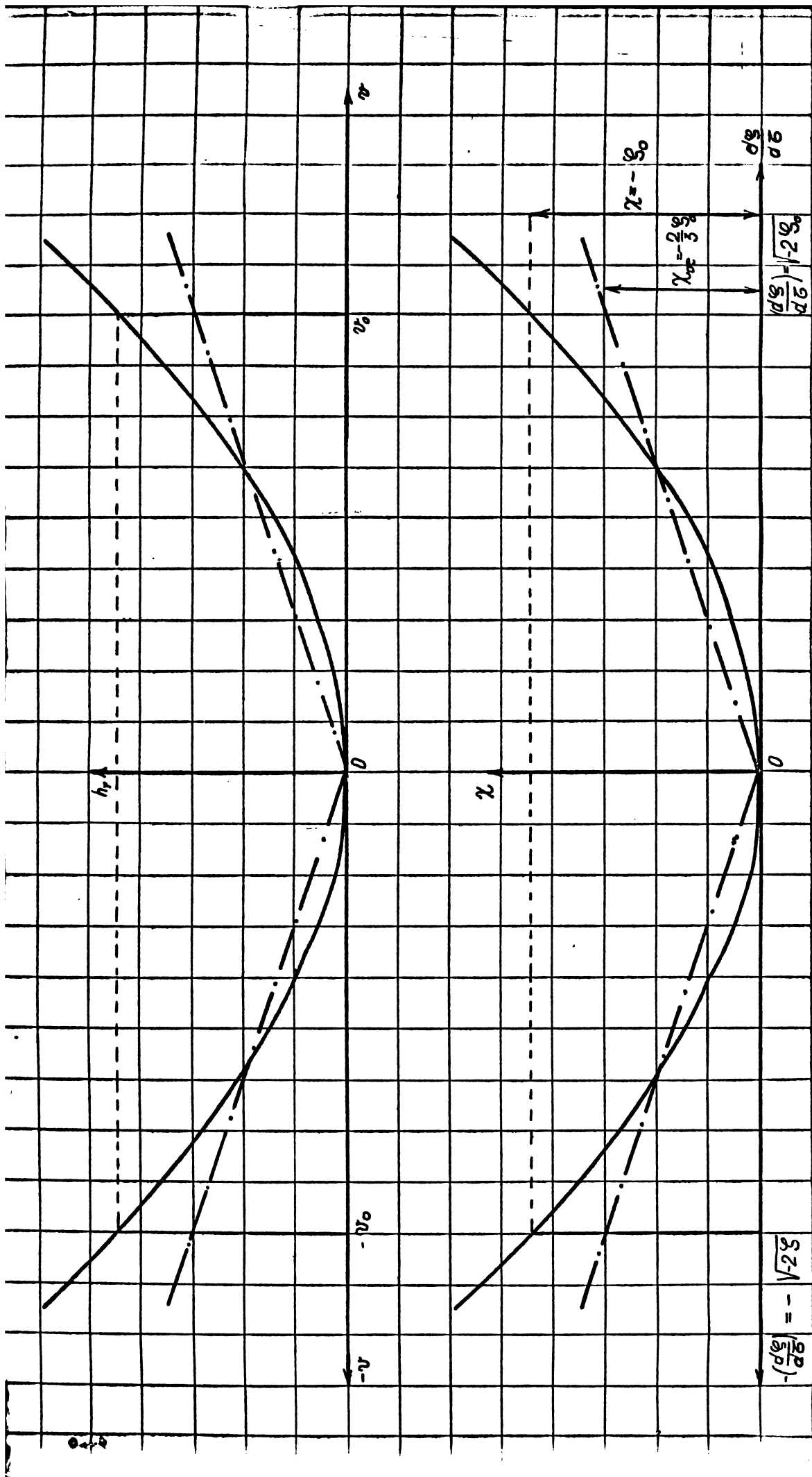


Figura Nr. 1(3) Metoda Profil - echivalenta orizilor

A-II-7-3

Pe de altă parte aceeași arie trebuie să fie cuprinsă și între dreptele echivalente și axa absciselor :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{-2\mathfrak{E}_0} \chi_{oe} \quad (7-4)$$

Deci, pierderea specifică inițială echivalentă de energie este :

$$\boxed{\chi_{oe} = -\frac{2}{3} \mathfrak{E}_0} \quad (7-5)$$

În acest fel pierderea de energie reală sub formă adimensională χ dată de relația (7-2) se poate înlocui cu o pierdere echivalentă χ_e dată de relația liniară în $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$

$$\chi_e = \chi_{oe} \frac{\frac{d\mathfrak{E}}{dt}}{\sqrt{-2\mathfrak{E}_0}} = \frac{1}{3} \sqrt{-2\mathfrak{E}_0} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad (7-6)$$

Rezultă atunci că ecuația oscilațiilor :

$$\frac{d^2\mathfrak{E}}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \right| \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \mathfrak{E} = 0 \quad (7-7)$$

prin liniarizare, după procedeul lui Prașil capătă forma :

$$\boxed{\frac{d^2\mathfrak{E}}{dt^2} + \frac{1}{3} \sqrt{-2\mathfrak{E}_0} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \mathfrak{E} = 0} \quad (7-8)$$

Ecuația caracteristică asociată ecuației de mai sus este

$$r^2 + \frac{1}{3} \sqrt{-2\mathfrak{E}_0} r + 1 = 0 \quad (7-9)$$

A-II-7-4

Rădăcinile ecuației caracteristice sînt :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{6} \sqrt{-2\xi_0} \pm i \sqrt{1 + \frac{1}{18} \xi_0} \quad (7-10)$$

Deoarece în cazuri cu totul excepționale $1 + \frac{1}{18} \xi_0 < 0$ rezultă că în general se obțin două rădăcini complexe.

Soluția generală se poate pune sub forma :

$$\xi = C_1 e^{-\frac{(z-z_0)\sqrt{-2\xi_0}}{6}} \sin \left[(z-z_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} + C_2 \right] \quad (7-11)$$

Pentru aflarea valorilor constantelor de integrare formăm la început derivata :

$$\xi' = C_1 e^{-\frac{(z-z_0)\sqrt{-2\xi_0}}{6}} \left\{ -\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{6} \sin \left[(z-z_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} + C_2 \right] + \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} \cos \left[(z-z_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} + C_2 \right] \right\} \quad (7-12)$$

Folosind condițiile inițiale de tip Cauchy se ajunge la sistemul :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= C_1 \sin C_2 \\ \sqrt{-2\xi_0} &= C_1 \left[-\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{6} \sin C_2 + \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} \cos C_2 \right] \end{aligned} \quad (7-13)$$

Deci a doua ecuație a sistemului :

$$C_1 \cos C_2 = \frac{\sqrt{\xi_0} (6 + \xi_0)}{\sqrt{18 + \xi_0}} \quad (7-14)$$

Deci sistemul (7-13) este echivalent cu sistemul :

A-II-7-5

$$\begin{aligned} C_1 \sin C_2 &= \xi_0 \\ C_2 \cos C_2 &= \frac{\sqrt{-\xi_0(6+\xi_0)}}{\sqrt{18+\xi_0}} \end{aligned} \quad (7-15)$$

Rezolvând sistemul se obțin soluțiile :

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{-6\xi_0(6-\xi_0)}{18+\xi_0}} \\ \operatorname{tg} C_2 &= -\frac{\sqrt{-\xi_0(18+\xi_0)}}{6+\xi_0} \implies C_2 = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18+\xi_0)}}{6+\xi_0} \end{aligned} \quad (7-16)$$

Cu aceste valori ale constantelor de integrare, soluția generală a ecuației liniarizate capătă forma :

$$\xi = \sqrt{\frac{-6\xi_0(6-\xi_0)}{18+\xi_0}} e^{-\frac{(z-z_0)\sqrt{-2\xi_0}}{c}} \sin \left[(z-z_0) \sqrt{1+\frac{\xi_0}{18}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18+\xi_0)}}{6+\xi_0} \right] \quad (7-17)$$

Pentru calculul nivelului maxim ξ_1 , trebuiește determinat mai întâi momentul z_1 în care se realizează acest nivel maxim. Momentul z_1 rezultă din anularea derivatei, deoarece în acest moment viteza de mișcare a nivelului apei în castelul de echilibru este nulă :

$$0 = -\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{c} \sin \left[(z_1-z_0) \sqrt{1+\frac{\xi_0}{18}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18+\xi_0)}}{6+\xi_0} \right] + \sqrt{1+\frac{\xi_0}{18}} \cos \left[(z_1-z_0) \sqrt{1+\frac{\xi_0}{18}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18+\xi_0)}}{6+\xi_0} \right] \quad (7-18)$$

sau :

A-II-7-6

$$\operatorname{tg} \left[(\zeta_1 - \zeta_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18 + \xi_0)}}{6 + \xi_0} \right] = \sqrt{\frac{18 + \xi_0}{-\xi_0}} \quad (7-19)$$

Dezvoltînd în continuare tangenta după formula diferenței a două arce :

$$\frac{\operatorname{tg} \left[(\zeta_1 - \zeta_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} \right] - \frac{\sqrt{-\xi_0(18 + \xi_0)}}{6 + \xi_0}}{1 + \frac{\sqrt{-\xi_0(18 + \xi_0)}}{6 + \xi_0} \operatorname{tg} \left[(\zeta_1 - \zeta_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} \right]} = \sqrt{\frac{18 + \xi_0}{-\xi_0}} \quad (7-20)$$

Explicitînd tangenta din ecuația de mai sus se obține ecuația din care se poate calcula cu ușurință momentul ζ_1 :

$$\operatorname{tg} \left[(\zeta_1 - \zeta_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} \right] = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{18 + \xi_0}{-\xi_0}} \quad (7-21)$$

sau :

$$\frac{\pi}{2} < \zeta_1 - \zeta_0 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{18 - \xi_0}} \operatorname{arctg} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{18 + \xi_0}{-\xi_0}} \right] < \pi \quad (7-22)$$

Pentru determinarea nivelului extrem ξ_1 este nevoie și de expresia sinusului :

$$\sin \left[(\zeta_1 - \zeta_0) \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0(18 + \xi_0)}}{6 + \xi_0} \right] = \sqrt{1 + \frac{\xi_0}{18}} = \sqrt{\frac{18 + \xi_0}{18}} \quad (7-23)$$

A-II-7-7

Se obține atunci, în final, expresia căutată a nivelului maxim :

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\xi_0(6-\xi_0)}{3}} e^{-\sqrt{\frac{\xi_0}{18+\xi_0}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{18+\xi_0}{-\xi_0}}} \quad (7-24)$$

Formula de mai sus nu este convenabilă pentru calcule numerice deoarece tangenta este încă mare în valoare absolută.

Se poate scrie :

$$\operatorname{arctg} \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{18+\xi_0}{\xi_0}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2 \sqrt{\frac{\xi_0}{18+\xi_0}} \approx \frac{\pi}{2} + 2 \sqrt{\frac{-\xi_0}{18+\xi_0}} \quad (7-25)$$

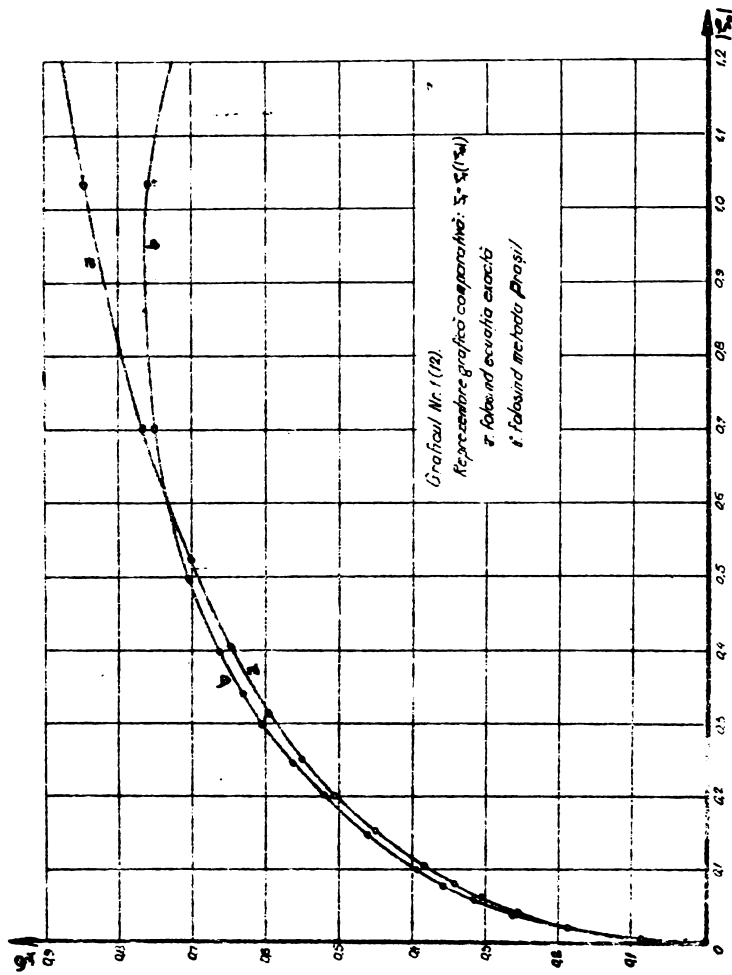
Înlocuind în relația (7-24) se obține formula :

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{-\xi_0(6-\xi_0)}{3}} e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{-\xi_0}{18+\xi_0}} + \frac{2\xi_0}{18+\xi_0}} \approx \sqrt{\frac{-\xi_0(6-\xi_0)}{3}} \left(1 - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{-\xi_0}{18+\xi_0}} + \frac{2\xi_0}{(18+\xi_0)} \right) \quad (7-26)$$

Cu ajutorul formulei (7-26) s-au făcut calcule numerice care au fost trecute în tabela Nr. 1 (17), iar în graficul Nr. 1 (12) se găsește reprezentarea grafică aferentă.

Se constată o concordanță satisfăcătoare, în comparație cu datele numerice care au fost obținute prin folosirea metodei exacte și în orice caz mai bune decât cele obținute prin folosirea altor metode de liniarizare. ~~Petuși, autorul consideră că, folosind altfel metoda liniarizării s-ar putea obține valori și mai~~

A-II-7-11



A-II-9-1

PARTEA INTII A . INCHIDEREA TOTALA RAPIDA.

CASTELE DE ECHILIBDRU SIMPLE

Cap.II - Problema nivelurilor extreme

& 9 . Utilizarea calculatorului electronic "IRIS" al centrului teritorial de calcul Timisoara, metoda aproximativă Krilov-Bogoliubov

In & 5 al acestui capitol s-au expus bazele metodei aproximative Krilov-Bogoliubov și s-a reușit să se obțină în final formule simple efective de calcul pe baza unor aproximări suplimentare aproximărilor cerute de metodă. Cu toată aceste aproximări suplimentare, formulele deduse în acel paragraf, cum s-a arătat acolo, sînt totuși satisfăcătoare.

In scopul creșterii preciziei rezultatelor atît prin eliminarea aproximărilor care nu sînt proprii metodei de aproximare Krilov-Bogoliubov cît și prin eliminarea practic a erorilor s-a întocmit un program în limbajul Fortran IV, care a fost rulat la calculatorul "IRIS" al Centrului teritorial de calcul Timisoara.

Inainte de a trece la prezentarea programului și a rezultatelor obținute se vor prelucra relațiile de la paragraful citat pentru a le prezenta sub forma sub care ele au fost programate.

In prima aproximație, legea de oscilație are forma :

$$S_I = a \cos v = a \cos (\tau - \tau_0 + \nu^2) \quad (9-1)$$

Pentru funcția de timp $a(\tau)$ s-a obținut tot în primă aproximație :

$$\tau_0(a) = \tau_0 + \frac{3T}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right) \implies a(\tau) = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3T} (\tau - \tau_0)} \quad (9-2)$$

A-II-9-2

Pentru determinarea constantelor de integrare a_0 și φ se folosesc condițiile inițiale :

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \mathcal{S}_I = \mathcal{S}_0$$

$$\frac{d\mathcal{S}_I}{d\tau} = \sqrt{-2\mathcal{S}_0} \quad (9-3)$$

Prin derivarea relației (9-1), în care se înlocuiește cu expresia dată de relația (9-2) se obține :

$$\frac{d\mathcal{S}_I}{d\tau} = -a_0 \frac{\left[1 + \frac{2a_0}{3\mathcal{H}}(\tau - \tau_0)\right] \sin(\tau - \tau_0 + \varphi) + \frac{2a_0}{3\mathcal{H}} \cos(\tau - \tau_0 + \varphi)}{\left[1 + \frac{2a_0}{3\mathcal{H}}(\tau - \tau_0)\right]^2} \quad (9-4)$$

2 Considerând condițiile inițiale (9-3) pentru funcția și derivata ei, se obține sistemul de mai jos, în care necunoscutele sînt constantele de integrare a_0 și φ :

$$\mathcal{S}_0 = a_0 \cos \varphi$$

$$\sqrt{-2\mathcal{S}_0} = -a_0 \sin \varphi + \frac{2a_0^2}{3\mathcal{H}} \cos \varphi \quad (9-5)$$

Sistemul de mai sus este echivalent cu sistemul :

$$a_0 \cos \varphi = \mathcal{S}_0$$

$$a_0 \sin \varphi = -\sqrt{-2\mathcal{S}_0} + \frac{2a_0}{3\mathcal{H}} \mathcal{S}_0 \quad (9-6)$$

Prin ridicarea la pătrat și adunare membru cu membru a celor două ecuații se elimină parametrul φ , rămînînd de rezolvat o ecuație de gradul doi în necunoscuta a_0 :

$$a_0^2 = \mathcal{S}_0^2 + \left(-\sqrt{-2\mathcal{S}_0} + \frac{2a_0}{3\mathcal{H}} \mathcal{S}_0\right)^2 \quad (9-7)$$

A-II-9-3

Efectuând câteva calcule elementare se aduce ecuația de mai sus la forma ordonată a ecuației de gradul doi :

$$\left(1 - \frac{4S_0^2}{9T^2}\right)a_0^2 + \frac{4S_0\sqrt{2S_0}}{3T}a_0 - S_0^2 + 2S_0 = 0 \quad (9-8)$$

Soluția ecuației de mai sus este :

$$a_0 = \frac{-\frac{2S_0\sqrt{2S_0}}{3T} + \sqrt{-\frac{8S_0^3}{9T^2} - S_0(2-S_0)\left(1 - \frac{4S_0^2}{9T^2}\right)}}{1 - \frac{4S_0^2}{9T^2}} > 0 \quad (9-9)$$

După determinarea parametrului a_0 , se poate determina și parametrul γ , din sistemul (9-6) :

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{S_0}{a_0} < 0 \\ \sin \gamma &= -\frac{\sqrt{2S_0}}{a_0} + \frac{2S_0}{3T} < 0 \end{aligned} \right\} \gamma < \gamma < \frac{3T}{2} \quad (9-10)$$

Ca o verificare, se constată că este satisfăcută identitatea trigonometrică fundamentală :

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \quad (9-11)$$

Abia acum, după determinarea dependenței celor doi parametri și de condițiile inițiale se poate afirma că este cunoscută complet legea de mișcare în primă aproximație :

$$S_I = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3T}(T - T_0)} \cos(\tau - \tau_0 + \gamma) \quad (9-12)$$

A-II-9-4

Pentru rezolvarea problemei puse în cadrul acestui capitol, anume determinarea nivelului maxim în castelul de echilibru, se determină la început momentul ζ_1 în care este atins acest nivel, sau, ceea ce este echivalent, se determină prima ovasi-semiperioadă

$$\tilde{T}_1 = \zeta_1 - \zeta_0$$

Ecuatia necesară se obține folosind faptul că în momentul în care nivelul apei atinge nivelul maxim în castelul de echilibru se anulează viteza de mișcare a apei în castel :

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{2a_0}{3H} \tilde{T}_1\right) \sin(\tilde{T}_1 + \varphi) + \frac{2a_0}{3H} \cos(\tilde{T}_1 + \varphi) = 0 \quad (9-13)$$

Bin relația de mai sus :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\tilde{T}_1 + \varphi) &= - \frac{1}{\frac{3H}{2a_0} + \tilde{T}_1} \\ \cos(\tilde{T}_1 + \varphi) &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3H}{2} < \tilde{T}_1 + \varphi < 2H \quad (9-14)$$

Ecuatia (9-14) nu permite explicitarea necunoscutei \tilde{T}_1 . ea s-a programat a fi rezolvată de către calculator prin încercări succesive.

Odată determinată din ecuația de mai sus prima ovasi-semiperioadă, se poate scrie formula cu care se calculează nivelul maxim în primă aproximație prin utilizarea metodei Krilov-Bogoliubov :

$$\zeta_{1I} = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3H} \tilde{T}_1} \cos(\tilde{T}_1 + \varphi) \quad (9-15)$$

În ceea ce privește celelalte nivele extreme nu mai este cazul a apela la calculator, întrucât metoda Krilov-Bogoliubov conduce cum s-a arătat la relația explicită suficient de simplă și de exactă :

A-II-9-5

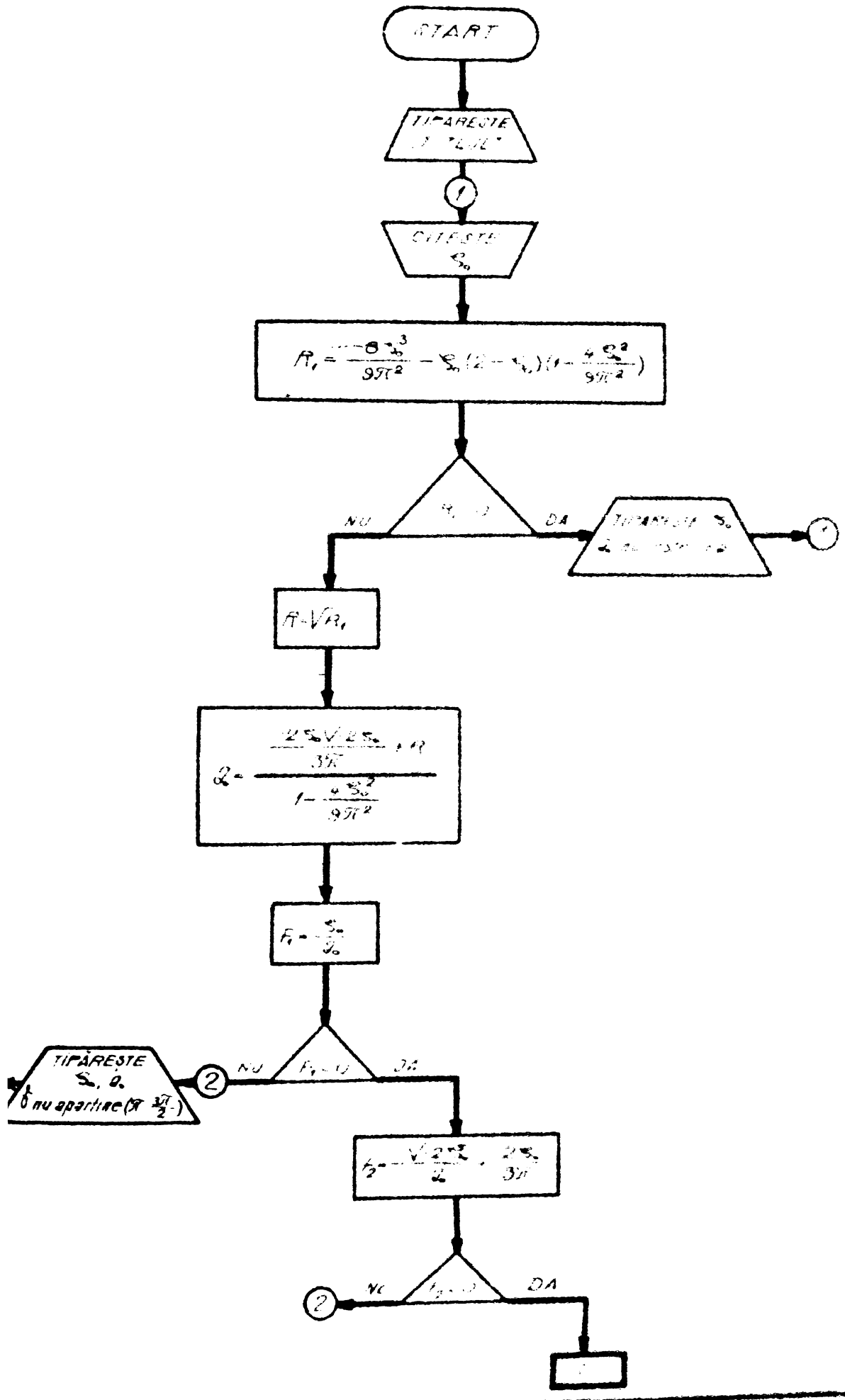
$$S_j = \frac{(-1)^{j-1} S_1}{1 + \frac{2j}{3} S_1}$$

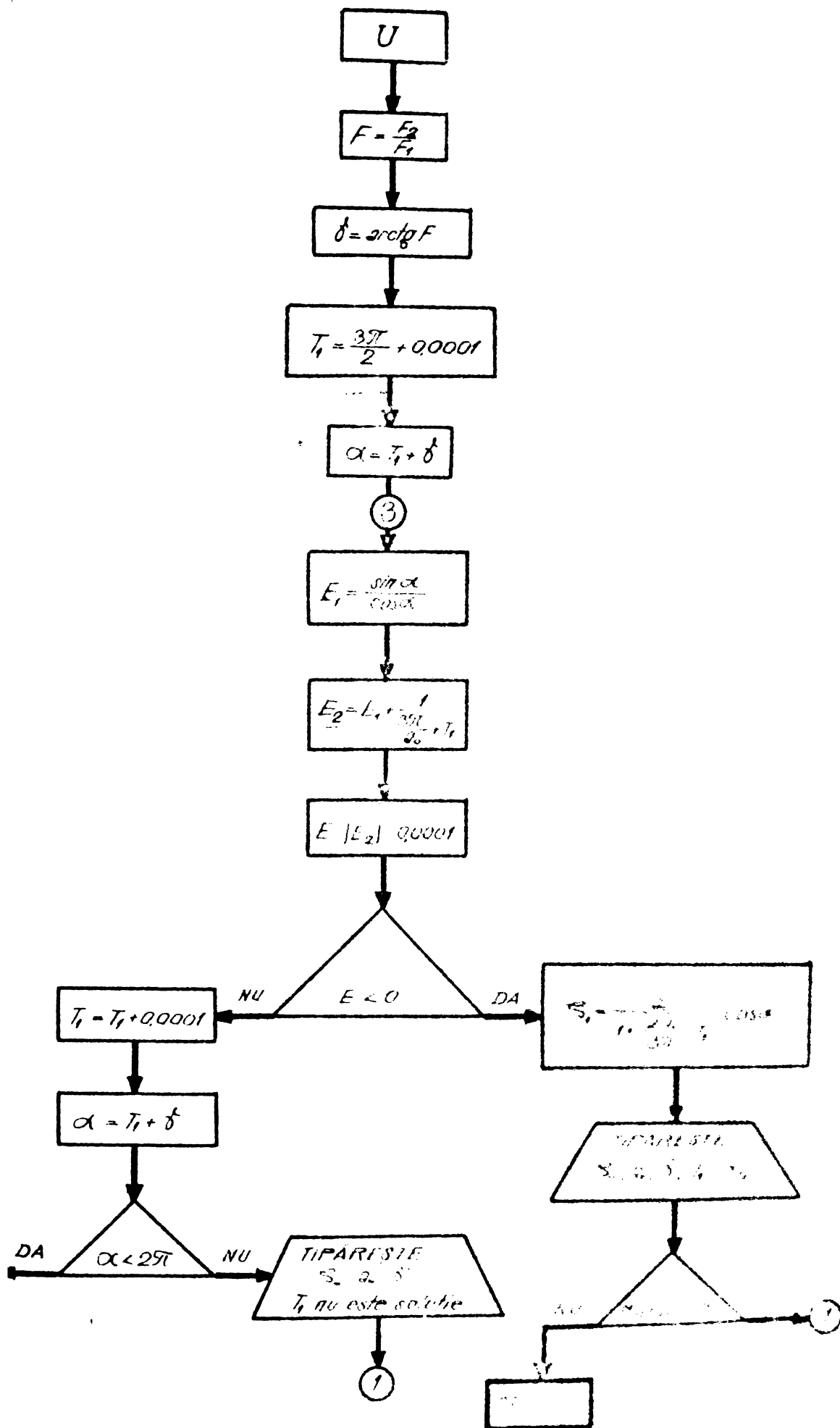
(9-15)

Se dă în continuare schema logică (organigrama) după care a fost programat calculătorul.

În concordanță cu organigrama prezentată pe pagina A-II-9-6 s-a întocmit programul calculătorului în limbajul algebric FORTRAN IV care este redat în paginile A-II-9-7 ; A-II-9-8 ; A-II-9-9 .

Organigramă Fig. 1(4)





A-II-9-7

Denunirea programului : Determinarea saltului maxim în castele de echilibru simple la închiderea totală bruscă prin metoda aproximativă Krilov-Bogoliubov

FORTRAN STARTED

```

01 C Tabelări de funcții                AD 000015
02 C Autor : Arsenie Dumitru           AD 000020
   3 WRITE (108,5)                      AD 000050
   4 5 FORMAT (*1',////1H,55 X',
      TABLOU DE REZUMAT*'/1 H , 54 X,') AD 000055
   5 1 _____ *//1 H , 17 X, ' = ZITAO =',12 X;AO =,
      14 X, ' = GAMA = 1,13X, ' =      =',1      AD 000060
   6 2(4X, = ZITA 1 ='/1 H,16 X, '----- AD 000065
   7 3-----')                          AD 000070
   8 1 READ (105,10,END = 100)ZITAO     AD 000075
   9 10 FORMAT (F 9,6)                  AD 000080
  10 R1=(-8.= ZITAO = 3)/(9. = 3.141592 = 2) -
      - ZITAO = (2.-ZITAO)= (1.--(4.= ZITAO = 2
      1)/(9.= 3.141592 = 2))              AD 000081
      AD 000082
  11 IF(R1.GE..0)GO TO 11                AD 000083
  12 WRITE (108,22) ZITAO                AD 000084
  13 11 R = SQRT (R1)                    AD 000085
  14 22 FORMAT (1H,15X,F9.6,'AO NU ESTE REAL') AD 000087
  15 IF (R.GE.0) GO TO 20                AD 000095
  16 WRITE (108,15) ZITAO                AD 000100
  17 15 FORMAT(1H,15X,F9.6,'X*AO NU ESTE REAL') AD 000105
  18 GO TO 1                              AD 000110
  19 20 AO = (-2.= ZITAO = SQRT (-2.= ZITAO)/(3.= 3.
      14592)+R)/(1.--(4.= ZITAO = 2)/(9.
      -3.141592 = 2))                      AD 000115
  21 F1 = ZITAO / AO                      AD 000120
  22                                     AD 000125

```

A-81-9-8

```

23 IF(F1.LT.0)GO TO 30 AD 000130
24 WRITE (108,25) ZITAO,A0 AD 000135
25 FORMAT (1H,15X,F9.6,9X,E14.7,4X,'GAMA NU APART.
    INTER.(PI,3PI/2)') AD 000140
26 GO TO 1 AD 000145
27 30 F2=-SQRT(-2.* ZITAO)/A0+(2.* ZITAO)/(3.*3.141592)AD 000155
28 IF(F2.LT.0) GO TO 40 AD 000155
29 WRITE (108,35),ZITAO,A0 AD 000160
30 35 FORMAT(1H,15X,F9.6,9X,E14.7,4X,'GAMA NU APART.
    INTER.(PI,3PI/2)') AD 000165
31 GO TO 1 AD 000170
32 40 F = F2/F1 AD 000175
33 GAMA = ATAN(F) AD 000180
34 GAMA = GAMA + 3.141592 AD 000182
    AD 000185
35 T1 = 3.141592/2.+0.0001 AD 000195
36 ALFA = T1 + GAMA AD 000195
37 60 E1 = SIN(ALFA)/COS(ALFA) AD 000195
38 E2 = E1+1./(3.*3.141592/A0 + T1) AD 000200
39 E = ABS(E2)-0.0001 AD 000205
40 IF (E.LT.0)GO TO 50 AD 000210
41 T1=T1+0.0001 AD 000215
42 ALFA = T1 + GAMA AD 000220
43 IF(ALFA.LT.2.*3.141592)GO TO 60 AD 000225
44 WRITE (108,45)ZITAO,A0,GAMA AD 000230
45 45 FORMAT (1H,15X,F9.6,9X,E14.7,4X,E14.7,4X,
    'T1 NU ESTE SOL.DC.DATE AD 000235
    PT.ACEST ZITA 0') AD 000240
47 GO TO 1 AD 000245
48 50 ZITA 1 = A0/(1.+(2.*A0*T1)/(3.* 3.141592))
    x COS(ALFA) AD 000250

```

A-II-9-9

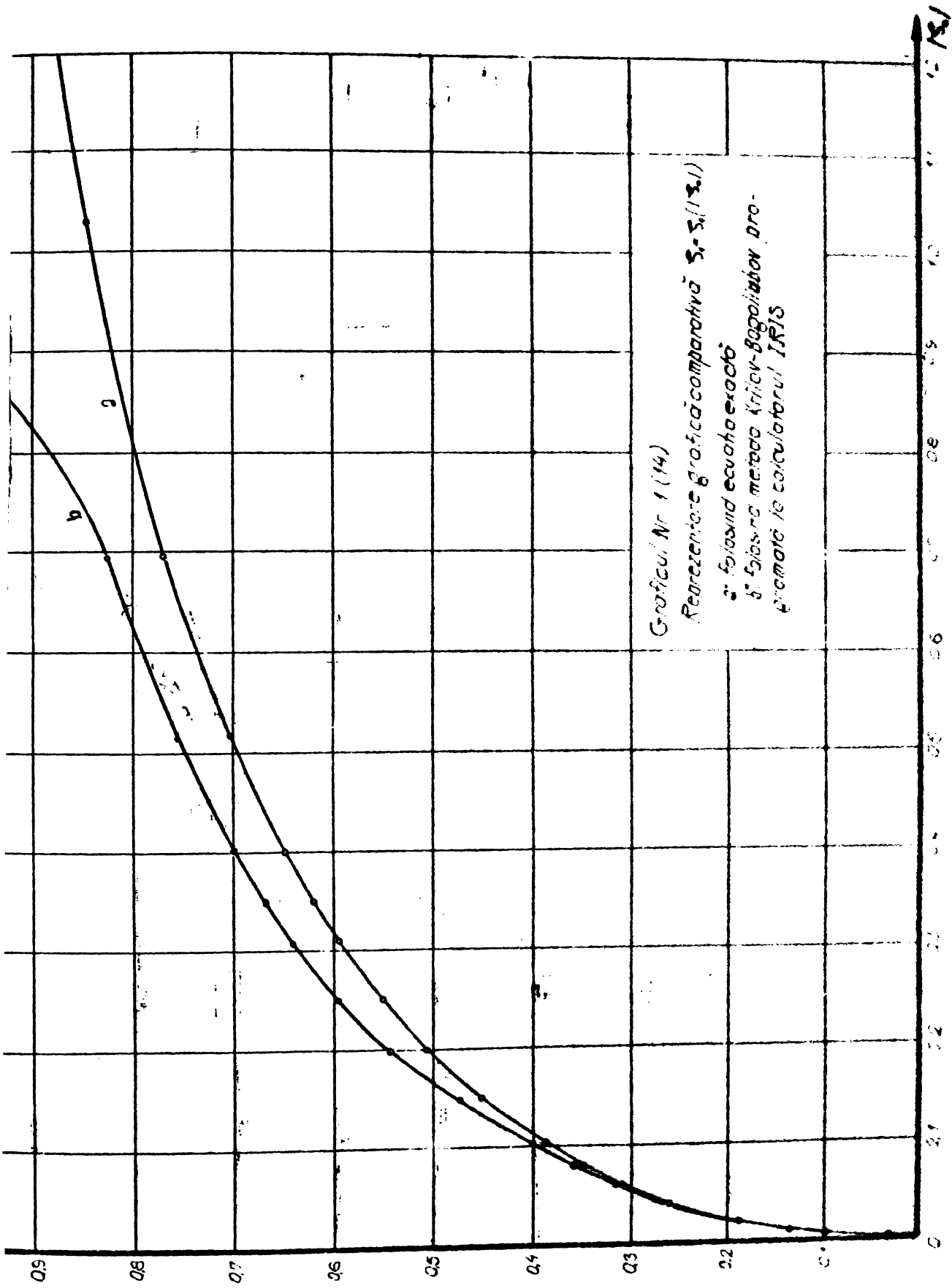
49	WRITE (108,55) ZITA 0, AO, GAMA, T1, ZITA 1	AD 000255
50	55 FORMAT(1H,15X,F9.6,9X,E14.7,4X,E14.7,4X, E14.7,4X,E14.7)	AD 000260
51	GO TO 1	AD 000265
52	100 STOP	AD 000270
53	END	AD 000275

Pentru compilarea programului calculatorul IRIS folosește un interval de timp de 36 secunde.

Pentru calculul numeric corespunzător la 17 valori distincte ale parametrului inițial S_0 , calculatorul a folosit un interval de timp de 50 secunde, ceea ce revine la circa 3 secunde pentru o valoare a parametrului.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul nr.1 (19), iar în graficul nr.1 (14) este dată o reprezentare grafică a acestor valori.

Se constată că în ceea ce privește primul nivel maxim, metoda aproximativă dă, după cum se știa de la început, rezultate bune pentru valori suficient de mici ale parametrului $|S_0|$. Se poate considera că toate cazurile practic întîlnite la amenajările hidrotehnice se pot trata în mod corespunzător prin utilizarea metodei Krilov-Băgoliubov, deoarece ele conduc la valori inițiale $|S_0| < 1$. În orice caz, ceea ce este deosebit de important pentru utilizarea practică a metodei, ea conduce totdeauna la valori ale saltului maxim mai mari decît metoda bazată pe relațiile exacte, fiind deci o metodă acoperitoare.



Graficul Nr 1 (14)
 Reprezentare grafică comparativă S_r-S_i (13.1)
 a: folosind ecuația exactă
 b: folosind metoda lui Runge-Kutta
 promole la calculul IRIS

A-III-1-1

PARTEA INTII (A) - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme& 1. Determinarea intervalului de timp între două elongații extreme prin metoda Simpson

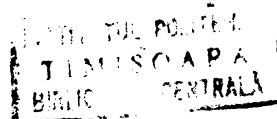
După cum este cunoscut, în cazul unui oscilator conservativ intervalele de timp la care se realizează elongațiile extreme (semiperioade) succesive sînt egale. În cazul unui oscilator cu amortizare pătratică simetrică problema se schimbă calitativ, apărînd o dependență a semiperioadei (de fapt o cvasisemiperioadă) în raport cu factorul care caracterizează amortizarea, respectiv în cazul castelelor de echilibru de parametrul pierderii inițiale de energie.

Această dependență nu a fost încă studiată sistematic, probabil și din cauza faptului că se ajunge la calcule extrem de laborioase.

În cazul castelelor de echilibru interesează în special intervalele de timp după care ^{apare} primul nivel extrem $x_1 > 0$ (maxim) și al doilea nivel extrem $x_2 < 0$ (minim).

Pentru intervalul de timp la care apare primul nivel extrem în literatura de specialitate este citată formula empirică a lui Vogt /4-V/ :

$$T_1 = \left(1 + 0,005 \frac{F}{f}\right) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{FL}{fg}} \quad (1-1)$$



A-III-1-2

In prezentul capitol se caută a se rezolva sistematic această problemă a timpului la care se realizează nivelurile extreme, problemă fără a cărei rezolvare nu se poate aborda o altă problemă deosebit de importantă, aceea a combinațiilor de manevre.

In cuprinsul acestui capitol se va nota $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ momentele la care apar nivelurile ^{extreme} $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots$ în raport cu o origine comună a timpului și cu $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ intervalele de timp, respective, adică :

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 - t_0 \\ T_2 &= t_2 - t_1 \\ &\text{---} \\ T_k &= t_k - t_{k-1} \end{aligned} \tag{1-2}$$

Pentru corespondentele adimensionale respective se vor utiliza notațiile $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots$ pentru momentele la care apar nivelurile extreme $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ în raport cu originea comună a timpului și cu $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ intervalele de timp respective, adică :

$$\begin{aligned} T_1 &= \tau_1 - \tau_0 \\ T_2 &= \tau_2 - \tau_1 \\ &\text{---} \\ T_k &= \tau_k - \tau_{k-1} \end{aligned} \tag{1-3}$$

Evident, se va păstra maniera de tratare a problemelor utilizată pînă în prezent, preferîndu-se variabilele adimensionale pentru avantajele evidente pe care le prezintă.

După cum rezultă imediat din cap.II, în care s-a făcut o primă integrare a ecuației oscilațiilor, pentru a determina

A-III-1-3

intervalul de timp τ_{n+1} , ar trebui efectuată și o a doua integrare a ecuației oscilațiilor, adică ar trebui efectuată integrala :

$$\tau_{n+1} = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \frac{d\xi}{\dot{\xi}} \quad (1-4)$$

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$$

Pe de altă parte, în cap.II pentru ξ s-au obținut expresiile :

$$\dot{\xi} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi - e^{\xi_0 - \xi}} \quad ; \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

$$\dot{\xi} = -(-1)^{j+1} \sqrt{2} \sqrt{1 + (-1)^{j+1} \xi - [1 + (-1)^{j+1} \xi_j] e^{(-1)^{j+1} (\xi - \xi_j)}} \quad (1-5)$$

$$\xi_j \leq \xi \leq \xi_{j+1} \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Intrucît integrala (1-4), în care $\dot{\xi}$ este dat de expresiile (1-5) nu poate fi exprimată cu ajutorul funcțiilor elementare, pentru rezolvarea problemei este necesară utilizarea unor metode aproximative, care să fie suficient de precise pentru ca rezultatele lor să fie acceptate în tehnică.

Printre cele mai utilizate și mai precise metode analitice de integrare *aproximativă* sînt metoda Simpson și metoda Legendre, acest paragraf avînd drept obiect metoda Simpson.

Ca o apreciere generală, se consideră în literatură că metoda lui Simpson este mai simplă de aplicat decît metoda lui Legendre, însă conduce la rezultate mai puțin precise decît metoda lui Legendre, în cazul în care în metoda Legendre se utilizează un polinom Legendre de grad suficient de mare.

În prezentul paragraf se va utiliza metoda lui Simpson

A-III-1-4.

pentru patru intervale după /10-M/, /1-D/.

Aplicarea metodei se face fără dificultăți dacă pe intervalul de integrare, integrandul nu crește nemărginit, ceea ce în problema de față revine la condiția ca derivata $\dot{\xi}$ să nu se anuleze pe intervalul de integrare.

Această condiție, în cazul studiat al oscilațiilor în castelele de echilibru nu se realizează, deoarece la extremitățile intervalului de integrare viteza de mișcare a apei în castel este nulă, deci $\dot{\xi} = 0$.

Pentru a evita această dificultate trebuie făcute adaptări ale metodei.

Să considerăm la început cazul în care $n = 2k$ și să punem integrala (1-4) sub forma :

$$J_{2k+1} = \int_{\xi_{2k}}^{\frac{\xi_{2k} + \xi_{2k+1}}{2}} \frac{d\xi}{\dot{\xi}} + \int_{\frac{\xi_{2k} + \xi_{2k+1}}{2}}^{\xi_{2k+1}} \frac{d\xi}{\dot{\xi}} = J_{2k}' + J_{2k+1}'' \quad (1-6)$$

Înlocuind pe $j = 2k$ în formula (1-5) se obține și expresia derivatei $\dot{\xi}$, care intervine în integralele de mai sus :

$$\dot{\xi} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi - (1 - \xi_{2k}) e^{-(\xi - \xi_{2k})}} \quad (1-7)$$

Se face câte o schimbare de variabilă în fiecare din cele două integrale care apar în (1-6), trecînd la câte o nouă variabilă de integrare, definită prin relațiile :

A-III-1-5

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^2 + \xi_{2k} & \text{în } \mathcal{J}'_{2k+1} \\ \xi &= -\xi^2 + \xi_{2k+1} & \text{în } \mathcal{J}''_{2k+1} \end{aligned} \quad (1-8)$$

Cu aceste schimbări de variabilă, din (1-6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_{2k+1} &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}} \Phi(\xi) d\xi & ; & \quad \Phi(\xi) = \frac{\xi}{\xi(\xi^2 + \xi_{2k})} \\ \mathcal{J}''_{2k+1} &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}} \Psi(\xi) d\xi & ; & \quad \Psi(\xi) = \frac{\xi}{\xi(\xi_{2k+1} - \xi^2)} \end{aligned} \quad (1-9)$$

Pentru a ne convinge că singularitățile de la extremitățile intervalului au fost înlăturate să calculăm :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi(\xi) \longrightarrow \frac{0}{0} \quad (1-10)$$

Pentru ridicarea nedeterminării se aplică teorema lui l'Hopital, derivând expresia de la numitor ca pe o funcție compusă după ce în prealabil am ridicat la pătrat funcția $\Phi(\xi)$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [\Phi(\xi)]^2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{\xi(\xi^2 + \xi_{2k})} = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi \frac{d\xi}{d\xi}} \quad (1-11)$$

Pe de altă parte, din (1-7) rezultă :

A-III-1-6

$$\frac{d\dot{\xi}}{d\xi} = \frac{2[-1 + (1 - \xi_{2k})e^{-(\xi - \xi_{2k})}]}{2\sqrt{1 - \xi - [1 - \xi_{2k}]e^{-(\xi - \xi_{2k})}}} = \frac{[-1 + (1 - \xi_{2k})e^{-(\xi - \xi_{2k})}]}{\dot{\xi}} \quad (1-12)$$

Inlocuind in (1-11) :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [\Phi(\xi)]^2 = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + (1 - \xi_{2k})e^{-\xi^2}} = -\frac{1}{2\xi_{2k}} \quad (1-13)$$

A rezultat pentru limita căutată următoarea valoare finită :

$$\Phi(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{-2\xi_{2k}}} \quad (1-14)$$

Aplicind acum formula aproximativă de integrare Simpson pentru patru intervale se obține :

$$\int_{\xi_{2k+1}}^1 \approx \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{-(\xi_{2k+1} - \xi_{2k})\xi_{2k}}} + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{1}{\xi_{16}} \right] \quad (1-15)$$

$$\xi_j = \xi \left(\xi_{2k} + j \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{32} \right) \quad ; \quad j = 1, 4, 9, 16$$

Procedind analog, se obține valoarea limitei :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Psi(\xi) = \Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\xi_{2k+1}}} \quad (1-16)$$

A-III-1-7

iar prin aplicarea formulei Simpson pentru patru intervale :

$$J_{2k+1}^H \approx \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{12} \left[\frac{1}{S_{16}} + \frac{3}{S_{12}} + \frac{1}{S_{8}} + \frac{1}{S_{4}} + \frac{1}{\sqrt{(S_{2k-1} - S_{2k})S_{2k+1}}} \right] \quad (1-17)$$

$$S_j = S_{2k} + j \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{32}$$

Cunoscînd acum formulele (1-15) și (1-17) se poate da formula cvasisemiperioadei căutate :

$$J_{2k+1}^H \approx \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{(S_{2k+1} - S_{2k})S_{2k}}} + \frac{1}{S_{16}} + \frac{1}{S_{12}} + \frac{1}{S_{8}} + \frac{3}{S_{4}} + \frac{2}{S_{16}} + \frac{3}{S_{12}} + \frac{1}{S_{8}} + \frac{1}{S_{4}} + \frac{1}{\sqrt{(S_{2k+1} - S_{2k})S_{2k+1}}} \right] \quad (1-18)$$

$$S_j = S_{2k} + j \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{32} = \sqrt{2} \sqrt{1 - S_{2k} - j \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{32} - (1 - S_{2k}) e^{-j \frac{S_{2k+1} - S_{2k}}{32}}}$$

În cazul particular în care se calculează J_1 , deoarece viteza nu se anulează în momentul inițial, în calculul lui J_1^H nu mai este necesară substituția și de aceea va dispărea din formulă radicalul respectiv.

Procedînd analog se obține următoarea formulă finală care va fi efectiv ^{utilizată} într-un paragraf viitor :

$$J_1^H \approx \frac{S_1 - S_0}{12} \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_4} + \frac{3}{S_9} + \frac{2}{S_{16}} + \frac{3}{S_{25}} + \frac{1}{S_{36}} + \frac{1}{S_{49}} + \frac{1}{\sqrt{(S_1 - S_0)S_1}} \right] \quad (1-19)$$

$$S_j = S_0 + j \frac{S_1 - S_0}{32} = \sqrt{2} \sqrt{1 - S_0 - j \frac{S_1 - S_0}{32} - e^{-j \frac{S_1 - S_0}{32}}}$$

A-III-1-8

Pentru celălalt caz general, în care $n = 2K - 1$, căruia îi corespunde $\dot{\xi} \leq 0$, se fac următoarele transformări care reduc problema la cazul anterior (în care $\dot{\xi} > 0$):

$$\mathcal{T}_{2K} = \int_{\xi_{2K-1}}^{\xi_{2K}} \frac{d\xi}{\xi} = - \int_{\xi_{2K-1}}^{\xi_{2K}} \frac{d\xi}{-\xi} = \int_{\xi_{2K}}^{\xi_{2K-1}} \frac{d\xi}{(-\xi)} \quad (1-20)$$

Aplicînd acum pas cu pas calculele făcute la determinarea lui \mathcal{T}_{2K+1} se obțin în final următoarele formule de calcul:

$$\mathcal{T}_{2K} \approx \frac{\xi_{2K-1} - \xi_{2K}}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{-(\xi_{2K-1} - \xi_{2K})\xi_{2K}}} + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{25}} + \frac{1}{\xi_{28}} + \frac{1}{\xi_{31}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi_{2K-1} - \xi_{2K})\xi_{2K-1}}} \right] \quad (1-21)$$

$$\xi_j = -\xi \left(\xi_{2K} + j \frac{\xi_{2K-1} - \xi_{2K}}{32} \right) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \xi_{2K} + j \frac{\xi_{2K-1} - \xi_{2K}}{32} - (1 + \xi_{2K-1}) e^{-\frac{(K_{2K-1} - \xi_{2K})(j-1)}{32}}}$$

$$j = 1, 4, 9, 16, 25, 28, 31$$

Se vor explicita din formulele generale stabilite mai sus, formulele de calcul a cvasisemiperioadelor \mathcal{T}_2 și \mathcal{T}_3 :

$$\mathcal{T}_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{-(\xi_1 - \xi_2)\xi_2}} + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{25}} + \frac{1}{\xi_{28}} + \frac{1}{\xi_{31}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)\xi_1}} \right]$$

A-III-1-9

$$\xi_j = -i \left(\xi_{2k} + j \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{32} \right) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \xi_{2k} + j \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{32} - (1 + \xi_{2k-1}) e^{-j(\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \left(1 - \frac{1}{32}\right)}} \quad (1-22)$$

$$j = 1, 4, 9, 16, 23, 28, 31$$

și :

$$\mathcal{J}_0 \approx \frac{\xi_3 - \xi_2}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{-(\xi_3 - \xi_2)\xi_2}} + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{23}} + \frac{1}{\xi_{28}} + \frac{1}{\xi_{31}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi_3 - \xi_2)\xi_3}} \right] \quad (1-23)$$

$$\xi_j = \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_2 - j \frac{\xi_3 - \xi_2}{32} - (1 - \xi_2) e^{-j \frac{\xi_3 - \xi_2}{32}}}$$

Formulele publicate în [12-A]

Să găsim o margine superioară a erorii făcute prin utilizarea acestei metode de aproximare.

După cum este cunoscut dacă se efectuează integrala :

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1-24)$$

prin metoda aproximativă Simpson cu patru intervale și se notează cu \tilde{I} valoarea aproximativă obținută prin metoda Simpson, atunci eroarea absolută este mărginită de $|I - \tilde{I}|$:

$$|I - \tilde{I}| \leq \sup_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{46080} \quad (1-25)$$

În problema cercetată :

$$\left| \mathcal{J}'_{2k+1} - \tilde{\mathcal{J}}'_{2k+1} \right| \leq \sup \left| \Phi^{(4)}(\xi) \right| \cdot \frac{\left(\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2} \right)^{5/2}}{46080}$$

$$0 \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}$$

$$|\tilde{J}_{2k+1}^n - \tilde{J}_{2k+1}^n| \leq \Delta_{\text{up}} |\Psi^{\text{IV}}(\xi)| \cdot \frac{\left(\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}\right)^{5/2}}{46080}$$

$$0 \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \quad (1-26)$$

Pentru a se merge mai departe este necesară calcularea primelor patru derivate ale funcțiilor $\Phi(\xi)$ și $\Psi(\xi)$.

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2}}} \quad (1-27)$$

$$\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} = \frac{(1 - \xi_{2k}) \Phi(\xi)}{1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2}} f(\xi)$$

$$f(\xi) = \frac{1 - e^{-\xi^2} - \xi^2 e^{-\xi^2}}{\xi}; \quad \frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{(2\xi^4 + \xi^2 + 1)e^{-\xi^2} - 1}{\xi^2}$$

$$\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} = \frac{(1 - \xi_{2k}) \Phi(\xi)}{[1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2}]^2} g(\xi)$$

$$g(\xi) = \left[(1 - \xi_{2k}) f(\xi) + 2\xi - 2\xi (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2} \right] f(\xi) + \left[1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2} \right] \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

$$\frac{d^3\Phi(\xi)}{d\xi^3} = \frac{(1 - \xi_{2k}) \Phi(\xi)}{[1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2}]^3} h(\xi)$$

$$h(\xi) = \left[(1 - \xi_{2k}) f(\xi) + 4\xi - 4\xi (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2} \right] g(\xi) + \left[1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{-\xi^2} \right] \frac{dg(\xi)}{d\xi}$$

A-III-1-11

$$\frac{d^4 \Phi(\xi)}{d\xi^4} = \frac{(1-\xi_{2k}) \Phi(\xi)}{\left[1-\xi_{2k}-\xi^2 - (1-\xi_{2k})e^{-\xi^2}\right]^4} i(\xi)$$

$$i(\xi) = \left[(1-\xi_{2k}) f(\xi) + 6\xi - 6\xi(1-\xi_{2k})e^{-\xi^2} \right] h(\xi) + \left[1-\xi_{2k}-\xi^2 - (1-\xi_{2k})e^{-\xi^2} \right] \frac{dh(\xi)}{d\xi}$$

Cum derivata $\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}$ este pozitivă în intervalul de integrare, rezultă că funcția $\Phi(\xi)$ este crescătoare și deci supremul ei va fi atins pentru valoarea $\xi = \sqrt{\frac{\xi_{2k+1}-\xi_{2k}}{2}}$:

$$\sup_{0 \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\xi_{2k+1}-\xi_{2k}}{2}}} \Phi(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi_{2k+1}-\xi_{2k}}}{\sqrt{1-\xi_{2k}-\frac{\xi_{2k+1}-\xi_{2k}}{2} - (1-\xi_{2k})e^{-(\xi_{2k+1}-\xi_{2k})}}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1-28)$$

$$\sup (1-\xi_{2k}) < \frac{3}{2}$$

Se vor face în continuare următoarele aproximări, bazate pe dezvoltarea în serie a funcției exponențiale și păstrarea în relații doar a unui număr finit de termeni :

$$e^{-\xi^2} \cong 1 - \xi^2 + \frac{\xi^4}{2} \quad (1-29)$$

$$f(\xi) \cong \frac{1 - (1 - \xi^2 + \frac{\xi^4}{2}) - \xi^2 (1 - \xi^2 + \frac{\xi^4}{2})}{\xi} = \frac{\xi^3}{2} (1 - \xi^2)$$

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} \cong \frac{(2\xi^4 + \xi^2 + 1)(1 - \xi^2 + \frac{\xi^4}{2}) - 1}{\xi^2} = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi^4 + \xi^6$$

$$1 - \xi_{2k} - \xi^2 - (1 - \xi_{2k})e^{-\xi^2} \cong -\xi_{2k}\xi^2 - \frac{1 - \xi_{2k}}{2}\xi^4$$

A-III-1-12

$$g(\xi) \cong -\frac{1}{2} \xi_{2k} \xi^4 + \frac{1}{2} \xi^6 - \frac{5 - \xi_{2k}}{4} \xi^8 + \frac{1 - \xi_{2k}}{4} \xi^{10}$$

$$\frac{dg(\xi)}{d\xi} \cong -2 \xi_{2k} \xi^3 + 3 \xi^5 - 2(5 - \xi_{2k}) \xi^7 + \frac{5(1 - \xi_{2k})}{2} \xi^9$$

$$h(\xi) \cong \frac{-\xi_{2k}(9 - 5\xi_{2k})}{4} \xi^7 + \frac{3 + 2\xi_{2k} - 5\xi_{2k}^2}{4} \xi^9 - \frac{5(1 - \xi_{2k})}{4} \xi^{11}$$

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi} \cong -\frac{7\xi_{2k}(9 - 5\xi_{2k})}{4} \xi^6 + \frac{9(3 + 2\xi_{2k} - 5\xi_{2k}^2)}{4} \xi^8 - \frac{55(1 - \xi_{2k})}{4} \xi^{10}$$

$$i(\xi) \cong \frac{\xi_{2k}^2(9 - 5\xi_{2k})}{4} \xi^8 - \frac{9\xi_{2k}(8 - 8\xi_{2k} + 5\xi_{2k}^2)}{8} \xi^{10} +$$

$$+ \frac{12 + 89\xi_{2k} - 106\xi_{2k}^2 - 55\xi_{2k}^3}{8} \xi^{12} - \frac{7(3 - \xi_{2k} - 7\xi_{2k}^2 + 5\xi_{2k}^3)}{8} \xi^{14}$$

Considerând mărginirile $|\xi_{2k+1} - \xi_{2k}| < 1$ și
 $-\xi_{2k} < \frac{1}{2}$ se obține :

$$\sup |i(\xi)| < 8$$

(1-30)

$$0 \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}$$

In fine se poate acum da o margine superioară a derivatei de ordinul patru :

$$\sup_{0 \leq \xi \leq \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}} |\Phi^{IV}(\xi)| \leq \frac{\sup(1 - \xi_{2k}) \cdot \sup |\Phi(\xi)|}{\sup [1 - \xi_{2k} \xi^2 - (1 - \xi_{2k}) \xi^4]} \sup |i(\xi)| \leq \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8}{(\frac{1}{2})^4} < 140$$

(1-31)

Revenind atunci la relația (1-26) care permite majorarea erorii făcute :

$$|\mathcal{J}'_{2k+1} - \tilde{\mathcal{J}}'_{2k+1}| \leq \frac{140}{46080} < 0,004$$

(1-32)

Admițând acoperitor prin dezvoltările în serie făcute eroarea ϵ crescut, se va considera în final :

$$|\mathcal{J}'_{2k+1} - \tilde{\mathcal{J}}'_{2k+1}| < 0,005$$

(1-33)

Procedând perfect analog se obține și :

$$|\mathcal{J}''_{2k+1} - \tilde{\mathcal{J}}''_{2k}| < 0,005$$

(1-34)

A-III-1-24

Rezultă că în determinarea semiperioadelor de oscilație prin aplicarea metodei Simpson nu se face o eroare mai mare de 1 %, ceea ce reprezintă o precizie suficientă a calculelor :

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_{2k+1} - \tilde{T}_{2k+1}| < 0,01 = 1\% \\ |\tilde{T}_{2k} - \tilde{T}_{2k}| < 0,01 = 1\% \end{aligned} \quad (1-35)$$

O confirmare parțială a corectitudinii calculelor privind mărginirea erorii se poate căpăta dacă se cercetează limita către care tind cvasi semiperioadele T_n , respectiv sub formă adimensională \tilde{T}_n , atunci când timpul crește nemărginit, respectiv $n \rightarrow \infty$. S-a arătat că în acest caz $\frac{S_n}{S_{n+1}} \rightarrow -1$

Pe de altă parte, din punct de vedere fizic, comportarea apei se apropie în acest caz din ce în ce mai mult de a unui lichid perfect la care se cunoaște valoarea exactă a semiperioadei limită $T_n = T_\infty = \pi \cong 3,1416$

În trecerea la limită apar următoarele limite importante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = 0 ; \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{2k-1}}{S_{2k}} = -1 \quad (1-36)$$

Dezvoltînd în serie exponențialele care apar se ajunge în

final la :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k+1} = \frac{1}{12} \left[2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{32}(1-\frac{1}{32})}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{32}(1-\frac{4}{32})}} + \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{32}(1-\frac{9}{32})}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{32}(1-\frac{16}{32})}} + \frac{3}{\sqrt{\frac{23}{32}(1-\frac{23}{32})}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{28}{32}(1-\frac{28}{32})}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{31}{32}(1-\frac{31}{32})}} \right] \cong 3,1429 \end{aligned} \quad (1-37)$$

Eroarea relativă dată de metoda Simpson este neglijabilă:

$$\mathcal{E} = \frac{T_\infty - \tilde{T}_\infty}{T_\infty} = 0,043\% \quad (1-38)$$

A-III-2-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme& 2.- Determinarea limitei cvasi semiperioadelor cînd timpul crește nemărginit, prin metoda Simpson

O confirmare a calculelor privind mărginirea erorii o putem avea dacă cercetăm limita spre care tind semiperioadele T_n , respectiv sub formă adimensională \tilde{T}_n , atunci cînd timpul crește nemărginit, caz în care și $n \rightarrow \infty$.

Din punct de vedere fizic, cu creșterea lui n , două elongații extreme succesive ξ_n și ξ_{n+1} se apropie din ce în ce în modul una de alta, egalitatea obținîndu-se abia la limită cînd ambele se anulează. Deci cu cît n crește, mișcarea oscilatorie studiată cu amortizare pătratică simetrică se apropie din ce în ce mai mult de mișcarea la care modulul a două elongații succesive extreme este același, adică de mișcarea lichidului ideal. Pe de altă parte în cazul în care în ecuația oscilațiilor neglijăm termenul pătratic disipativ, atunci aceasta devine tocmai ecuația oscilațiilor unui lichid ideal, la care după cum este bine cunoscut, semiperioada este egală cu π . Faptul că din ecuația oscilațiilor cu amortizare pătratică se va obține sau nu la limită aceeași valoare nu poate fi stabilit de la început, deoarece s-ar putea ca din punct de vedere matematic să avem de-a

A-III-3-2

face cu o problemă singulară.

Intrucît prin trecerea la limită apar la un moment dat nedeterminări, se va considera pentru ridicarea acestora că încă timpul crește nemărginit atunci există următoarele limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{2k} = -0 \tag{2-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{2k+1} = +0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k}}{\xi_{2k+1}} = -1 ; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k-1}}{\xi_{2k}} = -1$$

Expresiile deduse în paragraful anterior se vor prelucra pentru a permite ridicarea nedeterminării :

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{12} \left[\sqrt{1 - \frac{\xi_{2k-1}}{\xi_{2k}}} + (\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{25}} + \frac{1}{\xi_{36}} + \frac{1}{\xi_{49}} \right) + \sqrt{1 - \frac{\xi_{2k}}{\xi_{2k-1}}} \right] \tag{2-2}$$

Pe de altă parte, dezvoltînd exponențiala în serie :

$$\frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{\xi_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(\xi_{2k-1} - \xi_{2k})^2}{1 + \xi_{2k} + j \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{32} + (1 + \xi_{2k-1}) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{32}\right) (\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{32}\right)^2 (\xi_{2k-1} - \xi_{2k})^2 + \dots \right]}} \tag{2-3}$$

Prelucrînd convenabil expresia de mai sus, după simplificarea cu factorul nenul $(\xi_{2k-1} - \xi_{2k})$:

(2-4)

A-III-2-3

$$\frac{S_{2k-1} - S_{2k}}{S_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{S_{2k-1} - S_{2k}}{\left(1 - \frac{1}{32}\right) \left[S_{2k-1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{32}\right) (S_{2k-1} - S_{2k}) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{32}\right) S_{2k-1} (S_{2k-1} - S_{2k}) + \dots \right]}} \quad (2-4)$$

sau încă :

$$\frac{S_{2k-1} - S_{2k}}{S_j} = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{32}\right)}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{S_{2k}}{S_{2k-1}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{32}\right) \frac{S_{2k-1}}{1 - \frac{S_{2k}}{S_{2k-1}}} + \dots}} \quad (2-5)$$

Relația de mai sus permite acum determinarea cu ușurință a limitei căutate :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{2k-1} - S_{2k}}{S_j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{32} \left(1 - \frac{1}{32}\right)}} \quad (2-6)$$

Rezultă atunci că formula lui Simpson conduce la următoarea valoare limită a cvasisemiperioadei :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} T_{2k} = \frac{1}{12} & \left[2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{32} \left(1 - \frac{1}{32}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{32} \left(1 - \frac{4}{32}\right)}} + \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{32} \left(1 - \frac{9}{32}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{32} \left(1 - \frac{16}{32}\right)}} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{\sqrt{\frac{23}{32} \left(1 - \frac{23}{32}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{28}{32} \left(1 - \frac{28}{32}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{31}{32} \left(1 - \frac{31}{32}\right)}} \right] \quad (2-7) \end{aligned}$$

Efectuind calculele numerice, considerind radicalii cu cîte cinci zecimale :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2k} = \frac{1}{6} \left[\sqrt{2} + 32 \left(\frac{1}{\sqrt{31}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{23}} + \frac{1}{16} \right) \right] \approx 3,1429 \quad (2-8)$$

Evident nu avem de-a face cu o problemă singulară, căci valoarea exactă este :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2k} = \pi = 3,1416 \quad (2-9)$$

Se observă că eroarea absolută a metodei pentru acest caz este de sub 0,005, deci mai mică decît marginea superioară a erorii stabilită la paragraful anterior.

De asemenea se mai observă că metoda dă o aproximație prin adaus a semiperioadei.

Să calculăm acum și cealaltă limită $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{2k+1}$. Procedind la început la transformări analoge cazului anterior :

$$\mathcal{F}_{2k+1} = \frac{1}{12} \left[\sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_{2k+1}}{\mathcal{E}_{2k}}} + (\mathcal{E}_{2k+1} - \mathcal{E}_{2k}) \left(\frac{1}{\mathcal{E}_1} + \frac{1}{\mathcal{E}_4} + \frac{3}{\mathcal{E}_9} + \frac{2}{\mathcal{E}_k} + \frac{3}{\mathcal{E}_{25}} + \frac{1}{\mathcal{E}_{49}} + \frac{1}{\mathcal{E}_{81}} \right) + \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_{2k+1}}{\mathcal{E}_{2k}}} \right] \quad (2-10)$$

Trecînd la limită :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{2k+1} - \mathcal{E}_{2k}}{\mathcal{E}_j} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{32} \left(1 - \frac{1}{32} \right)}} \quad ; j = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \quad (2-11)$$

Este interesant faptul că, deși în metoda Simpson se ajunge la formule diferite pentru calculul semiperioadelor \mathcal{F}_{2k} și \mathcal{F}_{2k+1} , totuși la limită formulele diferite conduc exact la aceeași valoare.

A-III-3-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme

& 3.- Determinarea semiperioadelor prin metoda integrării aproximative a lui Legendre

Metoda lui Legendre se recomandă atunci cînd se urmărește o determinare cît mai exactă a intervalelor de timp.

Ca și în metoda Simpson, și aici este necesar a se elimina singularitățile de la extremitățile intervalului de integrare, extremități în care derivata $\dot{\xi}$ se anulează.

Pentru a determina intervalul de timp sub formă adimensională, care se scurge între nivelul extrem ξ_n și nivelul extrem ξ_{n+1} , cu alte cuvinte pentru determinarea cvasisemi-perioadei T_{n+1} , trebuie efectuată integrala :

$$T_{n+1} = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \frac{d\xi}{\dot{\xi}(\xi)} \quad (3-1)$$

în care :

$$\dot{\xi} = -(-1)^{n+1} \sqrt{2} \sqrt{1+(-1)^{n+1} \xi - [1+(-1)^{n+1} \xi_n] e^{(-1)^{n+1}(\xi - \xi_n)}} \quad (3-2)$$

Se consideră la început cazul în care $n = 2k$.

Pe baza proprietății de aditivitate a integralelor definite :

$$J_{2k+1} = \int_{\xi_{2k}}^{\frac{\xi_{2k} + \xi_{2k+1}}{2}} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{\frac{\xi_{2k} + \xi_{2k+1}}{2}}^{\xi_{2k+1}} \frac{d\xi}{\xi} = J_{2k+1}^I + J_{2k+1}^{II} \quad (3-3)$$

Se fac respectiv substituțiile :

$$\xi = \xi^2 + \xi_{2k} \quad \text{în } J_{2k+1}^I \quad (3-4)$$

$$\xi = -\xi^2 + \xi_{2k+1} \quad \text{în } J_{2k+1}^{II}$$

Cu aceste substituții :

$$J_{2k+1}^I = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}} \Phi(\xi) d\xi \quad ; \quad \Phi(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2 (\xi^2 + \xi_{2k})} \quad (3-5)$$

$$J_{2k+1}^{II} = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}} \Psi(\xi) d\xi \quad ; \quad \Psi(\xi) = \frac{\xi}{\xi (\xi_{2k+1} - \xi^2)}$$

Deoarece pînă aici s-au repetat calculele de la paragraful conținînd metoda Simpson nu se va mai demonstra și aici că în acest fel au fost eliminate singularitățile de la extremitățile

A-III-3-3

intervalului de integrare, intrucit acest lucru a fost demonstrat în cadrul paragrafului amintit.

Se face acum o nouă schimbare de variabilă care transformă intervalul de integrare în segmentul $[-1, 1]$:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \chi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \quad (3-6)$$

Explicitînd noua variabilă din relația de mai sus și diferențiînd se obțin expresiile :

$$\chi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}} \xi - 1 \quad (3-7)$$

$$d\chi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}} d\xi$$

Integralele (3-5) în noua variabilă se scriu atunci :

$$J_{2k+1}^I = \int_{-1}^1 \Phi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \right] \cdot \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} d\chi \quad (3-8)$$

$$J_{2k+1}^{II} = \int_{-1}^1 \Psi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \right] \cdot \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} d\chi$$

în care :

$$\Phi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \right] = \frac{\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}}{\xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (\chi+1)^2} \quad (3-9)$$

A-III-3-4

$$\psi \left[\frac{1}{2} (\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}} \right] = \frac{\frac{1}{2} (\chi+1) \sqrt{\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{2}}}{\xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (\chi+1)^2}$$

Introducând relațiile (3-9) în (3-8), acestea din urmă devin :

$$J_{2k+1}^I = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \int_{-1}^1 \frac{(\chi+1) d\chi}{\xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (\chi+1)^2} \quad (3-10)$$

$$J_{2k+1}^{II} = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \int_{-1}^1 \frac{(\chi+1) d\chi}{\xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (\chi+1)^2}$$

Pentru efectuarea integralelor se utilizează un polinom de interpolare Legendre de gradul 7 (șapte). Zerourile acestui polinom în intervalul de integrare considerat / -1 , 1 / sînt notate cu a_j și au valorile :

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_7 = 0,94911 \\ a_2 &= -a_6 = 0,74153 \\ a_3 &= -a_5 = 0,405855 \\ a_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3-11)$$

Aplicînd metoda aproximativă de integrare Legendre integralelor (3-10) se obține :

$$J_{2k+1}^I = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \psi_{2k+1}(a_j) \quad (3-12)$$

$$J_{2k+1}^{II} = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \psi_{2k+1}(a_j)$$

A-III-3-5

în care a_j sînt zerourile polinomului Legendre, A_j sînt constante avînd valorile :

$$A_1 = A_7 = 0,12948$$

$$A_2 = A_6 = 0,27970$$

$$A_3 = A_5 = 0,38183 \quad (3-13)$$

$$A_4 = 0,41796$$

iar funcțiile $\varphi_{2k+1}(a_j)$ și $\psi_{2k+1}(a_j)$ au expresiile :

$$\varphi_{2k+1}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sum_{i=1}^k \left[\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 + \xi_{2k} \right]} \quad (3-14)$$

$$\psi_{2k+1}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sum_{i=1}^k \left[\xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 \right]}$$

Deci formula finală de calcul a unei cvasi semiperioade impare, sub formă adimensională este :

$$g_{2k+1} = g_{2k+1}^{(I)} + g_{2k+1}^{(II)} = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_{2k+1}(a_j) + \psi_{2k+1}(a_j) \right] \quad (3-15)$$

în care $a_j, A_j, \varphi_{2k+1}(a_j)$ și $\psi_{2k+1}(a_j)$ au semnificațiile de mai sus.

Trecînd acum la cvasi semiperioadele pare :

$$g_{2k} = \int_{\xi_{2k-1}}^{\xi_{2k}} \frac{d\xi}{\xi(\xi)} = - \int_{\xi_{2k}}^{\xi_{2k-1}} \frac{d\xi}{\xi(\xi)} = \int_{\xi_{2k}}^{\xi_{2k-1}} \frac{d\xi}{(-\xi)} \quad (3-16)$$

A-III-3-6

Folosind și aici proprietatea de aditivitate a integralei:

$$J_{2k} = \int_{\frac{s_{2k} + s_{2k-1}}{2}}^{\frac{s_{2k} + s_{2k-1}}{2}} \frac{d\omega}{\omega} + \int_{\frac{s_{2k} + s_{2k-1}}{2}}^{\omega_{2k-1}} \frac{d\omega}{\omega} = J_{2k}^I + J_{2k}^{II} \quad (3-17)$$

Se fac respectiv substituțiile :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^2 + s_{2k} \quad \text{în } J_{2k}^I \\ \omega &= -\omega^2 + s_{2k-1} \quad \text{în } J_{2k}^{II} \end{aligned} \quad (3-18)$$

și se obține astfel :

$$\begin{aligned} J_{2k}^I &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{s_{2k-1} - s_{2k}}{2}}} \Phi(\xi) d\xi \quad ; \quad \Phi(\xi) = \frac{-\omega}{\omega(\omega^2 + s_{2k})} \\ J_{2k}^{II} &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{s_{2k-1} - s_{2k}}{2}}} \Psi(\xi) d\xi \quad ; \quad \Psi(\xi) = \frac{-\omega}{\omega(\omega_{2k-1} - \omega^2)} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Se face și în acest caz schimbarea de variabilă care transformă intervalul de integrare în segmentul $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_{2k-1} - s_{2k}}{2}} (\chi + 1) \\ d\omega &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_{2k-1} - s_{2k}}{2}} d\chi \end{aligned} \quad (3-20)$$

A-III-3-7

Cu noua variabilă χ integralele de mai sus devin :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2k}^I &= \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \int_{-1}^1 \Phi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \right] d\chi \\ \mathcal{I}_{2k}^{II} &= \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \int_{-1}^1 \Psi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \right] d\chi \end{aligned} \quad (3-21)$$

in care :

$$\begin{aligned} \Phi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \right] &= \frac{-\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}}}{\sqrt{\mathcal{S}_{2k} + \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8}(\chi+1)^2}} \\ \Psi \left[\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}} \right] &= \frac{-\frac{1}{2}(\chi+1) \sqrt{\frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{2}}}{\sqrt{\mathcal{S}_{2k-1} - \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8}(\chi+1)^2}} \end{aligned} \quad (3-22)$$

Prelucrând relațiile de mai sus ele se pot pune sub

forma :

$$\mathcal{I}_{2k}^I = \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{4} \int_{-1}^1 \frac{\chi+1}{\sqrt{\mathcal{S}_{2k} + \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8}(\chi+1)^2}} d\chi \quad (3-23)$$

$$\mathcal{I}_{2k}^{II} = \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{4} \int_{-1}^1 \frac{\chi+1}{\sqrt{\mathcal{S}_{2k-1} - \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8}(\chi+1)^2}} d\chi$$

A-III-3-8

Folosind același polinom de interpolare Legendre ca și în cazul cvazi semiperioadelor impare se obține formula finală. căutată :

$$\mathcal{T}_{2k} = \mathcal{T}_{2k}^I + \mathcal{T}_{2k}^{II} = \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\mathcal{Y}_{2k}(a_j) + \mathcal{Y}_{2k}(a_j) \right]; k=1,2,3,\dots \quad (3-24)$$

în care a_j și A_j au semnificațiile cunoscute, iar funcțiile \mathcal{Y}_{2k} și \mathcal{Y}_{2k} au expresiile :

$$\mathcal{Y}_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{-\mathcal{S} \left[\mathcal{S}_{2k} + \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8} (1+a_j)^2 \right]} \quad (3-25)$$

$$\mathcal{Y}_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{-\mathcal{S} \left[\mathcal{S}_{2k-1} - \frac{\mathcal{S}_{2k-1} - \mathcal{S}_{2k}}{8} (1+a_j)^2 \right]}$$

În cazul particular în care vrem să calculăm intervalul de timp \mathcal{T}_1 , care trece din momentul τ_0 la care se produce închiderea bruscă și pînă în momentul τ_1 la care se atinge nivelul maxim, formulele de mai sus nu se aplică, de aceea este necesar un calcul special.

Aplicînd proprietatea de activitate a integralei :

$$\mathcal{T}_1 = \int_{\tau_0}^{\frac{\tau_0 + \tau_1}{2}} \frac{d\mathcal{S}}{\dot{\mathcal{S}}(\mathcal{S})} + \int_{\frac{\tau_0 + \tau_1}{2}}^{\tau_1} \frac{d\mathcal{S}}{\dot{\mathcal{S}}(\mathcal{S})} = \mathcal{T}_1^I + \mathcal{T}_1^{II} \quad (3-26)$$

În prima integrală, la care viteza nu se anulează la extremitatea intervalului nu este necesar a se mai trece la varia-

A-III-3-9

bila ξ , in schimb in a doua integrală acest lucru este necesar $\xi = \xi_1 - \xi^2$:

$$J_1' = \int_{\xi_0}^{\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$J_1'' = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{2}}} \psi(\xi) d\xi ; \quad \psi(\xi) = \frac{\xi}{\xi_1 - \xi^2} \quad (3-27)$$

Se trece acum la variabila χ , trecere cerută de necesitatea ca intervalul de integrare să fie segmentul $[-1, +1]$ și definită de relațiile :

$$\xi = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \chi + \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{2}} (\chi + 1) \quad (3-28)$$

In variabila χ , integralele din (3-27) devin :

$$J_1' = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi \left(\frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \chi + \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4} \right)} d\chi$$

$$J_1'' = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \int_{-1}^1 \frac{\chi + 1}{\xi \left[\xi_1 - \frac{\xi_1 - \xi_0}{8} (\chi + 1)^2 \right]} d\chi \quad (3-29)$$

Formula finală de calcul a primei cvazi semiperioade este in metoda Legendre : [12-A]

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_1'' = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_1(a_j) + \psi_1(a_j) \right] \quad (3-30)$$

in care semnificația constantelor a_j , A_j a fost dată anterior, iar funcțiile φ_1 și ψ_1 au expresiile de mai jos :

$$\varphi_1(a_j) = \frac{1}{\xi_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi_0}{4} a_j + \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4} \right)} \quad (3-31)$$

$$\psi_1(a_j) = \frac{1 + a_j}{\xi_1 \left[\xi_1 - \frac{\xi_1 - \xi_0}{8} (1 + a_j)^2 \right]}$$

Formulele stabilite în acest paragraf se vor utiliza pentru efectuarea calculului numeric în paragrafele următoare.

A-III-4-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIERU SIMPLE

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme

& 4.- Determinarea limitei cvasi^{semi}perioadelor când timpul crește nemărginit prin metoda Legendre

Deoarece în această metodă autorul nu cunoaște o formulă de mărginire a erorii, este important a cerceta cazul limită, adică să se găsească limita spre care tind semiperioadele T_n , respectiv sub formă adimensională \mathcal{T}_n atunci când timpul crește nemărginit, caz în care și $n \rightarrow \infty$.

Pentru acest caz se cunoaște valoarea exactă a semiperioadei și anume :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{2k+1} = \pi \quad (4-1)$$

Cunoscînd valoarea limită exactă, se poate stabili dacă în acest caz limită metoda Legendre dă o soluție aproximativă prin adaus sau prin lipsă și în plus dacă este sau nu mai precisă decît metoda Simpson.

Să considerăm la început cvasisemiperioadele impare \mathcal{T}_{2k+1} .
La paragraful anterior s-a stabilit formula generală de

A-III-4-2

calcul a cvasi semiperioadelor impare :

$$\tilde{f}_{2k+1} = \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_{2k+1}(a_j) + \psi_{2k+1}(a_j) \right]; \quad k=1,2,3,\dots \quad (4-2)$$

în care A_j și a_j sînt constante ale cîror valori sînt cunoscute.

Deoarece și aici printr-o trecere directă la limită s-ar obține o nedeterminare de tip zero pe zero, este necesară o oarecare prelucrare a expresiilor. Observăm că se poate scrie :

$$\varphi_{2k+1}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{(1-\xi_{2k}) \left[1 - e^{-\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2} \right] - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2}} \quad (4-3)$$

Se dezvoltă exponențiala în serie de puteri :

$$e^{-\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2} = 1 - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 + \frac{(\xi_{2k+1} - \xi_{2k})^2}{128} (1+a_j)^4 \quad (4-4)$$

Introducînd (4-4) în (4-3), acesta din urmă devine :

$$\varphi_{2k+1}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{(1-\xi_{2k}) \left[\frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 - \frac{(\xi_{2k+1} - \xi_{2k})^2}{128} (1+a_j)^4 + \dots \right] - \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2}} \quad (4-5)$$

A-III-4-3

sau încă :

$$\varphi_{2k+1}(a_j) = \frac{1}{(\xi_{2k+1} - \xi_{2k}) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\xi_{2k+1}}{\xi_{2k}}} - (1 - \xi_{2k}) \frac{(1+a_j)^2}{16} + \dots}} \quad (4-6)$$

Trecînd acum la limită, ținînd cont că $\frac{\xi_{2k+1}}{\xi_{2k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ rezultă :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} A_j \varphi_{2k+1}(a_j) = \frac{2A_j}{\sqrt{8 - (1+a_j)^2}} \quad (4-7)$$

Se procedează într-un mod asemănător și cu funcția

$$\psi_{2k+1}(a_j) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_{2k+1} + \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 - (1 - \xi_{2k}) e^{(\xi_{2k} - \xi_{2k+1}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right]}} \quad (4-8)$$

Se dezvoltă exponențiala în serie de puteri :

$$e^{(\xi_{2k} - \xi_{2k+1}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right]} = 1 + (\xi_{2k} - \xi_{2k+1}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right] + \frac{(\xi_{2k} - \xi_{2k+1})^2}{2} \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right]^2 \quad (4-9)$$

Înlocuind (4-9) în (4-8), aceasta din urmă devine :

$$\psi_{2k+1}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} (\xi_{2k+1} - \xi_{2k}) \sqrt{\frac{-\xi_{2k}}{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}} \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right] - \frac{-\xi_{2k}}{2} \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8}\right]^2 + \dots}} \quad (4-10)$$

A-III-4-4

sau încă :

$$\psi_{2k+1}(a_j) = \frac{2(1+a_j)}{(\xi_{2k+1} - \xi_{2k}) \sqrt{\beta - (1+a_j)^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_{2k+1}}{\xi_{2k}}} - \frac{1}{2} (1 - \xi_{2k}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8} \right] + \dots \right\}} \quad (4-11)$$

Se trece la limită, ținând cont că $\frac{\xi_{2k+1}}{\xi_{2k}} \longrightarrow -1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k+1} - \xi_{2k}}{4} A_j \psi_{2k+1}(a_j) = \frac{2A_j}{\sqrt{\beta - (1+a_j)^2}} \quad (4-12)$$

Rezultă în final următoarea limită pentru semiperioadele impare :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k+1} = 4 \sum_{j=1}^7 \frac{A_j}{\sqrt{\beta - (1+a_j)^2}} \quad (4-13)$$

La calculul limitei cvasisemiperioadelor pare se procedează asemănător . Avem :

$$\varphi_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{1+\xi_{2k}} + \frac{\xi_{2k} - \xi_{2k-1}}{8} (1+a_j)^2 - (1+\xi_{2k-1}) e^{(\xi_{2k} - \xi_{2k-1}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8} \right]}} \quad (4-14)$$

Se dezvoltă aici exponențiala în serie și se înlocuiește în relația de mai sus :

$$\varphi_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}} \sqrt{\left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8} \right] \left\{ \xi_{2k-1} - \frac{1}{2} (\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) (1+\xi_{2k-1}) \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8} \right] + \dots \right\}}} \quad (4-15)$$

A-III-4-5

sau

$$\varphi_{2k}(a_j) = \frac{2(1+a_j)}{(\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \sqrt{[8 - (1+a_j)^2] \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\xi_{2k}}{\xi_{2k-1}}} - \frac{1 - \xi_{2k-1}}{2} \left[1 - \frac{(1+a_j)^2}{8} \right] + \dots \right\}} \quad (4-16)$$

Trecind la limită și ținind cont că $\frac{\xi_{2k}}{\xi_{2k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1$

rezultă :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{4} \Delta_j \varphi_{2k}(a_j) = \frac{2A_j}{\sqrt{8 - (1+a_j)^2}} \quad (4-17)$$

Se procedează analog și cu funcția ψ_{2k} :

$$\psi_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \xi_{2k+1} - \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{8} (1+a_j)^2 - (1 + \xi_{2k+1}) e^{-\frac{(\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) (1+a_j)^2}{8}}} \quad (4-18)$$

Se dezvoltă exponențiala în serie și se înlocuiește în relația de mai sus :

$$\psi_{2k}(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{(\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \frac{(1+a_j)^2}{8} \left\{ (1 + \xi_{2k-1}) \left[1 - (\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \frac{(1+a_j)^2}{16} + \dots \right] - 1 \right\}}} \quad (4-19)$$

sau

A-III-4-6

$$\psi_{2k}(a_j) = \frac{2}{(\xi_{2k-1} - \xi_{2k}) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\xi_{2k}}{\xi_{2k-1}}} - \frac{(1+a_j)^2}{16} (1 + \xi_{2k-1}) + \dots}} \quad (4-20)$$

Sînt făcute acum toate calculele preşimulare necesare trecerii la limită :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_{2k-1} - \xi_{2k}}{4} A_j \psi_{2k}(a_j) = \frac{2A_j}{\sqrt{8 - (1+a_j)^2}} \quad (4-21)$$

Rezultă expresia finală a limitei semiperioadelor pare :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k} = 4 \sum_{j=1}^7 \frac{A_j}{\sqrt{8 - (1+a_j)^2}}$$

Se observă că şi în metoda Legendre ca şi în metoda Simpson se obţine o aceeaşi limită atât pentru cvasisemiperioadele impare ca şi pentru cele pare.

Calculele numerice sînt date în tabelul Nr.1 (20).

Din aceste calcule rezultă valoarea aproximativă :

$$\tilde{T}_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_{2k+1} = 3,14152 \quad (4-22)$$

Se observă că această metodă este mai precisă decît metoda Simpson şi anume ea dă valoarea aproximativă prin lipsă (pe cînd metoda Simpson dă valoarea aproximativă prin adaus). ~~Rezultă că valoarea exactă se va găsi între valorile aproximative determinate cu metoda Simpson, respectiv cu metoda Legendre.~~

A-III-4-7

Eroarea relativă în metoda Legendre este de circa 40 de ori mai mică decât cea dată de metoda Simpson, fiind deci neglijabilă:

$$E = \frac{\tilde{T}_{\infty} - T_{\infty}}{T_{\infty}} = -0,00001 = -0,001\% \quad (4-23)$$

TABEL Nr.1 (20)

Calculul lui T_{∞} după metoda polinomului de interpolare Legendre

$$T_{\infty} = 4 \sum_{j=1}^7 \frac{A_j}{\sqrt{8-(1+a_j)^2}}$$

j	A_j	a_j	$(1+a_j)$	$(1+a_j)^2$	$8-(1+a_j)^2$	$\sqrt{8-(1+a_j)^2}$	$\frac{A_j}{\sqrt{8-(1+a_j)^2}}$
1	0,12948	0,94911	1,94911	3,7990297921	4,2009702079	2,04963	0,06317
2	0,27970	0,74153	1,74153	3,0329267409	4,9670732591	2,22869	0,12550
3	0,38183	0,40585	1,40585	1,9764142225	6,0235857775	2,45430	0,15557
4	0,41796	0,00000	1,00000	1,0000000000	7,0000000000	2,64575	0,15798
5	0,38183	0,40585	0,59415	0,3530142225	7,6469857775	2,76532	0,13808
6	0,27970	0,74153	0,25847	0,0668067409	7,9331932591	2,81659	0,09930
7	0,12948	0,94911	0,05089	0,0025897921	7,9974102079	2,82797	0,04578
							$\sum_{j=1}^7 = 3,14152$

A-III-5-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează nivelurile extreme

& 5.- Prima cvasi semiperioadă (metoda Simpson)

Dintre intervalele de timp între două niveluri extreme consecutive, cea mai importantă este desigur prima cvasi semi-periodică ; înțelegînd prin aceasta intervalul de timp dintre momentul închiderii rapide t_0 , sub formă adimensională ζ_0 și pînă în momentul t_1 , adimensional ζ_1 , în care nivelul apei din castel atinge nivelul maxim în castelul de echilibru. Acest interval de timp, se notează T_1 , adimensional \mathcal{T}_1 , în concordanță cu notațiile utilizate pînă în prezent.

In special interesează acest interval de timp în cazurile complexe de exploatare a castelelor de echilibru în care apar combinații de manevre ale vanei de reglaj.

Formula care permite determinarea cvasi semiperioadei a fost stabilită în paragrafele anterioare :

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{12} \left[\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{23}} + \frac{1}{\xi_{28}} + \frac{1}{\xi_{31}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}} \right]$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_j &= \xi \left(\xi_0 + j \frac{\xi_1 - \xi_0}{32} \right) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_0} - j \frac{\xi_1 - \xi_0}{32} - e^{-j \frac{\xi_1 - \xi_0}{32}} \\ j &= 1, 4, 9, 16, 23, 28, 31 \end{aligned} \right. \quad (5-1)$$

A-III-5-2

Având în vedere relația exactă existentă între ξ_0 și ξ_1 , formulele de mai sus se pot pune sub o altă formă, în care să apară doar variabila ξ_1 : $\xi_0 = \xi_1 + \ln(1 - \xi_1)$

$$T_4 = - \frac{\ln(1 - \xi_1)}{12} \left[\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_4} + \frac{3}{\xi_9} + \frac{2}{\xi_{16}} + \frac{3}{\xi_{23}} + \frac{1}{\xi_{28}} + \frac{1}{\xi_{31}} + \frac{1}{\sqrt{\xi_1 \ln(1 - \xi_1)}} \right]$$

$$\xi_j = \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_1 - \ln(1 - \xi_1) + \frac{j}{32} \ln(1 - \xi_1) - e^{\frac{j}{32} \ln(1 - \xi_1)}}; \quad j = 1, 4, 9, 16, 23, 28, 31 \quad (5-2)$$

Forma de mai sus este avantajoasă în calculele numerice, în special în cadrul lucrării de față, deoarece aici s-au luat ca valori inițiale pentru construcția tabelelor numerice valorile ξ_1 , care apar deci ca valori ^{exacte} și s-au calculat valorile ξ_0 corespunzătoare, care apar în acest fel ca valori de erori.

În prezentul paragraf se cercetează următoarele două probleme:

a.- valorile limită ale primei cvasisemiperioade T_1 pentru cazurile extreme teoretic posibile $\xi_0 \rightarrow 0$ și $\xi_0 \rightarrow -\infty$ ceea ce va da și indicații asupra erorii făcute în aceste cazuri cu metoda Simpson.

b.- valorile numerice ale primei cvasisemiperioade T_1 pentru un număr suficient de mare de valori de referință, care să acopere întreg domeniul în care se utilizează castele de echilibru.

a.- Să cercetăm la început cazul în care $\xi_0 \rightarrow -\infty$. După cum s-a arătat anterior, acestui caz îi corespunde și $\xi_1 \rightarrow 1$. După cum rezultă atunci imediat din expresiile de mai sus:

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow 1} T_1 = +\infty \quad (5-3)$$

A-III-5-3

Celălalt caz este mai dificil deoarece $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$ se poate realiza fizic în două moduri : un prim mod constă în a considera că mișcarea este aceea a unui lichid real (cu frecare) la care $z_0 \rightarrow 0$, dar $Z_* \neq \infty$, un al doilea mod constă în a considera că mișcarea este aceea a unui fluid ideal la care $z_0 = 0$, însă $Z_* \rightarrow \infty$ rezultând și $\mathcal{E}_0 = \frac{z_0}{Z_*} \rightarrow 0$, $\mathcal{E}_1 = \frac{z_1}{Z_*} \rightarrow 0$

Prima situație nu interesează deoarece el este posibil doar dacă $z_0 = 0$, ceea ce din ecuația exactă care leagă pe z_0 și z_1 implică și $z_1 = 0$, cu alte cuvinte acest caz corespunde situației de repaus, în care nu se pune problema perioadei.

Al doilea caz corespunde fizic mișcării lichidului ideal, însă din cauză că $Z_* \rightarrow \infty$, rezultă și aici $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$, $\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$. Din această cauză prin simpla anulare a lui \mathcal{E}_0 și \mathcal{E}_1 în formulele care dau valoarea primei cvasi semiperioade se obține o nedeterminare de tipul zero pe zero.

Pentru a ridica nedeterminarea se va face apel la formulele aproximative de calcul, atât cea a lui Calame și Gaden cât și cea din prezenta lucrare privind calculul lui \mathcal{E}_1 în funcție de parametrul inițial al pierderii de energie \mathcal{E}_0 , formule la care eroarea scade pe măsură ce \mathcal{E}_0 se apropie de zero.

Din aceste formule rezultă :

$$\lim_{\mathcal{E}_0 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2\mathcal{E}_0}} = \lim_{\mathcal{E}_0 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} = 1 \quad (5-4)$$

Este interesant de menționat că o confirmare a acestei limite se poate obține aplicând una din metodele folosite în trecut pentru determinarea saltului maxim și anume metoda bilan-

A-III-5-4

țului energetic. În această metodă pe baza principiului conservării energiei mecanice se egalează energia cinetică a masei de apă din galeria de aducțiune cu energia potențială a apei acumulată suplimentar în castel :

$$\frac{\rho L f w_0^2}{2} = \frac{\rho g F z_1^2}{2} \quad (5-5)$$

Pe de altă parte între vitezele în galerie și castel în momentul următor închiderii rapide există relația de continuitate :

$$w_0 f = v_0 F = z_0 F \quad (5-6)$$

Pe de altă parte, pentru a putea păstra sistemul de mărimi de referință, vom păstra și relația care dă expresia pierderii specifice de energie, relație care de această dată are un caracter formal, deoarece ambii membri ai ecuației sînt nuli.

$$z_0 = -\frac{K}{2g} v_0^2 \quad (5-7)$$

Tinînd cont de ecuațiile (5-6) și (5-7) ecuația bilanțului energetic sub formă adimensională devine :

$$\xi_1 = \sqrt{-2\xi_0} \quad (5-8)$$

ceea ce confirmă valoarea adoptată pentru limita din relația (5-4).

Revenim la relațiile (5-1) , dezvoltînd în serie exponențială :

A-III-5-5

$$\xi_j = \sqrt{2} \sqrt{-\xi_0 - \frac{1}{2} \left(j \frac{\xi_1 - \xi_0}{32} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(j \frac{\xi_1 - \xi_0}{32} \right)^3 + \dots} \quad (5-9)$$

Se poate cerceta acum următoarea limită :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_j} = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\xi_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{j}{32} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{j}{32} \right)^3 (\xi_1 - \xi_0) + \dots}} \quad (5-10)$$

din care, folosind în continuare limita (5-4) se obține :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_j} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{j}{32} \right)^2}} = \frac{32}{\sqrt{1024 - j^2}} \quad (5-11)$$

Rezultă atunci următoarea formulă de calcul a primei cvasi semiperioade în metoda Simpson, când $\xi_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}_1 = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{1023}} + \frac{1}{\sqrt{1008}} + \frac{3}{\sqrt{935}} + \frac{2}{\sqrt{768}} + \frac{3}{\sqrt{495}} + \frac{1}{\sqrt{63}} + \frac{1}{32} \right] \quad (5-12)$$

Efectuînd și calculele numerice :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}_1 = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{31,98437} + \frac{1}{31,74901} + \frac{3}{30,57777} + \frac{2}{27,71281} + \frac{3}{22,24859} + \frac{1}{15,49193} + \frac{1}{7,93725} + \frac{1}{32} \right] \quad (5-13)$$

A-III-5-6

sau încă :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \mathcal{T}_1 = \frac{8}{3} \left[0,0312652 + 0,0981104 + 0,074301 + 0,1348400 + 0,0645497 + \right. \\ \left. + 0,1259882 + 0,0312500 \right] \quad (5-14)$$

În final rezultă o valoare limită a lui \mathcal{T}_1 , după cum se va vedea foarte apropiată de valoarea exactă :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \mathcal{T}_1 = \frac{8}{3} \times 0,5899306 = 1,57315$$

Acestei mișcări cu $\xi_0 = 0$ i se poate atribui o semnificație fizică și anume este cazul mișcării unui lichid ideal, la care valoarea exactă a semiperioadei este $\mathcal{T}_1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57080$

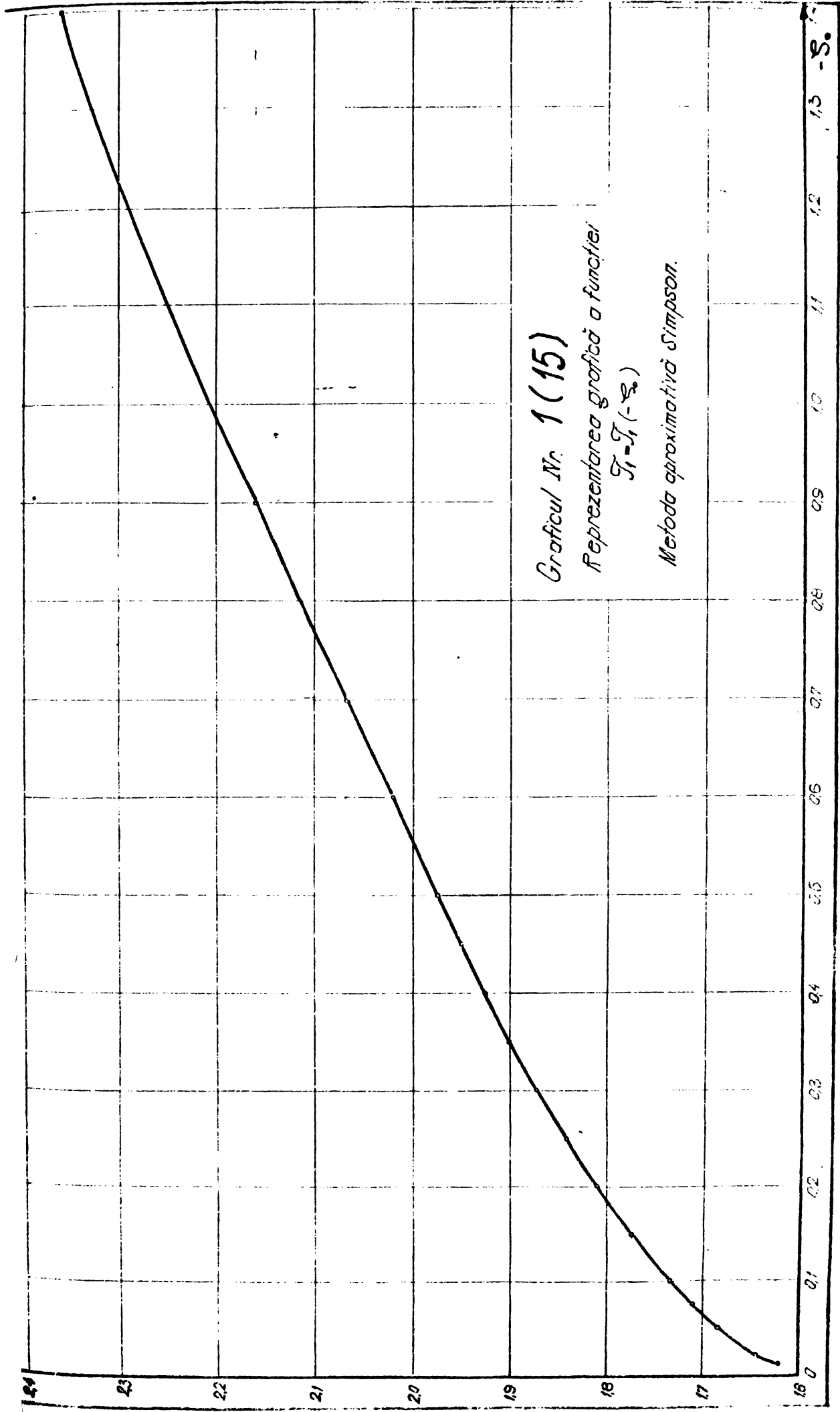
Eroarea relativă obținută este de același ordin de mărime cu cea obținută în celălalt caz limită, care a fost studiat anterior ($t \rightarrow \infty$) :

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\mathcal{T}}_1 - \mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_1} = 0,0014 = 0,14 \%$$

De asemenea se observă că și în acest caz limită metoda dă de asemenea o aproximație a cvasi semiperioadei prin adaus.

b.- Trecînd la problema determinării numerice a cvasi semiperioadelor în cazurile curențe ale funcționării castelelor de echilibru prin aplicarea formulele de calcul (5-2), s-au întocmit tabelul Nr.1(21) conținînd determinarea prealabilă a vitezelor adimensionale ξ_j și tabelul Nr.2(22) conținînd determinarea primei cvasi semiperioade sub formă adimensională.

Se constată o creștere a primei cvasi semiperioade în raport cu creșterea valorii absolute a parametrului pierderii de energie $|\xi_0| = -\xi_0$. Calculele au fost efectuate cu o mașină de calculat manuală tip „Muresul”
Reprezentarea grafică a funcției $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1(|\xi_0|)$ este redată în graficul Nr.1(15).



Gratificul Nr. 1 (15)

Reprezentarea grafică a funcției

$$f_1 = f_1(-x)$$

Metoda aproximativă Simpson.

A-III-6-1

PARTEA INTII A - CASTEL DE ECHILIBRU SIMPLU .

INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - Problema timpului la care se realizează
nivelurile extreme

& 6.- Determinarea primei cvasi semiperioade prin
metoda Legendre

In paragrafele anterioare s-au determinat formulele de calcul a cvasi semiperioadelor T_n , cu $n > 1$, dar nu s-a determinat și formula pentru calculul primei semiperioade.

De aceea în acest paragraf se va determina la început această formulă și apoi se vor pune aceleași două probleme care s-au pus și în paragraful în care s-a folosit metoda Simpson și anume :

a.- să se calculeze efectiv valorile primei semiperioade pentru un număr de valori ale parametrului pierderii inițiale de energie ξ_0 , suficient pentru acoperirea intervalului în care acest parametru ar putea să ia practic valori.

b.- să se determine valorile limită ale primei cvasi semiperioade T_1 corespunzătoare limitelor $\xi_0 \rightarrow -\infty$ și $\xi_0 \rightarrow 0$

Pentru determinarea formulei de calcul, scriem la început, folosind proprietatea de aditivitate a integralei :

A-III-6-2

$$J_1 = \int_{\xi_0}^{\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}} \frac{d\xi}{\xi(\xi)} + \int_{\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\xi(\xi)} = J_1' + J_1'' \quad (6-1)$$

Se face în a doua integrală substituția $\xi = \xi_1 - \xi^2$ pentru a elimina singularitatea de la extremitatea ξ_1 a intervalului :

$$J_1' = \int_{\xi_0}^{\frac{\xi_0 + \xi_1}{2}} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$J_1'' = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{2}}} \psi(\xi) d\xi ; \quad \psi(\xi) = \frac{\xi}{\xi(\xi_1 - \xi^2)} \quad (6-2)$$

Urmează cîte o nouă schimbare de variabilă în fiecare integrală care transformă intervalul de integrare în segmentul $[-1, 1]$, respectiv :

$$\xi = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} \chi + \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4} \quad (6-3)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{2}} (\chi + 1)$$

Schimbarea de variabilă efectuată este cerută de faptul că în literatură se găsește calculate constantele a_j și A_j , care apar în final, numai pentru intervalul de integrare reprezentat de segmentul $[-1, 1]$.

În urma schimbării efectuate, integralele devin :

A-III-6-3

$$\mathcal{F}_1' = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\mathcal{E} \left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{4} \chi + \frac{\mathcal{E}_1 + 3\mathcal{E}_0}{4} \right)} d\chi$$

$$\mathcal{F}_1'' = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{4} \int_{-1}^1 \frac{\chi + 1}{\mathcal{E} \left[\mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{8} (\chi + 1)^2 \right]} d\chi$$
(6-4)

In final se obține următoarea formulă de calcul a primei cvasi semiperioade \mathcal{F}_1 :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_1'' = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_1(a_j) + \psi_1(a_j) \right]$$
(6-5)

in care funcțiile φ_1 și ψ_1 au semnificațiile :

$$\varphi_1(a_j) = \frac{1}{\mathcal{E} \left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{4} a_j + \frac{\mathcal{E}_1 + 3\mathcal{E}_0}{4} \right)}$$
(6-6)

$$\psi_1(a_j) = \frac{1 + a_j}{\mathcal{E} \left[\mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{8} (1 + a_j)^2 \right]}$$

iar constantele a_j , A_j au valorile indicate in paragraful 3.

Ca și la metoda Simpson, expresiile $\varphi_1(a_j)$ și $\psi_1(a_j)$ se prelucrează astfel încît cu ajutorul relației exacte care există între \mathcal{E}_0 și \mathcal{E}_1 , să se elimine \mathcal{E}_0 . In acest fel funcțiile $\varphi_1(a_j)$ și $\psi_1(a_j)$ vor conține doar parametrul \mathcal{E}_1 ceea ce prezintă avantaje in efectuarea calculului numeric.

Astfel, se obține succesiv, pentru funcția φ_1 :

A-III-6-4

$$\Psi_1(a_j) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} a_j - \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4} - e^{\xi_0 - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4} a_j - \frac{\xi_1 + 3\xi_0}{4}}} \quad (6-7)$$

$$\Psi_1(a_j) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \xi_1 - 3\xi_0 - (\xi_1 - \xi_0) a_j - 4 e^{\frac{\xi_0 - \xi_1}{4} (1 + a_j)}}$$

$$\Psi_1(a_j) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4(1 - \xi_1) - (3 - a_j) \ln(1 - \xi_1) - 4(1 - \xi_1) \frac{1 + a_j}{4}}}$$

Cu această ultimă formulă s-au efectuat calculele numerice cuprinse în tabelul Nr.4 ().

In aceeași idee se efectuează calculele și pentru funcția Ψ_1 :

$$\Psi_1(a_j) = \frac{1 + a_j}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \xi_1 + \frac{\xi_1 - \xi_0}{8} (1 + a_j)^2 - e^{\frac{\xi_1 - \xi_0}{8} [(1 + a_j)^2 - 8]}}} \quad (6-8)$$

$$\Psi_1(a_j) = \frac{(1 + a_j) \sqrt{2}}{\sqrt{4(1 - \xi_1) \left[1 - (1 - \xi_1) \frac{(1 + a_j)^2}{8} \right] - \frac{1}{2} (1 + a_j)^2 \ln(1 - \xi_1)}}$$

A-III-6-5

Cu această ultimă formulă s-au efectuat calculele numerice cuprinse în tabelul Nr.5 (27).

Cu formulele stabilite mai sus calculul funcțiilor φ_1 și ψ_1 , formula de calcul a primei cvasi semiperioade devine :

$$\mathcal{I}_1 = - \frac{\ln(1-\xi_1)}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_1(a_j) + \psi_1(a_j) \right] \quad (6-9)$$

În tabelul Nr.6 (28) sînt efectuate calculele numerice cu formula de mai sus, iar în graficul Nr.1 (16) este dată reprezentarea grafică aferentă.

În tabelul Nr.7 (29) sînt date comparativ rezultatele obținute prin aplicarea metodelor aproximative de integrare Simpson și Legendre. Se constată din acest tabel că diferențele sînt mici, eroarea relativă fiind de sub 1 % (calculată considerînd că metoda Legendre dă rezultatul exact). Pe această bază se poate considera că formulele aproximative Simpson și Legendre dau o eroare totală de sub 1 %, deoarece valoarea exactă se găsește între valorile date de cele două metode de integrare aproximativă

Se mai menționează că, după cum rezultă și din tabele, calculul primei cvasi semiperioade este foarte laborios, și necesită pătrarea în calcule a cel puțin 5 zecimale, pentru a se obține o precizie corespunzătoare.

b.- Să trecem acum la cealaltă problemă pusă, și anume găsirea limitelor spre care tinde prima cvasi semiperioadă, atunci cînd parametrul inițial ξ_0 tinde spre valorile extreme $-\infty$ și 0 .

Pentru cazul în care $\xi_0 \rightarrow -\infty$, caz căruia, așa cum s-a mai arătat, îi corespunde, din relația exactă dintre ξ_0 și ξ_1 și $\xi_1 \rightarrow 1$ se obține imediat valoarea limită din formulele de

A-III-6-6

mai sus și anume :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow -\infty} \mathcal{P}_i = +\infty \quad (6-10)$$

Pentru a obține limita în celălalt caz, în care $\xi_0 \rightarrow 0$ și căruia, așa cum s-a mai arătat îi corespunde și $\xi_1 \rightarrow 0$ se dezvoltă la început în serie exponențialele care apar în expresiile lui $\mathcal{P}_i(a_j)$ și $\Psi_i(a_j)$:

$$\mathcal{P}_i(a_j) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4\xi_0 - \frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2}{4} (1+a_j)^2 + \frac{1}{6} \frac{(\xi_1 - \xi_0)^3}{16} (1+a_j)^3}} \quad (6-11)$$

$$\Psi_i(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{-\xi_0 - \frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2}{64} [(1+a_j)^2 - 8] - \frac{1}{6} \frac{(\xi_1 - \xi_0)^3}{512} [(1+a_j)^3 - 1]^3}}$$

Prelucrând expresiile de mai sus, ele se pot pune sub forma :

$$\mathcal{P}_i(a_j) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4\xi_0 - \frac{1}{8} (\xi_1 - \xi_0)^2 (1+a_j)^2 \left[1 + \frac{\xi_1 - \xi_0}{12} (1+a_j) + \dots \right]}} \quad (6-12)$$

$$\Psi_i(a_j) = \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{-\xi_0 - \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_0)^2 \left[\frac{(a_j+1)^2}{8} - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{1}{3} (\xi_1 - \xi_0) \left[\frac{(a_j+1)}{8} - 1 \right] + \dots \right\}}}$$

Expresiile fiind astfel pregătite, se poate trece acum la calculul limitelor :

A-III-6-7

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} (\xi_1 - \xi_0) \Psi_1(a_j) = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2\xi_0}} - \frac{\xi_0}{\sqrt{2\xi_0}} \right)^2 - \frac{1}{8}(1+a_j)^2 \left[1 + \frac{\xi_1 - \xi_0}{12} (1+a_j) + \dots \right]}}$$

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} (\xi_1 - \xi_0) \Psi_1(a_j) = \frac{4}{\sqrt{16 - (1+a_j)^2}} \quad (6-13)$$

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} (\xi_1 - \xi_0) \Psi_4(a_j) = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1+a_j}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{(1+a_j)^4}{4} - 1 - \frac{(1+a_j)^4}{64} + \dots}}$$

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} (\xi_1 - \xi_0) \Psi_4(a_j) = \frac{8}{\sqrt{16 - (1+a_j)^2}} \quad (6-14)$$

Rezultă în final următoarea limită a primei cvasi semi-perioade :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} T_1 = 3 \sum_{j=1}^7 \frac{A_j}{\sqrt{16 - (1+a_j)^2}} \quad (6-15)$$

Calcululele numerice efectuate pe baza formulei de mai sus sînt conținute în tabelul Nr.1 (23) .

A-III-6-8

Din acest tabel s-a obținut valoarea sumei care intervine în expresia limitei.

Rezultă atunci, după metoda Legendre :

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \mathcal{T}_1 = 3 \times 0,5235936 \cong 1,57078$$

Pentru situația însă în care $\xi_0 \rightarrow 0$, din punct de vedere fizic lichidul tinde la un lichid ideal, la care semiperioada are o valoare exactă cunoscută :

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\pi}{2} \cong 1,57080 \quad (6-16)$$

Rezultă atunci o eroare relativă extrem de mică, de același ordin de mărime cu cea calculată atunci când s-a considerat limita $\zeta \rightarrow \infty$:

$$E = \frac{\tilde{\mathcal{T}}_1 - \mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_1} = \frac{1,57078 - 1,57080}{1,57080} = -0,000013 = -0,0013\% \quad (6-17)$$

Se mai observă că, așa cum s-a găsit și în cazul în care $\zeta \rightarrow 0$, metoda Legendre dă o valoare aproximativă prin lipsă.

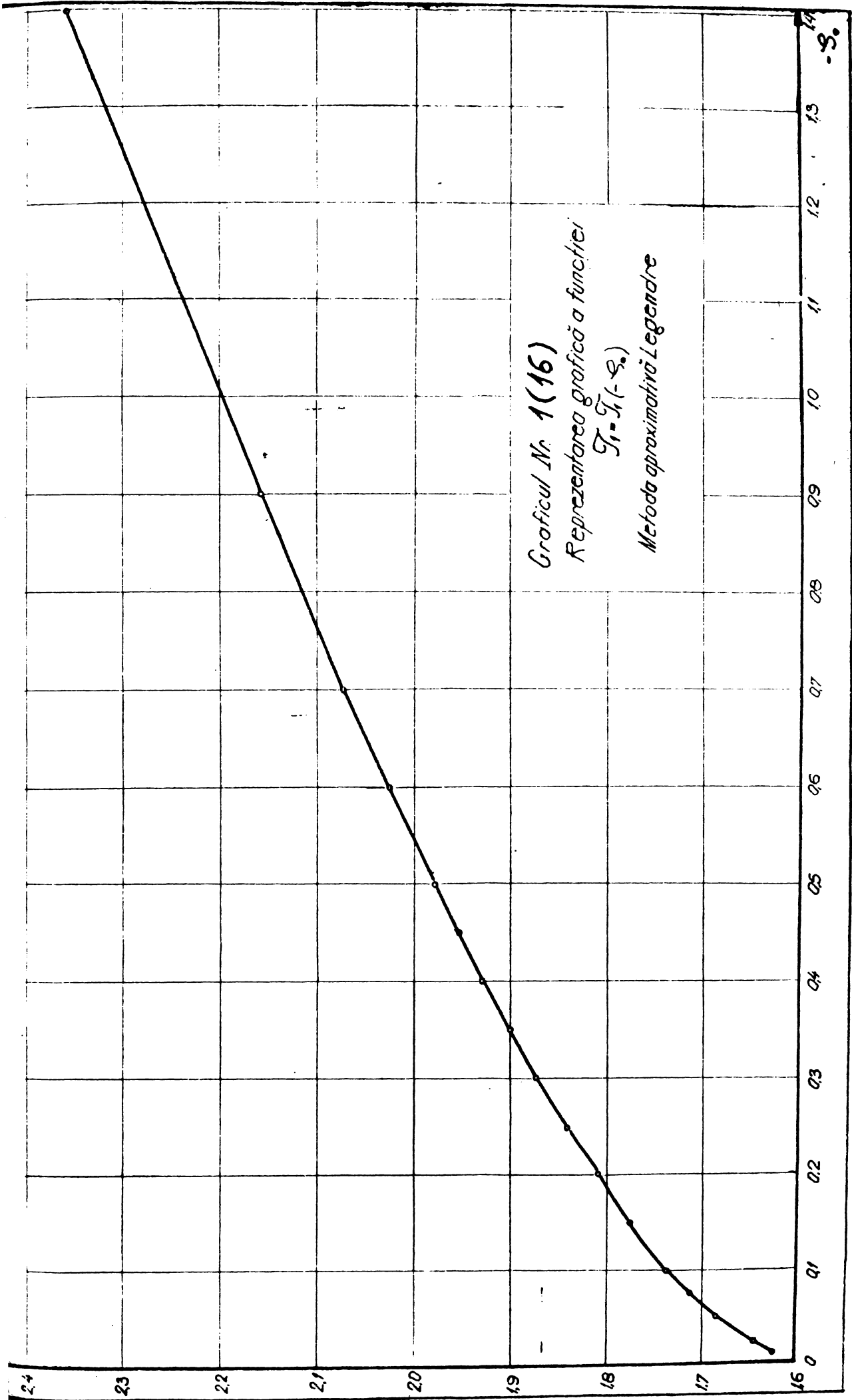
A-III-6-23

TABEL NR.7 (29)

Rezultate comparative privind valorile primei cvasi semiperioade

\mathcal{P}_1

$-\xi_0$	\mathcal{P}_1 Simpson	\mathcal{P}_1 Legendre	$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1$ Simpson Legendre Eroare absolute	$\frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_1}$ Eroare relativă
0,010	1,61840	1,62387	-0,00547	-0,338 %
0,020	1,64450	1,64051	0,00399	0,243 %
0,050	1,68334	1,68470	-0,00136	-0,081 %
0,075	1,71099	1,71131	-0,00032	-0,019 %
0,100	1,74825	1,73890	0,00935	0,538 %
0,150	1,77556	1,77481	0,00075	0,042 %
0,200	1,81093	1,80803	0,00290	0,160 %
0,250	1,83302	1,84346	-0,00956	-0,520 %
0,300	1,87349	1,87181	0,00168	0,090 %
0,350	1,90207	1,90083	0,00124	0,065 %
0,400	1,92766	1,92778	-0,00012	-0,006 %
0,450	1,95555	1,95490	0,00065	0,033 %
0,500	1,98055	1,97788	0,00267	0,135 %
0,600	2,02686	2,02694	-0,00008	-0,004 %
0,700	2,05806	2,07399	-0,01593	-0,768 %
0,900	2,16115	2,15881	0,00234	0,108 %
1,4026	2,35976	2,35936	0,00040	0,017 %
4,3033	3,30899	3,30446	0,00453	0,137 %



A-III-7-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III. Problema timpului la care se realizează
nivelurile extreme

& 7.- Determinarea celei de a doua cvasi semiperioade
si a celei de a treia cvasi semiperioade
(metoda Legendre)

In paragrafele anterioare s-au determinat formulele generale de calcul ale cvasi semiperioadelor de indice par \mathcal{F}_{2k} . In scopul testării acestor formule ca și in scopul de a vedea cum se trece de la prima cvasisemiperioadă la a doua cvasisemiperioadă s-au calculat valorile celei de a doua cvasiperioade pentru aceleași valori inițiale utilizate la calculul primei cvasisemiperioade.

Pentru aceste calcule s-au utilizat următoarele formule, obținute din formulele generale prin particularizare ($K = 1$) :

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\mathcal{P}_2(a_j) + \mathcal{Y}_2(a_j) \right] \quad (7-1)$$

in care :

$$\mathcal{P}_2(a_j) = \frac{1+a_j}{-\xi_2 \left[\xi_2 + \frac{\xi_1 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 \right]} \quad (7-2)$$

A-III-7-2

$$\Psi_2(a_j) = \frac{1+a_j}{-\xi \left[\xi_1 - \frac{\xi_1 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 \right]}$$

Explicitînd derivatele ξ se obțin formulele finale de calcul :

$$\Psi_2(a_j) = \frac{(1+a_j)\sqrt{2}}{2 \sqrt{1+\xi_2 + \frac{\xi_1 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 - (1+\xi_1) e^{-(\xi_1 - \xi_2) \frac{(1+a_j)^2}{8}}}}$$

(7-3)

$$\Psi_2(a_j) = \frac{(1+a_j)\sqrt{2}}{2 \sqrt{1+\xi_1 - \frac{\xi_1 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 - (1+\xi_1) e^{-(\xi_1 - \xi_2) \frac{(1+a_j)^2}{8}}}}$$

Calcululele respective sînt cuprinse în tabelele Nr.2(31) Nr.3(32) și Nr.4(33), iar reprezentarea grafică aferentă este redată în graficul Nr.1(17).

În tabelul Nr.1(30), s-au determinat valorile ξ_2 , necesare în utilizarea formulelor de calcul a celei de a doua cvasi semiperioade.

Tot în paragrafele anterioare s-au determinat și formulele generale de calcul pentru cvasi semiperioadele de indice impar T_{2k+1} . În scopul testării acestor formule, ca și în scopul de a constata variația de la a doua la a treia cvasi semiperioadă, s-au calculat valorile celei de a treia cvasi semiperioade pentru un număr de valori inițiale pentru care erau calculate și cvasi semiperioadele T_1 și T_2 .

Înainte de calculul efectiv al cvasi semiperioadei s-au

A-III-7-3

determinat nivelurile extreme ξ_3 folosind relațiile de calcul exacte și aproximative. Se constată în tabela Nr.5(34) că cele două metode dau rezultate care diferă cu mai puțin de 0,1 %.

Pentru calculele efective s-au utilizat următoarele formule, obținute din formulele generale prin particularizare ($K = 1$):

$$\mathcal{G}_3 = \frac{\xi_3 - \xi_2}{4} \sum_{j=1}^7 A_j \left[\varphi_3(a_j) + \psi_3(a_j) \right] \quad (7-4)$$

în care :

$$\varphi_3(a_j) = \frac{1+a_j}{\xi_3 \left[\frac{\xi_3 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 + \xi_2 \right]}$$

$$\psi_3(a_j) = \frac{1+a_j}{\xi_3 \left[\xi_3 - \frac{\xi_3 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 \right]}$$

Explicitînd derivatele ξ_3 se obțin formulele finale de calcul :

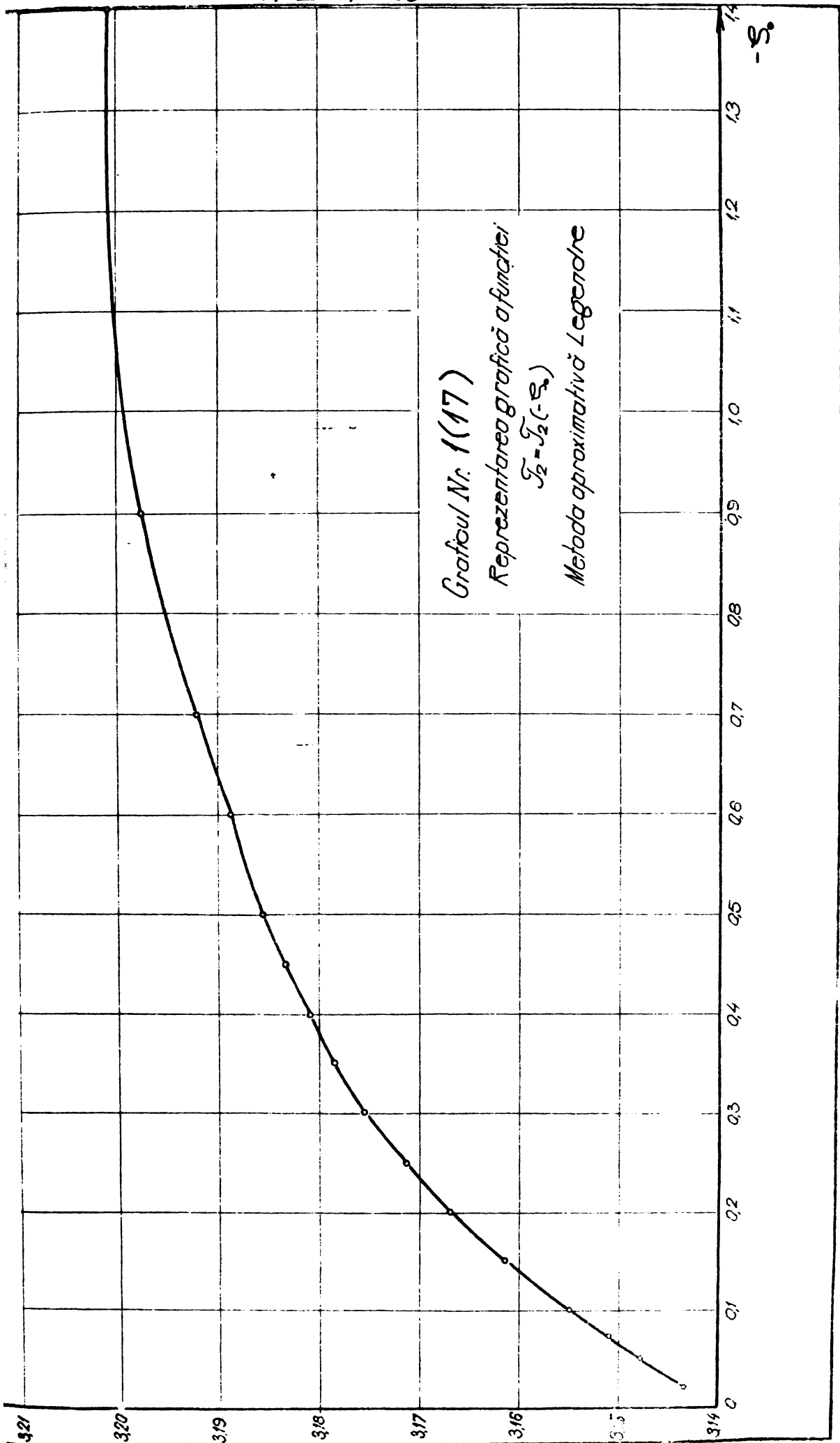
$$\varphi_3(a_j) = \frac{(1+a_j)\sqrt{2}}{2 \sqrt{1 - \xi_2 - \frac{\xi_3 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2 - (1 - \xi_2) e^{-\frac{\xi_3 - \xi_2}{8} (1+a_j)^2}}}$$

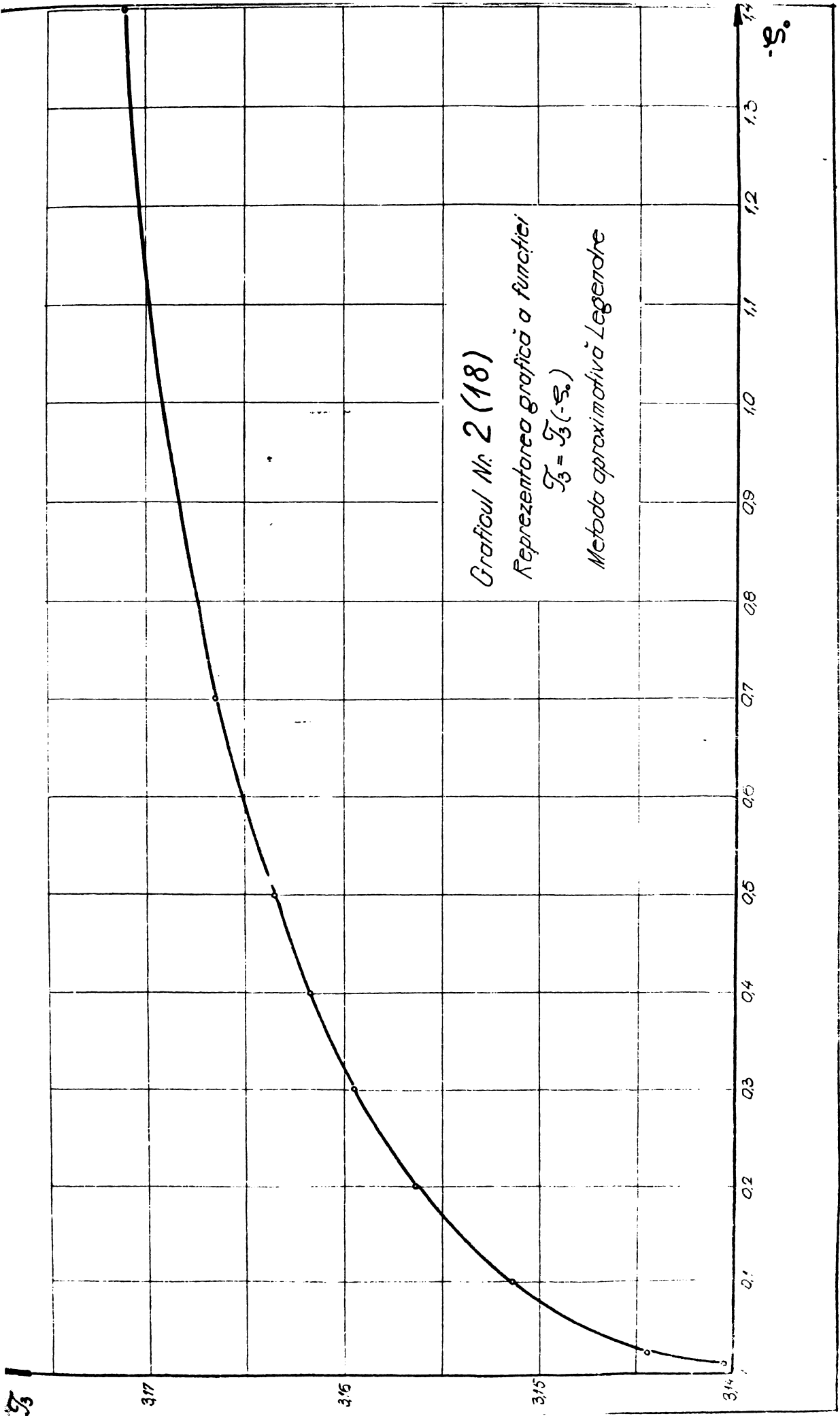
A-III-7-4

$$\psi_3(a_j) = \frac{(1+a_j)\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\xi_3 + \frac{\xi_3-\xi_2}{8}(1+a_j)^2 - (1-\xi_2)e^{-(\xi_3-\xi_2)\frac{8-(1+a_j)^2}{8}}}} \quad (7-5)$$

Calcululele sînt cuprinse în tabelele Nr.6 (35), Nr.7(36) și Nr.8(37) ^{reprezentarea} grafică aferentă este dată în graficul Nr.2(18).

Se constată că, deja începînd de la această cvasi semiperioadă se poate considera cu suficientă exactitate pentru calculele tehnice că $\mathcal{F}_n = \sqrt{\pi}$, $n > 3$, iar pentru calcule mai puțin precise se poate considera chiar $\mathcal{F}_n = \sqrt{\pi}$, $n > 1$.





A-III-8-1

PARTEA INTII - A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Cap.III - Problema timpului la care se realizează nivelurile
extreme

& 8. Determinarea primei cvasi-semiperioade cu ajutorul
calculatorului electronic "IRIS" al Centrului de
calcul Timișoara, utilizînd metoda Krîlov-Bogoliubov

După cum s-a arătat anterior la & 9 al cap.II referitor la calculul primului nivel maxim în metoda Krîlov-Bogoliubov se obține în prima aproximație legea de oscilație sub forma :

$$\xi_I = \frac{a_0}{1 + \frac{2a_0}{3\pi} (\tau - \tau_0)} \cos(\tau - \tau_0) + \gamma \quad (8-1)$$

în care constantele a_0 și γ se determină din condițiile inițiale de tip Cauchy :

$$\tau - \tau_0 \Rightarrow \xi_I = \xi_0$$

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \sqrt{-2\xi_0} \quad (8-2)$$

Se obțin în acest fel următoarele relații care permit calculul constantelor a_0 și γ :

$$a_0 = \frac{-\frac{2\xi_0 \sqrt{-2\xi_0}}{3\pi} + \sqrt{-\frac{8\xi_0^3}{9\pi^2} - \xi_0(2-\xi_0)(1-\frac{4\xi_0^2}{9\pi^2})}}{1 - \frac{4\xi_0^2}{9\pi^2}} > 0 \quad (8-3)$$

A-III-8-2

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\xi_0}{a_0} < 0 \\ \sin \gamma &= -\frac{\sqrt{-2\xi_0}}{a_0} + \frac{2\xi_0}{3\pi} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2} \quad (8-4)$$

Determinarea primei cvasi-semiperioade se bazează pe faptul că atunci cînd nivelul apei în castelul de echilibru atinge poziția cea mai înaltă, viteza lui de mișcare se anulează. Rezultă atunci că determinarea primei cvasi-semiperioade se va face utilizînd ecuația :

$$\tau_1 - \tau_0 = T_1 \Rightarrow \frac{d\xi}{d\tau} = 0 \quad (8-5)$$

Această ecuație nu permite explicitarea necunoscutei, de aceea se dă ecuația implicită sub forma sub care a fost programată rezolvarea ei la calculator :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\tau_1 + \gamma) &= -\frac{1}{\frac{3\pi}{2a_0} + \tau_1} < 0 \\ \cos(\tau_1 + \gamma) &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \tau_1 + \gamma < 2\pi \quad (8-6)$$

Rezolvarea numerică a ecuației de mai sus s-a făcut cu ajutorul calculatorului IRIS al Centrului de calcul Timișoara. Rezultatele obținute sînt redade comparativ cu cele obținute în metodele Simpson-Legendre în tabelul nr.1(38) pentru un număr de 10 valori pentru care ξ_0 avea aproximativ aceeași valoare.

În graficul nr.1 (39) sînt redade de asemenea compartiv valorile primei cvasi-semiperioade, calculată cu metoda Krîlov-Bogoliubov, respectiv cu metodele Simpson-Legendre.

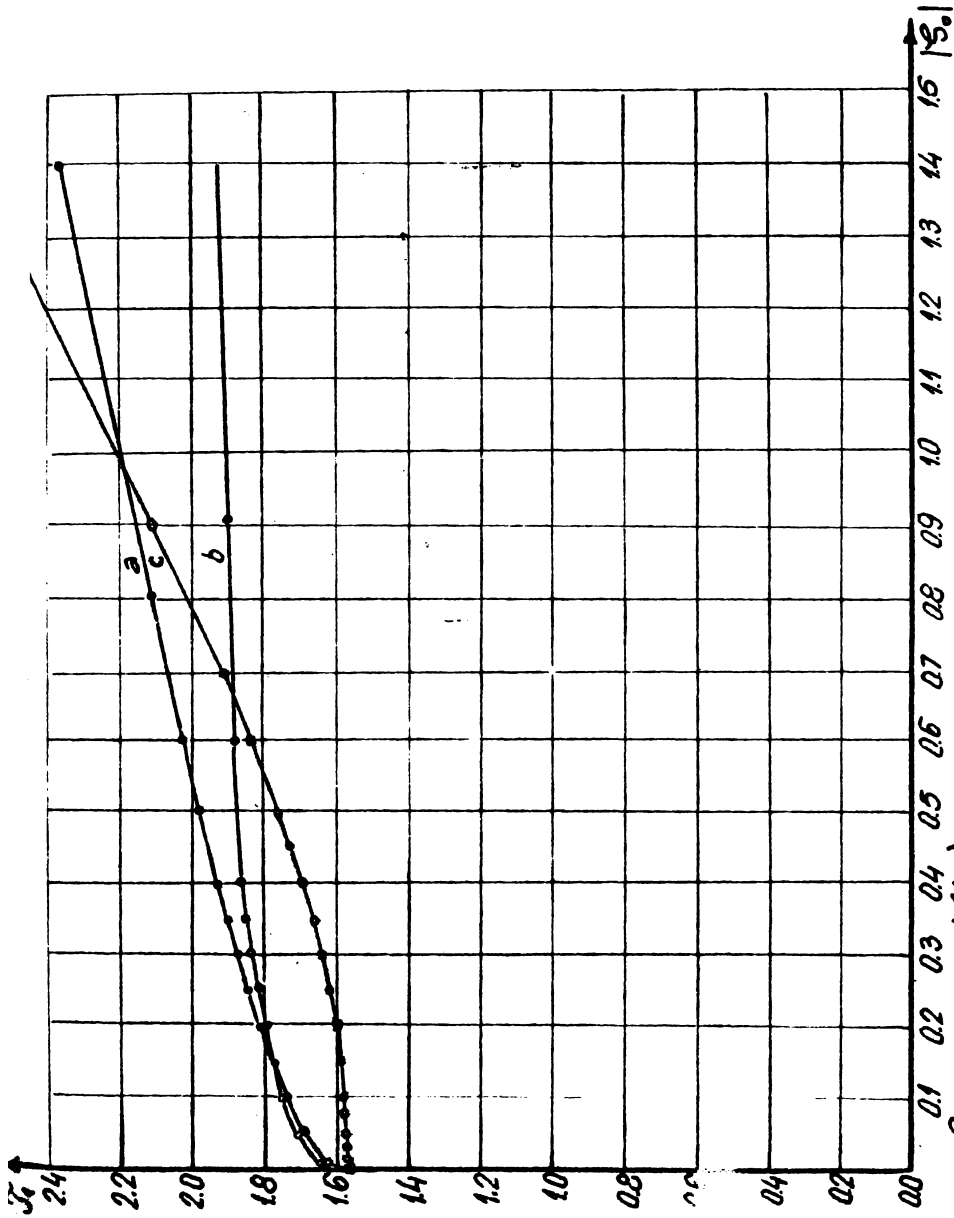
Din aceste prelucrări se constată că în ceea ce privește prima cvasi-semiperioadă metoda Krîlov-Bogoliubov dă rezultate acceptabile pentru $|\xi_0| < 1$

A-III-8-4

TABEL Nr.1 (38)

TABEL COMPARATIV

Nr. crt	ξ_0	\mathcal{I}_1 (Krilov-Bogoliubov)	\mathcal{I}_1 (Simpson-Legendre)	Eroare abso-	Eroare rela-
				lută $\mathcal{I}_{K+B} - \mathcal{I}_{S-L}$	tivă $\frac{\mathcal{I}_{K+B} - \mathcal{I}_{S-L}}{\mathcal{I}_{S-L}} 100\%$
1	0,020	1,6498	1,6425	0,0073	0,444
2	0,050	1,6905	1,6840	0,0065	0,386
3	0,10	1,7408	1,7356	0,0052	0,300
4	0,15	1,7734	1,7752	-0,0018	-0,101
5	0,20	1,7987	1,8095	-0,0108	-0,597
6	0,25	1,8197	1,8383	-0,0186	-1,012
7	0,35	1,8380	1,9020	-0,0640	-3,365
8	0,40	1,8511	1,9277	-0,0766	-3,974
9	0,50	1,8637	1,9792	-0,1155	-5,836
10	0,70	1,8827	2,0661	-0,1834	-8,877



Graficul Nr. 1 (19) Reprezentarea grafică comparativă $\bar{J}_1 = \bar{J}_1(S_0)$

- a. metode aproximative Simpson, Legendre
- b. metoda aproximativă Khilov - Bogaliubov.
- c. formula aproximativă Cerniatin [14-c] $\bar{J}_1 = \frac{J}{2} \sqrt{1+S_0^2}$

A-III-9-1

PARTEA INTII A - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA.

CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Cap. III - Problema timpului la care se realizează
nivelurile extreme

§ 9 - Formule aproximative pentru determinarea cvasi-semi-
perioadelor

În cazul mișcării cvasi-oscilatorii ce ia naștere la închiderea bruscă a obturatorului, problema timpului a fost relativ puțin studiată, literatura de specialitate este destul de săracă în formule referitoare la intervalele de timp. Se cunoaște formula empirică a lui Vogt $\sqrt{4-V}$, care dă intervalul de timp scurs de la închiderea bruscă (totală) a obturatorului și pînă la apariția primului nivel maxim în castelul de echilibru (în terminologia folosită în lucrare acest interval de timp este denumit prima cvasi-semiperioadă) :

$$T_1 = \left(1 + 0,005 \frac{F}{f}\right) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{FL}{gf}} \quad (9-1)$$

în care :

T_1 = prima cvasi-semiperioadă

F = secțiunea transversală a castelului de echilibru

f = secțiunea transversală a aducțiunii sub presiune

g = accelerația gravitațională

Menționăm că formula empirică a lui Vogt se va dovedi nejustificată din punct de vedere teoretic, această afirmație rezultînd în mod evident din considerațiile care urmează.

A-III-9-2

Modelul matematic rațional al mișcării, sub formă adimensională, stabilit anterior, este independent de parametrii caracteristici ai amenajării :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| \frac{d\xi}{d\tau_0} + \xi = 0 \quad (9-2)$$

în care :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{z_*}, \text{ funcție adimensională de timp, definind poziția } \\ &\quad \text{nivelului apei în castel ;} \\ \tau &= \frac{t}{T_*}, \text{ argument adimensional corespunzător timpului ;} \\ z_* &= \frac{LF}{KF}, \text{ mărime de referință, având dimensiune de lungime ;} \\ T_* &= \sqrt{\frac{LF}{gf}}, \text{ mărime de referință, având dimensiune de timp ;} \end{aligned}$$

L = lungimea aducțiunii sub presiune ;

K = parametru caracterizând pierderile specifice de energie pe aducțiune.

În ceea ce privește condițiile inițiale de tip Cauchy care asigură existența și unicitatea soluției ecuației (9-2), este important faptul că ambele se pot exprima cu ajutorul parametruului adimensional al pierderii inițiale de energie ξ_0 :

$$\xi_0 = \frac{z_0}{z_*} < 0 \quad (9-3)$$

Rezultă de aici în mod evident că singurul parametru de care pot să depindă cvasi-semiperioadele este parametrul adimensional al pierderilor inițiale de energie. Transcriind formula Vogt în variabile adimensionale se constată că ea nu satisface această condiție, deoarece ea dă o nejustificată dependență a primei cvasi-semiperioade de un alt parametru adimensional, anume raportul ariilor transversale ale castelului respectiv aducțiunii :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{T_1}{T_*} = \frac{\mathcal{F}}{2} \left(1 + 0,005 \frac{\mathcal{F}}{F} \right) \quad (9-4)$$

A-III-9-3

In prezentul paragraf se urmărește a se da formula simplă dar suficient de precise pentru scopuri tehnice pentru determinarea atât a primei cvasi-semiperioade cât și a celorlalte cvasi-semiperioade.

Se pleacă de la o lege de variație liniară în raport cu viteza adimensională din momentul inițial și se ține cont de faptul că din punct de vedere fizic cazul $S_0 = 0$ corespunde unui lichid ideal la care valoarea exactă a primei cvasi-semiperioade este cunoscută și egală cu $\frac{T}{2}$. Se va propune deci pentru prima cvasi-semiperioadă o corelație de forma :

$$T_i = \frac{T}{2} + a_1 \sqrt{-2S_0} \quad (9-5)$$

Constanta necunoscută a_1 se va determina prin metoda lui Gauss a minimului sumei pătratelor erorilor, considerînd drept valori exacte pentru prima cvasi-semiperioadă media aritmetică a valorilor date de metodele numerice Simpson și Legendre.

La o valoare arbitrară curentă a parametrului inițial al pierderii specifice de energie sub formă adimensională S_{0i} , va corespunde o valoare considerată exactă dată de media valorilor obținute prin cele două metode numerice T'_{ii} și o valoare aproximativă T_{ii} dată de corelația liniară (9-5).

Eroarea absolută în acest caz este :

$$E_i = T_{ii} - T'_{ii} = \frac{T}{2} + a_1 \sqrt{-2S_{0i}} - T'_{ii} \quad (9-6)$$

Suma patratelor erorilor va avea expresia :

$$\sum_{i=1}^n E_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{T}{2} + a_1 \sqrt{-2S_{0i}} - T'_{ii} \right)^2 \quad (9-7)$$

Se pune condiția de minim a sumei de mai sus, minim parțial în raport cu parametrul "a₁" :

A-III-9-4

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n E_i^2}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{J}}{2} + a_1 \sqrt{-2\zeta_{0i}} - \bar{J}'_{1i} \right) \sqrt{-2\zeta_{0i}} = 0 \quad (9-8)$$

Ecuația de mai sus permite explicitarea parametrului "a₁" necunoscut :

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{J}'_{1i} \sqrt{-2\zeta_{0i}} - \frac{\bar{J}}{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{-2\zeta_{0i}}}{\sum_{i=1}^n (-2\zeta_{0i})} \quad (9-9)$$

Calcululele s-au efectuat tabelar, fiind conținute în tabelul Nr.1 (39) .

Au rezultat următoarele valori numerice :

$$a_1 = \frac{26,0523144 - 1,570796 \times 13,12600}{12,9152} = \frac{5,49596314}{12,9152} = 0,4208965 \quad (9-10)$$

Cu această valoare se poate scrie acum formula finală propusă pentru determinarea primei cvasi-semiperioade :

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{J}}{2} + 0,42 \sqrt{-2\zeta_0} = \frac{\bar{J}}{2} + \frac{42}{100} \sqrt{-2\zeta_0} \quad (9-11)$$

Pentru a determina calitatea corelației liniare propuse s-a calculat și coeficientul de corelație al acestei corelații cu formula :

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{18} [\sqrt{-2\zeta_{0i}} - (\sqrt{-2\zeta_0})_{med}] (\bar{J}_{1i} - \bar{J}_{1med})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{18} [\sqrt{-2\zeta_{0i}} - (\sqrt{-2\zeta_0})_{med}]^2 \sum_{i=1}^{18} (\bar{J}_{1i} - \bar{J}_{1med})^2}} \quad (9-12)$$

Calcululele s-au condus tabelar, fiind conținute în tabelul nr.2(40).

S-a obținut pentru coeficientul de corelație valoarea :

$$r_1 = \frac{1,522612508}{1,827044 \times 0,83803} = \frac{1,522612508}{1,531117683} = 0,994 \quad (9-13)$$

care indică faptul că relația liniară propusă aproximează excelent

A-III-9-5

fenomenul studiat.

În ceea ce privește a doua cvasi-semiperioadă se pleacă tot de la considerentul că, din punct de vedere fizic, cazul $\xi_0=0$ corespunde unui lichid ideal, la care valoarea exactă a celei de a doua cvasi-semiperioade este cunoscută și egală cu π .

Se va propune deci pentru cea de a doua cvasi-semiperioadă tot o corelație liniară de forma :

$$T_2 = \pi + a_2 \sqrt{-2\xi_0} \quad (9-14)$$

Constanta necunoscută a_2 se determină de asemenea prin metoda lui Gauss a minimului sumei pătratelor erorilor, minim relativ la parametrul a_2 , procedând analog ca și în cazul primei cvasi-semiperioade.

Se obține următoarea formulă :

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n T_{2i} \sqrt{-2\xi_{0i}} - \pi \sum_{i=1}^n \sqrt{-2\xi_{0i}}}{\sum_{i=1}^n (-2\xi_{0i})} \quad (9-15)$$

Calcululele au fost întabelate în tabelul nr.3 ()

Au rezultat următoarele valori numerice :

$$a_2 = \frac{41,769992217 - 3,141592 \times 13,12600}{12,9152} = \frac{0,53345625}{12,9152} = 0,0413 \quad (9-16)$$

Cu această valoare se poate scrie acum formula finală propusă pentru determinarea celei de a doua cvasi-semiperioade :

$$T_2 \approx \pi + 0,042 \sqrt{-2\xi_0} = \pi + \frac{42}{1000} \sqrt{-2\xi_0} \quad (9-17)$$

Pentru a determina calitatea corelației liniare propuse s-a calculat coeficientul de corelație al acestei corelații cu formula :

A-III-9-6

$$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} [\sqrt{-2\zeta_{0i}} - (\sqrt{-2\zeta_0})_{med}] (\mathcal{T}_{2i} - \mathcal{T}_{2med})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{18} [\sqrt{-2\zeta_{0i}} - (\sqrt{-2\zeta_0})_{med}]^2 \sum_{i=1}^{18} (\mathcal{T}_{2i} - \mathcal{T}_{2med})}} \quad (9-18)$$

Calcululele au fost întabulate în tabelul nr.4 (42) și au condus la următoarele rezultate numerice :

$$r_2 = \frac{0,152853517}{1,827044 \times 0,08451} = \frac{0,152853517}{0,154403488} = 0,990 \quad (9-19)$$

Valoarea obținută pentru coeficientul de corelație atestă de asemenea o calitate excelentă a corelației propuse.

Pentru cea de a treia cvasi-semiperioadă s-a propus o corelație de același tip ca și pentru a doua cvasi-semiperioadă :

$$\mathcal{T}_3 = \mathcal{T} + a_3 \sqrt{-2\zeta_0} \quad (9-20)$$

Constanta necunoscută "a₃" se determină de asemenea prin metoda lui Gauss, ajungându-se la formula :

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} \mathcal{T}'_{3i} \sqrt{-2\zeta_{0i}} - \mathcal{T} \sum_{i=1}^{10} \sqrt{-2\zeta_{0i}}}{\sum_{i=1}^n (-2\zeta_{0i})} \quad (43) \quad (9-21)$$

Calcululele au fost trecute în tabelul nr.5, rezultând următoarele valori numerice :

$$a_3 = \frac{21,967100264 - 3,141592 \times 6,94521}{7,2652} = \frac{0,148084090}{7,2652} = 0,02038 \quad (9-22)$$

Cu această valoare se poate scrie acum formula finală propusă pentru determinarea celei de a treia cvasi-semiperioade :

$$\mathcal{T}_3 \cong \mathcal{T} + 0,021 \sqrt{-2\zeta_0} = \mathcal{T} + \frac{21}{1000} \sqrt{-2\zeta_0} \quad (9-23)$$

A-III-9-7

Pentru a determina și în acest caz calitatea relației propuse s-a calculat coeficientul de corelație cu formula :

$$r_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} [\sqrt{2s_{0i}} - (\sqrt{2s_0})_{med}] (\mathcal{T}_{3i} - \mathcal{T}_{3med})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} [\sqrt{2s_0} - (\sqrt{2s_0})_{med}]^2 \cdot \sum_{i=1}^{10} (\mathcal{T}_{3i} - \mathcal{T}_{3med})^2}} \quad (9-24)$$

Calcululele au fost înscrise în tabelul Nr.6 (44) conducînd la următoarele valori finale :

$$r_3 = \frac{0,04755561}{1,56085 \times 0,03104} = \frac{0,047555661}{0,048448784} = 0,982 \quad (9-25)$$

Această mică scădere a coeficientului de corelație se datorește în primul rînd faptului că numărul de termeni s-a înjumătățit, fiind eliminate tocmai valorile unde corelația propusă dă rezultate mai bune, adică valorile mici ale lui $|s_0|$

Se constată din cele de mai sus următoarele concluzii importante :

- influența condiției inițiale este mult mai mare pentru prima cvasi-semiperioadă decît pentru următoarele cvasi-semiperioade. Rezultă de aici că mișcarea se abate de la mișcarea unui lichid ideal mult mai mult în prima cvasi-semiperioadă decît în următoarele ;

- începînd de la a treia cvasi-semiperioadă influența condiției inițiale devine ne semnificativă. Rezultă că ar fi posibilă înglobarea într-o formulă unică a tuturor cvasi-semiperioadelor, începînd cu cea de la doua :

$$\mathcal{T}_k = \pi + \frac{42}{1000(k-1)} \sqrt{2s_0} \quad (9-26)$$

- și în cazul timpului, ca și în cazul nivelurilor extreme se obțin formule diferite pentru calculul primei cvasi-semiperioade respectiv pentru calculul celorlalte cvasisemiperioade, formule care indică ca și în cazul nivelurilor extreme tot o dependență de

A-III-9-8

tip hiperbolic a cvasi-semiperioadelor de ordinul lor.

Cu formulele aproximative propuse s-au calculat valorile primelor trei cvasi-semiperioade pentru care există și valori calculate prin alte metode.

Calcululele au fost trecute în tabelul Nr.7 (45) referitor la prima cvasi-semiperioadă și în tabelul Nr.8 (46) ^{și nr.9(47)} referitor la celelalte două cvasi-semiperioade.

În ceea ce privește prima cvasi-semiperioadă se constată că eroarea relativă maximă este de sub 4 % această eroare corespunzând la valoarea $|\xi_0| = 1,4026$ care iese din domeniul întilnit la amenajările hidroenergetice. Excluzînd această valoare, eroarea relativă este de sub 1,5 %.

Pentru a doua cvasi-semiperioadă ca și pentru a treia cvasi-semiperioadă eroarea relativă scade mult fiind sub 0,3 %.

A-III-9-10

TABELUL Nr.2 (40)

Calculul coeficientului de corelație r_1

$$(\sqrt{-2s_0})_{med} = 0,72922$$

$$\bar{f}_{med} = 1,8689$$

$$r_1 = \frac{\sum [\sqrt{-2s_0} - (\sqrt{-2s_0})_{med}] (f_{ii} - \bar{f}_{med})}{\sqrt{\sum [\sqrt{-2s_0} - (\sqrt{-2s_0})_{med}]^2 \sum (f_{ii} - \bar{f}_{med})^2}}$$

Nr crt	$\sqrt{-2s_{0i}}$	$\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}$	$[\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}]^2$	f_{ii}	$f_{ii} - \bar{f}_{med}$	$(f_{ii} - \bar{f}_{med})^2$	$[\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}] \times (f_{ii} - \bar{f}_{med})$
1	0,00000	-0,72922	0,5317618084	1,5708	-0,2981	0,08886361	0,217380482
2	0,14142	-0,58780	0,3455088400	1,6212	-0,2477	0,06135529	0,145598060
3	0,20000	-0,52922	0,2800738084	1,6425	-0,2264	0,05125696	0,119815408
4	0,31623	-0,41299	0,1705607401	1,6840	-0,1849	0,03418801	0,076361851
5	0,38730	-0,34192	0,1169092864	1,7112	-0,1577	0,02486929	0,053920784
6	0,44721	-0,28201	0,0795296401	1,7436	-0,1253	0,01570009	0,035335853
7	0,54772	-0,18150	0,0329422500	1,7752	-0,0937	0,00877969	0,017006550
8	0,63246	-0,09676	0,0093624976	1,8095	-0,0594	0,00352836	0,005747544
9	0,70711	-0,02211	0,0004888521	1,8383	-0,0306	0,00093636	0,000676566
10	0,77460	+0,04538	0,0020593444	1,8727	+0,0038	0,00001444	0,000172444
11	0,83666	+0,10744	0,0115433536	1,9020	+0,0331	0,00109561	0,003556264
12	0,89143	+0,16221	0,0263120841	1,9277	+0,0588	0,00345744	0,009537948
13	0,94868	+0,21946	0,0481626916	1,9502	+0,0813	0,00660969	0,017842098
14	1,00000	+0,27078	0,0733218084	1,9792	+0,1103	0,01216609	0,029867034
15	1,09545	+0,36623	0,1341244129	2,0269	+0,1580	0,02496400	0,057864340
16	1,18322	+0,45400	0,2061160000	2,0661	+0,1972	0,03888784	0,089528800
17	1,34164	+0,61242	0,3750582564	2,1600	+0,2911	0,08473921	0,178275462
18	1,67487	+0,94565	0,8942539225	2,3597	+0,4908	0,24088464	0,464125020
		Σ	3,3380895970			0,70229662	1,522612508

A-III-9-12

TABEL Nr.4 (42)

Calculul coeficientului de corelație r_2

$$(\sqrt{-2s_0})_{med} = 0,72922$$

$$\tilde{J}_{2med} = 3,1706$$

Nr. crt	$\sqrt{-2s_{0i}}$	$\frac{\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}}{(\sqrt{-2s_0})_{med}}$	$[\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}]^2$	\tilde{J}_{2i}	$\tilde{J}_{2i} - \tilde{J}_{2med}$	$(\tilde{J}_{2i} - \tilde{J}_{2med})^2$	$\frac{(\sqrt{-2s_{0i}} - (\sqrt{-2s_0})_{med}) \times (\tilde{J}_{2i} - \tilde{J}_{2med})}{(\tilde{J}_{2i} - \tilde{J}_{2med})}$
1	0,00000	-0,72922	0,5317618084	3,1416	-0,0290	0,00084100	0,021147380
2	0,14142	-0,58780	0,3455088400	3,1224	-0,0282	0,00079524	0,016575960
3	0,20000	-0,52922	0,2800738084	3,1431	-0,0275	0,00075625	0,014553550
4	0,31623	-0,41299	0,1705607401	3,1477	-0,0229	0,00052441	0,009457471
5	0,38730	-0,34192	0,1169092864	3,1507	-0,0199	0,00039601	0,006804208
6	0,44721	-0,28201	0,0795296401	3,1549	-0,0157	0,00024649	0,004427557
7	0,54772	-0,18150	0,0329422500	3,1625	-0,0081	0,00006561	0,001470150
8	0,63246	-0,09676	0,0093624976	3,1671	-0,0035	0,00001225	0,000338660
9	0,70711	-0,02211	0,0004888521	3,1708	+0,0002	0,00000004	0,000004422
10	0,77460	+0,04538	0,0020593444	3,1755	+0,0049	0,00002401	0,000222362
11	0,83666	+0,10744	0,0115433536	3,1785	+0,0079	0,00006241	0,000848776
12	0,89143	+0,16221	0,0263120841	3,1805	+0,0099	0,00009801	0,001605879
13	0,94868	+0,21946	0,0481626916	3,1833	+0,0127	0,00016129	0,002787142
14	1,00000	+0,27078	0,0733218084	3,1857	+0,0151	0,00022801	0,004088778
15	1,09545	+0,36623	0,1341244129	3,1886	+0,0180	0,00032400	0,006592140
16	1,18322	+0,45400	0,2061160000	3,1913	+0,0207	0,00042849	0,009397800
17	1,34164	+0,61242	0,3750582564	3,1977	+0,0271	0,00073441	0,016596582
18	1,67487	+0,94565	0,8942539225	3,2086	+0,0380	0,00144400	0,035934700
Σ			3,3380895970	57,075		0,00714193	0,152853517

A-III-9-14

TABELUL Nr.6 (44)

Calculul coeficientului de corelație r_3

$$(\sqrt{-2\xi_0})_{med} = 0,69452$$

$$\bar{y}_3 med = 3,1561$$

$$r_3 = \frac{\sum [\sqrt{-2\xi_{0i}} - (\sqrt{-2\xi_0})_{med}] (\bar{y}_{3i} - \bar{y}_3 med)}{\sqrt{\sum [\sqrt{-2\xi_{0i}} - (\sqrt{-2\xi_0})_{med}]^2 \sum (\bar{y}_{3i} - \bar{y}_3 med)^2}}$$

$\sqrt{-2\xi_{0i}}$	$\sqrt{-2\xi_{0i}} - (\sqrt{-2\xi_0})_{med}$	$[\sqrt{-2\xi_{0i}} - (\sqrt{-2\xi_0})_{med}]^2$	\bar{y}_{3i}	$\bar{y}_{3i} - \bar{y}_3 med$	$(\bar{y}_{3i} - \bar{y}_3 med)^2$	$[\sqrt{-2\xi_{0i}} - (\sqrt{-2\xi_0})_{med}] \times (\bar{y}_{3i} - \bar{y}_3 med)$
0,00000	-0,69452	0,4823580304	3,1416	-0,0145	0,00021025	0,010070540
0,14142	-0,55310	0,3059196100	3,1430	-0,0131	0,00017161	0,007245610
0,20000	-0,49452	0,2445500304	3,1445	-0,0116	0,00013456	0,005736432
0,44721	-0,24731	0,0611622361	3,1515	-0,0046	0,00001656	0,001137626
0,63246	-0,06206	0,0038514436	3,1587	+0,0026	0,00000676	0,000161356
0,77460	+0,08008	0,0064128064	3,1595	+0,0034	0,00001156	0,000272272
0,89143	+0,19691	0,0387735481	3,1618	+0,0057	0,00003249	0,001122387
1,00000	+0,30548	0,0933180304	3,1632	+0,0071	0,00005041	0,002168908
1,18322	+0,48870	0,2388276900	3,1665	+0,0105	0,00011025	0,005131350
1,67487	+0,98035	0,9610861225	3,1709	+0,0148	0,00021904	0,014509180
Σ		2,4362595479			0,00096349	0,047555661

A-III-9-15

TABILUL Nr.7 (45)

Tabel comparativ privind prima cvasi-semiperioadă

nr. rt.	ξ_0	$\frac{42\sqrt{-2\xi_0}}{100}$	\int_1	$\int_{1\ s-L}$	Eroare absolută	Eroare relativă
			formula propusă	(metode numerice) Simpson, Legendre)	$\int_1 - \int_{1\ s-L}$	$\frac{\int_1 - \int_{1\ s-L}}{\int_{1\ s-L}}$
1	-0,000	0,00000	1,5708	1,5708	0,0000	0,000
2	-0,010	0,0594	1,6302	1,6212	0,0090	0,458
3	-0,020	0,0840	1,6548	1,6425	0,0123	0,749
4	-0,050	0,1328	1,7036	1,6840	0,0196	1,189
5	-0,075	0,1627	1,7335	1,7112	0,0223	1,303
6	-0,100	0,1878	1,7586	1,7356	0,0230	1,325
7	-0,150	0,2300	1,8008	1,7752	0,0256	1,442
8	-0,200	0,2656	1,8364	1,8095	0,0269	1,487
9	-0,250	0,2970	1,8678	1,8383	0,0295	1,605
10	-0,300	0,3253	1,8961	1,8727	0,0234	1,250
11	-0,350	0,3514	1,9222	1,9020	0,0202	1,062
12	-0,400	0,3744	1,9452	1,9277	0,0175	0,908
13	-0,450	0,3984	1,9692	1,9002	0,0140	0,737
14	-0,500	0,4200	1,9908	1,9792	0,0116	0,586
15	-0,600	0,4601	2,0309	2,0269	0,0040	0,197
16	-0,700	0,4970	2,0678	2,0661	0,0017	0,082
17	-0,900	0,5635	2,1343	2,1600	-0,0257	-1,190
18	-1,4026	0,7034	2,2742	2,3597	-0,0855	-3,623

A-III-9-16

TABELUL Nr.8 (46)

Tabel comparativ privind a doua cvasi-semiperioadă

Nr. crt.	$-\xi_0$	$\frac{42\sqrt{-2}\xi_0}{1.000}$	\tilde{J}_2 formula propusă	\tilde{J}_{2L} metoda numerică Legendre	Eroare absolută $\tilde{J}_2 - \tilde{J}_{2L}$	Eroare relativă $\frac{\tilde{J}_2 - \tilde{J}_{2L}}{\tilde{J}_{2L}}$
1	0,000	0,0000	3,1416	3,1416	0,0000	0,000
2	0,010	0,0059	3,1475	3,1424	0,0051	0,162
3	0,020	0,0084	3,15000	3,1431	0,0069	0,220
4	0,050	0,0133	3,1549	3,1477	0,0072	0,229
5	0,075	0,0163	3,1579	3,1507	0,0072	0,232
6	0,100	0,0188	3,1604	3,1549	0,0055	0,174
7	0,150	0,0230	3,1646	3,1625	0,0021	0,066
8	0,200	0,0266	3,1682	3,1671	0,0011	0,0347
9	0,250	0,0297	3,1713	3,1708	0,0005	0,0158
10	0,300	0,0325	3,1741	3,1755	-0,0014	-0,044
11	0,350	0,0351	3,1767	3,1785	-0,0018	-0,057
12	0,400	0,0374	3,1790	3,1805	-0,0015	-0,048
13	0,450	0,0398	3,1814	3,1833	-0,0019	-0,060
14	0,500	0,0420	3,1836	3,1857	-0,0021	-0,066
15	0,600	0,0460	3,1876	3,1886	-0,0010	-0,031
16	0,700	0,0497	3,1913	3,1913	0,0000	0,000
17	0,900	0,0563	3,1979	3,1977	0,0002	0,063
18	1,4026	0,0703	3,2119	3,2086	0,0033	0,103

A-III-9-17

TABELUL Nr.9 (47)

Tabel comparativ privind a treia cvasi-semiperioadă

Nr. crt.	$-\xi_0$	$\frac{42\sqrt{-2\xi_0}}{2000}$	\tilde{Y}_3 formula propusă	\tilde{Y}_3 metoda Legendre	Eroare absolută $\tilde{Y}_3 - \tilde{Y}_{3L}$	Eroare relativă $\frac{\tilde{Y}_3 - \tilde{Y}_{3L}}{\tilde{Y}_{3L}} \cdot 100\%$
1	0,000	0,0000	3,1416	3,1416	0,0000	0,000
2	0,010	0,0030	3,1446	3,1430	0,0016	0,030
3	0,020	0,0042	3,1458	3,1445	0,0013	0,041
4	0,100	0,0094	3,1510	3,1515	0,0015	0,016
5	0,200	0,0133	3,1549	3,1587	-0,0038	-0,120
6	0,300	0,0163	3,1579	3,1595	-0,0016	-0,051
7	0,400	0,0187	3,1603	3,1618	-0,0015	-0,047
8	0,500	0,0210	3,1626	3,1632	-0,0006	-0,019
9	0,700	0,0248	3,1664	3,1665	-0,0001	-0,003
10	1,4026	0,0352	3,1768	3,1709	0,0059	0,186

A-IV-4-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE .

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - Problema legii de oscilație§ 4.- Utilizarea metodei variaționale pentru determinarea legii de oscilație în prima cvasi-semiperioadă

La capitolul I s-a arătat că problema integrării ecuației diferențiale a oscilațiilor poate fi redusă la problema găsirii unei funcții $S = S(\tau)$ care să satisfacă următoarea condiție de staționaritate :

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{dS}{d\tau} \right)^2 d\tau = 0 \quad (4-1)$$

Pentru găsirea funcției extremale există mai multe metode directe, în cele ce urmează se va aplica metoda lui Ritz. După cum a reieșit din cele anterioare soluția trebuie căutată în două etape : într-o primă etapă se determină legea de oscilație pentru prima cvasi-semiperioadă de timp T_1 (adimensională τ_1) care începe din momentul t_0 (τ_0) al închiderii bruşte și se încheie în momentul t_1 (τ_1) al atingerii nivelului maxim în castel. Într-o a doua etapă, legea de mișcare se va cerceta pentru o cvasi-semiperioadă arbitrară τ_{j+1} (adimensional τ_{j+1}), care începe la momentul t_j (τ_j) și se încheie la momentul t_{j+1} (τ_{j+1}), momente cărora le corespund în castel nivele extreme locale.

După cum s-a mai arătat și la utilizarea metodei aproximative Krilov-Bogoliubov mișcarea, în prima cvasi-perioadă se abate mai mult de la mișcarea unui oscilator liniar în comparație cu următoarele cvasi-semiperioade, de aceea problema aproximării mișcării cu aceea a unui oscilator liniar, în acest prim interval de timp conduce la erori cu atât mai mari cu cât parametrul adimensional reprezentînd condiția inițială $|S_0|$ este mai mare.

A-IV-4-2

In utilizarea metodei Ritz se pleacă de la o sumă finită de funcții, reprezentând prima parte a unei serii alcătuită din termeni reprezentând un sistem complet de funcții. Metoda se va utiliza în două variante :

I - se pleacă de la o sumă finită de funcții trigonometrice ;

II - se pleacă de la o sumă finită de puteri ;
 întrucât nu se știe a priori care dintre cele două sume, la același număr de termeni va da rezultate mai apropiate de cele determinate prin alte metode și de cele experimentale.

Varianta I : sumă finită de funcții trigonometrice

Pentru a putea utiliza o sumă alcătuită doar din sinusuri se va face o transformare liniară provizorie a nedeterminatelor, definită de relațiile :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sqrt{1}}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} (\tau - \tau_0) \\ \xi_1 &= \xi - \xi_0 - (\xi_1 - \xi_0) \frac{\tau_1}{\sqrt{1}} = \xi - \xi_0 - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0) \end{aligned} \quad (4-2)$$

Se calculează și expresia primelor două derivate :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau_1} &= \frac{d\xi_1}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_1} = \left(\frac{d\xi}{d\tau} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} \right) \frac{\tau_1 - \tau_0}{\sqrt{1}} \\ \frac{d^2\xi_1}{d\tau_1^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi_1}{d\tau_1} \right) \frac{d\tau}{d\tau_1} = \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{\sqrt{1}} \right)^2 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{\sqrt{1}^2}{\sqrt{1}} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (4-3)$$

Explicitând acum din relațiile de mai sus vechile derivate :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} \frac{d\xi_1}{d\tau_1} + \frac{\xi_1 - \xi_0}{\sqrt{1}} \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \frac{\sqrt{1}^2}{\sqrt{1}^2} \frac{d^2\xi_1}{d\tau_1^2} \end{aligned} \quad (4-4)$$

Condițiile de margine corespunzătoare noii funcții sînt :

$$\begin{aligned} \tau = \tau_0 \implies \tau_1 = 0 \implies \xi_1 = 0 \\ \frac{d\xi_1}{d\tau_1} = \left[\sqrt{-2\xi_0} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} \right] \frac{\tau_1 - \tau_0}{\sqrt{1}} \end{aligned} \quad (5-5)$$

A-IV-4-3

$$\xi = \xi_1 \implies \tau_{\xi_1} = \pi \implies \xi_{\Delta} = 0$$

$$\frac{d\xi_{\Delta}}{d\tau_{\xi_1}} = - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\pi} \quad (5-6)$$

Pentru funcția necunoscută ξ_{Δ} se propune o soluție aproximativă sub forma unei sume finite de opt sinusuri, cu constantele nedeterminate a_k :

$$\xi_{\Delta} = \sum_{k=1}^8 a_k \sin k \tau_{\xi_1}$$

$$\frac{d\xi_{\Delta}}{d\tau_{\xi_1}} = \sum_{k=1}^8 k a_k \cos k \tau_{\xi_1} \quad (5-7)$$

Să vedem cum satisface funcția propusă condițiile de margine ale problemei $\tau_{\xi_1} = 0 \implies \xi_{\Delta} = 0$, oricare ar fi constantele a_k ,

$$\frac{d\xi_{\Delta}}{d\tau_{\xi_1}} = \sum_{k=1}^8 k a_k = \left[\sqrt{-2\xi_0} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_{\xi_1} - \tau_{\xi_0}} \right] \frac{\tau_{\xi_1} - \tau_{\xi_0}}{\pi} \quad (5-8)$$

$$\tau_{\xi_1} = \pi \implies \xi_{\Delta} = 0$$

, oricare ar fi constantele a_k

$$\frac{d\xi_{\Delta}}{d\tau_{\xi_1}} = \sum_{k=1}^8 (-1)^k k a_k = - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\pi} \quad (5-9)$$

Se constată faptul că satisfacerea condițiilor de margine de tip Cauchy conduce la două relații de legătură între constantele nedeterminate a_k .

Condiția variațională (5-1), trebuiește transcrisă folosind pentru noua funcție ξ_{Δ} :

A-IV-4-4

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 d\tau = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\mathcal{I}} \delta \left[\frac{\mathcal{I}^2}{(\tau_1 - \tau_0)^2} \int_0^{\mathcal{I}} \left(\frac{d\xi_\Delta}{d\tau_\Delta} \right)^2 d\tau_\Delta + \frac{2\mathcal{I}(\xi_1 - \xi_0)}{(\tau_1 - \tau_0)^2} \int_0^{\mathcal{I}} \frac{d\xi_\Delta}{d\tau_\Delta} d\tau_\Delta + \frac{(\xi_1 - \xi_0)^2}{(\tau_1 - \tau_0)^2} \int_0^{\mathcal{I}} d\tau_\Delta \right] = 0 \quad (5-10)$$

Pe de altă parte :

$$\int_0^{\mathcal{I}} \frac{d\xi_\Delta}{d\tau_\Delta} d\tau_\Delta = \int_0^{\mathcal{I}} \sum_{k=1}^8 k a_k \cos k\tau_\Delta d\tau_\Delta = 0$$

$$\int_0^{\mathcal{I}} d\tau_\Delta = \mathcal{I} \quad (5-11)$$

$$\int_0^{\mathcal{I}} \left(\frac{d\xi_\Delta}{d\tau_\Delta} \right) d\tau_\Delta = \frac{\mathcal{I}}{2} \sum_{k=1}^8 k^2 a_k^2$$

Problema variațională inițială s-a transformat în următoarea problemă de extrem condiționat : să se găsească acei coeficienți a_k ai dezvoltării (5-7) care fac extremă expresia $\sum_{k=1}^8 k^2 a_k^2$ cu legăturile (5-8) și (5-9).

După cum este cunoscut, problemele de extrem condiționat se transformă într-o problemă de extrem necondiționat pentru o funcție auxiliară Φ , construită cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange λ și μ :

$$\Phi = \sum_{k=1}^8 \left[k^2 a_k^2 + \lambda k a_k + (-1)^k \mu k a_k \right] \quad (5-12)$$

Pentru a găsi extremul funcției Φ se anulează derivatele parțiale :

~~A-IV-4-5~~

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2k^2 a_k + \lambda k + (-1)^k \mu k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (5-13)$$

Dacă la cele opt ecuații de mai sus se mai adaugă cele două ecuații (9-4), cerute de satisfacerea condițiilor de margine se obține un sistem de zece ecuații cu zece necunoscute : cele opt constante a_k și cei doi multiplicatori Lagrange λ și μ .

Din ecuațiile (9-13) se obține imediat :

$$a_k = - \frac{\lambda + (-1)^k \mu}{2k} \quad (5-14)$$

Introducînd în cele două ecuații de condiție aceste expresii ale constantelor a_k se obține sistemul cu necunoscutele λ și μ :

$$-4 \left[\lambda + (-1)^k \mu \right] = \left[\sqrt{-2\xi_0} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} \right] \frac{\tau_1 - \tau_0}{\eta} \quad (5-15)$$

$$-4 \left[(-1)^k \lambda + \mu \right] = - \frac{\xi_1 - \xi_0}{\eta}$$

Se obțin soluțiile :

$$\lambda = \frac{\tau_1 - \tau_0}{4\eta} \left[\frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} - \sqrt{-2\xi_0} \right]$$

$$\mu = \frac{\xi_1 - \xi_0}{4\eta} \quad (5-16)$$

A-IV-5-6

Rezultă atunci :

$$a_k = - \frac{(\tau_1 - \tau_0) \left[\frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} - \sqrt{-2\xi_0} \right] + (-1)^k (\xi_1 - \xi_0)}{8k\pi} \quad (5-17)$$

sau :

$$a_{2p} = \frac{-2(\xi_1 - \xi_0) + (\tau_1 - \tau_0) \sqrt{-2\xi_0}}{16p\pi} \quad (5-18)$$

$$a_{2p-1} = \frac{\sqrt{-2\xi_0} (\tau_1 - \tau_0)}{8(2p-1)\pi}$$

Deci soluția aproximativă este :

$$\begin{aligned} \xi_s = & \frac{(\tau_1 - \tau_0) \sqrt{-2\xi_0}}{8\pi} \sum_{p=1}^4 \frac{1}{2p-1} \sin(2p-1)\tau_s + \\ & + \left[\frac{(\tau_1 - \tau_0) \sqrt{-2\xi_0}}{8\pi} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4\pi} \right] \sum_{p=1}^4 \frac{1}{2p} \sin 2p\tau_s \quad (5-19) \end{aligned}$$

Revenind acum la variabilele inițiale ξ și τ se obține legea de oscilație căutată, valabilă în intervalul de timp $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$

$$\begin{aligned} \xi = & \xi_0 + \frac{\xi_1 - \xi_0}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0) + \frac{\tau_1 - \tau_0}{8\pi} \sqrt{-2\xi_0} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0) - \\ & - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2k\pi}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0) \quad (5-20) \end{aligned}$$

A-IV-4-7

Pentru a ușura utilizarea formulei la care s-a ajuns în rezolvarea concretă a problemelor s-a împărțit prima cvasi-semiperioadă într-un număr de zece sub-intervale egale de timp :

$$\tau_j - \tau_0 = \frac{j}{10} (\tau_1 - \tau_0) ; j = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (4-21)$$

Formula stabilită (4-20) devine atunci :

$$\xi_j = \xi_0 + \frac{j}{10} (\xi_1 - \xi_0) + \frac{\sqrt{j-2\xi_0}}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\sqrt{\pi} k j}{10} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\sqrt{\pi} k j}{10} \quad (4-22)$$

Utilizând acum formula aproximativă stabilită anterior în capitolul III, § 9 al 1^{ei} teme pentru prima cvasi semiperioadă :

$$\sqrt{j} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0,42 \sqrt{-2\xi_0} \quad (4-23)$$

formula capătă forma :

$$\xi_j = \xi_0 + \frac{j}{10} (\xi_1 - \xi_0) + \frac{1}{16} \sqrt{-2\xi_0} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\sqrt{\pi} k j}{10} - \frac{0,21}{2\sqrt{\pi}} \xi_0 \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\sqrt{\pi} k j}{10} - \frac{\xi_1 - \xi_0}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\sqrt{\pi} k j}{10} \quad (4-24)$$

Se introduc următorii parametri adimensionali, invariabili în raport cu datele problemei de rezolvat ceea ce permit calculul lor o singură dată și utilizarea rezultatelor în orice problemă :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\sqrt{\pi} k j}{10} \\ \beta_j &= 1 - \frac{j}{10} - \frac{0,21}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\sqrt{\pi} k j}{10} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\sqrt{\pi} k j}{10} \\ \gamma_j &= \frac{j}{10} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\sqrt{\pi} k j}{10} \end{aligned} \quad (4-25)$$

Valorile acestor parametri sînt date în tabelul nr.1 (48) pentru $j = 0, 1, 2, \dots, 10$. în tabelul Nr.3(50) sînt calculate sumele care apar Prin introducerea acestor parametri relația (4-24) capătă o formă foarte comodă pentru utilizarea practică :

A-IV-4-8

$$\xi_j = \alpha_j \sqrt{-2\xi_0} + \beta_j \xi_0 + \gamma_j \xi_{max} \quad (4-26)$$

Revenind de la variabilele adimensionale la cele dimensionale se obține formula finală căutată :

$$z_j = \alpha_j \sqrt{-2z_0 Z_*} + \beta_j z_0 + \gamma_j z_{max} ; j = 0, 1, 2, \dots 10. \quad (4-27)$$

în care :

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_{ec} F}$$

iar coeficienții $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ au valorile date în tabelul nr.1 (48)

Varianta II - : sumă finită de puteri

În această variantă se aplică metoda Ritz pornind de la o sumă finită de puteri. Notînd, pentru comoditatea scrierii :

$$\frac{b - b_0}{b_1 - b_1} = b_p \quad (4-28)$$

se caută o soluție aproximativă de forma unei sume alcătuită tot din opt termeni, variabila b_p :

$$\xi \cong \sum_{k=0}^8 a_k b_p^k \quad (4-29)$$

Acestei sume i se va cere realizarea următoarelor condiții de margine, obținute utilizînd modelul matematic al mișcării :

$$\begin{aligned} b = b_0 \implies b_p = 0 \implies \xi = \xi_0 & \implies \xi = \xi_0 \\ \frac{d\xi}{db} = \sqrt{-2\xi_0} & \frac{d\xi}{db_p} = \frac{d\xi}{db} \frac{db}{db_p} = \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} \\ \frac{d^2\xi}{db^2} = 0 & \frac{d^2\xi}{db_p^2} = \gamma_1^2 \frac{d^2\xi}{db^2} = 0 \\ \frac{d^3\xi}{db^3} = -\sqrt{-2\xi_0} & \frac{d^3\xi}{db_p^3} = \gamma_1^3 \frac{d^3\xi}{db^3} = -\gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} \end{aligned} \quad (4-30)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{b} = \bar{b}_1 \Rightarrow \bar{b}_p = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \xi = \xi_1 \\ \frac{d\xi}{d\bar{b}} = 0 \\ \frac{d^2\xi}{d\bar{b}^2} = -\xi_1 \\ \frac{d^3\xi}{d\bar{b}^3} = 0 \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{l} \xi = \xi_1 \\ \frac{d\xi}{d\bar{b}_p} = \gamma_1 \frac{d\xi}{d\bar{b}} = 0 \\ \frac{d^2\xi}{d\bar{b}_p^2} = \gamma_1^2 \frac{d^2\xi}{d\bar{b}^2} = -\gamma_1^2 \xi_1 \\ \frac{d^3\xi}{d\bar{b}_p^3} = \gamma_1^3 \frac{d^3\xi}{d\bar{b}^3} = 0 \end{array}
 \end{aligned} \quad (4-31)$$

Relațiile (4-30) permit determinarea rapidă a unor parametrii :

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_p = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \xi_0 \\ a_1 = \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{1}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} \end{array}
 \end{aligned} \quad (4-32)$$

Au ramas de determinat încă cinci parametrii, pentru care dispunem de cele patru ecuații de condiție (4-31) și de condiția variațională. Ecuațiile de condiție capătă atunci forma :

$$\begin{aligned}
 \xi_0 + \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{1}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 &= \xi_1 \\
 \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{1}{2} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + 4a_4 + 5a_8 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 &= 0 \\
 -\gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 + 42a_7 + 56a_8 &= -\gamma_1^2 \xi_1 \\
 -\gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + 24a_4 + 60a_5 + 120a_6 + 210a_7 + 336a_8 &= 0
 \end{aligned} \quad (4-33)$$

Din relațiile de condiție se explicitauza parametrii a_5 , a_6 , a_7 și a_8 ca funcții de parametrul a_4 :

$$\begin{aligned}
 a_5 &= 56(\xi_1 - \xi_0) - 3\xi_1 \gamma_1^2 - 35\gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} + \frac{10}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} - 4a_4 \\
 a_6 &= -140(\xi_1 - \xi_0) - 8,5\xi_1 \gamma_1^2 + 84\gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{20}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + 6a_4 \\
 a_7 &= 120(\xi_1 - \xi_0) - 8\xi_1 \gamma_1^2 - 70\gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} + \frac{15}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} - 4a_4 \\
 a_8 &= -35(\xi_1 - \xi_0) + 2,5\xi_1 \gamma_1^2 + 20\gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{4}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} + a_4
 \end{aligned} \quad (4-34)$$

A-IV-4-10

Din relațiile de mai sus prin derivare se obțin relațiile:

$$\frac{da_5}{da_4} = -4 ; \frac{da_6}{da_4} = 6 ; \frac{da_7}{da_4} = -4 ; \frac{da_8}{da_4} = 1 \quad (4-35)$$

Condiția variațională de care dispunem este :

$$\delta \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \left(\frac{d\zeta}{d\zeta_p} \right)^2 d\zeta = 0 \Rightarrow \delta \int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{d\zeta_p} \right)^2 d\zeta_p = 0 \quad (4-36)$$

Integrarea de mai sus se poate efectua dacă se utilizează pentru ζ expresia (4-29), în care se înlocuiesc valorile determinate la (4-32) :

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 \sqrt{-2\zeta_0} \zeta_p - \frac{1}{6} \zeta_1^3 \sqrt{-2\zeta} \zeta_p^3 + \sum_{k=4}^8 a_k \zeta_p^k$$

$$\frac{d\zeta}{d\zeta_p} = \zeta_1 \sqrt{-2\zeta} - \frac{1}{2} \zeta_1^3 \sqrt{-2\zeta_1} \zeta_p^2 + \sum_{k=4}^8 k a_k \zeta_p^{k-1}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\zeta_p} \right)^2 = -2\zeta \zeta_1^2 - \frac{1}{2} \zeta_1^6 \zeta = \zeta_p^4 + 2\zeta_0 \zeta_1^4 \zeta_p^2 + 2 \left(\zeta_1 \sqrt{-2\zeta} - \frac{1}{2} \zeta_1^3 \sqrt{-2\zeta_0} \zeta_p^2 \right) \times$$

$$\times \sum_{k=4}^8 k a_k \zeta_p^{k-1} + \sum_{k=4}^8 k^2 a_k^2 \zeta_p^{2k-2} + \sum_{\substack{k,j=4 \\ k \neq j}}^8 k_j a_k a_j \zeta_p^{k+j-2}$$

$$J = \int_0^1 \left(\frac{d\zeta}{d\zeta_p} \right)^2 d\zeta_p = -2\zeta_0 \zeta_1^2 - \frac{1}{10} \zeta_1^6 \zeta_0 + \frac{2}{3} \zeta_0 \zeta_1^4 + 2 \zeta_1 \sqrt{-2\zeta_0} \sum_{k=4}^8 a_k - \quad (4-37)$$

$$- \frac{1}{2} \zeta_1^3 \sqrt{-2\zeta_0} \times \sum_{k=4}^8 \frac{k}{k+2} a_k + \sum_{k=4}^8 \frac{k^2}{2k-1} a_k^2 + \sum_{\substack{k,j=4 \\ k \neq j}}^8 \frac{k_j}{k+j-1} a_k a_j = \text{extrem}$$

Condiția de extrem se poate scrie atunci sub forma :

$$\frac{\partial J}{\partial a_4} + \frac{\partial J}{\partial a_5} \frac{da_5}{da_4} + \frac{\partial J}{\partial a_6} \frac{da_6}{da_4} + \frac{\partial J}{\partial a_7} \frac{da_7}{da_4} + \frac{\partial J}{\partial a_8} \frac{da_8}{da_4} = 0 \quad (4-38)$$

pentru a determinați valoarea lui a_4 din ecuația (3-11) și să-l considerăm ca să fie identic zero.

$$\frac{\partial J}{\partial a_4} = 2 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} - \frac{1}{3} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{32}{7} a_4 + 8 \sum_{k=4}^8 \frac{k}{3+k} a_k$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_5} = 2 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} - \frac{5}{14} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{25}{9} a_5 + 10 \sum_{k=4}^8 \frac{k}{4+k} a_k$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_6} = 2 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} - \frac{3}{8} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{36}{11} a_6 + 12 \sum_{k=4}^8 \frac{k}{5+k} a_k$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_7} = 2 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} - \frac{7}{18} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{49}{13} a_7 + 14 \sum_{k=4}^8 \frac{k}{6+k} a_k$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_8} = 2 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} - \frac{2}{5} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{64}{15} a_8 + 16 \sum_{k=4}^8 \frac{k}{7+k} a_k$$

Prin urmare, înlocuind în ecuațiile (3-11) - (3-15) valoarea lui a_4 și a_8 în funcție de celelalte constante și efectuând calculul, obținem următoarele ecuații:

$$579384 a_4 - 35,75 \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} + 227,5 a_5 + 210 a_6 + 189 a_7 + 168 a_8 = 0 \quad (3-16)$$

Observăm, fiindcă în vâzută ecuația de mai sus termenii care înțeleg de a_4 și a_8 sunt cei mai mari, că se poate considera ca să fie identic zero:

$$a_4 \cong 0 \quad (3-17)$$

Prin urmare, în ecuația (3-16) se poate lua valoarea celorlalte constante:

$$a_5 = 56 (\xi_1 - \xi_0) - 5 \xi_1 \gamma_1^2 - 35 \gamma_1 \sqrt{-2 \xi_0} + \frac{10}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2 \xi_0} \quad (3-18)$$

A-IV-4-12

$$a_6 = -140 (\xi_1 - \xi_0) + 8,5 \xi_1 \gamma_1^2 + 84 \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{20}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0}$$

$$a_7 = 120 (\xi_1 - \xi_0) - 8 \xi_1 \gamma_1^2 - 70 \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} + \frac{15}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0}$$

$$a_8 = -35 (\xi_1 - \xi_0) + 2,5 \xi_1 \gamma_1^2 + 20 \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} - \frac{4}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0}$$

Revenind atunci rezultă că legea de oscilație intervalul de timp în care nivelul apei crește în castelul de echilibru este:

$$\xi = \xi_0 + \gamma_1 \sqrt{-2\xi_0} \tau_p - \frac{1}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2\xi_0} \tau_p^3 + \sum_{k=5}^8 a_k \tau_p^k \quad (4-43)$$

Trecînd la variabila τ în locul variabilei τ_p :

$$\xi = \xi_0 + \sqrt{-2\xi_0} (\tau - \tau_0) - \frac{1}{6} \sqrt{-2\xi_0} (\tau - \tau_0)^3 + \sum_{k=5}^8 a_k \left(\frac{\tau - \tau_0}{\gamma_1} \right)^k \quad (4-44)$$

Revenind la variabilele dimensionale, relația de mai sus capătă forma finală :

$$z = z_0 + \gamma_1 \sqrt{-2z_0 Z_*} \frac{t - t_0}{T_1} - \frac{1}{6} \gamma_1^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} \left(\frac{t - t_0}{T_1} \right)^3 + \left(\frac{t - t_0}{T_1} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{t - t_0}{T_1} \right)^k \quad (4-45)$$

Considerînd aici momentele τ_j definite prin :

$$t_j - t_0 = \frac{j}{10} T_1 \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10. \quad (4-46)$$

relația de mai sus devine :

$$z_j = z_0 + \frac{j \gamma_1}{10} \sqrt{-2z_0 Z_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{j \gamma_1}{10} \right)^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} + \left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k \quad (4-47)$$

în care coeficienții A_k sînt dați în tabelul : Nr. 4 (51)

	$Z_{\max} - z$	$Z_{\max} \gamma_1^2$	$\gamma_1 \sqrt{-2z_0 Z_*}$	$\gamma_1^3 \sqrt{-2z_0 Z_*}$
A_0	55	-3	-35	$\frac{5}{3}$
A_1	-140	8,5	84	$-\frac{10}{3}$
A_2	120	-8	-70	2,5
A_3	-35	2,5	20	$-\frac{2}{3}$

A-IV-4-13

In tabelul Nr.2(49) sînt calculate valorile unor puteri ale lui $j/10$, necesară în utilizarea efectivă a formulei stabilite.

TABEL Nr.1 (48)

Calculul coeficienților $\alpha_j, \beta_j, \delta_j$
 $\frac{0,21}{2\pi} = 0,0334225$; $\frac{1}{4\pi} = 0,0795775$; $\pi = 3,14159265$

$\frac{j}{10} = \frac{z}{z_0}$	$\alpha_j = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\pi k j}{10}$	$\frac{0,21}{2\pi} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\pi k j}{10}$	$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\pi k j}{10}$	β_j	δ_j
0,0	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000
0,1	0,103619	0,055411	0,060769	0,905358	0,039231
0,2	0,074298	0,039732	0,032279	0,792547	0,167821
0,3	0,069104	0,036954	0,027812	0,690858	0,272288
0,4	0,061267	0,032763	0,011234	0,578471	0,388766
0,5	0,045258	0,024192	0,000000	0,475808	0,500000
0,6	0,043621	0,023327	-0,011234	0,355439	0,611234
0,7	0,025418	0,013593	-0,027812	0,258595	0,727812
0,8	0,023594	0,012617	-0,032279	0,155104	0,832279
0,9	0,008163	0,004365	-0,060769	0,034866	0,960769
1,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000

$$\beta_j = 1 - \frac{j}{10} - \frac{0,21}{2\pi} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{\pi k j}{10} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\pi k j}{10}$$

$$\delta_j = \frac{j}{10} - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2\pi k j}{10}$$

A-IV-5-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - Problema legii de oscilație§ 5. Legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă.Verificări și concluzii

În paragraful anterior, prin aplicarea metodei variaționale s-au dedus două expresii aproximative pentru legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă : prima s-a obținut pornind de la o sumă de sinusuri, iar a doua pornind de la o sumă de puteri, ambele sume avînd un același număr de termeni considerat este mai mare decît se consideră în mod uzual în astfel de aproximiări. De aceea se impune a se verifica concordanța valorilor ce se obțin cu cele două formule propuse, a se face o comparație între ele și a recomanda în final una dintre ele.

Varianta I : sumă finită de funcții trigonometrice

În cadrul acestei variante s-a ajuns la formula :

$$z_j = \alpha_j \sqrt{-2z_0 Z_*} + \beta_j z_0 + \gamma_j^2 z_{\max} \quad ; \quad j=0, 1, 2, \dots, 10. \quad (5-1)$$

în care coeficienții α_j au valori cunoscute .

Verificare s-a făcut folosind rezultatele din lucrarea /1-E/.

În lucrarea /1-E/ se dau cotele s_j calculate cu metoda diferențelor finite după un algoritm propus de respectivul autor

A-IV-5-2

și în plus se face o comparație cu rezultatele obținute teoretic prin alte căi și cu rezultatele experimentale obținute de autor în cercetările efectuate pe modelul mare la Institutul de electro-tehnică din Toulouse. Concordanța între rezultatele teoretice și experimentale este foarte bună.

Caracteristicile de comandă ale instalației sînt :

$$\begin{aligned}
 D &= 1 \text{ m} \\
 F &= \frac{\pi D^2}{4} = 0,7854 \text{ m}^2 \\
 d &= 0,3 \text{ m} \\
 f &= \frac{\pi d^2}{4} = 0,07068 \text{ m}^2 \\
 L &= 28,70 \text{ m} \\
 \omega_0 &= 2,295 \text{ m/s} \\
 z_0 &= -0,77 \text{ m} \implies \sqrt{-2z_0} = 1,241 \text{ m}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Caracteristici de calcul

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ec} &= - \frac{2gz}{L\omega_0^2} \approx 0,030 \\
 Z_* &= \frac{df}{\lambda_{ec} F} = 0,9 \text{ m} \implies \sqrt{Z_*} = 0,949 \text{ m}^{1/2} \\
 \xi_0 &= \frac{z_0}{Z_*} = -0,85556
 \end{aligned}$$

Din valoarea parametrului adimensional al pierderilor inițiale de energie se constată că instalația este caracterizată printr-o pierdere relativ mare de energie inițială.

După autorul respectivei lucrări se obține un nivel maxim $z_{\max} = 0,728 \text{ m}$, după un interval de timp $T_1 = 12,2 \text{ s}$ de la efectuarea manevrei de închidere bruscă. În lucrarea citată se dă sub formă tabelară și legea de oscilație $z = z(t)$, pasul intervalului de timp fiind de $0,2 \text{ s}$. Din acest tabel s-au extras, pen-

A-IV-5-3

tru a face comparația cu formula stabilită, numai valorile care corespund intervalelor de timp $\frac{j}{10} = \frac{t_1 - t_0}{T_1}$; $j = 0, 1, 2, \dots, 10$.

În tabelul Nr.1(52) se prezintă comparativ valorile obținute de profesorul Escande și paralel rezultatele calculate cu formula propusă.

Din acest tabel rezultă că, deși legea propusă descrie calitativ corespunzător evoluția fenomenului ea conduce la valori în general mai mici decât cele reale, diferența între cele două metode mergând până la 0,27 m ceea ce reprezintă 18 % din amplitudinea oscilației, ceea ce este destul de mult.

Varianta II : sumă finită de puteri

În cadrul acestei variante s-a ajuns la formula :

$$z_j = z_0 + \frac{j\tilde{\gamma}_1}{10} \sqrt{-2z_0 Z_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{j\tilde{\gamma}_1}{10} \right)^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} + \left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k \quad (5-2)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, 10.$

în care coeficienții A_k au expresii cunoscute, date în paragraful anterior. Verificarea se face folosind după cum este firesc tot lucrarea /1-E/.

Pe lângă datele menționate anterior mai este necesar a se calcula :

$$T_* = \sqrt{\frac{LF}{9f}} = 5,7017s$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{T_1}{T_*} = 2,13971$$

$$\tilde{\gamma}_1 \sqrt{-2z_0 Z_*} = 2,51893$$

$$\tilde{\gamma}_1^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} = 11,53257$$

A-IV-5-4

In tabelul Nr.2(53) sînt calculați coeficienți A_K ,
 $K = 0, 1, 2, 3$ în tabelul Nr.3(54) este calculată suma $\left(\frac{j}{10}\right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$
și în tabelul Nr.4(55) este calculată cota z_j făcîndu-se și
comparația cu valorile profesorului Escande.

Din acest ultim tabel rezultă faptul că concordanța între
cele două metode este excepțională, diferența absolută maximă
fiind de 0,009 m, iar diferența absolută maximă raportată la suma
amplitudinilor oscilației este de 0,6 %.

Rezultă în concluzie că formula dedusă în varianta II-a,
în care s-a considerat o sumă finită de puteri descrie mai bine
fenomenul studiat, de aceea se recomandă a fi utilizată.

A-IV-5-5

TABEL Nr.1 (52)

$$\sqrt{-2 z_0 Z_*} = 1,1777 m$$

$\frac{t_j - j}{T_1 - 10}$	t_j	$o_j \sqrt{-2 z_0 Z_*}$	$b_j z_0$	$c_j z_{max}$	$Z_j A$ (formula propusă)	$Z_j E$ (Escande)	$z_{jA} - z_{jE}$
	< s >	< m >	< m >	< m >	< m >	< m >	< m >
0,0	0,00	0,000	-0,770	0,000	-0,770	-0,770	0,000
0,1	1,22	0,122	-0,697	0,029	-0,546	-0,520	-0,026
0,2	2,44	0,088	-0,611	0,122	-0,401	-0,277	-0,124
0,3	3,66	0,081	-0,532	0,198	-0,253	-0,055	-0,198
0,4	4,88	0,072	-0,445	0,284	-0,089	0,147	-0,236
0,5	6,10	0,053	-0,366	0,366	0,053	0,322	-0,269
0,6	7,32	0,051	-0,281	0,445	0,215	0,468	-0,253
0,7	8,54	0,030	-0,199	0,530	0,361	0,581	-0,220
0,8	9,76	0,028	-0,119	0,607	0,516	0,663	-0,147
0,9	10,98	0,010	-0,027	0,700	0,683	0,718	-0,035
1,0	12,20	0,000	0,000	0,728	0,728	0,728	-0,000

A-IV-5-6

TABEL Nr.2 (53)

Calculul coeficienților A_K , $K = 0, 1, 2, 3$

	$Z_{max} - Z_0$	$\gamma_1^2 z_{max}$	$\gamma_1 \sqrt{-2 z_0 Z^*}$	$\gamma_1^3 \sqrt{-2 z_0 Z^*}$	A_K
	1,498	3,333045	2,51893	11,53257	
	m	m	m	m	m
A_0	83,88800	-9,99914	-38,16255	19,22095	4,94726
A_1	-209,72000	28,33088	211,59012	-38,44190	-8,24090
A_2	179,76000	-26,66436	-176,32510	28,83142	5,60196
A_3	-52,43000	8,33261	50,37860	-7,68838	-1,40717

A-IV-5-8

TABEL Nr.4 (55)

$$z_j = z_0 + \frac{j\tilde{J}_1}{10} \sqrt{-2z_0 Z_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{j\tilde{J}_1}{10} \right)^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} + \left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k$$

$\frac{t}{T_1} = \frac{j}{10}$	$\frac{j\tilde{J}_1}{10} \sqrt{-2z_0 Z_*}$	$\frac{1}{6} \left(\frac{j\tilde{J}_1}{10} \right)^3 \sqrt{-2z_0 Z_*}$	$\left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k$	z_{jA} formula propusă	z_{jE} Escande	$z_{jA} - z_{jE}$
	m	m	m	m	m	m
0,0	0,00000	-0,00000	0,00000	-0,770	-0,770	0,000
0,1	0,25189	-0,00192	0,00000	-0,520	-0,520	-0,000
0,2	0,50379	-0,01538	0,00011	-0,281	-0,277	-0,004
0,3	0,75568	-0,05190	0,00715	-0,058	-0,055	-0,003
0,4	1,00757	-0,12301	0,02516	0,140	0,147	-0,007
0,5	1,25947	-0,24026	0,06411	0,313	0,322	-0,009
0,6	1,51136	-0,41517	0,13340	0,460	0,468	-0,008
0,7	1,76325	-0,65927	0,24218	0,576	0,581	-0,005
0,8	2,01514	-0,98410	0,39956	0,661	0,663	-0,002
0,9	2,26704	-1,39520	0,61546	0,718	0,718	-0,000
1,0	2,51893	-1,92208	0,90115	0,72800	0,728	-0,000

A-IV-6-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - Problema legii de oscilație

§ 6.- Legea de oscilație în următoarele cvasi-semiperioade (metoda variațională Ritz)

În acest capitol se urmărește a se explicita legea de oscilație pentru cvasi-semiperioadele a doua, a treia și în general pentru o cvasi-semiperioadă oarecare.

Ca și în § 4 în care s-a explicitat legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă, explicitarea urmărindu-se în următoarele două probleme :

a.- să se dea formule generale care să permită determinarea nivelului de apă în castelul de echilibru la un moment arbitrar ;

b.- să se sistematizeze calculele, determinând expresii simple care să permită calculul rapid al nivelului pentru intervale de timp reprezentând zecimi de cvasi-semiperioade. Cu alte cuvinte, se consideră că evoluția fenomenului cvasi-oscilatoriu este suficient de bine cunoscută dacă se cunoaște poziția nivelului apei în castel în fiecare zecime de cvasi-semiperioadă.

Se vor studia trei variante de legi de oscilație, din care două variante obținute prin metoda variațională (Ritz), iar în paragrafele următoare se vor da verificări ale legilor propuse și se va trage o concluzie privind recomandarea uneia din ele .

A-IV-6-2

Variante I : sumă finită de funcții trigonometrice

Se caută legea de oscilație sub forma unei sume de cosinusuri de tipul :

$$\xi = \sum_{l=0}^8 a_l \cos l \pi \frac{\tau - \tau_k}{T_{k+1}} \quad (6-1)$$

valabilă în intervalul evasi-semiperioadei T_{k+1} , care în momentul τ_k și se sfârșește în momentul τ_{k+1}

Condiții de margine, pe care trebuie să le satisfacă expresia (6-1) sînt :

$$\begin{aligned} \tau = \tau_k &\Rightarrow \xi = \xi_k \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\xi_k \\ \frac{d^3\xi}{d\tau^3} &= 0 \end{aligned} \quad (6-2)$$

$$\begin{aligned} \tau = \tau_{k+1} &\Rightarrow \xi = \xi_{k+1} \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\xi_{k+1} \\ \frac{d^3\xi}{d\tau^3} &= 0 \end{aligned} \quad (6-3)$$

Condițiile de margine de mai sus justifică considerarea în (6-1) a unei sume alcătuită doar din cosinusuri (fără sinusuri)

Condițiile de margine conduc la un număr de numai patru relații de legătură între coeficienții nedeterminați a_k , restul ecuațiilor de condiție fiind satisfăcute pricare ar fi coeficienții nedeterminați a_k :

A-IV-6-3

$$\begin{aligned}
 a_0 + \sum_{l=1}^8 a_l &= \xi_k \\
 a_0 + \sum_{l=1}^8 (-1)^l a_l &= \xi_{k+1} \\
 \sum_{l=1}^8 l^2 a_l &= \frac{\int_{\xi}^{\xi+1} \xi^2}{\int \xi^2} \xi_k \\
 \sum_{l=1}^8 (-1)^l l^2 a_l &= \frac{\int_{\xi}^{\xi+1} \xi^2}{\int \xi^2} \xi_{k+1}
 \end{aligned}
 \tag{6-4}$$

Avînd în vedere rezultatele obținute la capitolul în care s-a studiat problema timpului se poate considera eroarea astfel introdusă fiind maximă pentru a doua perioadă ($K = 1$) și scăzînd spre zero odată cu creșterea lui K .

Rezolvînd sistemul (6-4) prin considerarea parametrilor a_5, a_6, a_7, a_8 ca necunoscute principale se obțin relațiile :

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \xi_k - \xi_{k+1} - 2a_1 - \frac{5}{3} a_3 \\
 a_6 &= \frac{9}{8} (\xi_k + \xi_{k+1}) - \frac{16}{7} a_0 - \frac{15}{7} a_2 - \frac{12}{7} a_4 \\
 a_7 &= -\frac{1}{2} (\xi_k - \xi_{k+1}) + a_1 - \frac{2}{3} a_3 \\
 a_8 &= -\frac{5}{8} (\xi_k + \xi_{k+1}) + \frac{9}{7} a_0 + \frac{8}{7} a_2 + \frac{5}{7} a_4
 \end{aligned}
 \tag{6-5}$$

Din relațiile de mai sus rezultă imediat și următoarele :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a}{\partial a_0} &= 0 ; \quad \frac{\partial a_5}{\partial a_1} = -2 ; \quad \frac{\partial a_5}{\partial a_3} = -\frac{5}{3} \\
 \frac{\partial a_6}{\partial a_0} &= \frac{9}{8} ; \quad \frac{\partial a_6}{\partial a_2} = -\frac{15}{7} ; \quad \frac{\partial a_6}{\partial a_4} = -\frac{12}{7} \\
 \frac{\partial a_7}{\partial a_0} &= 0 ; \quad \frac{\partial a_7}{\partial a_1} = 1 ; \quad \frac{\partial a_7}{\partial a_3} = -\frac{2}{3} \\
 \frac{\partial a_8}{\partial a_0} &= \frac{9}{8} ; \quad \frac{\partial a_8}{\partial a_2} = \frac{8}{7} ; \quad \frac{\partial a_8}{\partial a_4} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}
 \tag{6-6}$$

A-IV-6-4

După cum s-a mai arătat, metoda variațională cere ca :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{C}_k}^{\mathcal{C}_{k+1}} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{C}} \right)^2 d\mathcal{C} = \text{minim} \quad (6-7)$$

Efectuînd calculele se obține :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{C}_k}^{\mathcal{C}_{k+1}} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{C}} \right)^2 d\mathcal{C} = \frac{\mathcal{J}^2}{2\mathcal{J}_{k+1}} \sum_{l=1}^8 l^2 a_l^2 \quad (6-8)$$

Condiția de extrem în raport cu parametrii independenți a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 conduce la următorul sistem de cinci ecuații :

$$\frac{d\mathcal{E}}{da_l} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_l} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_5} \frac{\partial a_5}{\partial a_l} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a_l} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_7} \frac{\partial a_7}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_8} \frac{\partial a_8}{\partial a_l} = 0 \quad (6-9)$$

$$l = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Acest sistem de 5 ecuații permite determinarea necunoscutelor a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 după care cu relațiile (6-5) se determină și parametrii a_5, a_6, a_7, a_8 astfel încît legea de oscilație este în întregime determinată astfel încît problema "a" este rezolvată.

Ecuațiile (6-9) scrise explicit au forma :

$$\begin{aligned} a_6 - a_8 &= 0 \\ a_1 - 50a_5 + 49a_7 &= 0 \\ 7a_2 - 135a_5 + 128a_8 &= 0 \\ 27a_3 - 135a_5 + 98a_7 &= 0 \\ 7a_4 - 27a_5 + 20a_8 &= 0 \end{aligned} \quad (6-10)$$

Rezolvînd acest sistem se obțin valorile :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{29}{60} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \cong 0,48333 (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \\ a_1 &= \frac{6647}{14196} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \cong 0,46823 (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \\ a_2 &= \frac{1}{240} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \cong 0,0417 (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{k+1}) \end{aligned} \quad (6-11)$$

A-IV-6-5

$$a_3 = \frac{87}{2366} (\xi_k - \xi_{k+1}) \cong 0,03677 (\xi_k - \xi_{k+1})$$

$$a_4 = \frac{1}{240} (\xi_k + \xi_{k+1}) \cong 0,00417 (\xi_k + \xi_{k+1})$$

$$a_5 = \frac{8}{3549} (\xi_k - \xi_{k+1}) \cong 0,00225 (\xi_k - \xi_{k+1})$$

$$a_6 = \frac{1}{240} (\xi_k + \xi_{k+1}) \cong 0,00417 (\xi_k + \xi_{k+1})$$

$$a_7 = -\frac{103}{14196} (\xi_k - \xi_{k+1}) \cong -0,00417 (\xi_k - \xi_{k+1})$$

$$a_8 = \frac{1}{240} (\xi_k + \xi_{k+1}) \cong 0,00417 (\xi_k + \xi_{k+1})$$

Trecînd la rezolvarea problemei "b" se va împărți cvasi-semiperioada la T_{K+1} respectiv sub formă asimțională

τ_{K+1} în zece intervale egale de timp :

$$\frac{j}{10} = \frac{\tau_j - \tau_k}{\tau_{K+1}} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (6-12)$$

În acest fel legea de oscilație, sub formă adimensională devine :

$$\xi_j = \sum_{l=1}^8 a_l \cos \tilde{\omega}_l \frac{j}{10} = A_j \xi_k + B_j \xi_{k+1} \quad (6-13)$$

în care :

$$\begin{aligned} A_j = & 0,48333 + 0,46823 \cos \frac{\tilde{\omega}_1 j}{10} + 0,00417 \cos \frac{2\tilde{\omega}_1 j}{10} + 0,03677 \cos \frac{3\tilde{\omega}_1 j}{10} + \\ & + 0,00417 \cos \frac{4\tilde{\omega}_1 j}{10} + 0,00225 \cos \frac{5\tilde{\omega}_1 j}{10} + 0,00417 \cos \frac{6\tilde{\omega}_1 j}{10} - (6-14) \\ & - 0,00725 \cos \frac{7\tilde{\omega}_1 j}{10} + 0,00417 \cos \frac{8\tilde{\omega}_1 j}{10} \end{aligned}$$

A-IV-6-6

$$\begin{aligned}
B_j = & 0,48333 - 0,48823 \cos \frac{\sqrt{j}}{10} + 0,00417 \cos \frac{2\sqrt{j}}{10} - 0,03677 \cos \frac{3\sqrt{j}}{10} + \\
& + 0,00417 \cos \frac{4\sqrt{j}}{10} - 0,00225 \cos \frac{5\sqrt{j}}{10} + 0,00417 \cos \frac{6\sqrt{j}}{10} + 0,00725 \cos \frac{7\sqrt{j}}{10} + \\
& + 0,00417 \cos \frac{8\sqrt{j}}{10}
\end{aligned}$$

Trecînd la variabile dimensionale, prin înmulțirea relației (6-13) cu mărimea de referință Z_* se obține legea de oscilație sub formă dimensională

$$Z_j = A_j z_k + B_j z_{k+1} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10. \quad (6-15)$$

Relația de mai sus prezintă avantaje deosebite. În primul rînd coeficienții A_j , B_j nu depind nici de caracteristicile amenajării, deci ei se calculează o singură dată și rămîn valabili pentru orice amenajare. În al doilea rînd ei nu depind nici de indicele K al cvasi-semiperioadei, de aceea rămîn valabili pentru orice cvasi-semiperioadă.

În fine, expresia (6-15) este extrem de simplă, permițînd un calcul rapid al nivelului apei în castel în orice fracțiune zecimală a cvasi-semiperioadei respective.

În tabelul Nr.1 (56) se dau valorile cosinusurilor care intervin în expresia coeficienților A_j și B_j .

Tabelul Nr.2 (57) conține calculele cerute de determinarea valorilor numerice ale coeficienților A_j și B_j .

Cu aceasta și problema "b" este complet rezolvată în această variantă.

TABEL NR.2 (57)

Determinarea coeficientilor A_j , B_j

$\frac{j}{10}$	$0,46822 \cos \frac{j\pi}{10}$	$0,00417 \cos \frac{2j\pi}{10}$	$0,04677 \cos \frac{3j\pi}{10}$	$0,00417 \cos \frac{4j\pi}{10}$	$0,00225 \cos \frac{5j\pi}{10}$	$0,00417 \cos \frac{6j\pi}{10}$	$0,00125 \cos \frac{7j\pi}{10}$	$0,00417 \cos \frac{8j\pi}{10}$	A_j	B_j
0,0	0,46823	0,00417	0,03677	0,00417	0,00225	0,00417	-0,00725	0,00417	1,00001	0,00001
0,1	0,44531	0,00337	0,02161	0,00129	0,00000	-0,00129	0,00426	-0,0337	0,95451	0,01215
0,2	0,37881	0,00129	-0,01136	-0,00337	-0,00225	-0,00337	0,00224	0,00129	0,84661	0,11173
0,3	0,27522	-0,00129	-0,03497	-0,00337	0,00000	0,00337	-0,00690	0,00129	0,71668	0,24998
0,4	0,14469	-0,00337	-0,02975	0,00129	0,00225	0,00129	0,00587	-0,0337	0,60223	0,35611
0,5	0,00000	-0,00417	0,00000	0,00417	0,00000	-0,00417	0,00000	0,00417	0,48333	0,48333
0,6	-0,14469	-0,00337	0,02975	0,00129	-0,00225	0,00129	-0,00587	-0,0337	0,35611	0,60223
0,7	-0,27522	-0,00129	0,03497	-0,00337	0,00000	0,00337	0,00690	0,00129	0,24998	0,71668
0,8	-0,37881	0,00129	0,01136	-0,00337	0,00225	-0,00337	-0,00224	0,00129	0,11173	0,84661
0,9	-0,44531	0,00337	-0,02161	0,00129	0,00000	-0,00129	-0,00426	-0,0337	0,01215	0,95451
1,0	-0,46823	0,00417	-0,03677	0,00417	-0,00225	0,00417	0,00725	0,00417	0,00001	1,00000

A. H. 6. 0

A-IV-6-9

Varianta II : sumă finită de puteri

In această variantă se aplică metoda Ritz pornind de la o sumă finită de puteri :

$$\mathcal{S} = \sum_{l=0}^8 a_l \left(\frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}_k}{\mathcal{J}_{k+1}} \right)^l \quad (6-16)$$

Condițiile de margine (6-2), (6-3) conduc la următoarele opt relații de legătură între coeficienții a_l :

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathcal{S}_k \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \mathcal{J}_{k+1}^2 \mathcal{S}_k \cong -5 \mathcal{S}_k \\ a_3 &= 0 \\ \sum_{l=4}^8 l a_l &= 10 \mathcal{S}_k \\ \sum_{l=4}^8 a_l &= \mathcal{S}_{k+1} + 4 \mathcal{S}_k \\ \sum_{l=4}^8 l(l-1) a_l &= 10(\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_{k+1}) \\ \sum_{l=4}^8 l(l-1)(l-2) a_l &= 0 \end{aligned} \quad (6-17)$$

Sistemul de mai sus se rezolvă considerînd coeficientul a_4 ca parametru :

$$\begin{aligned} a_5 &= 26 \mathcal{S}_{k+1} + 44 \mathcal{S}_k - 4 a_4 \\ a_6 &= -55 \mathcal{S}_{k+1} - 85 \mathcal{S}_k + 6 a_4 \\ a_7 &= 40 \mathcal{S}_{k+1} + 60 \mathcal{S}_k - 4 a_4 \\ a_8 &= -10 \mathcal{S}_{k+1} - 15 \mathcal{S}_k + a_4 \end{aligned} \quad (6-19)$$

A-IV-6-10

Din relațiile de mai sus rezultă și următoarele :

$$\frac{da_5}{da_4} = -4 \quad ; \quad \frac{da_6}{da_4} = 6 \quad ; \quad \frac{da_7}{da_4} = -4 \quad ; \quad \frac{da_8}{da_4} = 1 \quad (6-20)$$

Condiția variațională, după cum s-a mai arătat este :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{C}_k}^{\mathcal{C}_{k+1}} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{C}} \right)^2 d\mathcal{C} = \text{minim} \quad (6-21)$$

Calculînd expresia de mai sus se obține :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{3} \mathcal{J}_{k+1}^3 \mathcal{E}_k + \frac{16}{7} \frac{a_4}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{25}{9} \frac{a_5^2}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{36}{11} \frac{a_6^2}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{49}{19} \frac{a_7^2}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{64}{15} \frac{a_8^2}{\mathcal{J}_{k+1}} - \\ & - \frac{8}{5} \mathcal{E}_k \mathcal{J}_{k+1} a_4 - \frac{10}{6} \mathcal{E}_k \mathcal{J}_{k+1} a_5 - \frac{12}{7} \mathcal{E}_k \mathcal{J}_{k+1} a_6 - \frac{14}{8} \mathcal{E}_k \mathcal{J}_{k+1} a_7 - \\ & - \frac{16}{9} \mathcal{E}_k \mathcal{J}_{k+1} a_8 + \frac{40}{8} \frac{a_4 a_5}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{48}{9} \frac{a_4 a_6}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{56}{10} \frac{a_4 a_7}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{64}{11} \frac{a_4 a_8}{\mathcal{J}_{k+1}} + \\ & + \frac{60}{10} \frac{a_5 a_6}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{70}{11} \frac{a_5 a_7}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{80}{12} \frac{a_5 a_8}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{84}{12} \frac{a_6 a_7}{\mathcal{J}_{k+1}} + \frac{96}{13} \frac{a_6 a_8}{\mathcal{J}_{k+1}} + \\ & + \frac{112}{14} \frac{a_7 a_8}{\mathcal{J}_{k+1}} \end{aligned} \quad (6-22)$$

Condiția de minim în raport cu parametrul independent a_4 conduce la ecuația :

$$\frac{d\mathcal{E}}{da_4} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_4} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_5} \frac{da_5}{da_4} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_6} \frac{da_6}{da_4} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_7} \frac{da_7}{da_4} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_8} \frac{da_8}{da_4} \quad (6-23)$$

După o serie de calcule algebrice elementare dar destul de laborioase ecuația de mai sus se aduce la forma :

$$468a_4 + 455a_5 + 420a_6 + 387a_7 + 336a_8 = 1450 \mathcal{E}_k \quad (6-24)$$

Inlocuind în relația de mai sus parametrii a_5 , a_6 , a_7 , a_8 ca funcții de a_4 cu ajutorul relațiilor (6-19) se obține o ecuație cu o necunoscută :

$$a_4 = \frac{1}{4} (265 \mathcal{E}_k + 245 \mathcal{E}_{k+1}) \quad (6-25)$$

A-IV-6-11

Se pot acum calcula și valorile celorlalți parametri :

$$\begin{aligned} a_5 &= -221 \xi_k - 219 \xi_{k+1} \\ a_6 &= \frac{625}{2} (\xi_k + \xi_{k+1}) \\ a_7 &= -205 (\xi_k + \xi_{k+1}) \\ a_8 &= \frac{205}{4} (\xi_k + \xi_{k+1}) \end{aligned} \quad (6-20)$$

Rezultă că pînă în acest loc a fost rezolvată problema "a", obținîndu-se legea de oscilație sub forma :

$$\xi = \xi_k - 5 \xi_k \left(\frac{\tau - \tau_k}{T_{k+1}} \right)^2 + \sum_{l=4}^8 a_l \left(\frac{\tau - \tau_k}{T_{k+1}} \right)^l \quad (6-21)$$

în care coeficienții a_l au valorile determinate anterior.

Trecînd la problema "b", introducînd secimile de cvasi-semiperioadă :

$$\frac{j}{10} = \frac{\tau - \tau_k}{T_{k+1}} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10. \quad (6-22)$$

legea de oscilație capătă forma :

$$\begin{aligned} \xi_j &= A_j \xi_k + B_j \xi_{k+1} \\ A_j &= 1 - 5 \left(\frac{j}{10} \right)^2 + \frac{265}{4} \left(\frac{j}{10} \right)^4 - 221 \left(\frac{j}{10} \right)^5 + \frac{625}{2} \left(\frac{j}{10} \right)^6 - \\ &\quad - 205 \left(\frac{j}{10} \right)^7 + \frac{205}{4} \left(\frac{j}{10} \right)^8 \\ B_j &= \frac{245}{4} \left(\frac{j}{10} \right)^4 - 219 \left(\frac{j}{10} \right)^5 + \frac{625}{2} \left(\frac{j}{10} \right)^6 - 205 \left(\frac{j}{10} \right)^7 + \frac{205}{4} \left(\frac{j}{10} \right)^8 \end{aligned} \quad (6-23)$$

Trecînd la variabile dimensionale prin înmulțire cu mărirea de referință Z_*

$$z_j = A_j z_k + B_j z_{k+1} \quad (6-24)$$

în care coeficienții A_j și B_j au expresiile de mai sus.

A-IV-6-12

Relația de mai sus prezintă și ea aceleași avantaje ca și relația (6-15) și anume :

- coeficienții A_j , B_j invarianți în raport cu caracteristicile amenajării ;

- coeficienții A_j , B_j nu depind de indicele K al cvasi-semiperioadei ;

- structură extrem de simplă, permițind un calcul rapid al nivelului apei în castel în orice fracțiune zecimală a cvasi-semiperioadei respective.

În tabelul Nr.3 (58) se calculează valorile coeficientului A_j iar în tabelul Nr.4 (59) se calculează valorile numerice ale coeficientului B_j .

Cu aceasta și problema "b" este complet rezolvată în această variantă.

A-IV-6-13

TABEL Nr.3 (58)

Calculul coeficientului A_j :

$$A_j = 1 - 5 \left(\frac{j}{10}\right)^2 + \left(\frac{j}{10}\right)^4 \left[\frac{265}{4} - 221 \frac{j}{10} + \frac{625}{2} \left(\frac{j}{10}\right)^2 - 205 \left(\frac{j}{10}\right)^3 + \frac{205}{4} \left(\frac{j}{10}\right)^4 \right]$$

$\frac{j}{10}$	$5 \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$221 \frac{j}{10}$	$\frac{625}{2} \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$205 \left(\frac{j}{10}\right)^3$	$\frac{205}{4} \left(\frac{j}{10}\right)^4$	[]	A_j
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	66,25000	1,00000
0,1	0,05000	22,10000	3,12500	0,20500	0,00513	47,07513	0,95471
0,2	0,20000	44,20000	12,50000	1,64000	0,08200	32,99200	0,85280
0,3	0,45000	66,30000	28,12500	5,53500	0,41513	22,95513	0,73594
0,4	0,80000	88,40000	50,00000	13,12000	1,31200	16,04200	0,61068
0,5	1,25000	110,50000	78,12500	25,62500	3,20313	11,45313	0,46582
0,6	1,80000	132,60000	112,50000	44,28000	6,64200	8,51200	0,30316
0,7	2,45000	154,70000	153,12500	70,31500	12,30513	6,66513	0,15030
0,8	3,20000	176,80000	200,00000	104,96000	20,99200	5,48200	0,04543
0,9	4,05000	198,90000	253,12500	149,44500	33,62513	4,65513	0,00423
1,0	5,00000	221,00000	312,50000	205,00000	51,25000	4,00000	0,00000

A-IV-6-14

TABEL Nr.4 (59)

Calculul coeficientului B_j

$$B_j = \left(\frac{j}{10}\right)^4 \left[\frac{245}{4} - 219 \frac{j}{10} + \frac{625}{2} \left(\frac{j}{10}\right)^2 - 205 \left(\frac{j}{10}\right)^3 + \frac{205}{4} \left(\frac{j}{10}\right)^4 \right]$$

$\frac{245}{4}$	$-219 \frac{j}{10}$	$\frac{625}{2} \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$-205 \left(\frac{j}{10}\right)^3$	$\frac{205}{4} \left(\frac{j}{10}\right)^4$	[]	B_j
61,25000	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000	61,25000	0,00000
61,25000	-21,90000	3,12500	-0,20500	0,00513	42,27513	0,00423
61,25000	-43,80000	12,50000	-1,64000	0,08200	28,39200	0,04543
61,25000	-65,70000	28,12500	-5,53500	0,41513	18,55513	0,15030
61,25000	-87,60000	50,00000	-13,12000	1,31200	11,84200	0,30316
61,25000	-109,50000	78,12500	-25,62500	3,20313	7,45313	0,46582
61,25000	-131,40000	112,50000	-44,28000	6,64200	4,71200	0,61068
61,25000	-153,30000	153,12500	-70,31500	12,30513	3,06513	0,73594
61,25000	-175,30000	200,00000	-104,96000	20,99200	2,08200	0,85279
61,25000	-197,10000	253,12500	-149,44500	33,62513	1,45513	0,95471
61,25000	-219,00000	312,50000	-205,00000	51,25000	1,00000	1,00000

A-IV-7-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - Problema legii de oscilație

§ 7.- Legea de oscilație în următoarele cvasi-semiperioade
verificări ale formulelor obținute prin metoda
variatională

În paragraful anterior, prin aplicarea metodei variaționale s-au dedus două formule aproximative, care permit calculul rapid al nivelului de apă în castelul de echilibru în orice zecime de cvasi-semiperioadă. O primă formulă s-a obținut pornind de la o sumă de opt cosinusuri iar o a doua formulă s-a obținut pornind de la o sumă de puteri mergând pînă la gradul opt.

Se va face în acest paragraf verificări ale formulelor, folosind în acest scop datele din lucrarea /1-E/.

Varianta I : sumă finită la funcții trigonometrice

În cadrul acestei variante formula de calcul finală la care s-a ajuns are forma :

$$z_j = A_j z_k + B_j z_{k+1} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (7-1)$$

în care coeficienții A_j și B_j au valori cunoscute, date în tabelul Nr.2 (57) din paragraful anterior.

A-IV-7-2

În lucrarea /1-E/ se dau cotele z_j calculate prin metoda diferențelor finite după un algoritm propus de respectivul autor și în plus se face o comparație cu rezultatele obținute teoretic prin alte căi și, ceea ce este deosebit de important, și cu rezultatele obținute experimental de autor în cercetările efectuate pe modelul mare la Institutul de electrotehnică din Toulouse.

Concordanța între rezultatele teoretice și cele experimentale este foarte bună.

În lucrarea citată sînt date complete relative la cea de a doua cvasi-semiperioadă și date referitoare la prima jumătate a cvasi-semiperioadei a treia.

Intrucît datele caracteristice ale standului experimental au fost prezentate la § 5 nu se vor mai relua în acest paragraf.

În tabelul Nr.1 (60) sînt efectuate calculele cu formula (7-1) pentru cea de a doua cvasi-semiperioadă ($K = 1$) iar în tabelul Nr.2 (61) sînt prezentate datele referitoare la cea de a treia ($K = 2$) cvasi-semiperioadă făcîndu-se și o comparație cu rezultatele prezentate în lucrarea citată.

Se constată că diferența maximă între cele două metode în cazul cvasi-semiperioadei a doua este de 0,112 m, ceea ce reprezintă 9,24 % din suma amplitudinilor oscilației în cvasi-semiperioada respectivă. În cazul cvasi-semiperioadei a treia diferența maximă pentru datele existente este de 0,041 m, ceea ce reprezintă 5 % din suma amplitudinilor oscilației în cvasi-semiperioada respectivă.

Se mai constată că, în cvasi-semiperioada a doua, diferența maximă în valoare absolută între cele două metode s-a obținut pentru valoarea raportului $j/l_0 = 0,7$.

A-IV-7-3

TABEL Nr.2 (60)

$$z_1 = 0,72607 \text{ m}$$

$$z_2 = -0,47322 \text{ m}$$

$$z_{jA} = A_j z_1 + B_j z_2$$

$\frac{j}{10}$	$A_j z_1$	$B_j z_2$	După Escandă		z_{jA}	$z_{jA} - z_{jE}$
			t_j	z_{jE}		
0,0	0,72807	0,00000	12,20	0,728	0,728	0,000
0,1	0,69495	-0,00575	14,02	0,682	0,689	0,007
0,2	0,61639	-0,05287	15,84	0,585	0,564	-0,021
0,3	0,52179	-0,11830	17,66	0,430	0,404	-0,026
0,4	0,43847	-0,16852	19,48	0,248	0,270	-0,022
0,5	0,35190	-0,22872	21,30	0,059	0,123	-0,064
0,6	0,25927	-0,28499	23,12	-0,118	-0,026	0,092
0,7	0,18200	-0,33915	24,94	-0,269	-0,157	0,112
0,8	0,08135	-0,40063	26,76	-0,381	-0,319	0,062
0,9	0,00885	-0,45169	28,58	-0,450	-0,443	0,007
1,0	0,00000	-0,47322	30,40	-0,473	-0,473	0,000

A-IV-7-4

TABEL Nr.2 (61)

$z_1 = 0,72607 \text{ m}$

$z_{jA} = A_j z_2 + B_j z_3$

$z_2 = 0,47322 \text{ m} ; z_3 = 0,350 \text{ m}$

$\frac{j}{10}$	$A_j z_2$	$B_j z_3$	z_{jA}	După Escandă		$z_{jA} - z_{jE}$
				t_j	z_{jE}	
0,0	-0,47322	0,00000	-0,473	30,40	-0,473	0,000
0,1	-0,45169	0,00425	-0,447	32,22	-0,448	0,001
0,2	-0,40063	0,03911	-0,362	34,04	-0,379	0,017
0,3	-0,33915	0,08749	-0,252	35,86	-0,275	0,023
0,4	-0,28499	0,12464	-0,160	37,68	-0,150	-0,010
0,5	-0,22872	0,16917	-0,060	39,50	-0,019	-0,041
0,6	-0,16852	0,21078	0,042			
0,7	-0,11830	0,25084	0,133			
0,8	-0,05287	0,29631	0,243			
0,9	-0,00575	0,33408	0,328			
1,0	0,00000	0,35000	0,350			

A-IV-7-5

Varianta II : sumă finită de puteri

În cadrul acestei variante s-a obținut formula finală :

$$z_j = A_j z_k + B_j z_{k+1} \quad (7-2)$$

în care coeficienții A_j și B_j au valori cunoscute, date în tabelul Nr.3 (58) și Nr.4 (59) din paragraful anterior.

Calcululele relative la cvasi-semiperioada doua sînt date în tabelul Nr.3 (62) iar cele relative la cvasi-semiperioada treia sînt date în tabelul Nr.4 (63).

Se constată că, în cazul cvasi-semiperioadei a doua, diferența maximă între cele două metode este de 2,060 m, ceea ce reprezintă 5 % din suma amplitudinilor oscilației în cvasi-semiperioada respectivă. Această diferență maximă s-a obținut pentru valoarea raportului $j/l_0 = 0,5$.

În cazul cvasi-semiperioadei a treia, diferența maximă între cele două metode este de 0,038 m, ceea ce reprezintă 4,6 % din suma amplitudinilor oscilației în cvasi-semiperioada respectivă. Această diferență maximă s-a obținut pentru valoarea raportului $j/l_0 = 0,5$.

Avînd în vedere rezultatele obținute pînă în prezent se constată că metoda variațională este pe deplin utilizabilă iar varianta a II-a conduce la rezultate superioare de aceea se recomandă a fi aplicată în rezolvarea concretă a problemelor, eroarea maximă relativă nedeșășind 5 % ceea ce este pe deplin acceptabil și în orice caz e reprezintă o precizie superioară rezultatelor obținute aproximînd oscilația cu o sinusoidă.

A-IV-7-6

TABEL Nr.3 (62)

$$z_1 = 0,72807m ; z_2 = -0,47322m \quad z_{jA} = A_j z_1 + B_j z_2$$

$\frac{j}{10}$	$A_j z_1$	$B_j z_2$	z_{jA}	După Esconde		$z_{jA} - z_{jE}$
				t_j	z_{jE}	
	m	m	m	Δ	m	m
0,0	0,72807	-0,00000	0,728	12,20	0,728	0,000
0,1	0,69503	-0,00200	0,693	14,02	0,682	0,011
0,2	0,62084	-0,02150	0,599	15,84	0,585	0,014
0,3	0,53576	-0,07112	0,465	17,66	0,430	0,035
0,4	0,44458	-0,14346	0,301	19,48	0,248	0,053
0,5	0,33912	-0,22043	0,119	21,30	0,059	0,060
0,6	0,22070	-0,28898	-0,068	23,12	-0,118	0,050
0,7	0,10942	-0,34826	-0,239	24,94	-0,269	0,030
0,8	0,03307	-0,40352	-0,370	26,76	-0,381	0,011
0,9	0,00308	-0,45178	-0,449	28,58	-0,450	0,001
1,0	0,00000	-0,47322	-0,473	30,40	-0,473	0,000

A-IV-7-7

TABEL Nr. 4 (63)

$z_{jA} = A_j z_2 + B_j z_3$
 $z_2 = -0,47322m$; $z_3 = 0,35000m$

$\frac{j}{10}$	$A_j z_2$ m	$B_j z_3$ m	z_{jA}	După Escandere		$z_{jA} - z_{jE}$ m
				Δ	m	
0,0	-0,47322	0,00000	-0,473	30,40	-0,473	0,000
0,1	-0,45158	0,00148	-0,450	32,22	-0,448	-0,002
0,2	-0,40337	0,01590	-0,387	34,04	-0,379	-0,008
0,3	-0,34810	0,05621	-0,295	35,86	-0,275	-0,020
0,4	-0,28885	0,10611	-0,183	37,68	-0,150	-0,033
0,5	-0,22033	0,16304	-0,057	39,50	-0,019	-0,038
0,6	-0,14339	0,21374	0,070			
0,7	-0,07109	0,25758	0,185			
0,8	-0,02149	0,29845	0,277			
0,9	-0,00200	0,33415	0,332			
1,0	-0,00000	0,35000	0,350			

A-IV-8-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - PROBLEMA LEGII DE OSCILATIE

& 8.- Utilizarea metodei liniarizării (varianta Prașil)
și verificări ale rezultatelor numerice obținute

În paragrafele anterioare au fost prezentate rezultate obținute prin utilizarea unor formule originale, deduse prin aplicarea metodei variaționale. În scopul comparării cu rezultatele ce se obțin prin utilizarea unor formule cunoscute, în acest paragraf se va utiliza una dintre formulele cunoscute în literatură obținută prin metoda liniarizării într-o variantă specifică castelelor de echilibru, varianta Prașil.

Pentru testarea formulei Prașil s-au utilizat rezultatele numerice publicate în lucrarea /1-E/, rezultate obținute cu ajutorul unui calculator numeric prin metoda diferențelor finite conform unui algoritm elaborat de respectivul autor. În plus, aceste rezultate au fost și verificate experimental cu bune rezultate pe modelul mare de la Institutul de Electrotehnică din Toulouse, de aceea ele au fost considerate ca date certe.

Parametrii caracteristici ai modelului au fost :

$$F = 0,7854 \text{ m}^2, \quad D = 1 \text{ m}, \quad f = 0,07068 \text{ m}^2, \quad d = 0,30 \text{ m}, \quad L = 28,70, \\ z_0 = -0,77 \text{ m}, \quad w_0 = 2,295 \text{ m/s}.$$

Cu aceste date rezultă pentru mărimile dimensionale raționale de referință următoarele valori :

$$Z_* = 0,900 \text{ m}, \quad T_* = 5,7017 \text{ s}$$

A-IV-8-2

Cu datele de mai sus, parametrul adimensional al pierderilor inițiale de energie ia valoarea $\xi_0 = -0,85556$. Se face de la început observația că această valoare relativ mare a parametrului $|\xi_0|$ nu este favorabilă metodelor aproximative deoarece, în general, metodele aproximative conduc la erori cu atât mai mari cu cât valoarea numerică a parametrilor inițiali, respectiv a parametrului $|\xi_0|$, este mai mare. Valoarea menționată mai sus, pentru cazul castelelor de echilibru simple poate fi considerată mare.

Verificările s-au făcut pentru momente reprezentând zecimi ale cvasi-semiperioadei respective, momente notate în care primul indice indică ordinul cvasi-semiperioadei, iar al doilea indice indică zecimea de timp din cvasi-semiperioada respectivă. Nivelul apei în castelul de echilibru este dat de cota

, indicii avînd aceeași semnificație

- dimensional : $t_{kj} = \frac{j}{10} (t_k - t_{k-1}) = \frac{j}{10} T_k$ (8-1)

- adimensional : $\zeta_{kj} = \frac{j}{10} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) = \frac{j}{10} \zeta_k$ $j=0,1,2,\dots,10$
 $k = I, II, \dots, K$

În metoda liniarizării, varianta Prașil, se determină după cum este cunoscut, un coeficient de rezistență liniar echivalent k_ℓ din condiția ca aria cuprinsă între parabola pierdere de sarcină-viteză în galeria de aducțiune parabolă a cărei ecuație este $h_r = \kappa \omega^2$ și axa orizontală $O\omega$ să fie egală cu aria cuprinsă între dreapta echivalentă de ecuația $h_r = k_\ell \omega$. În prima cvasi-semiperioadă echivalența s-a considerat pentru un interval de variație a vitezei apei în galerie cuprins între $\omega = 0$ și $\omega = \omega_0$:

$$K \int_0^w w^2 dw = K_{2I} \int_0^w w dw \Rightarrow K_{II} = \frac{2}{3} K w_0 = 0,223675 \quad (8-2)$$

In ceea ce privește următoarele cvasi-semiperioade, nu se dau în literatură indicații privind calculul coeficientului echivalent K_{II} ; din care motiv, pentru calculul acestuia în cea de a doua cvasi-semiperioadă s-au făcut calculele în două variante :

$$\text{- în prima variantă } K_{II} = K_{II} \left| \frac{z_1}{z_0} \right| = 0,211475 \quad (8-3)$$

$$\text{- a doua variantă } K_{II} = K_{II} \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = 0,199940 \quad (8-4)$$

Folosind modul de tratare utilizat în lucrarea /2-M/, se calculează la început valoarea următorilor parametri :

$$\frac{1}{T_0} = \frac{g K_{II}}{L} ; \frac{1}{T_0^2} = \frac{g f}{L F} ; \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_*^2} - \frac{1}{4 T_0^2} \quad (8-5)$$

Au rezultat următoarele valori numerice :

- prima cvasi-semiperioadă :

$$\frac{1}{T_0} = 0,076455 ; \frac{1}{T_*^2} = 0,030760 ; \frac{1}{T^2} = 0,029299$$

- a doua cvasi-semiperioadă varianta întâi :

$$\frac{1}{T_0} = 0,072285 ; \frac{1}{T_*^2} = 0,030760 ; \frac{1}{T^2} = 0,029454$$

- a doua cvasi-semiperioadă varianta doua :

$$\frac{1}{T_0} = 0,068342 ; \frac{1}{T_*^2} = 0,030760 ; \frac{1}{T^2} = 0,029593$$

In metoda liniarizării se ajunge la următoarea formă explicită a legii cvasi-oscilațiilor /2-M/ :

$$z = e^{-\frac{t-t_0}{2T_0}} \left(C_1 \cos \frac{t-t_0}{T} = C_2 \sin \frac{t-t_0}{T} \right) \quad (8-6)$$

Determinarea constantelor se face cu ajutorul condițiilor

A-IV-8-4

inițiale relative la cvasi-semiperioada respectivă. Astfel în cazul primei cvasi-semiperioade condițiile inițiale sînt :

$$t = t_0 \Rightarrow z = z_0 = -0,770 \text{ m}$$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = \frac{Q_0}{F} = v_0 = 0,20653 \text{ m/s} \quad (8-7)$$

Cu ajutorul acestor condiții inițiale se pot determina constantele din formula (8-6), rezultînd :

$$\begin{aligned} C_1 &= z_0 = -0,770 \text{ m} \\ C_2 &= T' \left(v_0 + \frac{z_0}{2T_0} \right) = 1,03460 \end{aligned} \quad (8-8)$$

Pentru momentele t_{Ij} reprezentînd zecimi din prima cvasi-semiperioadă, nivelul apei z_{Ij} în castelul de echilibru se calculează atunci cu formula :

$$z_{Ij} = e^{-\frac{t_{Ij}}{2T_0}} \left[z_0 \cos \frac{t_{Ij}}{T'} + T' \left(v_0 + \frac{z_0}{2T_0} \right) \sin \frac{t_{Ij}}{T'} \right] \quad (8-9)$$

$$t_{Ij} = \frac{j}{10} T_I = 1,22 j \text{ s}$$

Rezultatele numerice obținute prin utilizarea formulei de mai sus sînt date în tabelul Nr.1 (64) în care sînt trecute, pentru a se putea face o comparație și valorile date de Escande în /1-E/. În ceea ce privește cvasi-semiperioada a doua, în ambele variante, legea cvasi-oscilațiilor se poate pune sub forma:

$$z = e^{-\frac{t-t_1}{2T_0}} \left(C_1 \cos \frac{t-t_1}{T'} + C_2 \sin \frac{t-t_1}{T'} \right) \quad (8-10)$$

Determinarea constantelor se face cu ajutorul condițiilor inițiale :

$$t = t_1 \Rightarrow z = z_1 = 0,728 \text{ m} \quad (8-11)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

În prima variantă se obțin valorile :

$$\begin{aligned} C_1 &= z_1 = 0,728 \text{ m} \\ C_2 &= \frac{T'}{2T_0} z_1 = 0,153317 \text{ m} \end{aligned} \quad (8-12)$$

A-IV-8-5

Pentru momentele t_{ij} reprezentând zecimi din cea de a doua cvasi-semiperioadă, nivelul apei z_{ij} în castelul de echilibru se calculează cu formula :

$$z_{ij} = z_1 e^{-\frac{t_{ij}}{2T_0}} \left[\cos \frac{t_{ij}}{T_1} + \frac{T_1}{2T_0} \sin \frac{t_{ij}}{T_1} \right] \quad (8-13)$$

Rezultatele numerice obținute prin utilizarea formulei de mai sus sînt date în tabelul nr.2 (65), în care sînt trecute și valorile din lucrarea /1-E/ ceea ce permite o comparație a rezultatelor.

În cea de a doua variantă se obține tot o formulă de tipul (8-13), dar cele două constante cu valorile :

$$\begin{aligned} C_1 &= z_1 = 0,728 \text{ m} \\ C_2 &= \frac{T_1}{2T_0} z_1 = 0,144610 \text{ m} \end{aligned} \quad (8-14)$$

Rezultatele numerice obținute în varianta doua sînt prezentate în tabelul nr.3 (66), în care se face și o comparație cu rezultatele prezentate în lucrarea /1-E/.

Concluzii referitoare la utilizarea metodei liniarizării varianta Prașil.

Se constată că în cvasi-semiperioada întîi diferențele relative între rezultatele Escande și Prașil sînt sub 7 %, dacă drept mărime de referință se ia suma modulelor cvasi-amplitudinilor din respectiva cvasi-semiperioadă. Diferențele sînt totuși mari pentru acest gen de probleme.

În ceea ce privește cvasi-semiperioada a doua se constată că varianta a doua este cu puțin superioară primei variante și ea conduce la diferențe relative de același ordin de mărime

A-14-P-8

TABEL Nr. 1 (64)

j	$\frac{t_{1j}}{2T_0}$	$e^{-\frac{t_{1j}}{T_1}}$	$\frac{t_{1j}}{T_1}$	$\cos \frac{t_{1j}}{T_1}$	$\sin \frac{t_{1j}}{T_1}$	Z_{IjP} Prosil	Z_{IjE} Esconde	$Z_{IjP} - Z_{IjE}$	$\frac{Z_{IjP} - Z_{IjE}}{ Z_{IjP} + Z_{IjE} } \cdot 100$
-	-	-	-	-	-	m	m	m	%
0	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	-0,770	-0,770	0,000	0,0
1	0,04664	0,95443	0,20883	0,97827	0,20732	-0,514	-0,520	0,006	0,4
2	0,09328	0,91194	0,41765	0,91405	0,40561	-0,259	-0,277	0,018	1,2
3	0,13991	0,86943	0,62648	0,81010	0,58630	-0,015	-0,055	0,040	2,7
4	0,18655	0,83982	0,83531	0,67095	0,74151	0,210	0,147	0,063	4,2
5	0,23319	0,79200	1,04414	0,50265	0,86449	0,402	0,322	0,080	5,2
6	0,27983	0,75591	1,25296	0,31251	0,94991	0,561	0,468	0,093	6,2
7	0,32647	0,72146	1,46179	0,10879	0,99407	0,682	0,581	0,101	6,7
8	0,37310	0,68860	1,67062	-0,09965	0,99501	0,762	0,663	0,099	6,6
9	0,41974	0,65722	1,87944	-0,30376	0,95275	0,802	0,718	0,084	5,6
10	0,46638	0,62727	2,08827	-0,49468	0,86907	0,803	0,728	0,075	5,0

A-IV-8-8

TABEL Nr.2 (65)

$T_2 = 18,20$ s Varianta întâi

j	$\frac{t_{IIj}}{2T_0}$	$e^{-\frac{t_{IIj}}{2T_0}}$	$\frac{t_{IIj}}{T_1}$	$\cos \frac{t_{IIj}}{T_1}$	$\sin \frac{t_{IIj}}{T_1}$	z_{IIjP} Prasil	z_{IIjE} Escande	$z_{IIjP} - z_{IIjE}$	$\frac{z_{IIjP} - z_{IIjE}}{ z_{IIjP} + z_{IIjE} } \cdot 100$
-	-	-	-	-	-	M	M	M	%
0	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,728	0,728	0,000	0,00
1	0,06578	0,93634	0,31235	0,95161	0,30730	0,693	0,682	0,011	0,9
2	0,13156	0,87673	0,62470	0,81114	0,58485	0,596	0,585	0,011	0,9
3	0,19734	0,82091	0,93704	0,59218	0,80581	0,455	0,430	0,025	2,1
4	0,26312	0,76865	1,24939	0,31590	0,94879	0,289	0,248	0,041	3,4
5	0,32890	0,71972	1,56174	0,00906	0,99959	0,115	0,059	0,056	4,7
6	0,39467	0,67390	1,87409	-0,29866	0,95436	-0,048	-0,118	0,070	5,8
7	0,46045	0,63100	2,18644	-0,57748	0,81640	-0,186	-0,269	0,083	6,9
8	0,52623	0,59083	2,49878	-0,80041	0,59943	-0,290	-0,381	0,091	7,6
9	0,59201	0,55321	2,81113	-0,94589	0,32448	-0,353	-0,450	0,077	8,1
10	0,65779	0,51800	3,12348	-0,99984	0,01812	-0,376	-0,473	0,097	8,1

TABEL Nr.3 (65)

$T_2 = 18,2$ s Varianta doua

j	$\frac{t_{IIj}}{2T_0}$	$e^{-\frac{t_{IIj}}{2T_0}}$	$\frac{t_{IIj}}{T_1}$	$\cos \frac{t_{IIj}}{T_1}$	$\sin \frac{t_{IIj}}{T_1}$	z_{IIjP} Prasil	z_{IIjE} Escande	$z_{IIjP} - z_{IIjE}$	$\frac{z_{IIjP} - z_{IIjE}}{ z_{IIjP} + z_{IIjE} } \cdot 100$
-	-	-	-	-	-	m	m	m	%
0	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,728	0,728	0,000	0,0
1	0,06219	0,93970	0,31308	0,95139	0,30799	0,693	0,682	0,011	0,9
2	0,12438	0,88304	0,62615	0,81029	0,58603	0,596	0,585	0,011	0,9
3	0,18657	0,82980	0,93923	0,59041	0,80710	0,454	0,430	0,024	2,0
4	0,24876	0,77977	1,25230	0,31314	0,94982	0,285	0,248	0,037	3,1
5	0,31096	0,73274	1,56538	0,00542	0,99998	0,109	0,059	0,050	4,2
6	0,37315	0,68856	1,87846	-0,030283	0,95304	-0,057	-0,118	0,061	5,1
7	0,43539	0,64701	2,19153	-0,58163	0,81345	-0,198	-0,269	0,071	5,9
8	0,49753	0,60803	2,50461	-0,80389	0,59477	-0,304	-0,381	0,077	6,4
9	0,55972	0,57137	2,81768	-0,94800	0,31828	-0,368	-0,450	0,082	6,8
10	0,62191	0,53692	3,13076	-0,99994	0,01083	-0,390	-0,473	0,083	6,9

60-11-19

A-IV-9-1

PARTEA INTII A - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

INCHIDEREA BRUSCA

Capitolul IV - PROBLEMA LEGII DE OSCILATIE

& 9.- Utilizarea metodei Krilov-Bogoliubov si
verificări ale rezultatelor numerice obținute

In capitólu II al tezei a fost studiată în detaliu stabilirea unei formule adimensionale pentru dependența reprezentînd legea cvasi-oscilațiilor sub formă adimensională. Preluînd rezultatele și notațiile din acel capitol se poate scrie pentru prima cvasi-semiperioadă :

$$\xi = \frac{O_0 I}{1 + \frac{2O_0 I}{3\sqrt{1}} (\tau - \tau_0)} \cos(\delta_I + \tau - \tau_0) = \frac{-O_0 I}{1 + \frac{2O_0 I}{3\sqrt{1}} (\tau - \tau_0)} \cos(\delta + \tau - \tau_0) \quad (9-1)$$

$$\delta = \sqrt{1} + \delta'$$

în care parametrul $O_0 I$ este rădăcina pozitivă a ecuației :

$$\left(1 - \frac{4\xi^2}{9\sqrt{1}^2}\right) O_0^2 + \frac{4\xi_0}{3\sqrt{1}} \sqrt{-2\xi_0 O_0 I + 2\xi_0 - \xi_0^2} = 0 \quad (9-2)$$

iar parametrii δ, δ' rezultă din ecuațiile :

$$\cos \delta = \frac{\xi_0}{O_0 I}, \quad \delta \in \left[\sqrt{1}, \frac{3\sqrt{1}}{2}\right] \Rightarrow \cos \delta' = \frac{-\xi_0}{O_0 I}, \quad \delta' \in \left[0, \frac{\sqrt{1}}{2}\right] \quad (9-3)$$

Pentru cea de a doua cvasi-semiperioadă se obțin formule analoge :

$$\xi = \frac{O_0 \bar{I}}{1 + \frac{2O_0 \bar{I}}{3\sqrt{1}} (\tau - \tau_1)} \cos(\delta_{\bar{I}} + \tau - \tau_1) \quad (9-4)$$

în care parametrul $O_2 \bar{I}$ este dat de formula :

A-IV-9-2

$$a_{0II} = \frac{S_1}{\sqrt{1 - \frac{4S_1^2}{9\eta^2}}} \quad (9-5)$$

și parametrul γ_{II}^{λ} este dat de relația :

$$\cos \gamma_{II}^{\lambda} = \sqrt{1 - \frac{4S_1^2}{9\eta^2}} \quad (9-6)$$

Pentru verificări numerice ale formulelor de mai sus s-au utilizat, ca și în cazul metodei liniarizării-varianta Prașil, datele publicate în lucrarea /1-E/. Verificările s-au făcut, ca și în cazul metodei liniarizării, pentru momente reprezentînd zecimi ale cvasi-semiperioadei respective, momente notate t_{kj} în care primul indice indică ordinul cvasi-semiperioadei, iar al doilea indice indică zecimea de timp din cvasi-semiperioada respectivă :

$$\text{- dimensionat } t_{kj} = \frac{j}{10} (t_k - t_{k-1}) = \frac{j}{10} T_k \quad \begin{matrix} j=0,1,2,\dots,10 \\ k=I,II,\dots,K \end{matrix} \quad (9-7)$$

$$\text{- adimensional } \zeta_{kj} = \frac{t_{kj}}{T_*} = \frac{j}{10} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) = \frac{j}{10} \eta_k$$

Momentelor fixate t_{kj} , reprezentînd zecimi de cvasi-semiperioadă le corespund niveluri ale apei în castelul de echilibru notate z_{kj} .

Aceste niveluri se pot determina cu ajutorul formulelor de mai sus în care scop acestea se vor pune sub forma unică :

$$z_{kj} = \frac{a_{0k} Z_*}{1 + \frac{2a_{0k}}{3\eta} \zeta_{kj}} \cos(\gamma_k^{\lambda} + \zeta_{kj}) \quad \begin{matrix} k=I,II. \\ j=0,1,2,\dots,10 \end{matrix} \quad (9-8)$$

Cu datele din lucrarea /1-E/ se obțin următoarele valori numerice ale parametrilor adimensionali care apar în metoda Krîlov-Bogoliubov :

A-IV-9-3

- pentru prima cvasi-semiperioadă

$$a_{oI} = 1,81848, \quad \delta_I = 4,2226 \text{ rad}, \quad \delta_I' = 1,0810 \text{ rad.} \quad (9-9)$$

- pentru cea de a doua cvasi-semiperioadă

$$a_{oII} = 0,82113, \quad \delta_{II} = 0,173 \text{ radiani} \quad (9-10)$$

Rezultatele numerice obținute prin folosirea metodei Krîlov-Bogoliubov sînt date în tabelul Nr.1 (67) pentru prima cvasi-semiperioadă, respectiv în tabelul Nr.2 (68) pentru cea de a doua.

Din aceste tabele se pot extrage următoarele concluzii referitoare la aplicarea metodei aproximative Krîlov-Bogoliubov:

- diferențele relative maxime sînt mai mari decît cele din metoda Prașil ajungînd pînă la 20 %, adică de trei ori mai mari decît în metoda Prașil ;

- diferențele relative sînt maxime la mijlocul cvasi-semiperioadelor, ceea ce corespunde trecerii nivelului apei din castelul de echilibru prin poziția de echilibru ;

- diferențele relative scad sensibil în cea de a doua cvasi-semiperioadă aceasta datorîndu-se faptului cunoscut că prin scăderea amplitudinilor precizia metodei crește în general.

În urma acestor rezultate se impune începerea unor cercetări care să conducă la expresii analitice care să exprime mai bine legea cvasi-oscilațiilor. Pentru obținerea lor s-a utilizat metoda variațională care este principial diferită atît de metoda liniarizării cît și de metoda Krîlov-Bogoliubov.

1-11-94

TABEL Nr.1 (67)

j	φ_{Ij}	$\delta'_I + \varphi_{Ij}$	$\cos(\delta'_I + \varphi_{Ij})$	$\frac{\sum Q_{0I}}{3\sqrt{I}} \varphi_{Ij}$	$\frac{Q_{0I} Z^*}{1 + \frac{2Q_{0I} \varphi_{Ij}}{3\sqrt{I}}}$	$\frac{\sum I_{jk} - B}{K_{rflov} - B}$ Bogoliubov	Z_{IjE} Escande	$\frac{\sum I_{jk} - B}{-Z_{IjE}}$	$\frac{\sum I_{jk} - B}{12,01 + 12,1} \cdot 100$
-	-	rad	-	m	m	m	m	m	%
0	0,0000	1,0810	0,47048	0,00000	1,63663	-0,770	-0,770	0,000	0,0
1	0,2140	1,2950	0,27231	0,08258	1,51179	-0,412	-0,520	0,168	7,2
2	0,4279	1,5089	0,06186	0,16512	1,40469	-0,087	-0,277	0,190	12,7
3	0,6419	1,7229	-0,15152	0,24770	1,31172	0,199	-0,055	0,254	16,9
4	0,8559	1,9369	-0,35798	0,33028	1,23029	0,440	0,147	0,293	19,5
5	1,0699	2,1509	-0,54811	0,41286	1,15838	0,635	0,322	0,313	20,8
6	1,2838	2,3648	-0,71317	0,49541	1,09444	0,781	0,468	0,313	20,8
7	1,4978	2,5788	-0,84577	0,57799	1,03716	0,877	0,581	0,296	19,7
8	1,7118	2,7928	-0,93979	0,66057	0,98558	0,926	0,663	0,263	17,5
9	1,9257	3,0067	-0,99091	0,74311	0,93891	0,930	0,718	0,212	14,1
10	2,1397	3,2207	-0,99687	0,82569	0,89644	0,894	0,728	0,166	11,1

А. IV. 9. 5

TABEL Nr. 2 (67)

j	τ_{IIj}	$\delta'_I + \tau_{IIj}$	$\cos(\delta'_I + \tau_{IIj})$	$\frac{2\alpha_{II}}{3\pi} \tau_{IIj}$	$\frac{\alpha_{0II} Z^*}{1 + \frac{2\alpha_{II}}{3\pi} \tau_{IIj}}$	$z_{IIjk-\delta}$ krilov bogoliubov	$z_{IIj\epsilon}$ Escande	$z_{IIjk-\delta} - z_{IIj\epsilon}$	$\frac{z_{IIjk-\delta} - z_{IIj\epsilon}}{ z_{0I} + z_{IIj} } \cdot 100$
-	-	rad	-	-	m	m	m	m	%
0	0,00000	0,1730	0,98507	0,00000	0,73900	0,728	0,728	0,000	0,0
1	0,31920	0,4922	0,88130	0,05564	0,70005	0,617	0,682	-0,065	-5,4
2	0,63841	0,8114	0,68848	0,11127	0,66415	0,457	0,585	-0,128	-10,7
3	0,95761	1,1306	0,42612	0,16691	0,63330	0,270	0,430	-0,160	-13,3
4	1,27681	1,4498	0,12070	0,22255	0,60447	0,073	0,248	-0,175	-14,6
5	1,59602	1,7690	-0,19691	0,27819	0,57816	-0,114	0,059	-0,173	-14,4
6	1,91522	2,0882	-0,49463	0,33382	0,55405	-0,274	-0,118	-0,156	-13,0
7	2,23442	2,4074	-0,74237	0,38946	0,53186	-0,395	-0,269	-0,126	-10,5
8	2,55362	2,7266	-0,91512	0,44510	0,51138	-0,468	-0,381	-0,087	-7,3
9	2,87283	3,0458	-0,99540	0,50073	0,49243	-0,490	-0,450	-0,040	-3,2
10	3,19203	3,3650	-0,97514	0,55637	0,47482	-0,463	-0,473	0,010	0,8

B-I-2-1

Partea întâi B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DESCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul I - Problema stabilirii ecuației diferențiale

& 2 - Deducerea ecuației cvasi-oscilațiilor folosind
metoda variațională

În A-I-3 s-a utilizat metoda variațională pentru deducerea ecuației cvasi-oscilațiilor în cazul în care se produce manevrarea de închidere totală rapidă.

În B-I-1 s-a dedus ecuația cvasi-oscilațiilor prin utilizarea ecuației lui Bernoulli și s-a obținut o ecuație având următoarea formă adimensională :

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \alpha \frac{d\xi}{d\tau} + \xi + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \quad (2-1)$$

în care semnificația literelor este precizată în respectivul capitol.

În cele ce urmează se va deduce această ecuație utilizând în acest scop metoda variațională. Elementul calitativ nou, care apare față de cazul manevrei de închidere totală rapidă îl constituie schimbarea ecuației de continuitate scrisă la nodul galerie de aducțiune-castel de echilibru-conducte forțate schimbare care complică problema. De aceea se va considera de la început că în acest fenomen avem de-a face cu două mișcări, mișcări care au o

B-I-2-2

porțiune comună (galeria de echilibru) și anume :

I - o mișcare cvasi-oscilatorie la care participă apa din lacul de acumulare, galeria de aducțiune și șastelul de echilibru;

II - o mișcare într-un singur sens la care participă apa din lacul de acumulare, galeria de aducțiune, conductele forțate, turbine, canal de evacuare și se poate presupune că printr-un procedeu oarecare (pe seama energiei solare de exemplu) apa care participă la această mișcare ajunge din nou în lacul de acumulare. Evident, mișcarea care interesează în acest paragraf este mișcarea notată cu "I". Dificultatea principală care apare la utilizarea metodei variaționale ^{în variantă în care se consideră interpretarea fizică a termenilor} constă în faptul că în porțiunea comună trebuie făcută o defalcare a energiei cinetice la un moment dat între cele două mișcări. Pentru a putea face această împărțire se vor face unele considerații iar valabilitatea acestor considerații va rezulta din faptul că ecuația diferențială a cvasi-oscilațiilor la care se ajunge va fi chiar ecuația (2-1) în condițiile utilizării aceluiași ipoteze simplificatoare care au stat la baza obținerii acestei ecuații.

În cazul deschiderii totale rapide nu avem de-a face cu o transformare a energiei cinetice în energie potențială (cazul închiderii) ci invers cu o transformare a energiei potențiale în cinetică.

Lucrul mecanic δU corespunzător deplasării virtuale se poate calcula în virtutea principiului D'Alembert-Lagrange și a relației lui Cauchy :

$$\delta U = \int_V \rho \vec{a} \cdot d\vec{r} \, dv = \int_V (\rho \vec{f} + \text{div } \vec{T}) \cdot d\vec{r} \, dv \quad (2-2)$$

în care :

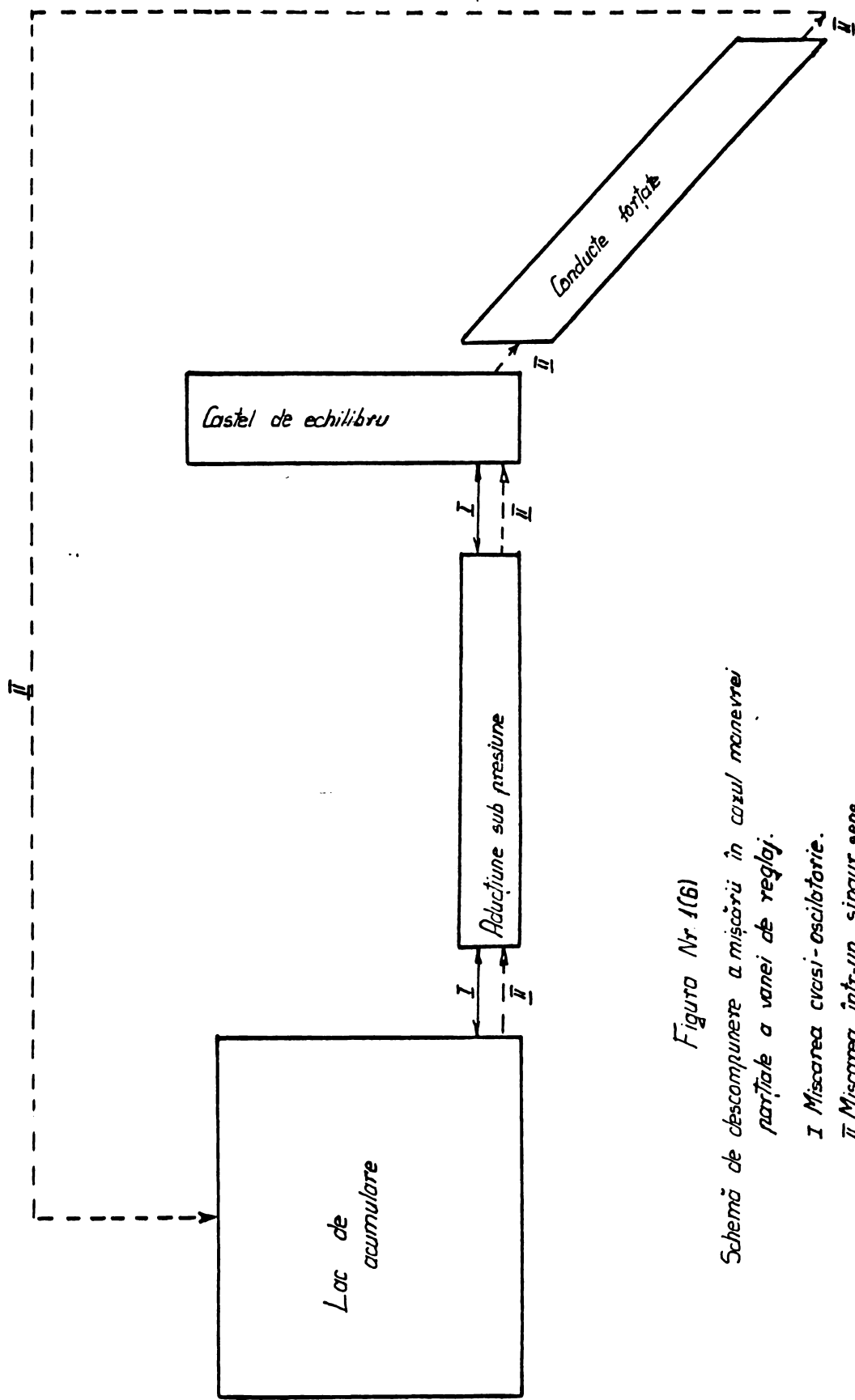


Figura Nr. 1(6)

Schemă de descompunere a mișcării în cazul manevrei
parțiale a vanei de reglaj.

I Mișcarea cuasi-oscilatorie.
II Mișcarea într-un singur sens.

B-I-2-3

$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$, accelerația în punctul curent

$\vec{f} = - \text{grad } U_{gr}$, intensitatea câmpului forțelor masice

U_{gr} , potențialul gravitațional

\vec{T} , tensorul tensiunilor

Tensorul tensiunilor se poate descompune într-o parte reversibilă - $p \vec{I}$ avînd repartiție hidrostatică și într-o parte deviatoare \vec{T}_D care produce disiparea energiei mecanice de aceea relația de mai sus se poate scrie :

$$dU_1 = - \int_{V_1} (\rho U_{gr} + dp) dv + \int_{V_1} \text{div } \vec{T}_D d\vec{r} dv \quad (2-3)$$

în care :

V_1 = volumul de apă care participă la mișcarea I.

Pe de altă parte, notînd cu u viteza într-un punct arbitrar x al masei de lichid, se poate scrie expresia energiei cinetice T_I a apei care participă la mișcarea I sub forma :

$$T_I = \int_V \frac{\rho u^2}{2} dv - T_{II} = \int_{V_1} \frac{\rho u^2}{2} dv \quad (2-4)$$

în care :

ρ = densitatea lichidului ;

$V = V_{lac.acumul.} + V_{galerie} + V_{castel}$

T = energia cinetică a apei care participă la mișcarea II

După cum s-a arătat anterior, principiul lui Hamilton se poate exprima sub forma :

$$\int_{t_0}^{t_1} d(T+U) dv = 0 \quad (2-5)$$

sau, utilizînd relațiile stabilite anterior :

B-I-2-4

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V_1} \left[d \left(\frac{\rho u^2}{2} - \rho u g r - p \right) + \operatorname{div} \vec{T}_3 \cdot d\vec{r} \right] dv dt = 0 \quad (2-6)$$

Se utilizează ipotezele simplificatoare menționate la închiderea totală rapidă.

Se trece la explicitarea termenului reprezentând energia cinetică T_I considerînd coeficienții Coriolis unitari, energia cinetică totală a apei din galerie are expresia :

$$T_{\text{galerie}} = T_{I \text{ galerie}} + T_{II \text{ galerie}} = \int_{V_{\text{galerie}}} \frac{\rho w^2}{2} dv = \frac{\rho w^2}{2} L f \quad (2-7)$$

în care, ca de obicei :

\vec{w} = viteza medie a apei din galerie ;

f = secțiunea transversală a galeriei ;

L = lungimea galeriei.

Din expresia de mai sus a energiei cinetice ^{se elimină w^2} , folosind în acest scop ecuația de continuitate, exprimînd conservarea masei :

$$f w = F \frac{dz}{dt} + Q_T \quad (2-8)$$

în care :

F = secțiunea transversală a castelului de echilibru

$\frac{dz}{dt}$ = viteza instantanee de mișcare a apei în castel

$Q_T = Q_{II}$ = debitul ce merge la turbine.

Rezultă că energia cinetică a apei din galerie capătă expresia :

$$T_{\text{galerie}} = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dz}{dt} \frac{Q_T}{F} + \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 \right] \quad (2-9)$$

B-I-2-5

Utilizând formula integrării prin părți relația de mai sus se poate pune sub o nouă formă care prezintă avantajul că sugerează modul în care trebuie făcută defalcarea energiei :

$$T_{galerie} = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 + 2 \int d \left(\frac{Q_T}{F} \frac{dz}{dt} \right) \right] \quad (2-10)$$

Neglijînd constantele de integrare, care nu au în problema de față nici un efect asupra rezultatului :

$$T_{galerie} = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 + 2 \int \frac{Q_T}{F} d \left(\frac{dz}{dt} \right) + 2 \int \frac{dz}{dt} \frac{Q_T}{F} \right] \quad (2-11)$$

Cu scopul de a justifica modul în care se va face împărțirea acestei energii cinetice între mișcarea I și mișcarea II se fac următoarele considerații :

- în cazul limită în care sistemul funcționează în regim permanent, $dQ_T=0, dz=0$ și în consecință întreaga energie cinetică a apei din galerie participă la mișcarea II, în castel nu apar oscilații. In acest caz :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 \quad (2-12)$$

- în cazul limită în care apare o închidere totală rapidă atunci Q_T se anulează și întreaga energie cinetică participă la mișcarea I . In acest caz :

$$T_I = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (2-13)$$

- în cazul unui reglaj al turbinelor care asigură un debit constant egal cu acela din regimul permanent, atunci $dQ_T=0$ energia legată de mișcarea II rămîne evident cea din regimul permanent astfel încît repartiția energiei cinetice totale din galerie se face astfel :

B-I-2-6

$$T_I = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \int \frac{Q_T}{F} d \left(\frac{dz}{dt} \right) \right]$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 \quad (2-14)$$

- în cazul în care, reglajul turbinelor este astfel încît să mențină legea de variație a vitezelor de coborîre a nivelului apei în castelul de echilibru aceeași cu cea din cazul anterior, însă în condițiile unui debit variabil atunci repartiția energiei cinetice totale din galerie este :

$$T_I = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \int \frac{Q_T}{F} d \left(\frac{dz}{dt} \right) \right]$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 + 2 \int \frac{dz}{dt} \frac{d Q_T}{F} \right] \quad (2-15)$$

Această împărțire a termenilor exprimînd energia cinetică totală a apei din galerie este cea căutată și ea precizează termenii care intervin în expresia T_I .

Restul termenilor păstrează aceeași formă ca și în cazul închiderii totale :

$$\int_{V_1} (\text{div } \vec{T}_0) d\vec{r} dv \cong - \frac{1}{2} \kappa \rho F \int_{z_0}^z \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \frac{Q_T}{F} \frac{dz}{dt} + \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 \right] dz$$

$$\int_{V_1} \rho U g r dv = \frac{\rho g F}{2} z^2 \quad (2-16)$$

$$\int_{V_1} dp dv = \int_{V_1} \text{grad } p d\vec{r} dv = \sum_{\text{galerie + castel}} d\vec{r}_i \int_{V_{1i}} \text{grad } p dv = \sum d\vec{r}_i \oint_{S_{ii}} p d\vec{s} = 0$$

Condiția variațională devine atunci :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \int Q_T d \left(\frac{dz}{dt} \right) \right] - \frac{1}{2} \rho g F z^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \kappa \rho F \int \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dz}{dt} \frac{Q_T}{F} + \left(\frac{Q_T}{F} \right)^2 \right] dz \right\} dt = 0 \quad (2-17)$$

B-I-2-7

Din ecuația de mai sus se elimină debitul turbinelor Q_T , folosind în acest scop ecuația de reglaj a acestora, considerînd un reglaj care asigură o putere constantă a centralei hidroelectrice :

$$Q_T = \frac{N}{\eta \rho g (H_{br} + z)} ; \frac{dQ_T}{dz} = - \frac{N}{\eta \rho g (H_{br} + z)^2} \quad (2-18)$$

Rezultă următoarea formă dimensională a condiției variaționale :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{2N}{\eta \rho g r} \int \frac{1}{H_{br} + z} d \left(\frac{dz}{dt} \right) \right] - \frac{1}{2} \rho g F z^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k \rho F \int \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{2N}{\eta \rho g r (H_{br} + z)} \frac{dz}{dt} + \frac{N^2}{\eta^2 \rho^2 g^2 f^2 (H_{br} + z)^2} \right] dz \right\} dt = 0 \quad (2-19)$$

Adoptînd sistemul uzual de mărimi de referință Z_* și T_* și introducînd parametrul adimensional α definit de relația :

$$\alpha = \frac{k N}{\eta \rho g F H_{br}} \sqrt{\frac{f}{g L F}} \quad (2-20)$$

se obține următoarea formă adimensională a condiției variaționale:

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\{ \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2\alpha \int \frac{d \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)}{1 + \frac{z}{H_{br}}} - \xi^2 - \int \left[\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \frac{2\alpha}{1 + \frac{z}{H_{br}}} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\alpha^2}{\left(1 + \frac{z}{H_{br}} \right)^2} \right] d\xi \right\} d\tau = 0 \quad (2-21)$$

Se face în relația de mai sus aproximarea făcută în paragraful anterior în care s-a dedus ecuația cvasi-oscilațiilor folosind relația lui Bernoulli :

$$1 + \frac{z}{H_{br}} = 1 + \frac{\xi Z_*}{H_{br}} \cong 1 \quad (2-22)$$

B-I-2-8

Se obține atunci : [16-A]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2\alpha \frac{d\xi}{dt} - \xi^2 - \int \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2\alpha \frac{d\xi}{dt} + \alpha^2 \right] d\xi \right\} dt = 0 \quad (2-23)$$

Ecuția lui Euler pentru funcția necunoscută care realizează condiția de extrem a integralei de acțiune sub formă adimensională este :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \xi + \alpha \frac{d\xi}{dt} + \alpha^2 = 0 \quad (2-24)$$

Ecuția de mai sus este chiar ecuația diferențială căutată pe care trebuie să o satisfacă extremala $\xi = \xi(t)$

B-II-1-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE .

DESCHIDERE TATALA RAPIDA

Capitolul II - Problema nivelului minim (saltul minim)& 1.- Integrarea ecuației cvasi oscilațiilor(metoda Krîloy - Bogoliubov)

După cum s-a stabilit în capitolul anterior, ecuația cvasi oscilațiilor, care trebuie integrată are forma :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \alpha \frac{d\xi}{dt} + \xi + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \quad (1-1)$$

Pentru început se face o substituție care să elimine termenul liber din ecuația diferențială :

$$\eta = \xi + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1-2)$$

Prin această substituție, ecuația cvasi oscilațiilor devine :

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \alpha \frac{d\eta}{dt} + \eta = 0 \quad (1-3)$$

Condițiile inițiale de tip Cauchy, corespunzătoare ecuației de mai sus :

$$t = t_0 \implies \eta = \frac{\alpha^2}{2} \quad (1-3 \text{ bis})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\alpha$$

B-II-1-2

Ecuatia de mai sus este o ecuatie de tip Abel.

Forma clasică a ecuației Abeliene de speța II-a este :

$$yy' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x) \quad (1-4)$$

Pentru a aduce ecuația (1-3) la forma de mai sus, se face schimbarea de funcție și de variabilă luînd ξ drept noua variabilă și $\frac{d\xi}{dt}$ noua funcție.

Se obține :

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{2} \xi^2 + \alpha \xi + \xi = 0 \quad (1-5)$$

ecuație care evident este de tipul (1-4).

Ecuatia de mai sus nu se poate integra cu ajutorul funcțiilor elementare.

Din această cauză este necesară folosirea unei metode aproximative de integrare. Se va folosi metoda aproximativă Krîlov - Bogoliubov.

Revenind la ecuația (1-3) se consideră parametrul mic adimensional ε , definit de relația :

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad (1-6)$$

Cu acest parametru ecuația cvasi oscilațiilor capătă forma :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{d\xi}{dt} + \xi = 0 \quad ; \quad \frac{d\xi}{dt} \ll 0 \quad (1-7)$$

B-II-1-3

Relațiile de bază din metoda Krîlov - Bogoliubov au fost stabilite în capitolul trecut.

Funcția notată cu f_1 are acum expresia :

$$f_1\left(\frac{d\xi}{dt}\right) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\xi}{dt} \quad (1-8)$$

Luînd acum : $\xi = a \cos \theta$

$$\frac{d\xi}{dt} = a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin \theta = a \cos \beta \quad (1-9)$$

se obține :

$$f_1(a \cos \beta) = \begin{cases} 2a \cos \beta + \frac{a^2}{\alpha} \cos^2 \beta & \cos \beta \leq 0 \\ 2a \cos \beta - \frac{a^2}{\alpha} \cos^2 \beta & \cos \beta \geq 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

În aplicarea metodei Krîlov-Bogoliubov în primă aproximație, este suficient calculul doar al funcției notată F_1 :

$$F_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \beta) \cos \beta d\beta$$

Rezultă că :

$$f_1(a \cos \beta) \cos \beta = \begin{cases} 2a \cos^2 \beta + \frac{a^2}{\alpha} \cos^3 \beta & ; \cos \beta \leq 0 \\ 2a \cos^2 \beta - \frac{a^2}{\alpha} \cos^3 \beta & , \cos \beta \geq 0 \end{cases} \quad (1-11)$$

B-II-1-4

Determinarea funcției $F_1(a)$ revine la efectuarea integralelor :

$$F_1(a) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{\pi}} \cos^2 \beta d\beta - \frac{a^2}{\alpha} \left[\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \cos^3 \beta d\beta - \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{3\sqrt{\pi}}{2}} \cos^3 \beta d\beta + \int_{\frac{3\sqrt{\pi}}{2}}^{2\sqrt{\pi}} \cos^3 \beta d\beta \right] \quad (1-12)$$

Efectuând integralele de mai sus se obține :

$$F_1(a) = 2a \left(1 - \frac{4a}{3\sqrt{\pi}\alpha} \right) \quad (1-13)$$

Rezultă atunci imediat și :

$$\zeta(a) = \zeta_0 - \frac{1}{\alpha} \int_{a_0}^a \frac{da}{a \left(1 - \frac{4a}{3\sqrt{\pi}\alpha} \right)} = \zeta_0 - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{a \left(1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}\alpha} \right)}{a_0 \left(1 - \frac{4a}{3\sqrt{\pi}\alpha} \right)} \quad (1-14)$$

Se explicitază din relația de mai sus amplitudinea a :

$$a = \frac{a_0 e^{-\alpha(\zeta - \zeta_0)}}{1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}\alpha} \left[1 - e^{-\alpha(\zeta - \zeta_0)} \right]} \quad (1-15)$$

Rezultă atunci în primă aproximație următoarea lege de mișcare :

$$\xi(\zeta) = \frac{a_0 e^{-\alpha(\zeta - \zeta_0)}}{1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}\alpha} \left[1 - e^{-\alpha(\zeta - \zeta_0)} \right]} \cos(\zeta + \gamma) = \frac{a_0}{e^{\alpha(\zeta - \zeta_0)} \left(1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}\alpha} \right) + \frac{4a_0}{3\sqrt{\pi}\alpha}} \cos(\zeta + \gamma) \quad (1-16)$$

B-II-1-5

Prin derivare se obține expresia vitezei de mișcare a nivelului apei în castel, sub formă adimensională :

$$\frac{d\xi}{dt} = -a_0 \frac{\left[\frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}} + \left(1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}}\right) e^{\alpha(z-z_0)} \right] \sin(z+\gamma) + \alpha \left(1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}}\right) e^{\alpha(z-z_0)} \cos(z+\gamma)}{\left[\frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}} + \left(1 - \frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}}\right) e^{\alpha(z-z_0)} \right]^2} \quad (1-17)$$

Pentru a utiliza efectiv expresiile de mai sus este necesară precizarea valorilor constantelor a_0 și γ . Aceasta se obține folosind cele două condiții inițiale de care dispunem :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2} &= a_0 \cos(z_0 + \gamma) \\ \alpha &= a_0 \sin(z_0 + \gamma) + a_0 \left(\alpha - \frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}} \right) \cos(z_0 + \gamma) \end{aligned} \quad (1-18)$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul :

$$\begin{aligned} a_0 \cos(z_0 + \gamma) &= \frac{\alpha^2}{2} \\ a_0 \sin(z_0 + \gamma) &= \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \left(\alpha - \frac{4a_0}{3\sqrt{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (1-19)$$

Prin ridicare la pătrat și adunarea celor două ecuații se poate elimina parametrul γ . Ordonând termenii se obține ecuația :

B-II-1-6

$$a_0^2 \left(1 - \frac{4\alpha^4}{9\pi^2} \right) + 2a_0 \frac{\alpha^5 - 2\alpha^3}{3\pi} - \frac{\alpha^6 - 3\alpha^4 + 4\alpha^2}{4} = 0 \quad (1-20)$$

Neglijind o serie de termeni nesemnificativi ($\alpha < 0,5$) se obține :

$$a_0^2 \cong \alpha \implies a_0 \cong \alpha \quad (1-21)$$

După determinarea parametrului a_0 , trebuie determinat și parametrul γ . Prin împărțirea celor două ecuații ale sistemului (1-19) :

$$\operatorname{tg}(\zeta_0 + \gamma) = \frac{2}{\alpha} - \alpha + \frac{4\alpha}{3\pi} = \frac{6\pi - (3\pi - 4)\alpha^2}{3\pi\alpha} \quad (1-22)$$

Avind în vedere semnele lui $\sin(\zeta_0 + \gamma)$ și $\cos(\zeta_0 + \gamma)$ rezultă că :

$$0 < \zeta_0 + \gamma = \operatorname{arctg} \frac{6\pi - (3\pi - 4)\alpha^2}{3\pi\alpha} < \frac{\pi}{2} \quad (1-23)$$

Inlocuind valorile parametrilor a_0 și γ , în legea de oscilație, aceasta devine :

$$\eta(\zeta) = \frac{\alpha}{\frac{4}{3\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\alpha(\zeta - \zeta_0)}} \cos \left[\zeta - \zeta_0 + \operatorname{arctg} \frac{6\pi - (3\pi - 4)\alpha^2}{3\pi\alpha} \right] \quad (1-24)$$

B-II-1-7

Relația de mai sus se poate încă prelucra, ținând cont că din condițiile inițiale rezultă și :

$$\frac{\alpha^2}{2} \cong \alpha \cos \left[\operatorname{arctg} \frac{6\sqrt{1} - (3\sqrt{1} - 4)\alpha^2}{3\sqrt{1}\alpha} \right]$$

$$\operatorname{arctg} \frac{6\sqrt{1} - (3\sqrt{1} - 4)\alpha^2}{3\sqrt{1}\alpha} \cong \arccos \frac{\alpha}{2} \quad (1-25)$$

Intr-adevăr, se poate arăta și direct că :

$$\cos \left[\operatorname{arctg} \frac{6\sqrt{1} - (3\sqrt{1} - 4)\alpha^2}{3\sqrt{1}\alpha} \right] \cong \cos \left[\operatorname{arctg} \frac{2}{\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha^2}}} \cong \frac{\alpha}{2} \quad (1-26)$$

Revenind la ecuația de mișcare, aceasta capătă forma finală căutată :

$$\xi(z) = \frac{\alpha}{\frac{4}{3\sqrt{1}} + \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) e^{\alpha(z-z_0)}} \cos \left[z - z_0 + \arccos \frac{\alpha}{2} \right] \quad (1-27)$$

B-11-1-8

În paragraful viitor se va utiliza ecuația de mai sus pentru determinarea nivelului minim.

În variabila inițială ξ , ecuația de mișcare are expresia :

$$\xi(z) = -\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{\frac{4}{3\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)e^{\lambda(z-z_0)}} \cos \left[\tau - \tau_0 + \arccos \frac{\alpha}{2} \right] \quad (1-28)$$

înlocuind și parametrul α prin valoarea aproximativă $\sqrt{-2\xi_\infty}$ se obține forma finală căutată a ecuației cvasi oscilațiilor :

$$\xi(z) = \xi_\infty + \frac{\sqrt{-2\xi_\infty}}{\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)e^{\sqrt{-2\xi_\infty}(z-z_0)} + \frac{4}{3\pi}} \cos \left[\tau - \tau_0 + \arccos \frac{\sqrt{-2\xi_\infty}}{2} \right] \quad (1-29)$$

B-II-2-1

PARTEA INTII - B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul II - Problema nivelului minim (saltul minim)§ 2 - Privire critică asupra formulelor aproximative existente pentru determinarea saltului minim

După cum s-a arătat, modelul matematic, sub formă adimensională al mișcării cvasi-oscilatorii care ia naștere în urma manevrei de deschidere bruscă are expresia :

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)^2 + \alpha \frac{d\zeta}{d\tau} + \zeta + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \quad (2.1)$$

în care :

$\zeta = \frac{z}{Z_*}$, variabilă adimensională, corespunzătoare cotei z a nivelului apei în castel, axa Oz fiind orientată ascendent și avînd originea la nivelul hidrostatic ;

$\tau = \frac{t}{T_*}$, variabilă adimensională, corespunzătoare timpului t . Manevra de deschidere bruscă se efectuează în momentul inițial t_0 ;

$Z_* = \frac{df}{\lambda_{ec} F}$, mărime de referință, avînd dimensiunea de lungime ;
 d, f = diametrul, respectiv aria secțiunii transversale a galeriei de aducțiune funcționînd sub presiune ;

λ_{ec} = coeficient echivalent de rezistență de tip Darcy al aducțiunii, înglobînd toate pierderile de sarcină pe aducțiune. În regim permanent de curgere $z_0 = \lambda_{ec} \frac{L}{d} \frac{w_0^2}{2g}$

z_0 = pierderea totală specifică de energie pe galeria de aducțiune, în regim permanent ;

L = lungimea galeriei de aducțiune ;

w_0 = viteza medie de curgere prin galeria de aducțiune în regim permanent ;

B-II-2-2

$T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}$, mărime de referință, avînd dimensiunea de timp;

F = aria transversală a castelului de echilibru ;

$\alpha = \frac{\lambda_{ec} N}{\eta_t \rho g d^3 F H_{br}} \sqrt{\frac{FL}{gF}}$, parametru adimensional caracterizînd amenajarea hidro-energetică ;

η_t = randamentul total al instalației ;

ρ = densitatea apei ;

g = accelerația gravitațională ;

H_{br} = căderea brută a centralei .

Ecuția (2-1) este o ecuație diferențială neliniară de ordinul doi.

În lucrarea /6-K,L/ se dă ecuația de tip Abel de doi sub forma generală :

$$[y + g(x)] y' = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x) \quad (2-2)$$

Dacă în ecuația (2-1) se face schimbarea de funcție și de variabilă trecîndu-se de la funcția ξ la funcția $y = \frac{d\xi}{d\zeta}$ și de la variabila ζ la variabila $x = \xi$ se obține în locul ecuației (2-1) ecuația :

$$y y' = -\frac{1}{2} y^2 - \alpha y - x - \frac{\alpha^2}{2} \quad (2-3)$$

care este evident un caz particular al ecuației (2-2).

Această ecuație nu se poate însă integra sub formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare de aceea soluția sub formă finită care se obține nu poate fi decît aproximativă.

Condițiile inițiale de tip Cauchy, aferente ecuației (1), care asigură unicitatea soluției sînt :

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_0 &\rightarrow \xi = 0 \\ \frac{d\xi}{d\zeta} &= -\alpha \end{aligned} \quad (2-4)$$

E-II-2-3

Parametrului \mathcal{L} i se mai poate da încă o interpretare fizică. Această interpretare este legată de observația că în cazul în care timpul crește nemărginit se tinde la un regim permanent de mișcare, căruia îi corespunde o poziție staționară a nivelului apei în castelul de echilibru, cu $\frac{d\zeta}{dt}, \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$. Notînd cu ζ_∞ poziția nivelului apei în castelul de echilibru corespunzătoare acestui regim permanent spre care tinde regimul nepermanent, din ecuația (2-1) rezultă :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-2\zeta_\infty} \quad (2-5)$$

Se remarcă faptul că există o analogie cu cazul închiderii bruște /9-A/ în care a apărut ca important parametrul $\sqrt{-2\zeta_0}$ avînd aceeași semnificație, indicele zero exprimînd faptul că în cazul închiderii bruște regimul permanent de referință este un regim inițial pe cînd în cazul deschiderii bruște indicele infinit exprimă faptul că regimul permanent de referință este un regim final.

De aici rezultă o consecință importantă pentru cercetările experimentale și anume faptul că un model care a fost dimensionat pentru studiul saltului maxim după criteriul va satisface și criteriul $\zeta_\infty = \text{idem}$, deci va putea fi utilizat și în studiul saltului minim.

Intrucît, așa cum s-a menționat, ecuația diferențială nu permite explicitarea saltului minim ζ_{min} diferiți cercetători utilizînd metode de aproximare, metode de integrare numerică sau metode grafice au dat formule de calcul a saltului minim. Formulele cele mai cunoscute vor fi reproduse utilizînd variabilele adimensionale din prezenta lucrare :

a.- Formula Axnes

$$\zeta_{min} = -\sqrt{-2\zeta_\infty} + 0,1\zeta_\infty - 0,025\zeta_\infty^2 \quad (2-6)$$

B-II-2-4

b.- Formula Calame-Gaden :

$$\xi_{min} = -\sqrt{-2\xi_{\infty}} + 0,125\xi_{\infty} \quad (2-7)$$

c.- Formula Johnson :

$$\xi_{min} = -\sqrt{-2\xi_{\infty} + \xi_{\infty}^2} \quad (2-8)$$

d.- Formula Pressel :

$$\xi_{min} = -\sqrt{-\xi_{\infty} + 0,09\xi_{\infty}^2} + 0,30\xi_{\infty} \quad (2-9)$$

e.- Formula Vorhgemer :

$$\xi_{min} = 0,178 \left(\xi_{\infty} - \sqrt{\xi_{\infty}^2 - 63\xi_{\infty}} \right) \quad (2-10)$$

f.- Formula Bachmeter :

$$\xi_{min} = 0,178\xi_{\infty} - 8\sqrt{-\xi_{\infty}} \quad (2-11)$$

g.- Formula Praşil :

$$\xi_{min} = \sqrt{-2\xi_{\infty} + 0,09\xi_{\infty}^2} - 0,3 \quad (2-12)$$

h.- Formula Braun :

$$\xi_{min} = 0,5\xi_{\infty} - \sqrt{0,25\xi_{\infty} - 0,81\xi_{\infty}\sqrt{-2\xi_{\infty} - 2\xi_{\infty}^2}} \quad (2-13)$$

Dintre acestea, cercetările lui Vogt confirmă o bună coincidență cu realitatea și cu valorile obținute prin integrare numerică a formulei lui Axnes. Pentru scopuri practice hidrotehnicianul sovietic A.A.Morozov ca și lucrarea românească "Manualul Inginerului Hidrotehnician" vol.II 1970, recomandă de asemenea utilizarea în calcule a formulei Axnes.

Hidraulicianul francez Escande utilizează însă formula aproximativă a lui Calame și Gaden.

Având în vedere cele de mai sus se vor analiza critic doar aceste două formule, celelalte prezentând o importanță minoră.

In cazul deschiderii bruște această analiză nu se poate

B-II-2-5

face cu referire la valorile obținute folosind relațiile exacte după cum s-a procedat în cazul închiderii bruște /9-A/, ci este necesar a depista anumite proprietăți calitative ale soluției și a cerceta dacă formulele aproximative existente satisfac sau nu și aceste proprietăți. În caz că se constată neconcordanța ale formulelor existente cu aceste proprietăți se justifică propunerea unei noi formule aproximative care să elimine aceste neconcordanțe.

Se constată că toate formulele reproduse au o structură funcțională asemănătoare.

În special există o strânsă legătură între formulele Calame-Goden și Axnes. Se observă cu ușurință că cele două formule dau aceeași valoare a saltului minim pentru $\xi_{\infty} = -1$. Pentru valorile uzuale ale parametrului ξ_{∞} cuprinse între 0 și -1 formula Calame-Gaden dă valori ξ_{min} mai mici decât formula Axnes; iar pentru valorile mai puțin uzuale ale parametrului ξ_{∞} , mai mici decât -1, formula Calame-Gaden dă valori ξ_{min} mai mari decât formula Axnes.

Este necesar a se face în mod temporar o translație care să mute originea axei verticale la nivelul corespunzător regimului permanent de mișcare, nivel final în jurul căruia se produc oscilațiile. Se trece astfel de funcția $\xi(\tau)$ la funcția $\xi(\tau)$:

$$\xi = \xi - \xi_{\infty} \quad (2-14)$$

Se menționează că și în cazul închiderii bruște, ea și în general în cazul în care se urmărește a se stabili unele proprietăți calitative ale soluției, studiul mișcării se face considerând originea la nivelul final, care în cazul închiderii era chiar nivelul hidrostatic.

În urma acestei translații se obține ecuația de mișcare

b-II-2-6

sub forma :

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \alpha \frac{d\xi}{d\zeta} + \xi = 0 \quad (2-15)$$

cu condițiile inițiale :

$$\zeta = \zeta_0 \implies \xi = -\xi_\infty$$

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -\sqrt{-2\xi_\infty} \quad (2-16)$$

Se observă cu ușurință că atunci când parametrul tinde la zero, din relațiile anterioare rezultă :

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_0, \quad \xi_\infty \rightarrow 0 &\implies \xi \rightarrow 0 \\ &\frac{d\xi}{d\zeta} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

iar din ecuația (2-16) scrisă în momentul inițial :

$$\zeta = \zeta_0, \quad \xi_\infty \rightarrow 0 \implies \frac{d^2\xi}{d\zeta^2} \rightarrow 0 \quad (2-18)$$

În conformitate cu aceste ultime relații în momentul inițial elongația, viteza și accelerația sub formă adimensională sînt nule, ceea ce arată că acestui caz îi corespunde soluția identic nulă :

$$\xi_\infty = 0 \implies \xi(\zeta) \equiv 0 \implies \xi_{min} = 0 \quad (2-19)$$

Din punct de vedere fizic acest caz corespunde funcționării centralei cu o putere nulă, căreia îi corespunde un debit nul trecut prin turbine, deci de fapt manevra de deschidere bruscă nu s-a produs și lichidul continuă să rămînă în starea inițială de repaus, în castelul de echilibru continuînd să se mențină nivelul hidrostatic inițial.

O altă situație extremă corespunde cazului în care parametrul ξ_∞ tinde la minus infinit. Parametrul ξ_∞ este un parametru care caracterizează pierderea specifică de energie, ast-

E-II-2-7

fel încît în acest caz mișcarea este puternic amortizată din care cauză ea își pierde caracterul oscilatoriu, căpătînd un caracter aperiodic. Deci în acest caz există implicația :

$$\xi_{\infty} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\xi_{min}}{\xi_{\infty}} \rightarrow 0, \frac{\xi_{min}}{\xi_{\infty}} \rightarrow 1 \quad (2-20)$$

Această limită este sugerată și de metoda grafică, în care la valori mari ale parametrului $|\xi_{\infty}|$, oscilațiile în jurul acestui nivel se reduc din ce în ce mai mult.

Din cele două cazuri extreme considerate pentru parametrul ξ_{∞} rezultă că, deoarece ξ_{min} este o funcție continuă de parametrul ξ_{∞} care se anulează pentru cele două valori extreme ale parametrului, trebuie să existe o valoare intermediară a parametrului ξ_{∞} pentru care valoarea ξ_{min} să aibă o valoare extremă. În scopul rezolvării acestei probleme se transformă din nou ecuația (2-15) trecînd la o nouă funcție

$$y = \frac{d\xi}{d\tau} \quad \text{și la o nouă variabilă } x = \xi \quad \text{în locul variabilei}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} y - \mathcal{L} - \frac{x}{y} \quad (2-21)$$

Pentru ecuația de mai sus scriem ecuația în variații /9-P/, /5-H/, /8-S/ relativă la parametrul \mathcal{L} :

$$\frac{du}{dx} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{y^2}\right)u - 1 \quad (2-22)$$

în care :

$$u = \frac{\partial y}{\partial \mathcal{L}}$$

Paranteza care apare în ecuația de mai sus se anulează în momentul inițial, de unde rezultă că dacă funcția U nu devine infinită în acest moment, într-o vecinătate suficient de mică a momentului inițial ecuația (2-22) poate fi înlocuită prin ecuația aproximativă :

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow u = -x \Rightarrow \frac{d\xi}{d\tau} = -\mathcal{L} \xi + C. \quad (2-23)$$

B-11-2-6

în care constanta C nu este funcție de parametrul α .

Scrind ecuația de mai sus în momentul inițial și identificând cu condiția inițială (2-16) se obține compatibilitate numai în cazul în care:

$$C=0 ; \xi_{\infty} = +1 = -\xi_{\infty} \quad (2-24)$$

Deci valoarea de mai sus a parametrului ξ_{∞} este singura care permite existența unei funcții U finite în momentul inițial ; ea este valoarea căutată a parametrului ξ_{∞} care conduce la valoarea extremă a lui ξ_{min} . În concluzie, revenind la funcția ξ , care este convenabilă pentru utilizarea practică deoarece coincide cu cea utilizată în cazul închiderii bruște, s-au obținut următoarele relații, relative la dependența saltului minim de parametrul ξ_{∞} :

$$a.- \xi_{\infty} \rightarrow 0 \Rightarrow \xi_{min} \rightarrow 0$$

$$b.- \xi_{\infty} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\xi_{min}}{\xi_{\infty}} \rightarrow 1 \quad (2-25)$$

$$c.- \xi_{\infty} = -1 \Rightarrow |\xi_{min} - \xi_{\infty}| \text{ maxim}$$

Se constată că atât relația Axnes cât și relația Calame-Gaden satisfac relația "a" de mai sus, de aceea este de așteptat ca pentru valori suficient de apropiate de zero, cele două formule aproximative să conducă la rezultate corespunzătoare.

În ceea ce privește proprietatea "b" nici una dintre cele două formule nu o satisfac, conducând la următoarele rezultate :

- formula Calame-Gaden :

$$\lim_{\xi_{\infty} \rightarrow -\infty} \frac{\xi_{min}}{\xi_{\infty}} = 0,125$$

$$\xi_{\infty} \rightarrow -\infty$$

B-II-2-9

- formula Axnes : (2-26)

$$\lim_{\xi_{\infty} \rightarrow -\infty} \frac{\xi_{min}}{\xi_{\infty}} = -\infty$$

Avînd în vedere limitele obținute, diferite de limita din (2-25) este de așteptat ca pentru valori suficient de mari ale parametrului $|\xi_{\infty}|$, formulele citate să dea rezultate eronate.

Intr-adevăr Calame-Gaden menționează acest lucru dînd un grafic /1-c/ în care apare clar că de la o anumită valoare a parametrului ξ_{∞} , saltul minim se depărtează din ce în ce mai mult de cel calculat prin utilizarea formulei (2-7) .

In ceea ce privește formula lui Axnes, așa după cum se observă din tabelul nr.1 (69) pentru valori mari ale parametrului $|\xi_{\infty}|$ ea conduce la valori $|\xi_{min}| < |\xi_{\infty}|$, fără sens din punct de vedere fizic.

Trecînd la relația "c" se constată că valorile extreme ale diferenței $\xi_{min} - \xi_{\infty}$ se obțin pentru următoarele valori ale parametrului :

- formula Calame-Gaden

$$\xi_{\infty} = -\frac{128}{49} = -2,612 \quad (2-27)$$

- formula Axnes $\xi_{\infty} = -0,667$

Rezultă ca o concluzie că doar prima dintre relațiile (2-25) este satisfăcută de formulele aproximative analizate.

In plus, structura funcțională a formulelor aproximative existente nu este potrivită pentru a satisface aceste relații.

Intr-adevăr primele două relații (2-25) cer o expresie de structura formulelor existente de forma :

$$\xi_{min} = 0\sqrt{-2\xi_{\infty}} + \xi_{\infty}$$

B-II-2-10

Ultima relație permite determinarea parametrului a :

$$\frac{d(\xi_{\min} - \xi_{\infty})}{d \xi_{\infty}} = - \frac{a}{\sqrt{-2\xi_{\infty}}} = 0 \Rightarrow a = 0, \text{ absurd} \quad (2-28)$$

De aceea este inutil a se căuta o formulă aproximativă de tipul formulelor existente întrucît nu se pot satisface astfel cele trei relații (2-25).

În tabelul Nr.1 (69) s-au calculat valorile saltului minim pentru un număr de douăzeci de valori nenule ale parametrului ξ_{∞} acoperind întregul domeniu de utilizare a castelelor de echilibru, valori pentru care a fost calculat și saltul maxim.

B-II-2-11

TABEL Nr.1 (69)

- Calame-Gaden : $\xi_{min} = -\sqrt{-2\xi_{\infty}} + 0,125 \xi_{\infty}$

- Axnes : $\xi_{min} = -\sqrt{-2\xi_{\infty} + 0,1 \xi_{\infty} - 0,025 \xi_{\infty}^2}$

$-\xi_{\infty}$	$\sqrt{-2\xi_{\infty}}$	$-\xi_{min}$ Calame-Gaden	$0,025 \xi_{\infty}^2$	$-\xi_{min}$ Axnes
0,000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,000491	0,03133	0,03139	0,00000	0,03138
0,000998	0,04466	0,04478	0,00000	0,04476
0,005032	0,10032	0,10095	0,00000	0,10082
0,009870	0,14050	0,14173	0,00000	0,14149
0,020255	0,20127	0,20380	0,00001	0,20331
0,039714	0,28127	0,28623	0,00004	0,28528
0,060169	0,34690	0,35442	0,00009	0,35301
0,079711	0,39928	0,40923	0,00016	0,40741
0,100508	0,44846	0,46102	0,00025	0,45876
0,149480	0,54677	0,56546	0,00056	0,56228
0,198198	0,62958	0,65435	0,00098	0,65038
0,248508	0,70492	0,73598	0,00155	0,73132
0,301598	0,77666	0,81346	0,00228	0,80910
0,347582	0,83377	0,87722	0,00301	0,87154
0,399822	0,89423	0,94421	0,00400	0,93821
0,503973	1,00397	1,05562	0,00636	1,06073
0,699676	1,18294	1,25466	0,01960	1,27251
1,019330	1,42782	1,55524	0,02590	1,55564
2,045732	2,02274	2,27846	0,10500	2,33231
4,303317	2,93376	3,37478	0,46300	3,82709

B-II-3-1

PARTEA INTII - B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul II - Problema nivelului minim (saltul minim)§ 3 - Stabilirea unei formule aproximative

Pentru stabilirea unei noi formule aproximative se va utiliza metoda aproximativă Krilov-Bogoliubov .

În paragraful 1 al capitolului s-a obținut ecuația oscilațiilor sub forma intermediară :

$$\xi(\tau) = \frac{\alpha}{\frac{4}{3\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\alpha(\tau - \tau_0)}} \cos(\tau - \tau_0 + \arccos \cos \frac{\alpha}{2}) \quad (3-1)$$

Derivând în raport cu timpul, rezultă :

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = -\alpha \frac{\left[\frac{4}{3\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\alpha(\tau - \tau_0)}\right] \sin(\tau - \tau_0 + \arccos \frac{\alpha}{2}) + \alpha \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\alpha(\tau - \tau_0)} \cos(\tau - \tau_0 + \arccos \frac{\alpha}{2})}{\left[\frac{4}{3\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\alpha(\tau - \tau_0)}\right]^2} \quad (3-2)$$

Pentru determinarea saltului minim se determină la început momentul τ_1 , în care se realizează acest nivel minim, ceea ce se face ținând cont că la atingerea acestui nivel derivata de mai sus se anulează. Din anularea derivatei rezultă o ecuație care permite determinarea momentului τ_1 sau ceea ce este echivalent a primei cvasi-semiperioade $\tau_1 = \tau_1 - \tau_0$:

$$\operatorname{tg}(\tau_1 + \arccos \frac{\alpha}{2}) = - \frac{\alpha \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)}{1 - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{3\pi} e^{-\alpha \tau_1}} \quad (3-3)$$

După cum se observă această ecuație este implicită în necunoscuta τ_1 . Pentru ca prin această metodă să se poată

B-II-3-2

determina cel puțin structura formulei aproximative

se fac unele aproximații, bazate pe dezvoltări în serie :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\gamma_1 + \operatorname{arc} \cos \frac{\alpha}{2}) &= - \operatorname{tg}(\gamma_1 - \gamma_1 - \operatorname{arc} \cos \frac{\alpha}{2}) \cong - \left(\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \gamma_1 \right) \\ e^{-\alpha \gamma_1} &\cong 1 - \alpha \gamma_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma_1^2 \end{aligned} \quad (3-4)$$

Ecuatia (3-3) se transformă atunci în :

$$\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \gamma_1 = \frac{\alpha \left(1 - \frac{4}{3\gamma_1} \right)}{1 - \frac{4\alpha}{3\gamma_1} \gamma_1 + \frac{2\alpha^2}{2\gamma_1} \gamma_1^2} \quad (3-5)$$

Ordonând termenii după puterile descrescătoare ale necunoscutei γ_1 :

$$\frac{2\alpha^2}{3\gamma_1} \gamma_1^3 - \alpha \left(\frac{4}{3\gamma_1} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3\gamma_1} \right) \gamma_1^2 + \left(1 + \frac{2\alpha}{3} - \frac{2\alpha^2}{3\gamma_1} \right) \gamma_1 - \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{4\alpha}{3\gamma_1} = 0 \quad (3-6)$$

Ecuatia de mai sus are într-o primă aproximație soluția

$$\gamma_1 \cong \frac{\gamma_1}{2} \quad (3-7)$$

Intr-o a doua aproximație, introducând această valoare a lui γ_1 în termenii ecuației (2-6) după cum urmează :

$$\frac{2\alpha^2}{3\gamma_1} \gamma_1^3 \cong \frac{2\alpha^2}{3\gamma_1} \frac{\gamma_1^2}{4} \gamma_1 = \frac{\gamma_1 \alpha^2}{6} \gamma_1 \quad (3-8)$$

$$\alpha \left(\frac{4}{3\gamma_1} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3\gamma_1} \right) \gamma_1^2 \cong \left(\frac{4}{3\gamma_1} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3\gamma_1} \right) \cdot \frac{\gamma_1}{2} \gamma_1 = \left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2 \gamma_1}{6} + \frac{\alpha^3}{6} \right) \gamma_1$$

se obține în locul soluției (3-7) soluția aproximativă de mai jos, valabilă cu suficientă precizie pentru valori mici ale parametrului α ($\alpha < 0,7$):

$$\gamma_1 \cong \frac{\gamma_1}{2} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{3\gamma_1} \right) = \frac{\gamma_1}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2}{3\gamma_1} \right) \quad (3-9)$$

B-II-3-5

Cu ajutorul formulei (3-9) s-au calculat în tabelul Nr.1 (70) valorile primei cvasi-semiperioade.

O dată determinată valoarea primei cvasi-semiperioade se poate determina saltul minim utilizând relația (3-1) :

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} + \frac{\alpha}{\frac{4}{3\sqrt{1}} + \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) e^{\alpha \sqrt{1}}} \cos \left[\sqrt{1} + \arccos \frac{\alpha}{2} \right] \quad (3-4)$$

Se fac și aici aproximații și anume se consideră :

$$e^{\alpha \sqrt{1}} \cong 1 + \alpha \sqrt{1} + \frac{1}{2} \alpha^2 \sqrt{1}^2$$

$$\cos \left(\sqrt{1} + \arccos \frac{\alpha}{2} \right) \cong -1 \quad (3-5)$$

Se obține formula aproximativă :

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} - \frac{\alpha}{1 + \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) \alpha \sqrt{1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) \alpha^2 \sqrt{1}^2} \quad (3-6)$$

sau înlocuind și parametrul α se obține formula aproximativă căutată :

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} - \frac{\sqrt{-2 \xi_{\infty}}}{1 - \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) \sqrt{1} \sqrt{-2 \xi_{\infty}} - \left(1 - \frac{4}{3\sqrt{1}}\right) \sqrt{1}^2 \xi_{\infty}} \quad (3-7)$$

Se observă că formula aproximativă este de forma următoare, formă care satisface două din proprietățile deduse în paragraful anterior :

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} \frac{\sqrt{-2 \xi_{\infty}}}{1 + a \sqrt{-2 \xi_{\infty}} - b \xi_{\infty}} \quad (3-8)$$

Parametrul b s-a determinat din condiția ca expresia $\xi_{\min} - \xi_{\infty}$ să aibă un extrem în raport cu ξ_{∞} pentru $\xi_{\infty} = -1$, adică s-a pus condiția satisfacerii și celei de a treia condiții deduse la paragraful anterior :

B-II-3-4

$$\frac{d(\xi_{\min} - \xi_{\infty})}{d\xi_{\infty}} = - \frac{\frac{1}{\sqrt{-2\xi_{\infty}}} (1 + a\sqrt{-2\xi_{\infty}} - b\xi_{\infty}) - \sqrt{-2\xi_{\infty}} \left(-\frac{a}{\sqrt{-2\xi_{\infty}}} - b\right)}{\left[1 + a\sqrt{-2\xi_{\infty}} - b\xi_{\infty}\right]^2} \quad (3-9)$$

După ordonare ecuația de mai sus capătă forma :

$$b\xi_{\infty} + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \quad (\xi_{\infty} = -1) \quad (3-10)$$

Nu s-a folosit relația aproximativă (3-7) deoarece pentru aproximările efectuate în stabilirea formulei devin grosolane. Parametrul "a" a fost determinat prin calcule numerice, punându-se condiția ca formula aproximativă să se suprapună optim peste formula Axnes, pentru valori ale parametrului ξ_{∞} pentru care această formulă dă rezultate corespunzătoare. S-a obținut în acest fel prin încercări valoarea :

$$a = 0,35 \quad (3-10')$$

Rezultă, în concluzie următoarea formulă propusă pentru calculul saltului minim : [13-A]

$$\xi_{\min} = \xi - \frac{\sqrt{-2\xi_{\infty}}}{1 + 0,35\sqrt{-2\xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} \quad (3-11)$$

Această formulă are toate cele trei proprietăți menționate în paragraful anterior.

Cu ajutorul ei s-a construit tabelul Nr.2 (71) , în care s-au trecut valorile calculate ale saltului minim pentru cele două zeci de valori nenule ale parametrului ξ_{∞} .

B-II-4-1

PARTEA ÎNTII - B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

Capitolul II - Problema nivelului minim (saltul minim)§ 4 - Testarea formulei aproximative propuse

În paragraful anterior s-a propus următoarea formulă aproximativă pentru calculul saltului minim :

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} - \frac{\sqrt{-2\xi_{\infty}}}{1 + 0,35\sqrt{-2\xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} \quad (4-1)$$

În cele ce urmează se vor face câteva verificări ale formulei stabilite.

a.- Întrucît formula lui Axnes este considerată a fi cea mai corespunzătoare, în tabelul Nr.1 (72) s-a calculat saltul minim pentru un număr de 20 valori nenule ale parametrului ξ_{∞} , atît cu ajutorul formulei Axnes cît și cu formula propusă (4-1). În același tabel s-au trecut diferențele absolute și diferențele relative între rezultatele obținute prin aplicarea celor două formule. Se observă că în domeniul valorilor uzuale, cărora le corespund valori subunitare ale parametrului $|\xi_{\infty}|$ cele două formule conduc la diferențe relative de sub 2 % diferențe avînd unele semn pozitiv și altele semn negativ, ceea ce înseamnă că practic ele coincid.

Procedeele grafice, metodele aproximative și metodele numerice de integrare au în general erori de același ordin de mărime sau chiar mai mare ele nu pot constitui dovezi concludente în favoarea uneia sau a alteia dintre formule. În schimb din tabelul nr.1 (72) rezultă clar că pentru valorile saltului **minim**

B-II-4-2

minim corespunzătoare valorilor supraunitare ale parametrului $|\xi_\infty|$, formula lui James dă valori eronate deoarece conduce la valori ale saltului minim $|\xi_{\min}|$ mai mici decât pentru parametrul $|\xi_\infty|$ ce caracterizează regimul permanent.

b.- În lucrarea /1-C/ se prezintă următorul exemplu numeric :

Date inițiale :

$$Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$f = 9,6 \text{ m}^2, \quad d = 3,5 \text{ m}$$

$$F = 12,6 \text{ m}^2$$

$$z_\infty = -3,8 \text{ m}$$

$$L = 2600 \text{ m}$$

Date auxiliare calculate

$$\omega_\infty = \frac{Q}{f} = 2,08 \text{ m/s}$$

$$\lambda_{ec} = -\frac{2gdz_\infty}{L\omega^2} = 0,02315$$

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_{ec}F} = 115,2 \text{ m}$$

$$\xi_\infty = \frac{z_\infty}{Z_*} = 0,033$$

Calculul saltului minim

$$\xi_{\min} = \xi_\infty - \frac{\sqrt{-2\xi_\infty}}{1 + 0,35\sqrt{-2\xi_\infty} - \xi_\infty} = -0,261$$

$$z_{\min} = \xi_{\min} Z_* = -30,06 \text{ m}$$

B-II-4-3

În lucrarea citată se dă valoarea $z_{\min} = -30,05 \text{ m}$, obținută prin integrare grafică.

c.- În lucrarea /I-F/ se prezintă un alt exemplu numeric, important pentru formula propusă deoarece la aproximativ aceleași caracteristici ale amenajării hidro-energetice, castelul de echilibru are o secțiune de circa 25 ori mai mare decât în exemplul precedent ceea ce conduce la o valoare mult diferită a parametrului ξ_{∞} .

Date inițiale

$$\begin{aligned} Q &= 20 \text{ m}^3/\text{s} \\ f &= 10 \text{ m}^2, \quad d = 3,57 \text{ m} \\ F &= 300 \text{ m}^2 \\ L &= 4000 \text{ m} \\ z_{\infty} &= -5,16 \text{ m} \end{aligned}$$

Date auxiliare calculate

$$\begin{aligned} w_{\infty} &= \frac{Q}{f} = 2 \text{ m/s} \\ \lambda_{ec} &= - \frac{2qd z_{\infty}}{L w_{\infty}^3} = 0,02255 \\ Z_* &= \frac{df}{\lambda_{ec} F} = 5,28 \text{ m} \\ \xi_{\infty} &= \frac{z_{\infty}}{Z_*} = -0,976 \end{aligned}$$

Calculul saltului minim

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} - \frac{\sqrt{-2\xi_{\infty}}}{1 + 0,35\sqrt{-2\xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} = -1,541$$

$$z_{\min} = \xi_{\min} Z_* = -8,14 \text{ m}$$

B-II-4-4

In lucrarea citată se dă rezultatul $z_{\min} = -8,04m$, obținut prin integrare numerică după un algoritm aparținând autorului respectiv.

d.- In lucrarea /2-P/ se prezintă următorul exemplu relativ la o variantă a unei amenajări hidroenergetice din RSR:

Date inițiale

$$N = 215.000 \text{ kW}$$

$$d = 4,4 \text{ m}; \quad f = 15,2 \text{ m}^2$$

$$H_{br} = 470$$

$$\eta_t = 93,4 \%$$

$$F = 28,3 \text{ m}^2$$

$$L = 8130 \text{ m}$$

$$z_{\infty} = -11,7 \text{ (citit în reprezentarea grafică) m}$$

Date auxiliare calculate

$$Q = \frac{N}{\eta + \rho g H_{br}} = 50 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$w_{\infty} = \frac{Q}{f} = 3,286 \text{ m/s}$$

$$\lambda_{ec} = - \frac{2g dz_{\infty}}{L w_{\infty}^2} = -0,0115$$

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_{ec} F} = 205,5 \text{ m}$$

$$\xi_{\infty} = \frac{z_{\infty}}{Z_*} = -0,057$$

Calculul saltului minim

$$\xi_{\min} = \xi_{\infty} - \frac{\sqrt{-2\xi_{\infty}}}{1 + 0,35\sqrt{-2\xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} = -0,344$$

$$z_{\min} = \xi_{\min} Z_* = -70,8 \text{ m}$$

B-II-4-5

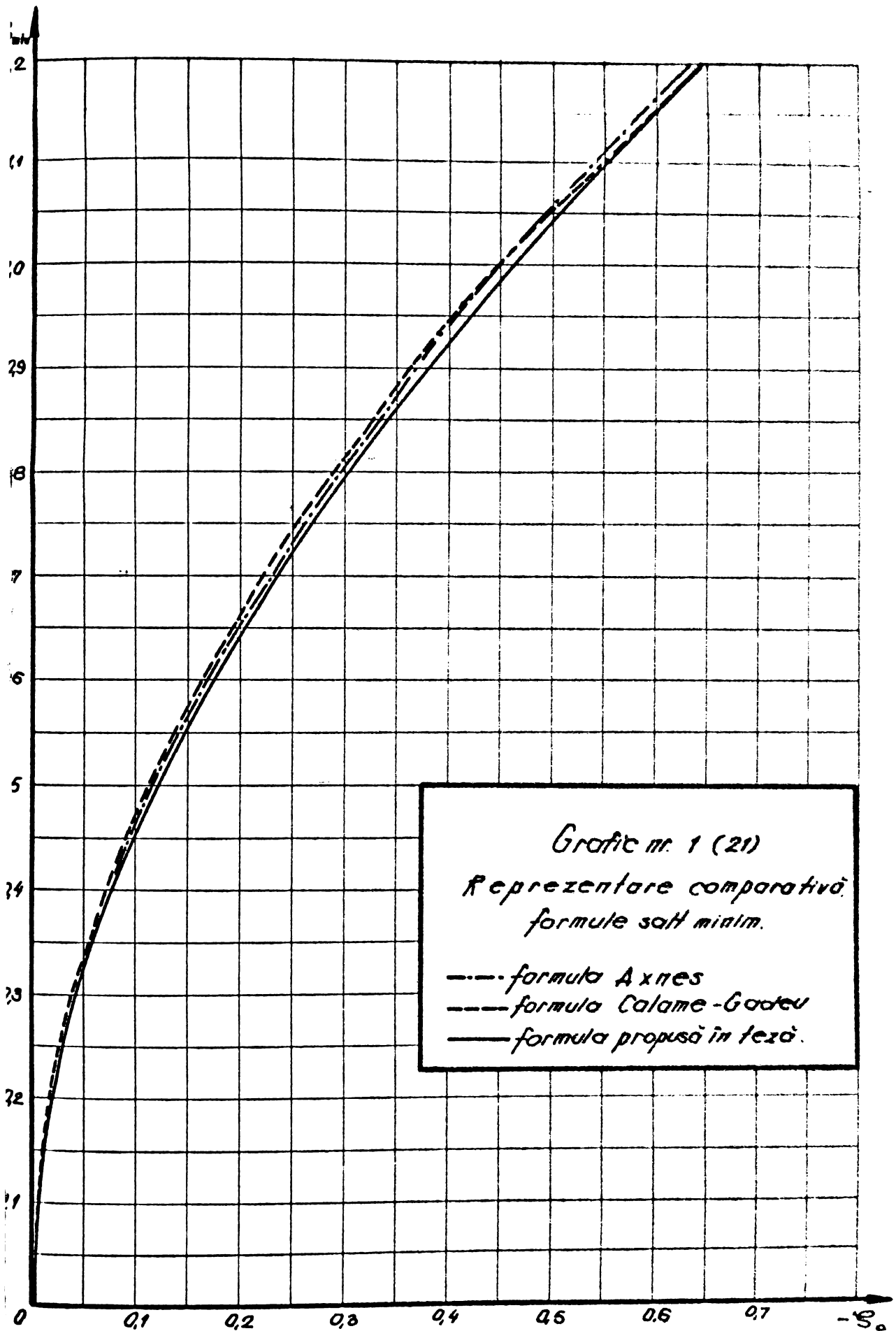
În lucrarea citată, din reprezentarea grafică a datelor obținute prin integrarea numerică se citește $z_{\min} = -68,8$ m . Diferența relativ mai mare care apare aici se datorește și faptului că algoritmul utilizat în lucrarea citată pentru determinarea numerică a saltului minim ia în considerare și o serie de factori secundari ca de exemplu pierderea de sarcină în conducta forțată, variația randamentului turbinelor .

Din cele prezentate pînă în prezent rezultă ca o concluzie că formula propusă se verifică în condițiuni bune pe întreg domeniul de valori ale parametrului S_{∞} , deci ea prelungeste domeniul de valabilitate al formulelor aproximative existente în literatură pînă în prezent.

B-II-4-6

TABEL Nr.1 (72)

$-S_{\infty}$	$-S_{min}$ (formula propusă)	$-S_{min}$ (formula Axnes)	$S_{min_{Ax}} - S_{min}$	$100\% \frac{S_{min_{Ax}} - S_{min}}{S_{min}}$
0,000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00 %
0,000491	0,03147	0,03138	0,00009	-0,29 %
0,000998	0,04493	0,04476	0,00017	-0,38 %
0,050320	0,10148	0,10082	0,00066	-0,65 %
0,009870	0,14253	0,14149	0,00104	-0,73 %
0,020255	0,20665	0,20331	0,00334	-1,62 %
0,039714	0,28956	0,28528	0,00428	-1,48 %
0,060169	0,35376	0,35301	0,00075	-0,21 %
0,079711	0,40713	0,40741	-0,00028	0,07 %
0,100508	0,45715	0,45715	-0,00161	0,35 %
0,149480	0,55726	0,56228	-0,00502	0,90 %
0,198198	0,64202	0,65038	-0,00836	1,30 %
0,248508	0,71996	0,73132	-0,01136	1,58 %
0,301598	0,79521	0,80910	-0,01389	1,75 %
0,347582	0,85617	0,87154	-0,01537	1,79 %
0,399822	0,92191	0,93821	-0,01630	1,77 %
0,503973	1,04509	1,06073	-0,01564	1,50 %
0,699676	1,25933	1,27251	-0,01318	1,05 %
1,019330	1,58613	1,55565	0,03048	-1,92 %
2,045732	2,58460	2,33231	0,25229	-9,75 %
4,303317	4,76678	3,82709	0,93969	-19,70 %



B-III-3-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DESCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - PROBLEME DE STABILITATE A MISCARII
CVASI - OSCILATORII& 3.- Stabilirea sistemului în primă aproximație.Stabilitatea la mici oscilații

În cazul manevrei de deschidere bruscă a vanei de reglaj în care se trece de la o putere nulă la o putere N , modelul matematic al fenomenului oscilațiilor în masă ca urmare a manevrei menționate, este reprezentat în cazul unui reglaj automat la putere constantă de ecuația /1-J/ :

$$\frac{LF}{gf} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{2g} \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} + \frac{kN}{\eta gf(H+z)} \left[1 - \frac{LF}{\eta F(H+z)} \right] \frac{dz}{dt} + z + \frac{kH^2}{2g\eta^2 F^2 (H+z)^2} = 0 \quad (3-1)$$

S-au utilizat notațiile uzuale.

Se știe că din punctul de vedere al manevrelor singulare ale vanei de reglaj, cea mai periculoasă manevră o constituie manevra de deschidere bruscă ceea ce justifică faptul că acest capitol al stabilității a fost plasat în cadrul părții referitoare la deschiderea totală rapidă.

Se vor nota cu $t_1, t_2, \dots, t_j, t_{j+1} \dots$ momentele în care nivelul apei în castelul de echilibru atinge un nivel extrem local $z_1 < 0$
 $z_2 > 0, \dots, z_j, z_{j+1}, \dots$. Cu $T_1, T_2, \dots, T_j, T_{j+1} \dots$ se vor nota intervalele de timp denumite și cvasi-semiperioade, definite de relații de tipul :

$$T_{j+1} = t_{j+1} - t_j \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3-2)$$

B-III-3-2

Introducând mărimile raționale de referință utilizate curent pe parcursul tezei :

$$Z_* = \frac{LF}{\kappa f} = \frac{df}{\lambda_e F}$$

$$T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}$$
(3-3)

și introducând parametrii adimensionali caracteristici ai instalației :

$$\chi = \frac{H}{Z_*}$$

$$\beta = \frac{\kappa N}{\gamma \eta_{FH}} \sqrt{\frac{f}{gLF}} = \frac{P_f N}{\gamma \eta_{fH}} \sqrt{\frac{F}{Lgf}} = \frac{\lambda LN}{\gamma \eta_{dfH}} \sqrt{\frac{F}{Lgf}}$$
(3-4)

modelul matematic al mișcării se poate pune sub forma :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{dt} \right| \frac{d\xi}{dt} + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} \left[1 + \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{x}} \right] \frac{d\xi}{dt} + \xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi}{x})} = 0 \quad (3-5)$$

Dacă mișcarea se amortizează în timp, nivelul apei corespunzător situației în care apa din castelul de echilibru este în repaus se notează ξ_∞ și se poate determina din ecuația de mai sus în care se consideră evident $\frac{d\xi}{dt} = 0$, $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$ ceea ce corespunde din punct de vedere fizic vitezei și accelerației nule deci repausului :

$$\xi_\infty + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi_\infty}{x})^2} = 0 ; \quad \xi_\infty \approx -\frac{\beta^2}{2}$$
(3-6)

În studiul stabilității se face la început translația /1-J/, care conform terminologiei utilizată în paragraful anterior ne conduce la ecuația mișcării perturbate :

$$\psi = \xi - \xi_\infty \Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$
(3-7)

B-III-3-3

Prin această translație se mută originea axei verticale de la nivelul hidrostatic la nivelul corespunzător poziției finale de repaus.

În noua variabilă, ecuația cvasi-oscilațiilor capătă forma :

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right| \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\beta}{1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}} \left[1 - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}} \right] \frac{d\psi}{d\tau} + \psi + \xi_\infty + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}\right)^2} = 0 \quad (3-8)$$

Se observă că soluția banală $\psi \equiv 0$, care din punct de vedere fizic reprezintă absența oscilațiilor în castelul de echilibru și funcționarea centralei în regim permanent este soluție a ecuației de mai sus. În continuare se studiază tocmai stabilitatea acestei soluții banale, adică stabilitatea echilibrului, mișcarea reprezentată de ecuația de mai sus fiind interpretată fizic ca o perturbare a echilibrului.

Este lesne de observat că ecuația diferențială neliniară de ordinul doi la care s-a ajuns este echivalentă cu următorul sistem neliniar, scris în formă normală :

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\tau} = \nu \\ \frac{d\nu}{d\tau} = -\psi - \xi_\infty - \frac{1}{2} |\nu| \nu - \frac{\beta}{1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}} \left[1 - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}} \right] \nu - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_\infty}{\alpha}\right)^2} \end{cases} \quad (3-9)$$

Dezvoltând în serie Maclaurin expresia care apare în membrul drept al celei de a doua ecuații a sistemului de mai sus se obține, utilizând și relația (3-6) :

$$f(\psi, \nu) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial f}{\partial \nu} \nu + R(\psi, \nu)$$

$$f(0,0) = -\xi_\infty - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_\infty}{\alpha}\right)^2} = 0 \quad (3-10)$$

B-III-3-4

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \psi} = - \left[1 - \frac{\beta^2}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right)^3} \right]$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu} = - \frac{\beta}{1 + \frac{\xi_\infty}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\xi_\infty}{x}} \right]$$

$$R(\psi, \nu) = - \frac{1}{2} |\nu| \nu - \frac{\beta \psi \nu \left[\left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right) (x + \xi_\infty - 2) + \frac{\psi}{x} (x + \xi_\infty - 1) \right]}{x^2 \left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{\xi_\infty + \psi}{x}\right)^2} -$$

$$- \frac{\beta^2 \left(3 + 3 \frac{\xi_\infty}{x} + 2 \frac{\psi}{x}\right) \psi^2}{2x^2 \left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right)^3 \left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right)^2}$$

În vederea simplificării formale a relațiilor, se introduc în continuare parametri adimensionali a, b , în locul parametrilor β, x și ξ_∞ , acest lucru fiind posibil datorită faptului că din cei trei parametri, dacă avem în vedere relația (3-6), numai doi sînt independenți :

$$a = \frac{\beta}{1 + \frac{\xi_\infty}{x}} \tag{3-11}$$

$$b = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\xi_\infty}{x}}$$

Cu acești noi parametri, derivatele parțiale din

(3-10) se pot exprima simplu prin :

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \psi} = - (j - a^2 b) \tag{3-12}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu} = - a (1 - b)$$

Notînd cu $\rho = \sqrt{\psi^2 + \nu^2}$ se constată că prin aplicarea teoremei lui Hopital :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{x(\psi, \nu)}{\rho} = 0 \tag{3-13}$$

ceea ce asigură /1-D/, /9-S/ faptul că în vecinătatea punctului singular (0,0) comportarea traectoriilor sistemului (3-9) este

B-III-3-5

aceeași cu a traiectoriilor sistemului de mai jos, numit sistemul de primă aproximație :

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\bar{t}} = \nu \\ \frac{d\nu}{d\bar{t}} = -(1-a^2b)\psi - a(1-b)\nu \end{cases} \quad (3-14)$$

Această comportare se reduce la următoarele tipuri caracteristice după care punctul singular este denumit focar, nod cu o tangentă, nod cu două tangente, centru focar și nod stelar (nod izotrop).

Din punct de vedere fizic acest sistem liniarizat aproximează cu atât mai bine sistemul neliniar cu cât amplitudinea oscilațiilor este mai mică de aceea studiul stabilității pe calea liniarizării prin diferite metode mai este denumit și studiul stabilității la mici oscilații ale nivelului de apă în castelul de echilibru.

Teorema fundamentală a stabilității după prima aproximație /2-5/ arată că dacă soluția banală a sistemului în primă aproximație este uniform asimptotic stabilă atunci neglijarea termenilor de grad superior în studiul stabilității e admisă și soluția sistemului neliniar va fi și ea asimptotic stabilă. Cu alte cuvinte, dacă parametrii nu vor depăși anumite valori limită, stabilitatea la mici oscilații implică și stabilitatea la mari oscilații.

După cum s-a arătat în paragraful anterior în cazul sistemelor liniare autonome pentru a demonstra stabilitatea asimptotică uniformă precum și stabilitatea în mare este suficientă demonstrarea stabilității asimptotice. Conform unei teoreme amintită de asemenea în paragraful anterior, demonstrarea stabilității asimptotice constă în a demonstra că toate rădăcinile ecuației caracteristice ale sistemului în prima

B-III-3-6

aproximație au partea reală negativă.

În cazul castelelor de echilibru simple s-a ajuns la sistemul de primă aproximație (3-14). Ecuația caracteristică a acestui sistem sub formă de determinant este :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1+a^2b & -a(1-b)-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + a(1-b)\lambda + 1 - a^2b = 0 \quad (3-15)$$

Discriminantul acestei ecuații este :

$$\Delta = a^2(1+b)^2 - 4 \quad (3-16)$$

Deoarece sarcina centralei este totdeauna cu mult mai mare decât sarcina pierdută pe galeria de aducțiune, în caz contrar dispărînd rațiunea de a exista a centralei din punct de vedere economic, rezultă că se pot considera totdeauna variabile inegalitățile :

$$-z_\infty \ll H \implies -\xi_\infty \ll x \implies a > 0, b > 0 \quad (3-17)$$

Pentru ca rădăcinile ecuației caracteristice să aibă partea reală negativă este necesar și suficient (formulele Vieta) ca să fie satisfăcute următoarele două inegalități :

$$\begin{cases} 1 - a^2b > 0 \implies \frac{\beta^2}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right)^3} < 1 \implies -z_0 < \frac{1}{3} H \\ a(1-b) > 0 \implies x \left(1 + \frac{\xi_\infty}{x}\right) > 1 \implies Z_* < H + Z_0 \end{cases} \quad (3-18)$$

În stabilirea ultimei inegalități s-a utilizat și relația (3-6).

Cea de a doua inegalitate de mai sus nu este altceva decât cunoscuta condiție a lui Thoma deoarece ea poate fi pusă sub forma :

B-III-3-7

$$F > \frac{Lf}{P_f(H+z_\infty)} = \frac{df}{\lambda_e(H+z_\infty)} = F_{Th} \quad (3-19)$$

Apare evident faptul că pentru z_∞ trebuie considerată valoarea cea mai defavorabilă, care este cea corespunzătoare debitului maxim trecut prin centrală în regim permanent.

Relațiile de condiție (3-19) constituie și o testare a corectitudinii rezultatelor obținute pînă la acest punct. Prima dintre aceste relații este totdeauna realizată în cazul centralelor hidroelectrice, iar cea de a doua reprezintă cunoscuta condiția a lui Thoma. În ipoteza satisfacerii ambelor relații atunci dacă $\Delta < 0$ mișcarea are un caracter oscilatoriu amortizîndu-se treptat iar dacă $\Delta \geq 0$ mișcarea capătă un caracter aperiodic, forțele care contribuie la amortizarea mișcării sînt foarte mari și nu mai permit nivelului apei să oscileze în jurul nivelului final de repaus, ci doar să se apropie permanent de acest nivel. Ultimul caz nu prezintă importanță practică deoarece necesită secțiuni excepțional de mari ale castelului de echilibru.

B-III-4-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DESCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - PROBLEME DE STABILITATE ALE MISCARII

CVASI - OSCILATORII

& 4.- Determinarea funcției Liapunov în cazul micilor oscilații și studiul stabilității micilor oscilații cu ajutorul ei

Avînd în vedere rezultatele obținute pînă în prezent, pe baza unei teoreme cunoscute reproduse în & 2 este asigurată existența unei funcții Liapunov în cazul problemei stabilității micilor oscilații, funcție care are proprietatea de a fi pozitiv definită și cu derivată în raport cu timpul negativ definită, derivata fiind calculată în virtutea sistemului de primă aproximație.

Se va încerca să obținem o funcție Liapunov care să aibă o interpretare fizică și în plus să permită obținerea unor concluzii utile noi. În acest scop se va calcula la început energia potențială a mișcării oscilatorii, luînd drept plan de referință planul de echilibru al oglinzii apei din castelul de echilibru către care mișcarea vinde în mod asimptotic. Prin această alegere, în situația de echilibru (repaus), energia potențială a mișcării oscilatorii devine nulă iar pentru orice altă poziție a nivelului apei în castel care se realizează în decursul procesului oscilatoriu energia potențială va fi strict pozitivă :

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g F (z - z_\infty)^2 \quad (4-1)$$

B-III-4-2

Avînd în vedere valorile de mai sus ale energiei potențiale scrise în raport cu acest plan de referință rezultă că ea poate constitui o caracterizare a energiei potențiale a mișcării oscilatorii.

Intrucît pînă la acest punct s-a lucrat cu mărimi relativizate este necesar a se introduce o mărime de referință și pentru energie. Se constată că este rațional a considera următoarea energie de referință :

$$E_* = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2 F^3}{k^2 f^2} = \frac{1}{2} \frac{\rho g d^2 f^2}{\lambda_e^2 F} \quad (4-2)$$

Rezultă atunci pentru energia potențială adimensională următoarea expresie extrem de simplă :

$$\mathcal{E}_p = \frac{E_p}{E_*} = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\infty)^2 = \psi^2 \quad (4-3)$$

Să calculăm și o expresie a energiei cinetice care să caracterizeze energia cinetică a mișcării oscilatorii, avînd de asemenea proprietatea de a se anula în cazul echilibrului și de a avea o valoare strict pozitivă în decursul mișcării oscilatorii.

Considerînd că o particulă de lichid de volum unitar se deplasează în decursul procesului oscilatoriu cu viteza instantanee $v = \frac{dz}{dt}$, și conform modelului de mișcare adoptat în studiul castelelor de echilibru toate punctele acestui volum unitar se deplasează cu aceeași viteză, această particulă posedă la un moment dat următoarea energie cinetică :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (4-4)$$

După cum este însă cunoscut, în studiul acestei mișcări se neglijează energia cinetică a apei din castelul de echilibru, considerîndu-se doar aceea din galeria de *aducțiune*. Deoarece însă această energie nu se anulează la încetarea procesului cvasi-oscilatoriu, căci la încetarea acestui proces se insta-

B-III-4-3

lează regimul permanent de mișcare se va considera drept energie cinetică caracteristică mișcării cvasi-oscilatorie doar o parte din această energie și anume aceea energie pe care un volum unitar de apă intrând din galerie în castel ar avea în castel chiar energia dată de (4-4).

Notînd cu w_e viteza apei din galerie stabilită pentru a caracteriza în acest mod energia procesului cvasi-oscilator și făcînd uz de ecuația de continuitate :

$$w_2 f = F \frac{dz}{dt} \quad (4-5)$$

Pentru un volum unitar de apă din galeria de aducțiune se obține următoarea energie cinetică caracteristică pentru mișcarea cvasi-oscilatorie :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{F}{f} \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (4-6)$$

Trecînd, evident, la întregul volum de apă din galeria de aducțiune :

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (4-7)$$

Se constată că expresia obținută satisface condițiile cerute de a fi strict pozitivă. Se constată de asemenea că ea reprezintă doar o parte din energia cinetică totală a apei din galeria de aducțiune, dar o parte care este caracteristică procesului cvasi-oscilator. Forma adimensională a energiei cinetice se obține utilizînd evident, aceeași mărime de referință ca și în cazul energiei potențiale și este de asemenea extrem de simplă :

$$\xi_c = \frac{E_c}{E_*} = \left(\frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 = v^2 \quad (4-8)$$

Energia totală a acestei mișcări cvasi-oscilatorii ce are loc în câmpul gravitațional este dată de suma energiei

B-III-4-4

cinetice și potențiale adică :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c = \psi^2 + \dot{\nu}^2 \quad (4-9)$$

Deoarece această funcție este pozitiv definită, iar funcția Liapunov știm că trebuie să aibă derivată în virtutea sistemului negativ definită se va considera în cele ce urmează:

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\mathcal{E} = -(\psi^2 + \dot{\nu}^2) \quad (4-10)$$

în acest fel realizându-se și o interpretare energetică.

Se scrie sub formă vectorială sistemul în primă aproximație :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (4-11)$$

în care :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\nu} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 b - 1 & a(b-1) \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

Forma pătratică (4-10) se poate exprima sub formă de produs scalar cu ajutorul matricii C :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

astfel :

$$-(\psi^2 + \dot{\nu}^2) = \langle C\vec{x}, \vec{x} \rangle = \frac{d\mathcal{V}}{dt} \quad (4-14)$$

Scriind și funcția Liapunov sub formă de produs scalar

$$\mathcal{V} = \langle B\vec{x}, \vec{x} \rangle \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

se demonstrează că matricea B este simetrică și satisface ecuația matricială :

$$A^*B + BA = C \quad (4-16)$$

în care A^* este transpusa matricii A .

În cazul de față se obține :

B-III-4-5

$$A^*B = \begin{pmatrix} 0 & a^2b-1 \\ 1 & a(b-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(a^2b+1) & b_{22}(a^2b-1) \\ b_{11}+b_{21}a(b-1) & b_{12}+b_{22}a(b-1) \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2b-1 & a(b-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}(a^2b-1) & b_{11}+b_{12}a(b-1) \\ b_{22}(a^2b-1) & b_{21}+b_{22}a(b-1) \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

Ecuatia matricială (4-16) devine atunci :

$$\begin{pmatrix} (a^2b-1)(b_{12}+b_{21}) & -b_{11}+b_{12}a(b-1)-b_{22}(a^2b-1) \\ b_{11}+b_{21}a(b-1)+b_{22}(a^2b-1) & b_{12}+b_{21}+2b_{22}a(b-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4-18)$$

Ecuația matricială de mai sus este echivalentă cu următorul sistem liniar de patru ecuații cu 4 necunoscute :

$$\begin{aligned} b_{12}(a^2b-1) + b_{21}(a^2b-1) &= -1 \\ b_{11} + b_{12}a(b-1) + b_{22}(a^2b-1) &= 0 \\ b_{11} + b_{21}a(b-1) + b_{22}(a^2b-1) &= 0 \\ b_{12} + b_{21} + 2b_{22}a(b-1) &= -1 \end{aligned} \quad (4-19)$$

Scăzând ecuațiile numărul doi și numărul trei una din alta se obține :

$$b_{12} = b_{21} \quad (4-20)$$

adică matricea B este o matrice simetrică.

Rezultă atunci din prima ecuație a sistemului :

$$b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2(1-a^2b)} \quad (4-21)$$

din a patra ecuație a sistemului

$$b_{22} = \frac{2-a^2b}{2a(1-b)(1-a^2b)} \quad (4-22)$$

și în sfârșit, din a doua sau a treia ecuație a sistemului :

P-III-4-6

$$b_{11} = \frac{2 + a^2 - 5a^2b + a^2b^2 + a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \quad (4-23)$$

Rezultă deci că matricea necunoscută B are expresia :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2+a^2-5a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} & \frac{1}{2(1-a^2b)} \\ \frac{1}{2(1-a^2b)} & \frac{1-a^2b}{2a(1-b)(1-a^2b)} \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

Cu această matrice, funcția Liapunov a micilor oscilații devine :

$$V = \frac{(1-a^2b)(2a^2b)\psi^2 + [a(1-b)\psi + \nu]^2 + (1-a^2b)\nu^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \quad (4-25)$$

Această expresie care a fost obținută pentru funcția Liapunov permite o confirmare a rezultatelor obținute pînă la acest punct, ceea ce constituie un argument în sprijinul corectitudinii expresiilor obținute.

Intr-adevăr, condițiile necesare și suficiente pentru stabilitatea asimptotică a soluției banale a sistemului de primă aproximație sînt tocmai condițiile necesare și suficiente pentru ca funcția Liapunov să fie pozitiv definită.

Or, din (4-25) rezultă evident că aceste condiții sînt:

$$\begin{aligned} a(1-b) &> 0 \\ 1-a^2b &> 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

adică tocmai condițiile obținute anterior pe altă cale.

Pînă în prezent s-au regăsit o serie de rezultate în principiu cunoscute, deduse însă prin alte metode de obicei mai puțin riguroase. În cele ce urmează se va căuta obținerea unor rezultate noi.

B-III-5-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DESCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - PROBLEME DE STABILITATE A MISCARII

CVASI - OSCILATORII

& 5.- Cîteva inegalități noi obținute în baza utilizării funcției Liapunov și în lumina rezultatelor obținute, o discuție relativă la valorile indicate în literatură pentru coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor

În paragraful anterior s-a dedus expresia funcției Liapunov pentru cazul micilor oscilații, expresie care va sta la baza obținerii unor rezultate noi.

În acest scop se amintește următoarea inegalitate importantă din teoria formelor pătratice /9-B/ :

$$-\frac{\nu}{\lambda_1} \geq -(\psi^2 + \nu^2) \geq -\frac{\nu}{\lambda_2} \quad (5-1)$$

în care λ_1, λ_2 sînt respectiv numărul propriu cel mai mic și cel mai mare al matricei B . Acestea sînt, după cum este cunoscut soluții ale ecuației caracteristice, care sub formă de determinant are expresia :

$$|B - \lambda E| = 0 \quad E = \text{matricea unitate} \quad (5-2)$$

Dezvoltînd determinantul de mai sus, se obține următoarea ecuație de gradul doi :

$$+ \frac{4 + a^2 - 6a^2b + a^2b^2 + a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \lambda + \frac{4 + a^2 - 10a^2b + a^2b^2 + 7a^4b^2 - a^2b \cdot a^4b^3 - a^6b^3}{4a^2(1-b)^2(1-a^2b)^2} \quad (5-3)$$

B-III-5-2

Deoarece termenul liber se simplifică cu factorul ecuația de mai sus se poate scrie și sub forma :

$$(1-a^2b)\lambda^2 + \frac{4+a^2-6a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{2a(1-b)}\lambda + \frac{4+a^2-6a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{4a^2(1-b)^2} = 0 \quad (5-4)$$

Cele două rădăcini sînt date de formula :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-a^2b)^2 + a^2(1-b)^2}{4a(1-b)(1-a^2b)} \left[1 \mp \sqrt{\frac{(1-b)^2 + a^2b^2}{(2-a^2b)^2 + a^2(1-b)^2}} \right] \quad (5-5)$$

Ținînd cont de modul în care a fost dedusă funcția Liapunov, inegalitățile inițiale se pot pune și sub o altă formă care să apară și derivata acestei funcții :

$$-\frac{v}{\lambda_1} \geq \frac{dv}{d\zeta} \geq -\frac{v}{\lambda_2} \Rightarrow -\frac{d\zeta}{\lambda_1} \geq \frac{dv}{v} \geq -\frac{d\zeta}{\lambda_2} \quad (5-6)$$

După cum au arătat unele cercetări proprii / / / / mișcarea oscilatorie cu amortizare pătratică se apropie mult de cea cu amortizare liniară din momentul în care nivelul apei în castelul de echilibru atinge primul nivel extrem. Din acest motiv se va integra ultima ecuație considerîndu-se la început drept moment inițial momentul ζ_1 în care este atins acest extrem :

$$v_1 e^{-\frac{\zeta-\zeta_1}{\lambda_1}} \leq v \leq v_1 e^{-\frac{\zeta-\zeta_1}{\lambda_2}} \quad (5-7)$$

Valoarea funcției Liapunov în acest moment inițial se calculează ținînd cînt că viteza de mișcare a apei în castel este nulă :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 \\ v_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow v_1 = \frac{2+a^2-5a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \psi_1^2 = k^2 \psi_1^2 = k^2 \zeta_1 \quad (5-8)$$

B-III-5-3

Utilizând acum inegalitățile (5-7) se obține ca un prim rezultat următoarea evaluare a variației în timp a energiei mișcării oscilatorii :

$$\frac{\kappa^2}{\lambda_2} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_1}{\lambda_1}} \leq \mathcal{E} \leq \frac{\kappa^2}{\lambda_1} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_1}{\lambda_2}} \quad (5-9)$$

Pe de altă parte se poate obține o evaluare a modului de evoluție în timp a nivelelor extreme scriind relația de mai sus la un moment \mathcal{E}_j corespunzător nivelului extrem Ψ_j :

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-\frac{\mathcal{E}_j-\mathcal{E}_1}{2\lambda_1}} \leq \left| \frac{\Psi_j}{\Psi_1} \right| \leq \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\frac{\mathcal{E}_j-\mathcal{E}_1}{2\lambda_2}} \quad (5-10)$$

În studiul cvasi-oscilațiilor, în special al celor cu amortizare liniară se obișnuiește /1-D/, /4-S/, /1-R/ a se caracteriza amortizarea cu ajutorul decrementului logaritmic și a factorului de amortizare.

Decrementul logaritmic se definește ca logaritmul natural al raportului a două niveluri extreme de același sens :

$$\mathcal{D} = \ln \frac{\Psi_j}{\Psi_{j+2}} \quad (5-11)$$

În cazul amortizării liniare, după cum este cunoscut decrementul logaritmic are o valoare constantă. În cazul amortizării neliniare el nu este constant, dar se apropie cu atât mai mult de o constantă cu cât amplitudinile procesului cvasi-oscilatoriu sînt mai mici. Pentru a se obține cele două limite între care acest decrement logaritmic poate să varieze se vor integra inegalitățile (5-7) în intervalul de timp $\mathcal{E} \in [\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_{j+2}]$:

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-\frac{\mathcal{E}_{j+2}-\mathcal{E}_j}{2\lambda_1}} \leq \frac{\Psi_{j+2}}{\Psi_j} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\frac{\mathcal{E}_{j+2}-\mathcal{E}_j}{2\lambda_2}} \quad (5-12)$$

D-III-5-4

Din relația de mai sus se obține decrementul logaritmic prin logaritmare :

$$\sigma_{\min} = \frac{b_{j+2} - b_j}{2\lambda_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{k^2} \leq \sigma \leq \frac{b_{j+2} - b_j}{2\lambda_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_2}{k^2} = \sigma_{\max} \quad (5-13)$$

$$b_{j+2} - b_j \cong 2\pi$$

În fine, o ultimă relație se va stabili în legătură cu factorul de amortizare. Considerând că în cazul amortizării neliniare nivelele maxime, respectiv minime se găsesc pe curbe înfășurătoare de ecuație $\pm A e^{-\alpha t}$ ca și în cazul amortizării liniare și utilizând relația care există în acest ultim caz între factorul de amortizare α și decrementul logaritmic se ajunge la :

$$\alpha = \frac{\sigma}{t_{j+2} - t_j} = \frac{\sigma}{b_{j+2} - b_j} \cdot \frac{1}{T_*} \quad (5-14)$$

Din relația de mai sus se obțin următoarele expresii limitative pentru variația factorului de amortizare :

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2T_*} \left[\frac{1}{\lambda_e} + \frac{1}{b_{j+2} - b_j} \ln \frac{\lambda_2}{k^2} \right] \leq \alpha \leq \frac{1}{2T_*} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{b_{j+2} - b_j} \ln \frac{\lambda_2}{k^2} \right] \quad (5-15)$$

În cele ce urmează se va face, în baza rezultatelor obținute pînă în prezent în acest punct, o discuție referitoare la valorile indicate în literatura de specialitate pentru coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor, notat „n”.

Coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor se definește ca raportul între secțiunea transversală adoptată a castelului de echilibru și secțiunea transversală care rezultă prin aplicarea formulei Thoma, considerată a fi în condiții normale secțiunea minimă care separă domeniul de stabilitate de cel de instabilitate al oscilațiilor.

În discuția care urmează este necesar a pune în evidență în primul rînd dependența mărimilor de referință dimensionale utilizate ca și a parametrilor adimensionali de acest coeficient

B-III-5-5

de stabilitate.

Valorile calculate prin utilizarea în formule a secțiunii Thoma vor fi scrise în cele ce urmează cu indicele Th :

$$\begin{aligned} Z_* &= \frac{1}{n} Z_{*Th} \\ T_* &= \sqrt{n} T_{*Th} \\ \chi &= n \chi_{Th} \\ \beta &= \sqrt{n} \beta_{Th} \end{aligned} \quad (5-16)$$

În plus se face observația că se pot face următoarele aproximări, bazate pe cele menționate anterior referitor la faptul că, din considerente tehnico-economice evidente valoarea mărimii $|z_\infty|$ reprezentând pierderea de sarcină în regim permanent trebuie să fie cu mult mai mică decât sarcina H a centralei :

$$\begin{aligned} Z_{*Th} &= \frac{df}{\lambda e F_{Th}} = H + z_\infty \cong H \\ \chi_{Th} &= \frac{H}{Z_{*Th}} \cong 1 \\ a &\cong \sqrt{n} \beta_{Th}, \quad b \cong n \\ \lambda_{1,2} &\cong \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \beta_{Th}} = \frac{1}{2} \quad k^2 \cong \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \beta_{Th}} \end{aligned} \quad (5-17)$$

$$\ln \left[1 \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \beta_{Th} \right] \cong \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \beta_{Th}$$

Pe de altă parte, după Jaeger /1-J/ avem și următoarea relație (transcrisă în variabilele adimensionale utilizate în cadrul prezentei teze :

$$\tau_{j+2} - \tau_j \cong 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \quad (5-18)$$

B-III-5-6

Utilizând aproximațiile de mai sus care introduc evident erori nesemnificative, se obține în final următoarea evaluare a decrementului logaritmic :

$$d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$$

$$d_{\min} \cong \frac{2\sqrt{I}}{\sqrt{1-\beta_{Th}^2} \frac{(n+1)^2}{n}} \frac{(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}}{2+(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}} - \frac{1}{4}(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}$$

(5-19)

$$d_{\max} \cong \frac{2\sqrt{I}}{\sqrt{1-\beta_{Th}^2} \frac{(n+1)^2}{n}} \frac{(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}}{2-(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}} + \frac{1}{4}(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}$$

Relațiile la care s-a ajuns permit o comperație cu rezultatele obținute de Jaeger /1-J/, care, utilizând în esență un procedeu de liniarizare, ajunge la următoarea expresie explicită a decrementului logaritmic :

$$d_J = 2\sqrt{I} p_{o1} (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \frac{1}{\sqrt{1-p_{o1}^2} \frac{(n+1)^2}{n}} \quad (5-20)$$

Legătura dintre parametrul p_{o1} din formula de mai sus și parametrul β_{Th} din prezenta lucrare este :

$$p_{o1} = \frac{-z_o}{\omega_o \sqrt{\frac{LF}{gF_{Th}}}} = \frac{P_f N}{\gamma \eta H_f} \sqrt{\frac{F_{Th}}{Lg f}} = \beta_{Th} \quad (5-21)$$

După cum arată chiar autorul respectivei lucrări, măsurătorile efectuate în amenajări și pe modele au condus la concluzia că formula nu este acoperitoare, fără însă a se da valori numerice concrete. Cu alte cuvinte înseamnă că valoarea calculată cu formula (5-20) a decrementului logaritmic a fost mai mare decît cea efectiv măsurată sau reciproc introducînd în formula (5-20) valoarea măsurată a decrementului logaritmic rezultă pentru coeficientul de siguranță o valoare mai mică.

B-III-5-7

În lucrarea citată se mai menționează că diferențele obținute sînt mai mari la sarcini parțiale.

Așa cum va rezulta din cele ce urmează această neconcordanță se justifică și din punct de vedere teoretic pe baza rezultatelor obținute în prezenta lucrare.

Intr-adevăr, ar trebui să fie satisfăcută condiția :

$$\sigma_J \leq \sigma_{max} \quad (5-22)$$

care conduce după simplificările de rigoare la :

$$1 \leq \frac{1}{2 - (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})\beta_{Th}} + \frac{1}{8\sqrt{1 - \beta_{Th}^2}} \sqrt{1 - \beta_{Th}^2} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \quad (5-23)$$

Cu erori acceptabile, inegalitatea de mai sus conduce la :

$$2 \geq \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{n}}{n-1} \geq \beta_{Th} \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \quad (5-24)$$

La valori ale lui β_{Th} care satisfac inegalitățile de mai sus formula Jaeger (5-20) nu mai este aplicabilă deoarece cantitatea care apare în această formulă sub semnul radicalului devine negativă.

Rezultă că în general $\sigma_J > \sigma_{max}$ ceea ce este eronat, diferența între σ_J și σ_{max} crescînd cu scăderea lui β_{Th} . Din punct de vedere fizic această scădere a lui β_{Th} corespunde teoriei la sarcini parțiale, justificîndu-se astfel și din punct de vedere teoretic constatările experimentale ale lui Jaeger.

În cele ce urmează se face o comparație a rezultatelor numerice obținute prin utilizarea formulelor analizate. Astfel în lucrarea /1-J/, cercetătorul Jaeger dă ca exemplu o instala-

B-III-5-8

ție avînd următorii parametrii caracteristici :

$$L = 5900\text{m}, f = 17,25\text{m}^2, F_{Th} = 18,9\text{m}^2, Q = 40\text{m}^3/\Delta, H = 247\text{m}, p_{oi} = 0,1102$$

Rezultatele comparative referitoare la legătura dintre coeficientul de stabilitate la oscilații și decrementul logaritmîc sînt date în tabela de mai jos :

TABEL Nr. 1. (73)

n	σ_J	σ_{min}	σ_{max}	σ_J/σ_{max}
1	0	0	0	-
15	0,293	0,132	0,160	1,83
2	0,501	0,222	0,281	1,78
3	0,824	0,348	0,472	1,74

Din acest exemplu se constată că valorile decrementului logaritmîc obținute prin utilizarea formulei Jaeger sînt mult mai mari decît cele maxime obținute prin utilizarea funcției Liapunov de aceea este de așteptat ca ele să nu se verifice experimental.

B-III-6-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DISCHIDEREA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - PROBLEME DE STABILITATE A MISCARII

CVASI - OSCILATORII

& 6.- Cercetări privind stabilitatea bazate pe teoriaPoincare - Bendixon

(cazul marilor oscilații)

În § 2 al acestui capitol, s-a enunțat în partea finală o teoremă rezultată din utilizarea teoremei lui Poincaré - [7-4] Bendixon ; legată de studiul ecuației de ordinul doi de forma :

$$\ddot{u} + h(u, \dot{u})\dot{u} + g(u) = 0 \quad (6-1)$$

echivalenta cu sistemul autonom de ordinul întâi :

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ v' = -h(u, v)v - g(u) \end{cases} \quad (6-2)$$

În cazul concret al castelelor de echilibru simple ecuația diferențială de ordinul doi, reprezentând modelul matematic al mișcării este sub formă adimensională :

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left[\frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2} \right] \frac{d\xi}{d\tau} + \xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi}{x})^2} = 0 \quad (6-3)$$

Se observă că ecuația de mai sus este de tipul (6-1) și ea conduce la sistemul echivalent :

$$\begin{cases} \xi = v \\ v' = - \left[\frac{1}{2} |v| + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2} \right] v - \xi - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi}{x})^2} \end{cases} \quad (6-4)$$

B-III-6-2

În cele ce urmează se face studiul acestui sistem pe baza teoremei enunțate anterior. O primă condiție necesară pentru utilizarea teoremei este ca funcțiile $h(\xi, \nu)$ și $g(\xi)$ să fie funcții continue reale definite pe întreaga mulțime a numerelor reale. Se constată că funcțiile respective care apar în cazul castelelor de echilibru simple :

$$h(\xi, \nu) = \frac{1}{2} |\nu| + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2}$$

$$g(\xi) = \xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi}{x})^2} \tag{6-5}$$

sînt funcții continue, definite pe mulțimea numerelor reale mai puțin punctul $\xi = -x$. Din punct de vedere fizic, această valoare nu poate apărea căci, în variabile dimensionale, ea înseamnă $z = H$. Pentru a ocoli această dificultate matematică se vor înlocui funcțiile h și g prin funcțiile h_* și g_* care să satisfacă condiția continuității pe întreaga mulțime a numerelor reale :

$$h_*(\xi, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{2} |\nu| + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2} & \text{pentru } \xi \in \mathbb{R} - [-x - \varepsilon, -x + \varepsilon] \\ \frac{1}{2} |\nu| + \frac{\beta x}{\varepsilon^2} (\xi + x) - \frac{\beta x}{\varepsilon^2} & \text{pentru } \xi \in [-x - \varepsilon, -x + \varepsilon] \end{cases} \tag{6-6}$$

$$g_*(\xi) = \begin{cases} \xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{(1 + \frac{\xi}{x})^2} & \text{pentru } \xi \in \mathbb{R} - [-x - \varepsilon, -x + \varepsilon] \\ \xi + \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon^2} & \text{pentru } \xi \in [-x - \varepsilon, -x + \varepsilon] \end{cases} \tag{6-7}$$

B-III-6-3

În relațiile de mai sus ε este o constantă strict pozitivă, arbitrar de mică.

Se verifică cu ușurință faptul că funcțiile h_* și g_* sînt continue pe întreaga mulțime a numerelor reale, această verificare făcîndu-se doar în punctele $(-x-\varepsilon)$ și $(-x+\varepsilon)$ în care această problemă se pune. Din punct de vedere fizic aceasta înlocuire a funcțiilor este admisă deoarece, pe de o parte nu se ajunge cu valorile reale ξ la aceste puncte, iar pe de altă parte se are în vedere faptul că valoarea constantei ε poate fi luată oricît de mică.

Intrucît soluția sistemului este unic determinată de condițiile inițiale se analizează în continuare satisfacerea ipotezei II a teoremei menționate. Aceasta cere existența unui număr $a > 0$ astfel încît să fie satisfăcute relațiile :

$$\begin{aligned} \xi g_*(\xi) > 0 & \text{ pentru } |\xi| \geq 0 \\ G(\xi) = \int_0^\xi g_*(r) dr \rightarrow \infty & \text{ pentru } |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6-8)$$

Se formează expresia cerută :

$$\xi g_*(\xi) = \begin{cases} \xi^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\xi}{\left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^2} & \text{pentru } \xi \in \mathbb{R} \setminus [-x-\varepsilon, -x+\varepsilon] \\ \xi^2 + \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon^2} \xi & \text{pentru } \xi \in [-x-\varepsilon, -x+\varepsilon] \end{cases} \quad (6-9)$$

Avînd în vedere că ecuația :

$$\xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^2} = 0 \quad (6-10)$$

are ca soluție $\xi = \xi_\infty < 0$ și că din condiții fizice evidente are loc inegalitatea :

$$x + \varepsilon > -\xi_\infty \quad (6-11)$$

B-III-6-4

rezultă că pentru ca $\xi g_*(\xi) > 0$ atunci când $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-x-\varepsilon, -x+\varepsilon]$ drept număr "a" se poate lua orice număr mai mare decât $x+\varepsilon$ adică $0 = x + \varepsilon + \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$

Pentru ca să avem și $\xi g_*(\xi) > 0$ atunci când $\xi \in [-x-\varepsilon, -x+\varepsilon]$ este necesar evident să fie satisfăcute următoarele inegalități, reprezentând condiționări impuse celor două constante pozitive ε și ε' pînă aici arbitrare :

$$\varepsilon' > \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon^2} - x - \varepsilon > 0 \tag{6-12}$$

Trecînd la partea doua a condiției (6-8) trebuiește calculată funcția $Q(\xi)$. Avînd în vedere modul în care s-a definit funcția g_* se vor distinge două cazuri, unul în care $\xi \rightarrow \infty$ și altul în care $\xi \rightarrow -\infty$

In primul caz se obține :

$$G(\xi) = \int_0^\xi g_*(\xi) d\xi = \int_0^\xi \left[\xi + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^2} \right] d\xi = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\beta^2 x}{2} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{x}} + \frac{\beta^2 x}{2} \tag{6-13}$$

Se constată că este satisfăcută condiția cerută de teoremă:

$$\xi \rightarrow \infty \implies G(\xi) \rightarrow \infty \tag{6-14}$$

In al doilea caz se obține :

$$G(\xi) = \int_0^\xi g_*(\xi) d\xi = \int_0^{-x+\varepsilon} g_*(\xi) d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{-x-\varepsilon} g_*(\xi) d\xi + \int_{-x-\varepsilon}^\xi g_*(\xi) d\xi \tag{6-15}$$

Efectuînd calculele se obțin următoarele valori pentru integralele care apar mai sus :

$$\int_0^{-x+\varepsilon} g_*(\xi) d\xi = \frac{(-x+\varepsilon)^2}{2} - \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon} + \frac{\beta^2 x}{2}$$

$$\int_{-x+\varepsilon}^{-x-\varepsilon} g_*(\xi) d\xi = \frac{(-x-\varepsilon)^2}{2} - \frac{(-x+\varepsilon)^2}{2} + \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon^2} (-x-\varepsilon) - \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon^2} (-x+\varepsilon) = 2\varepsilon - \frac{\beta^2 x^2}{\varepsilon} \tag{6-16}$$

$$\int_{-x-\varepsilon}^\xi g_*(\xi) d\xi = \frac{\xi^2}{2} - \frac{(-x+\varepsilon)^2}{2} - \frac{\beta^2 x}{2} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta^2 x^2}{2\varepsilon}$$

B-III-6-5

Rezultă în final că și în acest caz este satisfăcută condiția II cerută de teoremă :

$$G(\xi) = \frac{\xi}{2} - \frac{\beta x}{2} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{x}} + \frac{\beta^2 x}{2} = 2 \frac{\beta^2 x^2}{2} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \infty \quad (6-17)$$

Trecînd la condiția III a teoremei, aceasta cere existența unui număr $m > 0$ astfel încît :

$$|\xi| \leq a = x + \varepsilon + \varepsilon^2, \quad -\infty < \nu < \infty \implies h_*(\xi, \nu) \geq -m \quad (6-18)$$

Se constată imediat că această condiție este îndeplinită pentru

$$m = -h_*(-x - \varepsilon, \frac{1}{2}(\nu)) = \frac{\beta x}{\varepsilon} + \frac{\beta x}{\varepsilon^2} \quad (6-19)$$

În sfîrșit, condiția IV a teoremei enunționate cere să fie satisfăcute implicațiile :

$$h_0(\xi) = \inf_{-\infty < \nu < \infty} h_*(\xi, \nu) \implies h_0(\xi) > 0 \text{ pentru } |\xi| \geq 0$$

$$H(\xi) = \int_0^\xi h_0(\xi) d\xi \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \infty \quad (6-20)$$

Se observă că pentru $|\xi| \geq 0 = x + \varepsilon + \varepsilon^2$ avem :

$$h_0(\xi) = \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2} \quad (6-21)$$

Condiția impusă în prima parte a condiției IV cere ca :

$$\frac{1}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{1}{x(1 + \frac{\xi}{x})^2} > 0 \iff x(1 + \frac{\xi}{x}) - 1 > 0 \quad (6-22)$$

sau, ceea ce este echivalent :

$$x + \xi > 1 \iff z > Z_* - H \iff F > \frac{df}{\lambda_0(H+z)} \quad (6-23)$$

Se constată ca dacă se consideră în expresia de mai sus $z = z_\infty$ se obține chiar condiția Thoma :

B-III-5-6

$$F > F_{Th} = \frac{df}{\lambda e^{(H+Z_{\infty})}} \quad (6-24)$$

Din cele de mai sus rezultă însă să această condiție Thoma ar putea în unele cazuri să nu fie acoperitoare. Într-adevăr, în conformitate cu cele de pînă aici ar trebui pentru deplină siguranță să se ia pentru z valoarea minimă atinsă în castel la deschiderea bruscă z_{min} adică condiția ar trebui să fie scrisă :

$$F > F_A = \frac{df}{\lambda e^{(H+z_{min})}} \quad (6-25)$$

Evident, saltul minim în castel se poate explicita în funcție de z_{∞} pe baza formulelor aproximative existente.

Astfel în lucrarea /B-A/ am propus următoarea formulă aproximativă pentru determinarea saltului minim :

$$z_{min} = z_{\infty} - \frac{Z * \sqrt{-2 \xi_{\infty}}}{1 + 0,35 \sqrt{-2 \xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} \quad (6-26)$$

În lucrarea citată s-a arătat că pentru $\xi_{\infty} = -1$ se obține :

$$\max \frac{\sqrt{-2 \xi_{\infty}}}{1 + 0,35 \sqrt{-2 \xi_{\infty}} - \xi_{\infty}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + 0,33\sqrt{2}} \approx 0,565 \quad (6-27)$$

Rezultă atunci, în mod acoperitor :

$$F \geq F_A = \frac{df}{\lambda e^{(H+z_{\infty} - 0,565 Z *)}} = \frac{df}{\lambda e^{(H+z_{\infty} - 0,565 \frac{df}{\lambda e^F})}} \quad (6-28)$$

Păcind o paranteză este interesant ce semnalat faptul că și alți cercetători au considerat că în cazul în care studiul stabilității se face pe ecuația neliniarizată, ceea ce este

D-III-6-7

interpretat din punct de vedere fizic a fi cazul marilor oscilații, se obține pentru aria transversală a castelului o condiție mai restrictivă decât condiția lui Thoma.

Astfel în lucrarea /1-J pg.240/, în urma unui studiu principial diferit de cel de față se ajunge la următoarea relație, recomandată de respectivul autor :

$$n = \frac{F}{F_{Th}} \geq 1 + 0,482 \frac{Z^*}{H+z_0} \quad (6-29)$$

Autorul respectiv demonstrează pe această cale că valorile recomandată de H.Schüller și $n > 2 + 3$ recomandată de K.Aaras sînt exagerate.

Prelucrînd în aceeași manieră relația (6-28) se ajunge la :

$$n = \frac{F}{F_{Th}} \geq \frac{F_A}{F_{Th}} = \frac{1}{1 - 0,565 \frac{Z^*}{H+z_\infty}} \quad (6-30)$$

Valoarea z_∞ din formula (6-30) este valoarea z_0 din formula (6-29).

Tinînd cont de faptul că termenul $0,565 \frac{Z^*}{H+z_\infty}$ este în mod normal mult mai mic decât unitatea se poate utiliza formula aproximativă :

$$\frac{1}{1 - 0,565 \frac{Z^*}{H+z_\infty}} \cong 1 + 0,6 \frac{Z^*}{H+z_\infty} \quad (6-31)$$

Cu această relația (6-30) devine :

$$n = \frac{F}{F_{Th}} \geq \frac{F_A}{F_{Th}} = 1 + 0,6 \frac{Z^*}{H+z_\infty} \quad (6-32)$$

Relația de mai sus prezintă o concordanță mulțumitoare cu relația Jaeger, fiind însă mai apropiată de valorile recomandate de ceilalți doi cercetători menționați.

B-III-6-8

Se menționează că relația (6-28) se poate prelucra și în alt mod, explicitând secțiunea castelului de echilibru F :

$$H + z_{\infty} - 1,565 \frac{df}{\lambda_e F} > 0 \Rightarrow F \geq F_A \cong 1,6 \frac{df}{\lambda_e (H+z_{\infty})} = 1,6 F_{Th} \quad (6-33)$$

Cu alte cuvinte rezultatul obținut exprimă faptul că în cazul în care oscilațiile nu pot fi considerate mici ci trebuie să fie considerate mari secțiunea Thoma nu este suficientă ci este necesar să se adopte o secțiune mărită cu circa 60 %, notată în lucrare cu

Rezultă atunci că este suficient să se adopte un coeficient de siguranță $n = 1,6$:

$$n = \frac{F}{F_{Th}} \geq \frac{F_A}{F_{Th}} \cong 1,6 \quad (6-34)$$

Fiind obținută pe o cale destul de riguroasă se recomandă utilizarea în practică a valorii acestui coeficient de siguranță.

Incheind aici paranteza deschisă anterior și revenind la partea a doua a condiției IV se constată că și ea este îndeplinită. Se vor avea și aici în vedere două cazuri și anume în primul caz în care se consideră $\xi \rightarrow +\infty$:

$$H(\xi) = \int_a^{\xi} h_0(\xi) d\xi = \beta x \ln\left(1 + \frac{\xi}{x}\right) + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{1 + \frac{a}{x}} \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{+ \infty} \quad (6-35)$$

În cazul al doilea în care $\xi \rightarrow -\infty$ se obține :

$$H(\xi) = \int_a^{-x+\varepsilon} h_0(\xi) d\xi + \int_{-x+\varepsilon}^{-x-\varepsilon} h_0(\xi) d\xi + \int_{-x-\varepsilon}^{\xi} h_0(\xi) d\xi \quad (6-36)$$

Calculînd integralele care intervine în expresia de mai sus :

$$\int_a^{-x+\varepsilon} h_0(\xi) d\xi = \beta x \ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) - \beta x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{\beta x}{\varepsilon} - \frac{\beta}{1 + \frac{a}{x}} \quad (6-37)$$

$$\int_{-x+\varepsilon}^{-x-\varepsilon} h_0(\xi) d\xi = \frac{\beta x^2}{\varepsilon} - \frac{2\beta x}{\varepsilon}$$

B-III-6-9

$$\int_{-x-\varepsilon}^{\xi} h_0(\xi) d\xi = \beta x \ln \left| 1 + \frac{\xi}{x} \right| - \beta x \ln \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} + \frac{\beta x}{\varepsilon}$$

Rezultă atunci în cazul al doilea :

$$H(\xi) = \beta x \ln \left| 1 + \frac{\xi}{x} \right| - \beta x \ln \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right) + \frac{\beta}{1 + \frac{\xi}{x}} - \frac{\beta}{1 + \frac{\alpha}{x}} \quad \xi \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty \quad (6-38)$$

Cu aceasta ipotezele teoremei sînt satisfăcute și în consecință mișcarea cvasi-oscilatorie este stabilă.

În concluzia acestui paragraf rezultă că, utilizînd o teoremă avînd la bază teoria Poincaré-Bendixon s-a obținut un criteriu de stabilitate la mari oscilații care, avînd în vedere modul în care a fost obținut și concordanța cu alte rezultate se recomandă a fi utilizat în practică.

B-III-7-1

PARTEA INTII B - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE.

DESCHIDERA TOTALA RAPIDA

Capitolul III - PROBLEME DE STABILITATE A MISCARII

CVASI - OSCILATORII

& 7.- Asupra unui criteriu care permite delimitarea domeniului micilor oscilațiuni

In paragrafele anterioare ale acestui capitol s-a cercetat stabilitatea castelelor de echilibru simple la micile oscilații prin metoda uzuală a liniarizării și a cercetării stabilității sistemului de primă aproximație rezultat prin metoda funcției lui Liapunov. De asemenea s-a cercetat stabilitatea la mari oscilații prin utilizarea unei teoreme rezultată din teoria lui Poincare-Bendixon. La fiecare din aceste cazuri s-au găsit unele lucruri cunoscute și s-au obținut și unele rezultate noi. In urma acestor cercetări apare necesar a se da un criteriu, cel puțin orientativ, care să permită a preciza în care caz avem de-a face cu mici oscilații și în care caz cu mari oscilații.

Se vor introduce următoarele notații utilizate în lucrarea /P-P/ care va fi folosită în acest caz. Fie sistemul normal autonom :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7-1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

sau sub formă vectorială :

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) \quad (7-2)$$

B-III-7-2

Spre deosebire de lucrarea citată s-au plasat indicii în partea de jos a literelor pentru a nu fi confundați cu exponenții.

Se presupune că funcțiile f_i sînt continue și cu derivate parțiale de primul ordin continue într-un domeniu deschis Δ al variabilelor x_1, x_2, \dots, x_n .

Fie acum :
$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \quad (7-3)$$

poziția de echilibru a sistemului perturbat. Se știe că întotdeauna se poate face trecerea la sistemul perturbat la care poziția de echilibru este reprezentată de soluția banală.

Sistemul (7-1) se poate scrie atunci prin dezvoltare în serie Mc.Laurin, în jurul poziției de echilibru :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{0}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{0})}{\partial x_j} \Delta x_j + R_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7-4)$$

în care R_i sînt termeni de gradul doi în raport cu diferențialele.

Deoarece soluția banală este o soluție de echilibru a sistemului există relațiile :

$$\begin{aligned} f_i(\vec{0}) &= 0 \\ \Delta x_j &= x_j \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7-5)$$

Notînd încă :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(\vec{0})}{\partial x_j} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7-6)$$

sistemul (7-4) poate fi pus sub forma :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7-7)$$

în care :

$$R_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\vec{\theta x})}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (7-8)$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

B-III-7-3

Se poate enunța atunci teorema de stabilitate a lui Liapunov sub următoarea formă /9-P pg.222/ :

dacă toate valorile proprii ale matricii $A = (a_{ij})$ au părțile lor reale negative, poziția de echilibru a sistemului este asimptotic stabilă ; mai precis, există un număr pozitiv γ atât de mic încât :

$$|\vec{\xi}| < \gamma \implies |\varphi(t, \vec{\xi})| \leq \gamma |\vec{\xi}| e^{-\alpha t} \quad (7-9)$$

unde γ și α sînt numere pozitive independente de $\vec{\xi}$, iar este o funcție vectorială de variabila scalară t și de variabila vectorială $\vec{\xi}$ care este soluția ecuației (7-2) pentru valorile inițiale :

$$t = 0, \quad \vec{x} = \vec{\xi} \quad (7-10)$$

verificînd condiția :

$$\varphi(0, \vec{\xi}) = \vec{\xi} \quad (7-11)$$

Important este faptul că în demonstrarea teoremei se dau și indicații referitoare la determinarea constantelor numerice pozitive γ, r, α . Constanta γ determină de fapt domeniul în care este asigurată stabilitatea soluției studiate, la valori $|\vec{\xi}| > \gamma$, nu știm dacă soluția este sau nu stabilă.

După această succintă prezentare generală se trece la studiul stabilității cvasi-oscilațiilor din castelul de echilibru. După cum s-a arătat anterior în acest caz sistemul de ecuații, în variabilele adimensionale obișnuite utilizate în teză are forma de mai jos :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nu \\ \frac{d\nu}{d\tau} = -\psi - \xi_{\infty} - \frac{1}{2} |\nu| \nu - \frac{\beta}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{\alpha}} \left[1 - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{\alpha}} \right] \nu - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{\alpha}\right)^2} \end{cases} \quad (7-12)$$

B-III-7-4

Se calculează expresiile auxiliare necesare pentru aducerea sistemului la forma corespunzătoare teoriei generale:

$$x_1 = \psi$$

$$x_2 = \nu$$

(7-13)

$$f_1(x_1, x_2) = \nu$$

$$f_2(x_1, x_2) = \psi - \xi_{\infty} - \frac{1}{2} |\nu| \nu - \frac{\beta}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}} \right] \nu - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} = 0$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 + \frac{\beta^2}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^3} + \frac{\beta}{x \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{x \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right] \nu$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -|\nu| - \frac{\beta}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}} \right]$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1} = -1 + \frac{\beta^2}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_{\infty}}{x}\right)^3}$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} = -\frac{\beta}{1 + \frac{\xi_{\infty}}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{\xi_{\infty}}{x}} \right]$$

B-III-7-5

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} = \frac{3\beta^2}{x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^4} - \frac{2\beta}{x^2 \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^3} \left[1 - \frac{3}{x \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right] \psi$$

$$\frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x^2} = - \frac{3\beta^2}{x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^4} - \frac{2\beta}{x^2 \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^3} \left[- \frac{3}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right] \theta \psi$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\beta}{x \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^2} \left[1 + \frac{2}{x \left(1 + \frac{\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\beta}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = - \frac{|\psi|}{\psi}$$

$$\frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_2^2} = - \frac{|\theta\psi|}{\theta\psi} = - \frac{|\psi|}{\psi}$$

$$R_1 = 0$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_1^2} \psi^2 + \frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \psi \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(\theta x_1, \theta x_2)}{\partial x_2^2} \psi^2$$

$$R_2 = - \frac{3\beta^2}{2x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^4} \psi^2 - \frac{\beta}{x^2 \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^3} \left[1 - \frac{3}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right] \theta \psi^2 \psi +$$

$$+ \frac{\beta}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{x \left(1 + \frac{\theta\psi + \xi_{\infty}}{x}\right)} \right] \psi \psi - \frac{1}{2} \psi |\psi|$$

B-III-7-6

Se vor face următoarele notații cu scopul de a simplifica formal scrierea relațiilor :

$$a = \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \frac{\xi_{\infty}}{\alpha}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\xi_{\infty}}{\alpha}} \quad (7-14)$$

Fie $v(\bar{x})$ funcția Liapunov a sistemului liniarizat de primă aproximație, determinată în paragrafele anterioare :

$$v = \frac{(1-a^2b)(2-a^2b)\psi^2 + [a(1-b)\psi + \nu]^2 + (1-a^2b)\nu^2}{2a(1-b)(1-a^2b)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{(1-a^2b)(2-a^2b)\psi + a(1-b)[a(1-b)\psi + \nu]}{a(1-b)(1-a^2b)} \quad (7-15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{a(1-b)\psi + \nu + (1-a^2b)\nu}{a(1-b)(1-a^2b)}$$

Calculând derivata în raport cu timpul în virtutea sistemului neliniarizat (7-7) :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i = -(\psi^2 + \nu^2) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \quad (7-16)$$

Se știe că pentru o formă pătratică de forma :

$$E = A x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 \quad (7-17)$$

valorile proprii sînt soluții ale ecuației :

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7-18)$$

Notînd cea mai mică rădăcină cu λ_1 și cu λ_2 cea mai mare rădăcină s-a obținut, considerînd drept formă pătratică tocmai funcția lui Liapunov (7-15) :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-a^2b)^2 + a^2(1-b)^2}{4a(1-b)(1-a^2b)} \left[1 + a \sqrt{\frac{(1-b)^2 + a^2b^2}{(2-a^2b)^2 + a^2(1-b)^2}} \right] \quad (7-19)$$

Se știe că /9-B pg.79/ o matrice simetrică reală generală poate fi redusă la forma diagonală cu ajutorul unei transformări liniare ortogonale. În urma acestei transformări forma

B-III-7-7

pătratică devine :

$$E = A x_1^2 + 2 B x_1 x_2 + C x_2^2 = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 \quad (7-20)$$

in care λ_1, λ_2 sînt rădăcinile caracteristice de mai sus iar ξ_1, ξ_2 vectorii proprii normalizați asociați celor două rădăcini caracteristice.

Pe de altă parte /3-F, pg.144/ se știe că principala caracteristică a unei transformări liniare ortogonale este că păstrează produsul scalar adică :

$$x_1^2 + x_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \quad (7-21)$$

Cele de mai sus constituie demonstrația următoarei cunoscute inegalități din teoria formelor pătratice :

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) = \lambda_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq E \leq \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2) = \lambda_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad (7-23)$$

Din inegalitatea de mai sus aplicată în cazul funcției Liapunov rezultă :

$$-(\psi^2 + \nu^2) \leq -\frac{1}{\lambda_2} \nu \quad (7-24)$$

Introducînd inegalitatea de mai sus, egalitatea (7-16) devine :

$$\frac{d\nu}{dt} \leq -\frac{1}{\lambda_2} \nu + \frac{\partial \nu}{\partial \nu} R_2 \quad (7-25)$$

Se pune problema stabilirii domeniului Δ_1 în care iau valori variabile ψ și ν . Avînd în vedere interpretările energetice ale termenilor apare rațional de a se alege drept domeniu de variație :

$$\Delta_1 = \left\{ \psi^2 + \nu^2 \leq \psi_1^2 \right\}$$

adică se consideră că energia maximă a sistemului este cea corespunzătoare primului nivel minim și că în continuare energia sistemului scade sau rămîne cel mult constantă.

În acest caz rezultă că în domeniul Δ_1 va fi satisfăcută inegalitatea :

B-III-7-8

$$v \leq \lambda_2 \psi_1^2, \quad \psi_1 < 0 \tag{7-26}$$

Se impune a găsi o inegalitate similară și pentru funcția R_2 :

Pentru aceasta se vor face câteva majorări a căror justificare este evidentă :

$$|R_2| < \left\{ \frac{3\beta^2}{2x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\psi_1 + \xi_\infty}{x}\right)^4} + \frac{\beta}{x^2 \left(1 + \frac{\psi_1 + \xi_\infty}{x}\right)^3} \left[1 - \frac{3}{x \left(1 + \frac{\psi_1 + \xi_\infty}{x}\right)} \right] \right\} \psi^2 + \tag{7-27}$$

$$+ \frac{\beta}{x \left(1 + \frac{\psi_1 + \xi_\infty}{x}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{x \left(1 + \frac{\psi_1 + \xi_\infty}{x}\right)} \right] v\psi + \frac{1}{2} v^2$$

Avînd în vedere valoarea în general foarte mică a parametrului adimensional β ($\beta \ll 1$) și valoarea foarte mare a parametrului adimensional x ($x \gg 1$) rezultă :

$$|R_2| \leq \frac{1}{2} (\psi^2 + v^2) \leq \frac{1}{2\lambda_1} v \tag{7-28}$$

Din inegalitățile (7-20) rezultă și inegalitățile :

$$|\psi| \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \quad ; \quad |v| \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \tag{7-29}$$

Tinînd seama de inegalitățile de mai sus rezultă și :

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \psi} \right| \leq \frac{(1-a^2b)(2-a^2b) + a(1-b)[a(1-b)+1]}{a(1-b)(1-a^2b)} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \cong \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \tag{7-30}$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial v} \right| \leq \frac{a(1-b) + 1 + (1-a^2b)}{a(1-b)(1-a^2b)} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \cong \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v}$$

Rezultă deci că pentru v satisfăcînd relația (7-26) există inegalitatea :

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leq \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} v} \frac{1}{2\lambda_1} v = \frac{1}{a} \lambda_1^{-\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}} \tag{7-31}$$

B-III-7-9

Se alege acum un număr pozitiv astfel încât să satisfacă inegalitățile :

$$c \leq \lambda_2 \psi_1^2 ; \quad \frac{1}{\alpha} \lambda_1^{-3/2} \sqrt{c^3} \leq \frac{1}{2\lambda_2} \iff c \leq \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 \lambda_1^3}{4\lambda_2^2}} \quad (7-32)$$

sau, altfel exprimat :

$$c = \min \left\{ \lambda_2 \psi_1^2, \lambda_1 \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{4\lambda_2^2}} \right\} \quad (7-33)$$

Rezultă că dacă este satisfăcută inegalitatea :

$$v \leq c \quad (7-34)$$

este satisfăcută și inegalitatea :

$$\frac{dv}{dt} \leq -\frac{1}{2\lambda_2} v \quad (7-35)$$

Se demonstrează atunci, referindu-ne la enunțul teoremei că se obțin pentru constantele care apar în această teoremă valorile :

$$v = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}} ; \quad \gamma = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} ; \quad \alpha = \frac{1}{4\lambda_2} \quad (7-36)$$

Se va încerca în cele ce urmează obținerea unor rezultate mai utile.

Astfel din faptul că trebuie satisfăcută condiția :

$$\sqrt{\psi^2 + v^2} \leq \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}} \quad (7-37)$$

și avînd în vedere considerațiile energetice anterioare rezultă că :

$$\psi_1^2 \leq \frac{c}{\lambda_2} \quad (7-38)$$

Relația de mai sus împreună cu relația (7-33) permit precizarea constantei c :

$$c = \lambda_2 \psi_1^2 \quad (7-39)$$

și în plus rezultă următoarea interesantă relație de condiție :

B-III-7-1c

$$\lambda_2 \psi_1^2 = \lambda_1 \sqrt[3]{\frac{a^2}{4\lambda_2^2}} \implies -\psi_1 \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \sqrt[3]{\frac{a}{2\lambda_2}} = \sqrt[6]{\frac{a^2 \lambda_1^2}{4\lambda_2^3}} \quad (7-40)$$

Considerind și aproximațiile de mai jos :

$$\begin{aligned} \psi_1 &\approx -\sqrt{-2\zeta_\infty} \\ a &\approx \beta \\ \lambda_1 &\approx \frac{1}{a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &\approx \frac{1}{a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (7-41)$$

relația de condiție (7-40) devine :

$$-2\zeta_\infty \leq \sqrt{\frac{\beta^2 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\right)^3}{4 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}\right)^3}} \iff -2\zeta_\infty \leq \frac{(2-\beta)\beta}{2+\beta} \sqrt[3]{\frac{\beta}{(2+\beta)^2}} \quad (7-42)$$

Pe de altă parte s-a arătat anterior că între parametrii

ζ_∞ și β există relația aproximativă :

$$\beta \approx \sqrt{-2\zeta_\infty} \quad (7-43)$$

Inlocuind în relația (7-42) aceasta din urmă devine prin ridicare la puterea treia :

$$(2+\beta)\beta \leq \left(\frac{2-\beta}{2+\beta}\right)^{3/2} \quad (7-43)$$

Aplicind din nou formulele de aproximare inegalitatea de mai sus poate fi înlocuită cu :

$$(2+\beta)\beta \leq \left(\frac{1 - \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{\beta}{2}}\right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\beta + \beta^2 \quad (7-44)$$

Se obține imediat valoarea lui β care garantează situația în domeniul micilor oscilațiuni :

$$\beta \leq \frac{2}{7} \approx 0,3 \quad (7-45)$$

Rezultă atunci și valoarea limită pentru ζ_∞ care asigură situația în domeniul micilor oscilațiuni :

$$-\zeta_\infty \leq 0,05 \iff 100 \frac{-\zeta_\infty}{Z_*} \leq 5\% \quad (7-46)$$

Inegalitatea la care s-a ajuns permite o interesantă discuție relativă la secțiunea transversală a castelului de echilibru. În acest scop se explicitază această secțiune în inegalitatea

B-III-7-11

de mai sus :

$$F \leq 0,05 \frac{df}{\lambda e^{-z_{\infty}}} \quad (7-47)$$

Pe de altă parte pentru a se asigura stabilitatea micilor oscilațiuni este necesară realizarea condiției Thoma :

$$F \geq \frac{df}{\lambda e^{(H+z_{\infty})}} \quad (7-48)$$

Din cele două inegalități rezultă că există posibilitatea ca ultimele două inegalități să fie compatibile sau incompatibile. Dacă secțiunea castelului de echilibru este aleasă astfel încît ambele inegalități să fie satisfăcute rezultă că oscilațiile se situează în domeniul micilor oscilații, cele două inecuații fiind evident compatibile. Condiția de compatibilitate a celor două ecuații este :

$$100 \frac{-z_{\infty}}{H + z_{\infty}} \leq 5\% \quad (7-49)$$

Dacă cele două inecuații sînt compatibile dar secțiunea castelului este aleasă astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea Thoma însă cealaltă inegalitate nu atunci nu mai sîntem ^{siguri} că ne aflăm în domeniul în care oscilațiile pot fi considerate mici și este periculos să facem calculul în cazul marilor oscilații. Dacă cele două inecuații sînt incompatibile oricare ar fi secțiunea castelului nu sîntem siguri că ne aflăm în cazul micilor oscilații și este acoperitor să facem calculul în cazul marilor oscilații.

Se mai poate formula regula că cu cît aria transversală a castelului este mai mare ^{în comparație cu amplitudinea} deși oscilațiile scad în amplitudine ^{la amplitudini egale} totuși sistemul se comportă cu atît mai aproape de marile oscilații. Această concluzie poate constitui o explicație pentru faptul că cu cît oscilațiile scad în amplitudine cu atît amortizarea lor este mai slabă, adică raportul a două elongații succesive se apropie mai mult de unitate.

C-I-7-1

PARTEA INTII - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

C - DOUA MANEVRE SUCCESIVE

Capitolul I - Inchidere parțială rapidă urmată de o
inchidere totală rapidă

§ 7.- Concluzii

În acest capitol se cercetează problema a două manevre succesive și anume se consideră cazul în care se produce la început o închidere parțială rapidă a vanei de reglaj urmată de o închidere totală rapidă.

Cea de a doua manevră se produce în momentul în care nivelul apei în castel atinge nivelul maxim în urma manevrei de închidere parțială.

Pentru a putea rezolva problema nivelului maxim care se realizează în cazul celor două manevre succesive este necesar în prealabil să se stabilească o formulă care să permită calculul nivelului maxim care apare în urma efectuării primei manevre de închidere parțială rapidă.

După determinarea funcției $S_{1p} = S_{1p}(S_0, G)$, în care $G = \frac{N_p}{N_0}$ este raportul în care se micșorează puterea centralei după prima manevră se poate trece la determinarea nivelului maxim la care se ridică nivelul apei în castelul de echilibru în cazul celei de a doua manevre, adică la determinarea relației

$$S_{max} = S_{max} [S_{1p}(S_0, G)]$$

Considerațiile de mai sus constituie în rezumat conținutul primului paragraf al capitolului întâi.

C-I-7-2

În cadrul celui de al doilea paragraf se trece la deducerea ecuației diferențiale care să permită calculul nivelului maxim la care se ridică nivelul apei în castel ca urmare a efectuării primei manevre, închiderea parțială.

În cazul închiderii parțiale modelul matematic al fenomenului (ecuația cvasi-oscilațiilor) este diferit calitativ de modelul matematic corespunzător închiderii totale, deoarece scrierea ecuației de continuitate este diferită în cele două fenomene.

Utilizând sistemul rațional al mărimilor de referință se trece la relativizarea termenilor, obținându-se în final următoarea formă adimensională a ecuației cvasi-oscilațiilor :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi + \beta \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\beta^2}{2} = 0$$

în care parametrul adimensional β are expresia :

$$\beta = \frac{\kappa \delta N}{\gamma^2 F H_{br}} \sqrt{\frac{f}{g L F}} \approx \sqrt{-2 \xi_{\infty}}$$

Se observă că primii trei termeni din ecuația cvasi-oscilațiilor în cazul închiderii parțiale sînt tocmai termenii care alcătuiesc ecuația cvasi-oscilațiilor în cazul închiderii totale.

Condițiile inițiale de tip Cauchy corespunzătoare ecuației cvasi-oscilațiilor în cazul închiderii parțiale rapide sînt :

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \xi = \xi_0.$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{-2\xi_0} - \sqrt{-2\xi_{\infty}} = (1-\delta) \sqrt{-2\xi_0}.$$

În cel de al treilea paragraf se trece la integrarea ecuației de mai sus prin utilizarea metodei aproximative Krilov-Bogoliubov.

În acest scop se trece provizoriu la o nouă variabilă

$$\eta = \xi + \frac{\beta^2}{2}$$

și după o serie de calcule indicate în metoda Krilov-Bogoliubov se obține relația aproximativă:

0-I-7-3

$$\eta(\zeta) = \frac{a_0}{\left(1 + \frac{4a_0}{3\pi\beta}\right) e^{\beta(\zeta - \zeta_0)} - \frac{4a_0}{3\pi\beta}} \cos(\zeta + \gamma)$$

Se obține pentru parametrul a_0 valoarea aproximativă :

$$a_0 \cong (1 - \zeta) \sqrt{-2\zeta_0}$$

Formula finală la care se ajunge pentru legea cvasi-oscilațiilor $\zeta = \zeta(\zeta)$ are o structură complicată de aceea nu se mai reproduce.

În cel de al patrulea paragraf se utilizează legea cvasi-oscilațiilor pentru determinarea nivelului maxim care apare în cazul manevrei parțiale.

Făcînd serie de aproximații se ajunge la următoarea formulă finală pentru calculul saltului maxim în cazul manevrei de închidere parțială :

$$\zeta_{1p} = \zeta^2 \zeta_0 + \frac{(1 - \zeta) \left[1 + \frac{3}{4} (1 + \zeta)^2 (\sqrt{-2\zeta_0})^2 \right] \sqrt{-2\zeta_0}}{1 + \frac{2(1 - \zeta) \left[1 + \frac{9}{8} (1 + \zeta)^2 (\sqrt{-2\zeta_0})^2 \right] \sqrt{-2\zeta_0}}{3}}$$

Este de remarcat că formula care s-a obținut conduce la calcule mai puțin greoaie decît formulele cunoscute în literatura tehnică de specialitate.

Drept exemplu se citează formula lui Vogt care permite calculul saltului maxim în urma manevrei de închidere parțială:

$$\frac{\zeta_{1p}}{\zeta_0} = 1 + \left[\sqrt{\frac{2}{\zeta_0} - 0,275\sqrt{n}} + 0,025\zeta_0 - 0,9 \right] (1 - n) \left[1 - n \left(\frac{\zeta_0}{2} \right)^{0,62} \right]$$

în care parametrul n are semnificația parametrului ζ din formula anterioară iar parametrul ζ_0 corespunde în notațiile din teză la $-\zeta_0$.

În cazul în care $\zeta = 0$, ceea ce corespunde manevrei nule (lipsei de manevră a vanei de reglaj) se obține în mod exact $\zeta_{1p} = \zeta_0$.

C-I-7-4

O altă verificare a formulei se poate realiza dacă se consideră celălalt caz extrem în care $\delta = 1$, ceea ce corespunde manevrei de închidere totală.

Se obține pe această cale următoarea formulă nouă pentru calculul saltului maxim în cazul închiderii totale :

$$\xi_{1p}(\delta=1) = \xi_1 = \frac{(1 - \frac{3}{2} \xi_0) \sqrt{2\xi_0}}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{2\xi_0} - \frac{3}{2} \xi_0 \sqrt{2\xi_0}}$$

Efectuând calculele numerice pentru un număr de douăzeci de valori ale parametrului ξ_0 , valori care acoperă practic întregul domeniu de utilizare al castelelor de echilibru s-au obținut rezultate foarte bune care față de valorile exacte indică o eroare maximă mai mică de 3%. Având în vedere modul în care a fost obținută formula și verificările concludente obținute pentru cele două valori extreme $\delta = 0$ și $\delta = 1$ se va admite că formula dă rezultate corespunzătoare și pentru valori intermediare ale parametrului

În paragraful numărul cinci se determină saltul care se produce ca urmare a executării celei de a doua manevre, manevra de închidere rapidă. Această a doua manevră se produce în momentul în care în castelul de echilibru se atinge nivelul maxim ca urmare a primei manevre de închidere parțială.

Modelul matematic al fenomenului sub formă adimensională este reprezentat de ecuația :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi = 0$$

cu condițiile inițiale :

$$\tau = \tau_{1p} \implies \xi = \xi_{1p}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \beta \cong \delta \sqrt{2\xi_0}$$

După o primă integrare a ecuației de mai sus se obține următoarea ecuație care permite calculul saltului maxim :

C-I-7-5

$$S_{max} + \ln(1 - S_{max}) = S_{1p} + \ln(1 + \delta^2 S_0 - S_{1p})$$

Utilizând acum formula anterior dedusă pentru S_{1p} , ecuația de mai sus capătă forma :

$$S_{max} + \ln(1 - S_{max}) = \delta^2 S_0 + \frac{(1-\delta) \left[1 + \frac{3}{4} (1+\delta)^2 (\sqrt{2S_0})^2 \right] \sqrt{2S_0}}{1 + \frac{2}{3} (1-\delta) \left[1 + \frac{9}{8} (1+\delta)^2 (\sqrt{2S_0})^2 \right] \sqrt{2S_0}} +$$

$$+ \ln \left\{ 1 - \frac{(1-\delta) \left[1 + \frac{3}{4} (1+\delta)^2 (\sqrt{2S_0})^2 \right] \sqrt{2S_0}}{1 + \frac{2}{3} (1-\delta) \left[1 + \frac{9}{8} (1+\delta)^2 (\sqrt{2S_0})^2 \right] \sqrt{2S_0}} \right\}$$

Se constată că la cele două extremități ale intervalului de variație a parametrului δ , adică pentru $\delta = 0$ și $\delta = 1$ se obține $S_{max} = S_1$. Din punct de vedere fizic această situație corespunde cazului în care se efectuează de fapt o singură manevră, cea de închidere totală, a doua manevră fiind manevra nulă.

Pentru a calcula extremul funcției S_{max} considerată ca funcție de parametrul δ se rezolvă ecuația obținută prin anularea derivatei $\frac{dS_{max}}{d\delta}$. Admițând neglijaarea unor termeni ne semnificativi se obține concluzia că extremul căutat are loc pentru $\delta = 0,5$. Acestei valori a parametrului δ îi corespunde o valoare S_{max} mai mică decât cea corespunzătoare saltului maxim în cazul manevrei unice și anume se obține :

- în cazul manevrei unice de închidere totală :

$$S_{max} + \ln(1 - S_{max}) = S_0$$

- în cazul a 2 manevre succesive care reduc puterea în mod egal pînă la zero :

$$S_{max} + \ln(1 - S_{max}) = \frac{1}{2} S_0$$

U-I-7-5

Rezultă ca o concluzie generală că în cazul manevrei de închidere totală fragmentarea manevrei de închidere în două manevre succesive conduce la salturi maxime mai mici decât cele care se produc în cazul manevrei de închidere totală. Generalizînd s-a putea presupune că dintre toate manevrele posibile de închidere totală, cea care conduce la saltul maxim cel mai mare este manevra unică de închidere bruscă. Această ultimă presupunere nu a fost demonstrată riguros dar ea se profilează avînd în vedere atît rezultatele obținute în cazul a două manevre succesive cît și rezultatele obținute în determinările experimentale la scară naturală și în laborator. De asemenea se constată că variația lui S_{max} cu parametrul ζ este o variație lentă de aceea existența unui timp real de închidere diferit de zero dar mic în raport cu perioada nu conduce la micșorări substanțiale ale saltului maxim. Si această concluzie teoretică este confirmată de rezultatele obținute de Nagel (natură), Escande (laborator) și Calame și Gaden (închidere liniară-calcul).

În paragraful al șaselea se deduce ecuația cvasi-oscilațiilor prin utilizarea metodei variaționale în cazul manevrei de închidere parțială.

Se ajunge în final la următoarea problemă variațională, echivalentă problemei integrării ecuației diferențiale neliniare reprezentînd modelul matematic al fenomenului :

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \left\{ \left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)^2 - \zeta^2 - \int_0^{\zeta} \left[\left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)^2 + 2\beta \frac{d\zeta}{d\tau} + \beta^2 \right] d\zeta \right\} d\tau = 0$$

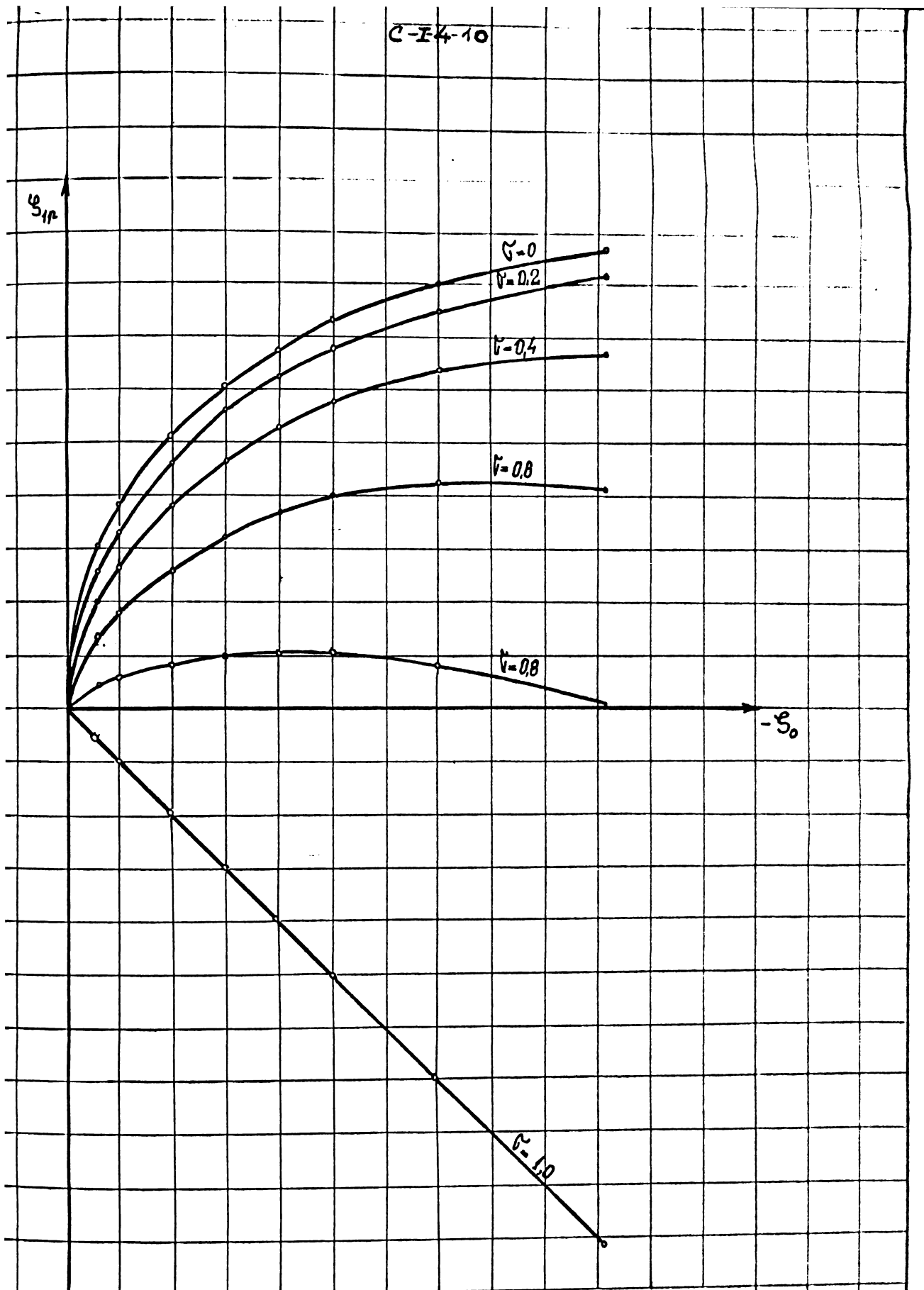
Ecuația diferențială scrisă pentru funcția extremală $\zeta = \zeta(\tau)$ care satisface condiția de staționaritate de mai sus coincide cu ecuația diferențială a mișcării oscilatorii, obținută prin utilizarea ecuației lui Bernoulli.

TABEL NR.2 (75)

$$S_1 = \frac{(1 - \frac{3}{2}\xi_0)\sqrt{-2\xi_0}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{-2\xi_0} - \frac{3}{2}\xi_0\sqrt{-2\xi_0}}$$

ξ_0	$\sqrt{-2\xi_0}$	$\frac{2}{3}\sqrt{-2\xi_0}$	$-\frac{3}{2}\xi_0$	$(1 - \frac{3}{2}\xi_0)\sqrt{-2\xi_0}$	$\frac{1}{2}\xi_0\sqrt{-2\xi_0}$	$1 + \frac{2}{3}\sqrt{-2\xi_0} - \frac{3}{2}\xi_0\sqrt{-2\xi_0}$	S_1	S_1 (relativ crude)
00491	0,031327	0,02088	0,00074	0,031350	0,00002	1,02090	0,0307	0,0310
00998	0,04466	0,02977	0,00150	0,044727	0,00007	1,02984	0,0434	0,0440
05032	0,10032	0,06688	0,00755	0,101077	0,00076	1,06764	0,0947	0,0970
09870	0,14505	0,09670	0,01481	0,147198	0,00215	1,09885	0,1340	0,1340
20255	0,20127	0,13418	0,03038	0,207385	0,0061	1,14029	0,1819	0,1880
39714	0,28127	0,18751	0,05957	0,298025	0,01676	1,20427	0,2475	0,2560
62169	0,34690	0,23127	0,09025	0,378208	0,03131	1,26258	0,2996	0,3080
79711	0,39928	0,26619	0,11957	0,447022	0,04774	1,31393	0,3402	0,3480
00508	0,44846	0,29897	0,15076	0,516070	0,06761	1,36658	0,3776	0,3840
49480	0,54677	0,36451	0,22422	0,669367	0,12260	1,48711	0,4501	0,4520
98198	0,62958	0,41972	0,29730	0,816754	0,18717	1,60689	0,5083	0,5050
48508	0,70492	0,46995	0,37276	0,967686	0,26277	1,73272	0,5585	0,5500
01592	0,77666	0,51777	0,45239	1,128013	0,35135	1,86912	0,6035	0,5900
47582	0,83377	0,55585	0,52137	1,268473	0,43470	1,99055	0,6372	0,6200
399822	0,89423	0,59615	0,59973	1,430527	0,53630	2,13245	0,6708	0,6500
503793	1,00397	0,66931	0,75569	1,762660	0,75869	2,42800	0,7260	0,7000
699676	1,18294	0,78863	1,04951	2,424447	1,24151	3,03014	0,8001	0,7700
019330	1,42782	0,95188	1,52899	3,610943	2,18312	4,13500	0,8733	0,8450
045732	2,02274	1,34849	3,06860	8,229720	6,20698	8,55547	0,9619	0,9500
303317	2,93376	1,95584	6,45497	21,87190	18,93733	21,09317	0,9990	0,9950

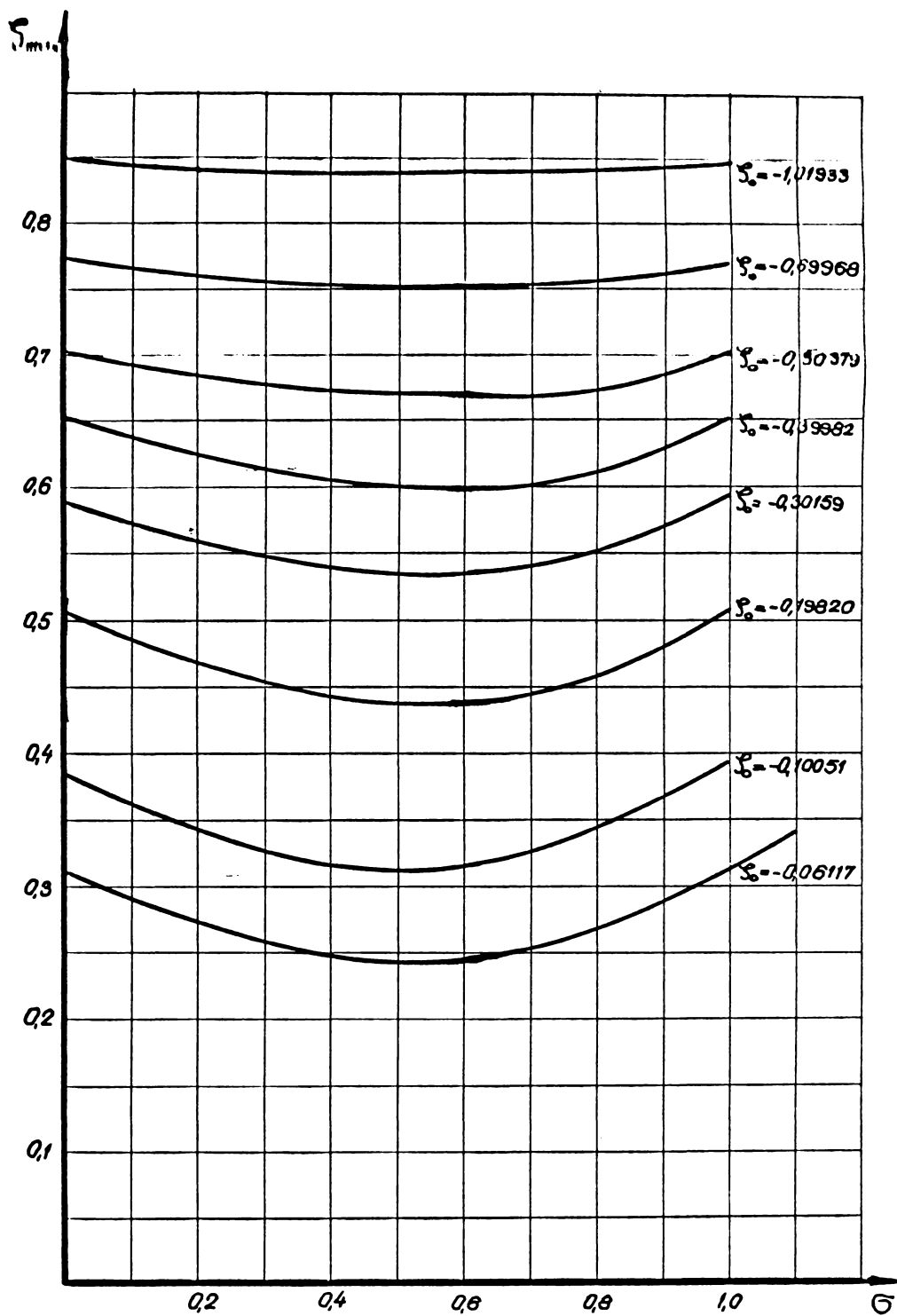
C-I4-10



Gratic Nr. 1(22)

Saltul maxim în cazul manevrei parțiale.

$$S_{1p} = S_{1p}(v, S_0)$$



Grafic nr. 1(23)

Inchidere totală - două manevre succesive
 saltul maxim

C-II-4-1

PARTEA INTII - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

C - DOUA MANEVRE SUCCESIVE

Capitolul II - DESCHIDERE PARȚIALĂ RAPIDĂ URMATĂ DE O
DESCHIDERE TOTALĂ RAPIDĂ

§ 4.- Concluzii

În capitolul anterior s-a cercetat problema nivelului maxim în cazul în care se produce o manevră de închidere parțială urmată de o manevră de închidere totală, ceea ce ar fi putut provoca o situație periculoasă relativă la creșterea nivelului apei în castelul de echilibru.

În capitolul de față se cercetează problema nivelului minim în cazul în care se produce o manevră de deschidere parțială urmată de o manevră de deschidere totală, ceea ce ar putea provoca o situație periculoasă relativă la scăderea nivelului apei în castelul de echilibru.

În primul paragraf se stabilește modelul matematic al fenomenului în cazul deschiderii parțiale prin aplicarea ecuației lui Bernoulli. După unele aproximări neesențiale se obține :

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right)^2 + \alpha_p \frac{d\zeta}{d\tau} + \zeta + \frac{\alpha_p^2}{2} = 0$$

în care parametrul α_p are semnificația

$$\alpha_p = \delta \alpha = \frac{\delta KN}{\gamma \varrho FH} \sqrt{\frac{f}{gLF}} \cong \delta \sqrt{2\zeta_\infty}$$

Condițiile inițiale de tip Cauchy sînt :

$$\zeta = \zeta_0 \implies \zeta = 0$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\alpha_p$$

Prin utilizarea metodei aproximative Krilov-Bogoliubov s-a

C-II-4-2

obținut formula :

$$S_{1p} = -\frac{\alpha_p^2}{2} - \frac{\alpha_p}{1+\alpha_p} = \sigma^2 S_\infty - \frac{\sigma \sqrt{2S_\infty}}{1 + 0,35\sigma \sqrt{2S_\infty} - \sigma^2 S_\infty}$$

Formula de mai sus se verifică pentru cele două valori extreme ale parametrului σ și anume :

- $\sigma = 0$ (manevra nulă) rezultă în mod exact $S_{1p} = 0$
- $\sigma = 1$ (manevra de deschidere totală)

se regăsește formula din cazul deschiderii rapide totale.

Având în vedere rezultatele concludente obținute pentru cele două valori extreme ale parametrului σ și de asemenea având în vedere modul în care a fost dedusă, se va considera în continuare că formula este bună pentru orice valoare a lui σ din intervalul $[0, 1]$ de variație a acestuia.

În încheierea paragrafului sînt date tabele în care, pentru un număr de opt valori ale parametrului S_∞ , uzuale în practică, s-a calculat saltul minim corespunzător valorilor $\sigma = 0, 0,2 ; 0,4 ; 0,5 ; 1,0$.

În paragraful al doilea utilizînd metoda Krîlov-Bogoliubov se determină legea mișcării cvasi-oscilatorii care ia naștere în urma celei de a doua manevre instantanee, care se produce în momentul în care nivelul apei din castelul de echilibru atinge poziția cea mai de jos ca urmare a manevrei de deschidere parțială.

Se obține următoarea relație :

$$S(\tau) \cong S_\infty + \frac{\sqrt{2S_\infty}}{\frac{4}{3\pi} + \left(\frac{\sqrt{2S_\infty}}{a_0} - \frac{4}{3\pi}\right) e^{\sqrt{2S_\infty}(\tau - \tau_0)}} \cos(\tau - \tau_0 + \gamma)$$

Cu ajutorul legii de mișcare se poate determina nivelul minim prin anularea derivatei în raport cu timpul. Valorile numerice ale saltului minim au fost calculate pentru aceleași va-

C-II-4-3

lori pentru care au fost calculate valorile saltului minim în cazul primei manevre.

Este interesant de remarcat faptul că, utilizând un mod de calcul puțin diferit se obține o concluzie similară celeia obținută în capitolul I care se referea la două manevre succesive de deschidere și anume extremul funcției S_{\min} ca funcție de parametrul δ se obține tot pentru valoarea $\delta = 0,5$.

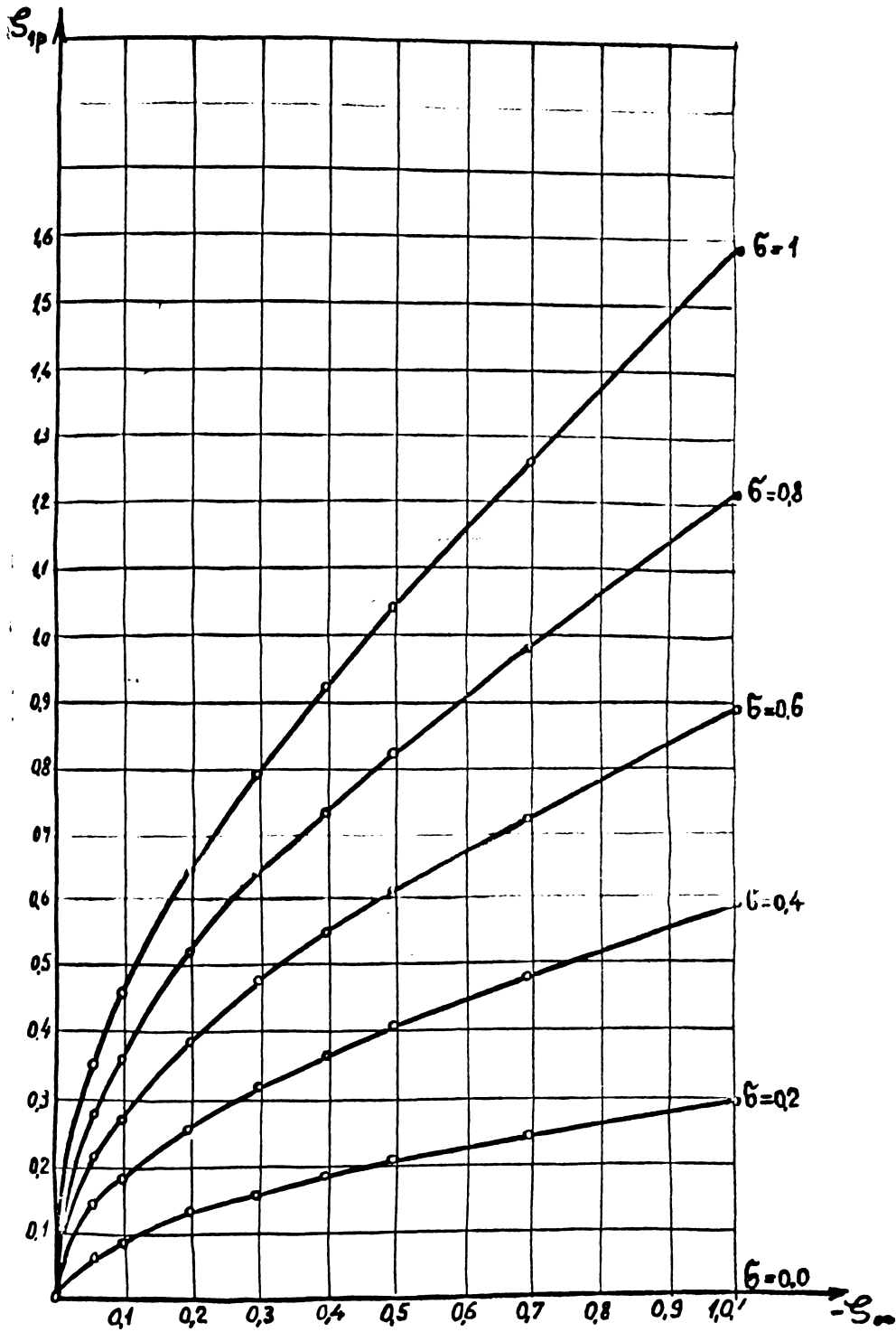
De asemenea ca și în cazul manevrelor de închidere se reduce valoarea absolută a saltului minim ~~se reduce~~ prin considerarea a două manevre succesive.

În cazul manevrelor de deschidere ~~scăderea nivelului~~ variația nivelului minim în raport cu o variație mică a parametrului δ este mai mare decât în cazul manevrelor de închidere de aceea, generalizând, se poate trage concluzia că timpul de manevră a vanei de reglaj are o influență mai mare în cazul deschiderii decât în cazul închiderii.

Concluzia generală a acestor două capitole care tratează problema a două manevre succesive este aceea că cea mai defavorabilă situație este aceea în care manevra de închidere totală sau de deschidere totală se face dintr-o dată în comparație cu executarea a două manevre succesive.

Situația cea mai favorabilă este când se fac două manevre succesive care realizează aceeași variație a puterii.

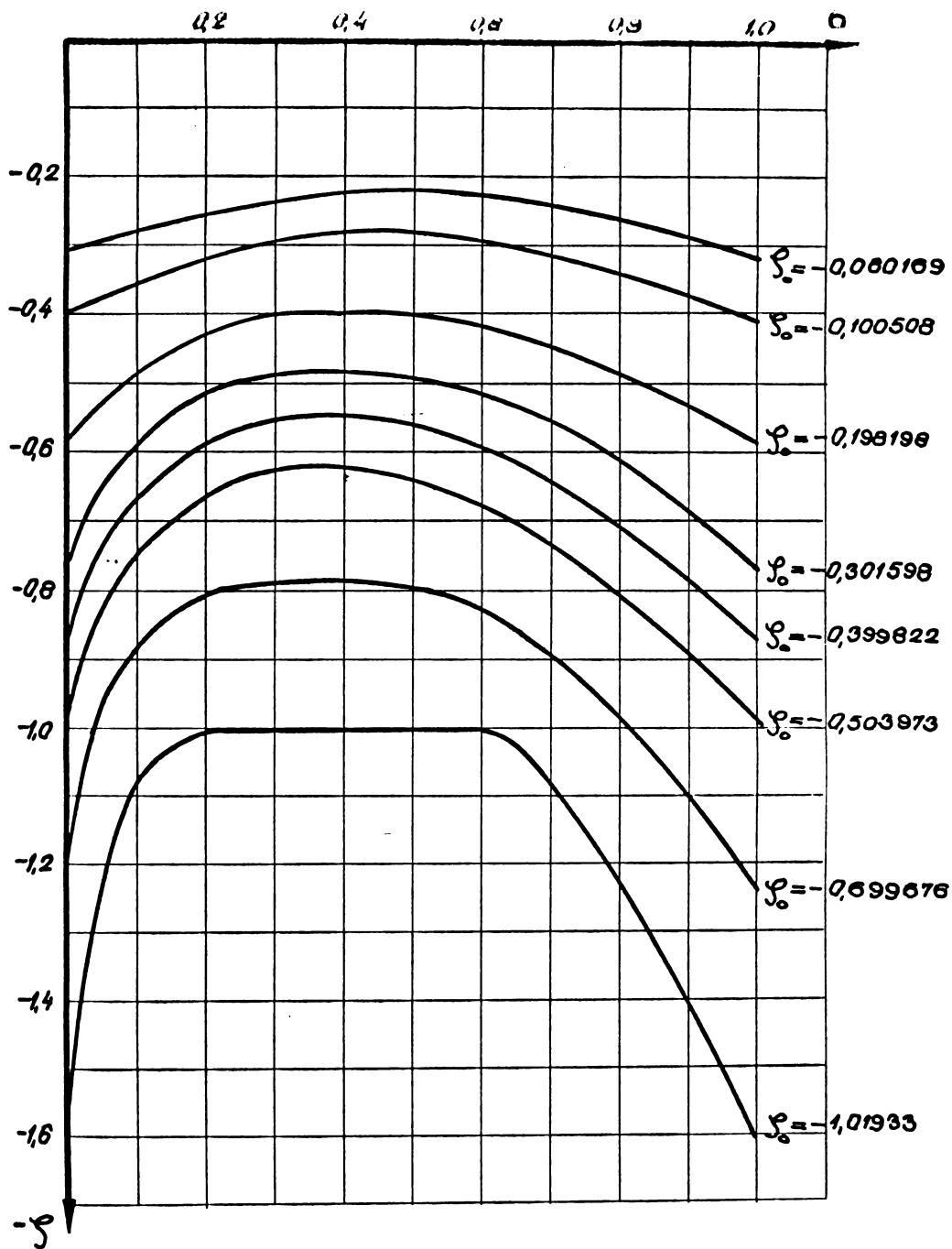
Generalizând, apare posibilitatea de a realiza vane de reglaj cu un asemenea program de funcționare încât salturile extreme să fie minime. Aceasta rămâne o problemă deschisă.



Graficul Nr. 1(24)

Saltul minim in cazul manevrei partiale

$$S_{1p} = S_{1p}(\delta, S_{\infty})$$



Grafic nr. 1(25)

O eschidere bruscă - 2 manevre succesive

Saltul minim.

D-I-2-1

D - CASTEL DE ECHILIBRU PNEUMATIC (SECȚIUNE CONSTANTĂ)
CU CAMERĂ SUPERIOARĂ ÎNCHEISĂ ETANȘĂ

Capitolul I - Închiderea totală rapidă. Modelul matematic

& 2. Deducerea ecuației cvasi-oscilațiilor utilizând
metoda variațională

În A-I-2-1 s-a obținut ecuația cvasi-oscilațiilor la închiderea totală rapidă în cazul unui castel simplu de aceea în acest paragraf se va insista doar ceea ce este nou față de cazul studiat anterior. După cum este cunoscut, metoda variațională se bazează pe relația :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U) dt = 0 \quad (2-1)$$

în care :

t = timpul, momentele fixate fiind $t = 0$ și $t = t_1$;

δT = variația energiei cinetice ;

δU = lucrul mecanic virtual .

Relația (2-1) este valabilă pentru orice mișcare virtuală rezultată prin variație de la mișcarea reală. În clase mișcărilor virtuale admise se includ mișcărilor care satisfac ecuația de continuitate, legăturile exterioare și în plus condiția ca la oricare dintre momentele fixate t_0 și t_1 , deplasare virtuală $\delta \vec{x}$ să fie nulă.

Se vor considera numai variații sincrone, adică variații la care $\delta t = 0$. Deoarece limitele de integrare sînt fixe, simbolul δ este permutabil cu simbolul integralci /1-1/. Se pre-

D-I-2-2

supune ca deplasarea virtuală $\delta \vec{x}$ se realizează în sensul real de curgere al lichidului pentru a se păstra semnul în expresia pierderilor de energie, acest semn fiind funcție de sensul de curgere al apei.

Notînd cu \vec{u} viteza într-un punct arbitrar \vec{x} al masei de lichid, se poate scrie energia cinetică sub forma :

$$T = \int \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{1}{2} \rho L f w^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2-2)$$

Lucrul mecanic virtual corespunzător deplasării virtuale $\delta \vec{x}$ se poate calcula ca o sumă a doi termeni :

- un prim termen corespunzînd cazului rezolvat anterior, în care presiunea totală a aerului aerului în castelul de echilibru este egală cu presiunea atmosferică ;

- un al doilea termen corespunzînd lucrului mecanic efectuat la comprimarea aerului din camera etanșă a castelului. În cazul comprimării (destinderii) aerului din castel s-au considerat următoarele două variante de transformări de stare :

- transformare politropică cu indicele de politropie η avînd valori cuprinse între $\eta_i = 1$ corespunzător transformării izoterme și $\eta_a \cong 1,4$, corespunzător transformării adiabatică :

$$\eta_i < \eta \leq \eta_a$$

- transformare izotermă $\eta = \eta_i$

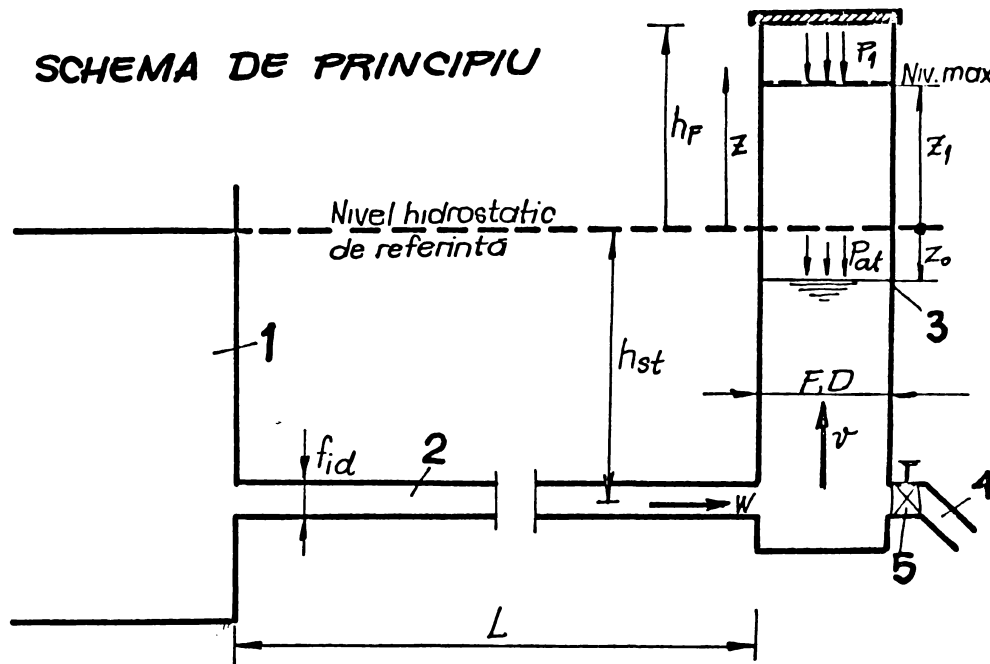
În transformarea politropică de la volumul v_0 la volumul V lucrul mecanic al presiunilor totale este :

- în cazul transformării politrope :

$$p_t v^\eta = p_{at} v_0^\eta = \text{constant}$$

$$-\int_{v_0}^V p_t dv = -p_{at} v_0^\eta \int_{v_0}^V \frac{1}{v^{\eta-1}} dv = \frac{p_{at} v_0^\eta}{1-\eta} \left[1 - \left(\frac{V}{v_0} \right)^{1-\eta} \right] \quad (2-3)$$

SCHEMA DE PRINCIPIU



- | | |
|----------------------------------|---------------------|
| 1. Lac de acumulare | 4. Conducte forțate |
| 2. Galerie de aducțiune | 5. Vană reglaj. |
| 3. Castel de echilibru pneumatic | |

FIGURA NR 1(7)
AMENAJARE CU CASTEL DE
ECHILIBRU PERFECT PNEUMATIC

D-I-2-5

- în cazul transformării izoterme :

$$p_t V = p_{at} V_0 = \text{constant}$$

$$-\int_{V_0}^V p_t dV = -p_{at} V_0 \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = p_{at} V_0 \ln \frac{V_0}{V} \quad (2-4)$$

Din acest lucru mecanic trebuie scăzut lucrul mecanic la presiune constantă efectuat de presiunea atmosferică în deplasarea respectivă, care lucru mecanic a fost considerat o dată în cazul castelului de echilibru simplu :

$$-\int_{V_0}^V p_{at} dV = -p_{at} (V - V_0) \quad (2-5)$$

Între columnul de aer din castel la un moment dat și cota z a nivelului apei în castel în același moment există relația :

$$V = (h_F - z) F \quad (2-6)$$

În cele de mai sus s-a considerat că în regimul inițial permanent, cota apei este z_0 iar presiunea totală a aerului din camera etanșă este presiunea atmosferică, această condiție fiind asigurată constructiv după cum s-a menționat anterior. În cazul castelului de echilibru simplu, condiția variațională a fost :

$$\delta \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho g F z^2 - \frac{(-1)^j}{2} \rho F K \int_{z_j}^z \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dz \right] dz = 0 \quad (2-7)$$

În cazul castelului pneumatic cu cameră etanșă cu aer condiția devine în cazul transformării politropice :

$$\delta \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho L F^2}{f} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho g F z^2 - \frac{(-1)^j}{2} \rho F K \int_{z_j}^z \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dz + \frac{p_{at} (h_F - z_0)}{1 - \gamma} \left[1 - \left(\frac{h_F - z}{h_F - z_0} \right)^{1 - \gamma} \right] + p_{at} (h_F - z) F \right\} dz = 0 \quad (2-8)$$

D-I-2-4

respectiv în cazul transformării izoterme :

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \left[\frac{1}{2} \frac{gLF^2}{f} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} g g F z^2 - \frac{(-1)^j}{2} g_{FK} \int_{z_j}^z \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dz + p_{at} V_0 \ln \frac{h_F - z_0}{h_F - z} + p_{at} (h_F - z) F \right] dz = 0 \quad (2-9)$$

Se introduce acum mărimile de mărime :

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_{ec} F} \quad ; \quad T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}} \quad (2-10)$$

parametrii :

$$\frac{p_{at}}{g Z_*} = \mu \quad ; \quad \frac{h_F}{Z_*} = \delta \quad (2-11)$$

și adăugăm și trei coordonatele :

$$\xi = \frac{z}{Z_*} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{T_*} \quad (2-12)$$

Cu ajutorul lor ecuațiile (2-8) și respectiv (2-9) capătă prin relativizare următoarele :

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{(-1)^j}{2} \int_{\xi_j}^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 d\xi + \frac{\mu(\delta - \xi_0)}{1 + 2} \left[1 - \left(\frac{\delta - \xi}{\delta - \xi_0} \right)^{1+2} \right] + \mu(\delta - \xi) \right\} d\tau = 0 \quad (2-13)$$

respectiv :

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{(-1)^j}{2} \int_{\xi_j}^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 d\xi + \mu(\delta - \xi_0) \ln \frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} + \mu(\delta - \xi) \right] d\tau = 0 \quad (2-14)$$

cuația lui Lagrange o satisface funcția arbitrară $\xi = \xi(\tau)$

este :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi + \mu \left(\frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} \right)^2 - \mu = 0$$

respectiv :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi + \mu \frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} - \mu = 0$$

D-I-2-5

Se observă că cele două ecuații se pot strânge într-o expresie unică :

$$\frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \xi + \mu \left[\left(\frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} \right)^2 - 1 \right] = 0 ; \quad 1 \leq j \leq 1,4 \quad (2-15)$$

S-a obținut aceeași ecuație cu cea obținută prin utilizarea ecuației lui Bernoulli în paragraful anterior.

Condițiile la limită pentru ecuația de mai sus sînt cele cunoscute :

$$j=0 \implies \zeta = \zeta_0 \implies \xi = \xi_0 \quad (2-16)$$

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \sqrt{-2\xi_0}$$

$$j=1,2,3,\dots \implies \zeta = \zeta_j \implies \xi = \xi_j$$

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = 0 \quad (2-17)$$

Rezolvarea respectivei ecuații diferențiale face obiectul unui alt paragraf.

1-1-2-5

Concluzii

Pe baza celor două arătat la capitolele anterioare există posibilitatea autentică de a se face o verificare a funcționalei obținute în metoda variațională. Deoarece în această verificare semnificația fizică a termenilor nu prezintă importanță, coincidența rezultatelor obținute prin cele două metode (fizică și matematică) constituie o testare a considerațiilor fizice.

Una dintre ele în cazul castelurilor simple, la includerea brașei modelul matematic sau forma diferențială este în prima cvazi-eliptică :

$$\frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \xi = 0 \quad (2-18)$$

și lui îi corespunde funcționala :

$$\Phi(\xi) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \left[\left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 - \xi^2 - \int_0^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 d\xi \right] d\zeta = - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \left[\xi \frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \xi^2 + \int_0^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 d\xi \right] d\zeta \quad (2-19)$$

În cazul castelurilor pneumatice, la includerea brașei, modelul matematic sau forma diferențială este în prima cvazi-eliptică :

$$\frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \xi + \mu \left[\frac{(\xi - \xi_0)^2}{\delta - \xi} \right] = 0 \quad (2-20)$$

În cazul că se consideră cazul general al transformării politrope, respectiv :

$$\frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \xi + \mu \frac{\xi - \xi_0}{\delta - \xi} = 0 \quad (2-21)$$

În cazul în care se consideră transformarea izotermă,

Scriind funcționala corespunzătoare sub forma :

$$F(\xi) = \Phi(\xi) + \Psi(\xi) \quad (2-22)$$

rezultă că a mai rămas de determinat expresia lui $\Psi(\xi)$, deoarece

— 320 —

expresia lui $\Phi(\xi)$ a-a determinat mai înainte.

In cazul c) se considera transformarea pozitropică :

$$\Psi(\xi) = - \int_0^1 \mu \left[\left(\frac{\delta - \xi_0}{\delta - t\xi} \right)^2 - 1 \right] \xi dt \quad (2-23)$$

se face substituția :

$$t\xi = \xi \quad (2-24)$$

și se obține ca rezultat al efectuării substituției :

$$\Psi(\xi) = - \mu \int_0^\xi \left[\left(\frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} \right)^2 - 1 \right] d\xi \quad (2-25)$$

facând integrala de mai sus :

$$\Psi(\xi) = - \frac{\mu(\delta - \xi_0)^2}{\eta - 1} \left[(\delta - \xi)^{\eta-2} - \delta^{\eta-2} \right] + \mu\xi \quad (2-26)$$

in care cel de al doilea termen din paranteza dreaptă de mai sus se va neglija deoarece este constant și nu dă nici un termen in ecuația uler .

in cazul c) se considera transformarea izotropă, atunci :

$$\Psi(\xi) = - \int_0^1 \mu \frac{t\xi - \xi_0}{\delta - t\xi} \xi dt \quad (2-27)$$

se face și aici substituția (2-24) și se obține :

$$\Psi(\xi) = - \mu \int_0^\xi \frac{\xi - \xi_0}{\delta - \xi} d\xi \quad (2-28)$$

facând integrala de mai sus :

$$\Psi(\xi) = \mu\xi + \mu(\delta - \xi_0) \ln(\delta - \xi) - \mu(\delta - \xi_0) \ln\delta \quad (2-29)$$

deoarece ultimul termen este o constantă și nu dă nici un termen in ecuația uler el se va neglija in cele ce urmează

Rezumând, funcționala căutată in cazul castolelor de echilibru, de echilibru pneumatic, la manevra de închidere

D-I-2-8

brusă în rîm (vasi-remi-locă) are expresia :

• în cazul în care se consideră transformarea politropă :

$$F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 - \xi^2 - \int_0^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 d\xi - \frac{\mu(\xi - \xi_0)}{2-1} (\xi - \xi)^{1-2} + \mu\xi \right] d\zeta \quad (2-30)$$

• în cazul în care se consideră transformarea izotermă :

$$F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 - \xi^2 - \int_0^{\xi} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 d\xi + \mu(\xi - \xi_0) \ln(\xi - \xi) + \mu\xi \right] d\zeta \quad (2-31)$$

D-II-1-1

D.- CASTEL DE ECHILIBRU PNEUMATIC (SECȚIUNE CONSTANTĂ)
CU CAMERA SUPERIOARĂ ÎNCHISĂ ETANS

Capitolul II - Inchiderea totală rapidă

& 1.- O primă integrare a ecuației oscilațiilor

Așa cum s-a arătat în cazul castelelor simple, se poate determina printr-o primă integrare a ecuației oscilațiilor care este nivelul maxim pe care îl atinge apa în castelul de echilibru.

În capitolul anterior s-a dedus ecuația oscilațiilor sub forma :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{dt} \right| \frac{d\xi}{dt} + \xi + \frac{\mu(\xi - \xi_0)}{\delta - \xi} = 0 \quad (2-1)$$

Intrucât oscilațiile nivelului apei în castelul de echilibru se fac în jurul poziției de repaus ξ_∞ , este indicat a se trece provizoriu, așa cum se face în genere în studiile calitative la o nouă variabilă ψ definită astfel încât repausul să corespundă valorii $\psi = 0$:

$$\begin{aligned} \psi &= \xi - \xi_\infty \\ \psi_0 &= \xi_0 - \xi_\infty \end{aligned} \quad (2-2)$$

Cu noua variabilă, ecuația cuasioscilațiilor capătă forma :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \frac{d\psi}{dt} + \psi + \xi_\infty + \frac{\mu(\psi - \psi_0)}{\chi - \psi} = 0 \quad (2-3)$$

D-II-1-2

Pe de altă parte, relația care definește pe ξ_∞ are forma :

$$\xi_\infty = -\frac{\mu(\xi_\infty - \xi_0)}{\chi} = \frac{\mu\psi_0}{\chi} \quad (2-4)$$

Introducând atunci relația de mai sus în relația (2-3) se obține următoarea formă a ecuației oscilațiilor :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \frac{d\psi}{dt} + \psi + \frac{\mu(\chi - \psi_0)}{\chi} \frac{\psi}{\chi - \psi} = 0 \quad (2-5)$$

Pentru simplificarea scrierii se va introduce provizoriu un nou parametru și anume :

$$\Theta = \frac{\mu(\chi - \psi_0)}{\chi} \quad (2-6)$$

Ecuația oscilațiilor capătă atunci forma finală căutată :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \frac{d\psi}{dt} + \psi \left(1 + \frac{\Theta}{\chi - \psi} \right) = 0 \quad (2-7)$$

Pentru o primă integrare se face o substituție de aceeași natură ca și în cazul castelelor simple, adică se consideră noua funcție $\dot{\psi}^2 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$ și noua variabilă ψ :

$$\frac{d\dot{\psi}^2}{dt} - (-1)^j \dot{\psi}^2 + 2\psi \left(1 + \frac{\Theta}{\chi - \psi} \right) = 0 \quad (2-8)$$

$$\begin{aligned} \psi_{j-1} &\leq \psi \leq \psi_j \\ t_{j-1} &\leq t \leq t_j \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

2-11-1-3

ecuația de mai sus, fiind liniară în raport cu funcția se poate integra cu ușurință obținându-se soluția :

$$\psi^2 = e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} \left[\psi_{j-1}^2 + 2(-1)^j \psi e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2(-1)^j \psi_{j-1} + 2e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2 - 2 \frac{\Theta}{\alpha} \int_{\psi_{j-1}}^{\psi} \frac{\psi}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} d\psi \right] \quad (2-9)$$

Situa integrală nu se poate calcula cu ajutorul funcțiilor elementare.

scriem :

$$\frac{\psi}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} \quad (2-10)$$

integrala din (2-9) devine :

$$\frac{\Theta}{\alpha} \int_{\psi_{j-1}}^{\psi} \frac{\psi}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} d\psi = (-1)^j \Theta e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - (-1)^j \Theta + \Theta \int_{\psi_{j-1}}^{\psi} \frac{e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})}}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} d\psi \quad (2-11)$$

Soluția (2-9) devine atunci :

— 11 — 4

$$\dot{\psi}^2 = e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} \left\{ \dot{\psi}_{j-1}^2 + 2(-1)^j \psi e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2(-1)^j \psi_{j-1} + 2[1 - (-1)^j \Theta] e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2[1 - (-1)^j \Theta] - 2\Theta \int_{\psi_{j-1}}^{\psi} \frac{e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})}}{1 - \frac{\psi}{\chi}} d\psi \right\}; \quad \psi_{j-1} \leq \psi \leq \psi_j \quad (2-12)$$

cu relația de mai sus se pot determina succesiv nivelurile extreme, începând cu primul nivel mare ψ_1 . Condiția adițională este :

$$\psi = \psi_0 \implies \dot{\psi}_0^2 = -2\Theta_0 \quad (2-13)$$

D-II-2-1

D. CASTEL DE ECHILIBRU PNEUMATIC (SECȚIUNE CONSTANTA)
CU CAMERA SUPERIOARA INCHISA ETANS

Capitolul II - Inchiderea totală rapidă

& 2.- Determinarea analitică a nivelurilor extreme
successive

Determinarea analitică a nivelurilor extreme se bazează pe faptul că pentru oricare nivel extrem, viteza de mișcare a nivelului apei în castelul de echilibru se anulează ; sub formă adimensională $\dot{\psi}_k^2 = 0$; $k = 1, 2, \dots$

Soluția obținută la paragraful anterior are expresia :

$$\dot{\psi}^2 = e^{(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} \left\{ \dot{\psi}_{j-1}^2 + 2(-1)^j \psi e^{-(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2(-1)^j \dot{\psi}_{j-1} + 2 \left[1 - (-1)^j \theta \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})} - 2 \left[1 - (-1)^j \theta \right] - 2\theta \int_{\psi_{j-1}}^{\psi} \frac{e^{-(-1)^j(\psi - \psi_{j-1})}}{1 - \frac{\psi}{x}} d\psi \right\} \quad (2-1)$$

$$\psi_{j-1} \leq \psi \leq \psi_j$$

Determinarea primului nivel maxim ψ_1

Se face în soluția generală de mai sus :

$$j=1 ; \psi = \psi_1 ; \dot{\psi}_1^2 = 0 ; \dot{\psi}_0^2 = -2\theta_0 \quad (2-2)$$

D-II-2-2

Se obține următoarea ecuație care definește nivelul maxim γ_1 :

$$-(1+\Theta) + (1+\Theta)e^{\gamma_1 - \gamma_0} - \gamma_1 e^{\gamma_1 - \gamma_0} - \xi_\infty - \Theta \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{e^{\gamma - \gamma_0}}{1 - \frac{\gamma}{\alpha}} d\gamma = 0$$

sau, sub o formă convenabilă :

$$(1+\Theta + \gamma_1) e^{\gamma_1} - \Theta \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{e^{\gamma}}{1 - \frac{\gamma}{\alpha}} d\gamma = (1+\Theta + \xi_\infty) e^{\gamma_0} \quad (2-3)$$

Pentru a putea efectua integrala din expresia de mai sus cu ajutorul funcțiilor elementare se va dezvolta în serie funcția $\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\alpha}}$, ținând cont că, din condiții fizice $|\frac{\gamma}{\alpha}| < 1$ deci seria este absolut uniform convergentă. Din seria respectivă se rețin primii patru termeni ceea ce conduce la o eroare neglijabilă, dacă deci în locul ecuației exacte (2-3) se consideră ecuația aproximativă :

$$(1+\Theta + \gamma_1) e^{\gamma_1} - \Theta \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} e^{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^3}{\alpha^3} \right) d\gamma = (1+\Theta + \xi_\infty) e^{\gamma_0} \quad (2-4)$$

Pe de altă parte, integrând prin părți se obțin relațiile finale :

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} e^{\gamma} d\gamma = e^{\gamma_1} - e^{\gamma_0}$$

2-1-2-3

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \psi e^{\psi} d\psi = e^{\psi_1} (\psi_1 - 1) - e^{\psi_0} (\psi_0 - 1)$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \psi^2 e^{\psi} d\psi = e^{\psi_1} (\psi_1^2 - 2\psi_1 + 2) - e^{\psi_0} (\psi_0^2 - 2\psi_0 + 2)$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \psi^3 e^{\psi} d\psi = e^{\psi_1} (\psi_1^3 - 3\psi_1^2 + 6\psi_1 - 6) - e^{\psi_0} (\psi_0^3 - 3\psi_0^2 + 6\psi_0 - 6)$$

Introducând relațiile (2-3) în ecuația (2-4) și grupând convenabil termenii :

$$e^{\psi_1} \left[1 + \frac{\Theta}{\chi} - \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} - \psi_1 \left(1 + \frac{\Theta}{\chi} - \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} \right) - \psi_1^2 \frac{\Theta}{\chi} \left(\frac{1}{\chi} - \frac{3}{\chi^2} \right) - \psi_1^3 \frac{\Theta}{\chi^3} \right] =$$

$$= e^{\psi_0} \left[1 + \frac{\Theta}{\chi} - \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} - \psi_0 \left(1 + \frac{\Theta}{\chi} - \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} \right) - \psi_0^2 \frac{\Theta}{\chi} \left(\frac{1}{\chi} - \frac{3}{\chi^2} \right) - \psi_0^3 \frac{\Theta}{\chi^3} \right] \quad (2-5)$$

neglijând termenii de grad superior în ψ_0 și ψ_1 , ^{respectiv în $\psi_0^2, \psi_0^3, \psi_1^2, \psi_1^3$} se obține după simplificare ecuația :

$$e^{\psi_1} (1 - \psi_1) = e^{\psi_0} \left[1 - \psi_0 + \frac{\Theta}{1 + \frac{\Theta}{\chi} - \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3}} \right] \quad (2-7)$$

Revenind la parametrii inițiali, în locul parametrului Θ , ecuația de mai sus devine :

$$e^{\psi_1} (1 - \psi_1) = e^{\psi_0} \left[1 - \psi_0 + \frac{\Theta}{1 + \frac{\mu(\chi - \psi_0)}{\chi^2} \left(1 - \frac{2}{\chi} + \frac{6}{\chi^2} \right)} \right] \quad (2-8)$$

D-II-2-4

Prin logaritmare :

$$\gamma_1 + \ln(1 - \gamma_1) = \mathcal{C}_0 \quad (2-9)$$

în care :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \gamma_0 + \ln \left[1 - \gamma_0 + \frac{\xi_0}{1 + \frac{\mu(\chi - \gamma_0)}{\chi^2} \left(1 - \frac{2}{\chi} + \frac{6}{\chi^2}\right)} \right] = \\ &= \xi_0 - \xi_\infty + \ln \left\{ 1 - \xi_0 + \xi_\infty + \frac{\xi_0}{1 + \frac{\mu(\delta - \xi_0)}{(\delta - \xi_\infty)^2} \left[1 - \frac{2}{\delta - \xi_\infty} + \frac{6}{(\delta - \xi_\infty)^2}\right]} \right\} \quad (2-10) \end{aligned}$$

Ecuatia de mai sus prezintă o particularitate esențială pentru rezolvarea ei. Pentru a scoate în evidență această particularitate să scriem și ecuația care permite calculul saltului maxim în cazul castelelor simple :

$$\xi_1 + \ln(1 - \xi_1) = \xi_0 \quad (2-11)$$

Rezultă că în cazul castelelor pneumatice se vor putea utiliza rezultatele obținute în cazul castelelor de echilibru simple, pentru determinarea saltului maxim, inclusiv formulele aproximative, dacă în locul lui ξ_0 se consideră \mathcal{C}_0 iar în locul lui ξ_1 se consideră γ_1 .

După determinarea lui γ_1 , se va reveni în final la variabila inițială ξ_1 cu relația :

$$\xi_1 = \gamma_1 + \xi_\infty \quad (2-12)$$

Determinarea celui de al doilea nivel extrem,
nivelul minim ξ_2

Se face în soluția generală :

D-11-1-9

$$j: = 2, \quad \psi: = \psi_2, \quad \dot{\psi}_1^2: = 0; \quad \dot{\psi}_2^2: = 0 \quad (2-13)$$

Din soluția generală se obține ecuația care definește nivelul minim ψ_2 :

$$(1-\theta + \psi_2) e^{-\psi_2} - \theta \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{e^{-\psi}}{1 - \frac{\psi}{\alpha}} d\psi = (1-\theta + \psi_1) e^{-\psi_1} \quad (2-14)$$

Se procedează și aici la dezvoltarea în serie a fracției $\frac{1}{1 - \frac{\psi}{\alpha}}$ și reșcrierea ecuației într-o formă mai simplă de vorbiri, anume: combinându-se ecuația (2-14) cu următoarea:

$$(1-\theta + \psi_2) e^{-\psi_2} - \theta \int_{\psi_1}^{\psi_2} e^{-\psi} \left(1 + \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^3}{\alpha^3}\right) d\psi = (1-\theta + \psi_1) e^{-\psi_1} \quad (2-15)$$

Se țin cont de integralele de mai jos :

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} e^{-\psi} d\psi = e^{-\psi_1} - e^{-\psi_2}$$

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \psi e^{-\psi} d\psi = e^{-\psi_1} (1 + \psi_1) - e^{-\psi_2} (1 + \psi_2) \quad (2-16)$$

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \psi^2 e^{-\psi} d\psi = e^{-\psi_1} (\psi_1^2 + 2\psi_1 + 2) - e^{-\psi_2} (\psi_2^2 + 2\psi_2 + 2)$$

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \psi^3 e^{-\psi} d\psi = e^{-\psi_1} (\psi_1^3 + 3\psi_1^2 + 6\psi_1 + 6) - e^{-\psi_2} (\psi_2^3 + 3\psi_2^2 + 6\psi_2 + 6)$$

D-II-2-6

Se efectuează acum integrala din (2-15) și după ordonarea termenilor se obține ecuația :

$$e^{-\Psi_2} \left[1 + \frac{\Theta}{\chi} + \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} + \Psi_2 \left(1 + \frac{\Theta}{\chi} + \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} \right) + \Psi_2^2 \left(\frac{\Theta}{\chi^2} + \frac{3\Theta}{\chi^3} \right) + \frac{\Theta}{\chi^3} \Psi_2^3 \right] =$$

$$e^{-\Psi_1} \left[1 + \frac{\Theta}{\chi} + \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} + \Psi_1 \left(1 + \frac{\Theta}{\chi} + \frac{2\Theta}{\chi^2} + \frac{6\Theta}{\chi^3} \right) + \Psi_1^2 \left(\frac{\Theta}{\chi^2} + \frac{3\Theta}{\chi^3} \right) + \frac{\Theta}{\chi^3} \Psi_1^3 \right] \quad (2-17)$$

Neglijind și aici termenii de grad superior în Ψ_1 și Ψ_2 :

$$e^{-\Psi_2} (1 + \Psi_2) = e^{-\Psi_1} (1 + \Psi_1) \quad (2-18)$$

Logaritmind :

$$\ln (1 + \Psi_2) - \Psi_2 = \ln (1 + \Psi_1) - \Psi_1 \quad (2-19)$$

Si această ecuație are particularitatea remarcabilă de a fi formal identică cu ecuația de la castelele simple, dacă litera Ψ se înlocuiește formal cu litera ξ . De aceea și în acest caz tabelele și formulele aproximative relative la castelele simple se pot folosi și în cazul castelelor pneumatice.

Determinarea succesivă a nivelurilor extreme ξ_j

Pentru determinarea nivelului extrem se pleacă de la soluția generală, presupunându-se cunoscută valoarea ξ_{j-1} :

$$j := j \quad ; \quad \Psi := \Psi_j \quad ; \quad \dot{\Psi}_j^2 := 0 \quad ; \quad \dot{\Psi}_{j-1}^2 = 0 \quad (2-20)$$

D. II-2-7

Se obține următoarea ecuație, definitorie pentru nivelul extrem \mathcal{S}_j :

$$(-1)^j \Psi_j \left[(-1)^j + \Psi_j - \Theta \right] - \Theta \int_{\Psi_{j-1}}^{\Psi_j} \frac{(-1)^j e^{(-1)^j \Psi}}{1 - \frac{\Psi}{\alpha}} d\Psi = e^{(-1)^j \Psi_{j-1}} \left[(-1)^j + \Psi_{j-1} - \Theta \right] \quad (2-21)$$

Efectuând calcule analoge cu cele efectuate la determinarea lui Ψ_1 și Ψ_2 și neglijând termenii de ordin superior în Ψ_{j-1} și Ψ_j se obține în final ecuația :

$$\ln \left[1 + (-1)^j \Psi_{j-1} \right] - (-1)^j \Psi_{j-1} = \ln \left[1 + (-1)^j \Psi_j \right] - (-1)^j \Psi_j \quad (2-22)$$

Ținând cont că $\Psi_{2k} < 0$ (minim) și $\Psi_{2k+1} > 0$ (maxim) ecuația de mai sus se poate scrie și :

$$\ln \left[1 + |\Psi_{j-1}| \right] - |\Psi_{j-1}| = \ln \left[1 + |\Psi_j| \right] + |\Psi_j| \quad (2-23)$$

Ecuația de mai sus este și ea formal identică cu cea dedusă în cazul castelelor de echilibru, de aceea și în cazul general se pot transpune rezultatele obținute în studiul castelelor de echilibru simple.

Din cele de mai sus rezultă că pentru modelarea acestor castele pneumatice la închiderea bruscă totală, determinant este criteriul $\mathcal{C}_0 = \text{idem}$.

D-II-3-1

PARTEA III - D - CASTEL DE ECHILIBRU PNEUMATIC
(SECTIUNE CONSTANTA) CU CAMERA
SUPERIOARA INCHISA ETANS

Capitolul II - Inchiderea totală rapidă

§ 3 . Sistematizarea calculului nivelelor extreme
folosind un calculator "Olivetti programma 101"

Intrucît calculele de determinare a parametrului C_0 în special sînt laborioase iar pe de altă parte s-a urmărit a se face un studiu aprofundat al modului în care saltul maxim depinde de diverşii parametrii care apar în formulele respective s-au întocmit programe pentru calculatorul "Olivetti programma 101", calculator aflat în dotarea Facultăţii de electrotehnică şi la care tovarăşul profesor Rogojan, căruia îi mulţumesc pe această cale, mi-a permis a efectua calculele.

Se vor prezenta în continuare 3 programe :

Programul nr.1

Cu acest program s-a calculat parametrul ζ_∞ . Parametrul ζ_∞ reprezintă, sub formă adimensională nivelul de repaus către care tinde mişcarea cvasi-oscilatorie atunci cînd timpul creşte nemărginit. După cum s-a arătat în paragrafele anterioare, formula de calcul este :

$$\zeta_\infty = \frac{1}{2} \left[\mu + \delta - \sqrt{(\mu + \delta)^2 - 4\mu\zeta_0} \right] \quad (6-1)$$

Intrucît formula este simplă nu voi reda decît programul, fără a mai da şi organigrama corespunzătoare.

D-II-3-2

Programul Nr. 1

$$S_0 = \frac{1}{2} \left\{ \mu + \delta - \sqrt{(\mu + \delta)^2 - 4\mu S_0} \right\}$$

Nr. crt.	Instrucție	Registru		Adrese				
		Multiplicator	Acumulator	B	C	D	E	F
1	AV			2				
2	S							
3	D↓	$-S_0$				$-S_0$		
4	S							
5	F↑	μ						μ
6	S							
7	E↑	δ					δ	
8	D↓		$-S_0$					
9	Bx		$-2S_0$					
10	Bx		$-4S_0$					
11	Fx		$-4\mu S_0$					
12	C↓				$-4\mu S_0$			
13	F↓		μ					
14	E+		$\mu + \delta$					
15	Ax		$(\mu + \delta)^2$					
16	C+		$(\mu + \delta)^2 - 4\mu S_0$					
17	A√		$\sqrt{(\mu + \delta)^2 - 4\mu S_0}$					
18	C↓				$\sqrt{(\mu + \delta)^2 - 4\mu S_0}$			
19	F↓		μ					
20	E+		$\mu + \delta$					
21	C-		$\mu + \delta - \sqrt{(\mu + \delta)^2 - 4\mu S_0}$					
22	B:		S_0					
23	A○							
24	V							

D-II-3-3-

Programul nr.2

După cum s-a arătat în paragraful anterior, în cazul castelurilor de echilibru pneumatice cu cameră superioară etanșă, rolul pe care îl juca parametrul inițial al pierderilor de energie în cazul castelurilor simple, îl joacă acum un alt parametru C_0 . Aceasta rezultă evident din compararea ecuațiilor care dau nivelul maxim în castel în cazul castelului pneumatic, respectiv în cazul castelului simplu :

$$\Psi_1 + \ln(1 - \Psi_1) = C_0 \quad \text{castel pneumatic (6-2)}$$

$$\Psi_1 + \ln(1 - \Psi_1) = C_0 \quad \text{castel cilindric (6-3)}$$

Parametrul C_0 are expresia :

$$C_0 = \Psi_0 + \ln \left[1 - \Psi_0 + \frac{\Psi_0}{1 + \frac{\mu(\chi - \Psi_0)}{\chi^2} \left(1 - \frac{2}{\chi} + \frac{6}{\chi^2}\right)} \right] \quad (6-4)$$

Se calculează în cadrul programului 2 expresia care intervine în logaritmul natural de mai sus :

$$E = 1 - \Psi_0 + \frac{\Psi_0}{1 + \frac{\mu(\chi - \Psi_0)}{\chi^2} \left(1 - \frac{2}{\chi} + \frac{6}{\chi^2}\right)} \quad (6-5)$$

Programul nr.2 este tocmai programul de calcul al expresiei E .

D II-3-4

Programul Nr.2.

$$E = 1 - \psi_0 + \frac{\psi_0}{1 + \frac{\mu(x - \psi_0)}{x^2} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}$$

Nr.crf	Instrucție	Registru		Adrese						
		Multiplicator	Acumulator	B	B'	C	C'	D	D'	E
1	AV			1						
2	S									
3	C↑	x				x				
4	S									
5	D↑	$-\psi_0$						$-\psi_0$		
6	S									
7	E↑	μ								μ
8	S									
9	C↑	$-\psi_0$						$-\psi_0$		
10	C↓		x							
11	D+		$x - \psi_0$							
12	Ex		$\mu(x - \psi_0)$							
13	C:		$\frac{\mu(x - \psi_0)}{x}$							
14	C:		$\frac{\mu(x - \psi_0)}{x^2}$							
15	E↓									$\frac{\mu(x - \psi_0)}{x^2}$
16	B↓		1							
17	C:		$\frac{1}{x}$							
18	C↑					$\frac{1}{x}$				
19	C↓		$\frac{1}{x}$							
20	Ax		$\frac{1}{x^2}$							
21	B'↓				$\frac{1}{x^2}$					
22	B↓		1							
23	D+		$1 - \psi_0$							
24	D↓							$1 - \psi_0$		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
25	B'↓		$\frac{1}{x^2}$							
26	A+		$\frac{2}{x^2}$							
27	B'+		$\frac{3}{x^2}$							
28	A+		$\frac{6}{x^2}$							
29	B+		$1 + \frac{6}{x^2}$							
30	B'↓				$1 + \frac{6}{x^2}$					
31	C↓		$\frac{1}{x}$							
32	A+		$\frac{2}{x}$							
33	C↓					$\frac{2}{x}$				
34	B'↓		$1 + \frac{6}{x^2}$							
35	C-		$1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}$							
36	E x		$\frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})$							
37	B+		$1 + \frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x})$							
38	C↓					$1 + \frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x})$				
39	C'↓		$-\psi_0$							
40	C:		$\frac{-\psi_0}{1 + \frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})}$							
41	E↑									$\frac{-\psi_0}{1 + \frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})}$
42	D↓		$1 - \psi_0$							
43	E-		$1 - \psi_0 + \frac{\psi_0}{1 + \frac{\mu(x-\psi_0)}{x^2} (1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})}$							
44	A 0									
45	V									

D-II-3-6

Programul nr. 3

Cu ajutorul programului 3 se calculează valoarea parametrului ψ_0 după formula :

$$\psi_0 = \Psi_0 + \ln E = \Psi_0 + 2,302585 (\log \alpha + m); \quad 1 \leq \alpha < 10 \quad (6-6)$$

m pozitiv sau negativ

A fost necesară întocmirea acestui program întrucît calculatorul "Olivetti programma 101" nu permite scoaterea directă a logaritmului.

S-a ținut întîi cont de relația care există între logaritmul natural și logaritmul zecimal :

$$\ln E = 2,302585 \log E \quad (6-7)$$

Apoi trebuiește scris E în așa fel încît să fie reprezentat de produsul dintre un număr care să aibă la partea întregă o singură cifră, notat α , semnificativă și un număr care să fie o putere a numărului zece :

$$L = \alpha \cdot 10^m \quad (6-8)$$

Prin logaritmare a lui E de mai sus se obține tocmai expresia (6-6).

Pentru calculul logaritmului zecimal s-a utilizat următoarea formulă aproximativă :

$$\log \alpha = C_1 \omega + C_2 \omega^3 + C_3 \omega^5 \quad (6-9)$$

în care :

$$C_1 = 13,897423454$$

$$C_2 = 4,632428$$

$$C_3 = 2,7975$$

$$\omega = \frac{\sqrt[16]{\alpha-1}}{\sqrt[16]{\alpha+1}}$$

Programul Nr. 3

$$C_0 = \psi_0 + \ln E = \psi_0 + 2.302585(m + \log \alpha)$$

Nr. crt.	Instrucție	Registru		Adrese								
		Multiplicator	Acumulator	B	B'	C	C'	D	D'	E	E'	F
1	AV					C ₁	C ₂	C ₃	2.302585	1		
2	S											- ψ_0
3	E↑	$-\psi_0$										
4	S				α							
5	B'↑	α										
6	S											π
7	F↑	π										
8	B'↓		α									
9	AV		$\sqrt{\alpha}$									
10	AV		$\sqrt[4]{\alpha}$									
11	AV		$\sqrt[8]{\alpha}$									
12	AV		$\sqrt[16]{\alpha}$									
13	B↓			$\sqrt[16]{\alpha}$								
14	B↓		$\sqrt[16]{\alpha}$									
15	E+		$1 + \sqrt[16]{\alpha}$									
16	B'↑				$1 + \sqrt[16]{\alpha}$							
17	B↓		$\sqrt[16]{\alpha}$									
18	E-		$\sqrt[16]{\alpha} - 1$									
19	B':		$W = \frac{\sqrt[16]{\alpha} - 1}{\sqrt[16]{\alpha} + 1}$									
20	B'↑				W							
21	B'↓		W									
22	Ax		W^2									
23	Dx		$C_3 W^2$									
24	C'+		$C_2 + C_3 W^2$									

Nr. crt.	Instructie	Multiplicator	Acumulator	B	B'	C	C'	D	D'	E	E'	F
25	B'x		$C_2 W + C_3 W^3$									
26	B'x		$C_2 W^2 + C_3 W^4$									
27	C+		$C_1 + C_2 W^2 + C_3 W^4$									
28	B'x		$\log \alpha = C_1 W + C_2 W^3 + C_3 W^5$									
29	F+		$m \cdot \log \alpha$									
30	D'x		$\ln E = 2,302585(m + \log \alpha)$									
31	E'-		$\psi_0 = \psi_0 + \ln E$									
32	AQ											
33	V											

F-I-1-1

F.- CASTELE DE ECHILIBRU PARTIAL PNEUMATICE (CU ORIFICII)
 CASTELE CU SECTIUNE EXPONENTIAL VARIABILA

Capitolul I - INCHIDEREA TOTALA BRUSCA

§ 1.- Cîteva elemente teoretice
 Castele parțial pneumatice

Schema unei amenajări cu castel de echilibru parțial pneumatic este dată în figura Nr.1.

Se pune la început problema stabilirii modelului matematic al fenomenului evasi oscilatoriu care ia naștere ca urmare a manevrei de închidere totală bruscă a vanei de reglaj, regimul inițial fiind considerat un regim permanent, în scopul determinării saltului maxim.

Notînd cu p_{Fab} presiunea absolută sau totală ^{a aerului din castelul de echilibru} la un moment dat și cu p_{at} presiunea atmosferică și utilizînd ecuația lui Bernoulli în același mod ca și în cazul castelurilor de echilibru simple sau ca și în cazul castelurilor pneumatice se obține aceeași ecuație de mișcare ca și în cazurile respective :

$$\frac{L}{g} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h_{st}}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p_{Fab} - p_{at}}{\gamma} + z + \frac{P_f}{2g} |w|w + \frac{P_F}{2g} |v|v \stackrel{=0}{(1-1)}$$

Ecuația de continuitate rămîne de asemenea neschimbată :

$$F v = f w \quad (1-2)$$

și tot așa ecuația de definiție a vîrîinii v :

$$v = \frac{dz}{dt} \quad (1-3)$$

Eliminînd din aceste trei ecuații vitezele v și w se obține ecuația evasi oscilațiilor sub aceeași formă ca și în cazul castelurilor citate anterior :

E-I-1-2

$$\frac{F}{gf} + \frac{h_{st}}{g} \left) \frac{d^2z}{dt^2} + \left(P_f \frac{F^2}{f^2} + P_F \right) \frac{1}{2g} \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} + z + \frac{p_{fab} - p_{at}}{\rho} = 0 \quad (1-4)$$

Utilizând ipotezele simplificatoare și notațiile de la celelalte tipuri de castele ecuația cvasi oscilațiilor capătă forma dimensională tip :

$$\frac{LF}{gf} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{2g} \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} + z + \frac{p_{at}}{\rho} \left(\frac{p_{fab}}{p_{at}} - 1 \right) = 0 \quad (1-5)$$

Utilizând sistemul național al mărimilor de referință, utilizat și în cazul celorlalte tipuri de castele de echilibru :

$$Z_* = \frac{LF}{Kf} = \frac{df}{\lambda_e F} \quad (1-6)$$

$$T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}$$

se obține următoarea formă adimensională a ecuației cvasi oscilațiilor, aceeași formal ca și în cazul castelelor de echilibru perfect pneumatice :

$$\frac{d^2\mathcal{S}}{d\mathcal{T}^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{T}} \right| \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{T}} + \mathcal{S} + \mu (\mathcal{T} - 1) = 0 \quad (1-7)$$

în care :

$$\mathcal{S} = \frac{z}{Z_*} ; \mathcal{T} = \frac{t}{T_*} ; \mu = \frac{p_{at}}{\rho Z_*} ; \mathcal{T} = \frac{p_{fab}}{p_{at}} \quad (1-8)$$

În cazul castelelor simple $\mathcal{T} \equiv 1$, iar în cazul castelelor perfect pneumatice considerând transformarea aerului din camera superioară etanșă ca o transformare izotermă a fost posibilă exprimarea funcției $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$. În acest caz la castelelor parțial pneumatice lucrurile se complică mai mult deoarece \mathcal{T} este funcție atât de variabila \mathcal{S} cit și de variabila timp \mathcal{T} . Deoarece în ecuația (1-7) apar două funcții necunoscute \mathcal{S} și \mathcal{T} de variabila \mathcal{T} este necesar a se mai găsi o ecuație.

Conform indicațiilor bibliografice /6-C/, /8-G/, se consideră, și experiența confirmă, că la trecerea prin orificii sau ajutaje nu există schimb de căldură cu exteriorul, iar căldura care ia naștere datorită frecărilor rămâne în masa aerului. Aceasta se datorește vitezei mari cu care circulată aerul și care nu lasă

E-I-1-3

timp pentru efectuarea schimbului de căldură. În consecință avem de-a face cu o curgere adiabatică la care coeficientul de debit, notat cu M trebuie determinat experimental sau luat din tabele, dacă se utilizează un tip studiat de coeficient sau ajutoraj. Debitul aerului care iese din camera superioară a castelului în ~~perioada~~ ^{intervalul} de timp ce trece de la închiderea bruscă și pînă ce nivelul apei atinge în castel nivelul maxim, ~~perioada~~ ^{timp} în care nivelul apei urcă în castel, se poate exprima atunci cu formula :

$$\frac{dG}{dt} = -\mu A \sqrt{\frac{2g\alpha}{\alpha-1} p_{Fab} \gamma_{aer} \left[1 - \left(\frac{p_{at}}{p_{Fab}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]} \quad (1-9)$$

în care :

p_{Fab} = presiunea absolută în camera superioară a castelului pneumatic la un moment oarecare

γ_{aer} = greutatea specifică a aerului corespunzătoare presiunii

p_{at} = presiunea atmosferică

α = exponent adiabatic, în cazul aerului

A = secțiunea orificiului (ajutorajului)

Pe de altă parte transformarea aerului din camera superioară a castelului fiind o transformare izotermă din motivele expuse la castelul perfect pneumatic cu masă variabilă de aer satisface relațiile :

$$\frac{p_{Fab}}{p_{at}} = \frac{\gamma_{aer}}{\gamma_{at}} \implies \gamma_{aer} = \gamma_{at} \frac{p_{Fab}}{p_{at}} \quad (1-10)$$

$$p_{Fab} V = GRT \implies V \frac{dp_{Fab}}{dt} + p_{Fab} \frac{dV}{dt} = RT \frac{dG}{dt} \quad (1-11)$$

în care :

T = temperatura absolută din camera superioară a castelului, considerată egală cu temperatura aerului atmosferic

R = constanta universală a gazelor

V, G = volumul, respectiv greutatea aerului aflat în camera superioară a castelului la un moment dat.

E-I-1-4

Din ultimele trei relații se poate elimina și rezultând :

$$\sqrt{\frac{dp_{Fab}}{dt} + p_{Fab} \frac{dV}{dt}} = -\mu \Delta RT \frac{p_{Fab}}{p_{at}} \sqrt{\frac{2g\lambda}{\lambda-1} \frac{v_{at}}{p_{at}} \left[1 - \left(\frac{p_{at}}{p_{Fab}} \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right]} \quad (1-12)$$

Pe de altă parte volumul de aer la un moment dat se poate exprima cu ajutorul cotei z prin relația :

$$V = (h_F - z) F \quad (1-13)$$

Rezultă atunci :

$$\frac{d}{dt} \left[(h_F - z) F p_{Fab} \right] = -\mu \Delta RT \frac{p_{Fab}}{p_{at}} \sqrt{\frac{2g\lambda}{\lambda-1} \frac{v_{at}}{p_{at}} \left[1 - \left(\frac{p_{at}}{p_{Fab}} \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right]} \quad (1-14)$$

Trecînd în relația de mai sus la adimensionalizarea mărimilor și introducînd notațiile uzuale :

$$\delta = \frac{h_F}{Z_*}, \quad \Pi = \frac{p_{Fab}}{p_{at}}, \quad \xi = \frac{z}{Z_*}, \quad \tau = \frac{t}{T_*} \quad (1-15)$$

$$\alpha = \frac{\mu \Delta RT T_*}{F Z_*} \sqrt{\frac{2g\lambda}{\lambda-1} \frac{v_{at}}{p_{at}}}$$

relația (1-14) capătă forma adimensională :

$$\frac{d}{d\tau} \left[(\delta - \xi) \Pi \right] = -\alpha \Pi \sqrt{1 - \Pi^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}} \quad (1-16)$$

Aceasta este cea de a doua ecuație de bază, care împreună cu ecuația (1-7) permite în principiu rezolvarea problemei.

Cum calculele sînt foarte dificile se va introduce o ipoteză simplificatoare, considerîndu-se că debitul de aer care trece prin orificiu (ajutaj) este o constantă notată sub formă adimensională cu β , care se determină din starea inițială și finală (corespunzătoare nivelului extrem). Aceasta are și un suport fizic știut fiind că debitul crește numai pînă la un debit critic, după care rămîne constant și nu mai respectă legea analitică considerată. De aici rezultă că nu se face o eroare prea mare considerînd o valoare constantă a acestui debit păstrîndu-se prin aceasta ceea ce este caracteristic fenomenului și în consecință în locul relației (1-16) se utilizează în continuare relația aproximativă :

$$\frac{d}{d\tau} \left[(\delta - \xi) \pi \right] = -\beta \quad (1-17)$$

Ecuatia de mai sus se poate integra imediat între limitele $\tau_0 = 0$ și $\tau = \tau$ obținându-se :

$$(\delta - \xi) \pi - (\delta - \xi_0) \pi_0 = -\beta \tau \Rightarrow \pi = \frac{\delta - \xi_0}{\delta - \xi} - \frac{\beta \tau}{\delta - \xi} \quad (1-18)$$

Se poate acum elimina funcția necunoscută π din ecuația (1-7) și se obține ecuația cuasi oscilațiilor valabilă până în momentul atingerii nivelului maxim sub forma :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi + \mu \frac{\xi - \xi_0}{\delta - \xi} - \mu \beta \frac{\tau}{\delta - \xi} = 0 \quad (1-19)$$

Se observă că primii trei termeni ai ecuației de mai sus reprezintă modelul matematic din cazul castelelor de echilibru simple, primii patru termeni modelul matematic al castelelor de echilibru parțial pneumatice iar ultimul termen reprezintă influența orificiilor (ajutajelor) care având semn negativ după cum era normal, micșorează efectul amortizor al aerului comparativ cu castelele perfect pneumatice.

Ecuatia de mai sus încă nu se poate integra direct de aceea se mai face o ipoteză simplificatoare, considerind în ultimul termen al ecuației de mai sus că nivelul apei crește direct proporțional cu timpul adică :

$$\xi = \xi_0 + \gamma \tau \Rightarrow \tau = \frac{\xi - \xi_0}{\gamma} \quad (1-20)$$

în care viteza adimensională γ se determină din condițiile inițiale și finale.

Rezultă atunci că modelul matematic al fenomenului este dat de ecuația :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi + \mu \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{\xi - \xi_0}{\delta - \xi} = 0 \quad (1-21)$$

cu condițiile inițiale :

$$\tau = 0 \Rightarrow \xi = \xi_0 \quad (1-22)$$

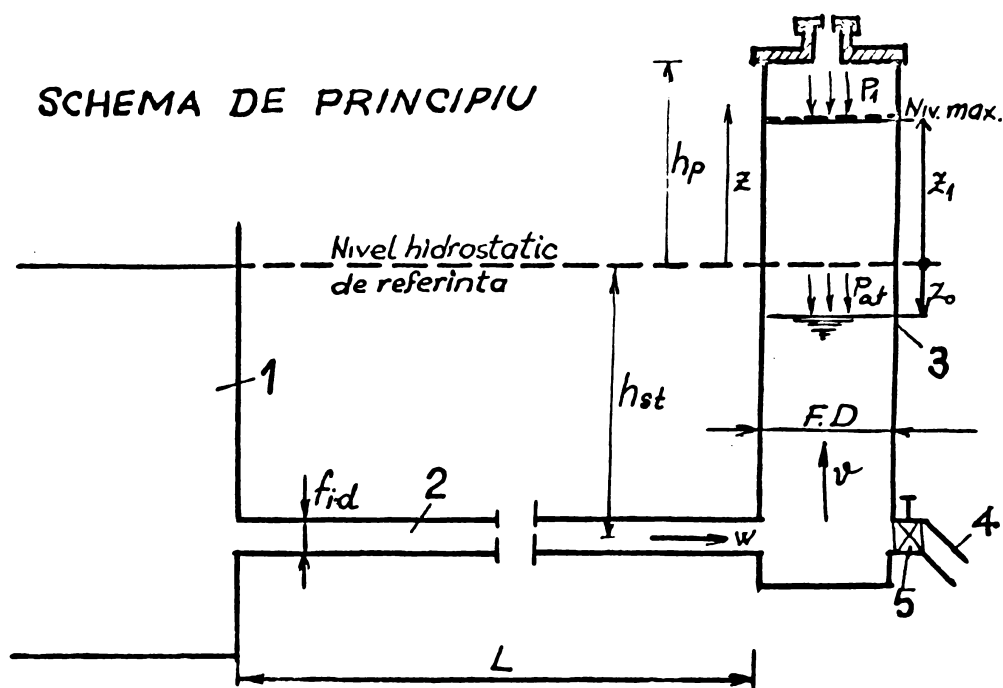
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{2\xi_0}$$

Ecuatia la care s-a ajuns este identică cu cea de la castelele de echilibru pneumatice și în consecință se rezolvă la fel

E-I-1-6

constanta μ din acel caz trebuind să fie înlocuită cu constanta $\mu(1 - \frac{\beta}{\gamma})$, deci oscilațiile se vor produce în castelul parțial pneumatic, în prima perioadă, ca și în cazul unui castel perfect pneumatic. Dacă orificiile sînt foarte mici în raport cu secțiunea transversală a castelului și efectul lor va fi mic iar ipotezele simplificatoare utilizate vor avea un efect neglijabil deoarece afectează un termen cu pondere relativ mică. De aceea considerăm că modelul matematic reprezentat de (1-21) și (1-22) este valabil pentru cazul orificiilor mici, așa cum au fost cele cercetate experimental. Se confirmă din cercetările experimentale că la acest tip de orificii se obține un salt maxim apropiat de saltul maxim din cazul castelului perfect permeabil. Bine înțeles, cele de mai sus reprezintă abia o primă aproximație pentru rezolvarea problemei sînt necesare studii în continuare.

SCHEMA DE PRINCIPIU



- | | |
|---|---------------------|
| 1. Lac de acumulare | 4. Conducte forțate |
| 2. Galerie de aducțiune | 5. Vană reglaj |
| 3. Castel de echilibru
parțial pneumatic | |

FIGURA NR. 1(8)
SCHEMA UNEI AMENAJĂRI CU CASTEL
DE ECHILIBRU PARȚIAL PNEUMATIC

E-I-2-1

E.- CASTEL DE ECHILIBRU PARTIAL PNEUMATIC

CASTEL DE ECHILIBRU CU SECTIUNE EXPONENTIAL VARIABILA

Capitolul I - INCHIDEREA TOTALA RAPIDA

§ 2.- Castel de echilibru cu sectiune exponential variabilă. Stabilirea modelului matematic

Introducerea acestui paragraf are drept scop de a exemplifica o viitoare direcție de cercetare în care rezultatele obținute în cazul castelelor de echilibru simple ar putea fi extinse și asupra altor tipuri de castele. Într-adevăr, castelele de echilibru simple, deși au avantajul unui model matematic dar și rezultatele experimentale sînt în bună concordanță cu rezultatele teoretice, prezintă însă dezavantajul că salturile care se produc sînt relativ mari iar amortizarea oscilațiilor este destul de slabă.

De aceea, așa cum s-a subliniat și cu ocazia discuțiilor care au avut loc pe marginea "Seminarului Național de hidraulică aplicată", Timișoara 1-3 noiembrie 1973 este de cea mai mare importanță adoptarea unor soluții care să elimine aceste deficiențe ale castelelor simple. Pe această linie în cadrul prezentei teze s-au propus un număr de trei variante și anume :

- castele de echilibru de secțiune constantă cu camera superioară închisă etanș, care însă, așa cum se va vedea ulterior, au dezavantajul că în cazul în care camera superioară etanșă cu aer nu este dimensionată corespunzător se pot produce suprapresiuni importante.

- castele de echilibru cu camera superioară prevăzută cu orificii. Aceste castele, cum se va arăta în cele ce urmează pre-

E-I-2-2

zintă avantajul unei limitări a creșterii presiunii, o reducere substanțială a amplitudinilor oscilațiilor și o amortizare rapidă a lor.

- castele de echilibru cu secțiune variabilă, crescătoare cu creșterea nivelului apei în castel (pentru reducerea saltului maxim). Acest tip de castele prezintă avantaje importante în ceea ce privește reducerea saltului maxim ce apare în urma unei manevre de închidere bruscă (parțială sau totală) a vanei de reglaj cât și în ceea ce privește amortizarea oscilațiilor. Acesta este motivul pentru care acest tip de castele au început să fie studiate mai mult și utilizate în practică în ultima perioadă de timp /13-C /1-B/, /1-P/. Toate studiile au mers pe linia programării la calculator a rezolvării ecuațiilor diferențiale neliniare transformate în ecuații cu diferențe finite, de aceea literatura de specialitate nu cunoaște formule și nici alte metode expeditiv de determinare a saltului maxim în cazul acestui tip de castele, deși se recunoaște în mod unanim necesitatea lor.

În teză se consideră un tip special de castele de echilibru cu secțiune variabilă, la care s-a putea extinde în mod natural, rezultatele obținute în cadrul castelelor de echilibru simple. Acest tip special va fi denumit "castel de echilibru cu secțiune exponențial variabilă" și în cele ce urmează, la momentul oportun, se va da și justificarea acestei denumiri.

Utilizând notațiile uzuale, și anume :

z = cota nivelului apei în castel, axa Oz fiind orientată ascendent și având originea la nivelul hidrostatic

D = diametrul castelului de echilibru, variabil în raport cu cota z

F = secțiunea castelului de echilibru, variabilă în raport cu cota z

E-I-2-3

F_0 = secțiunea castelului de echilibru la cota z_0 , corespunzătoare regimului permanent inițial

g = accelerația gravitațională

d = diametrul galeriei de aducțiune

f = secțiunea galeriei de aducțiune

L = lungimea galeriei de aducțiune

K = coeficient de rezistență global al aducțiunii, definit prin relația :

$$z_0 = -K w_0^2 = -\lambda_e \frac{L}{d} \cdot \frac{w_0^2}{2g} \quad (2-1)$$

λ_e = coeficient de rezistență global, de tip Darcy, al aducțiunii

w = viteza apei în galeria de aducțiune ; în momentul inițial w_0 .

$\frac{dz}{dt} = v$ = viteza apei în castelul de echilibru ; în momentul inițial v_0 .

Ecuatiile fundamentale în cazul manevrei de închidere totală bruscă sînt în număr de două și anume :

- ecuația de continuitate :

$$fw = Fv \quad (2-2)$$

- ecuația dinamică, rezultat al aplicării ecuației lui Bernoulli :

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} \pm K w^2 + z = 0 \quad (2-3)$$

semnele + și - luîndu-se în același mod ca și în cazul castelurilor simple. În plus se dispune de două ecuații auxiliare :

- ecuația de legătură între v și z :

$$v = \frac{dz}{dt} \quad (2-4)$$

- ecuația care exprimă legea de variație a ariei transversale a castelului în raport cu z :

$$F = F(z) \quad (2-5)$$

Eliminînd viteza apei din castel și din galerie prin uti-

E-I-2-4

lizarea ecuațiilor (2-3) și (2-4) se obține din ecuația (2-3) următoarea ecuație, denumită ca și în cazul castelelor simple, ecuația cvasi oscilațiilor :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} + K \frac{Fg}{fL} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{fg}{FL} z = 0 ; t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2-6)$$

Pentru relativizarea termenilor ecuației de mai sus se utilizează sistemul rațional al mărimilor de referință, același ca și în cazul castelelor de echilibru simple :

$$Z_* = \frac{df}{\lambda_e F_0} ; T_* = \sqrt{\frac{F_0 L}{gf}} \quad (2-7)$$

Se ajunge în acest fel la următoarele nedeterminate sub formă adimensională :

$$\xi = \frac{z}{Z_*} ; \tau = \frac{t}{T_*} \quad (2-8)$$

Este necesară introducerea unui parametru adimensional variabil care să exprime modul de variație al ariei secțiunii transversale a castelului de echilibru :

$$\varphi = \frac{F_0}{F} \leq 1 ; \frac{d\varphi}{d\xi} < 0 \quad (2-9)$$

Prin introducerea acestui parametru ecuația cvasi oscilațiilor capătă forma :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{2} - \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \varphi \xi = 0 ; \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \quad (2-10)$$

Din această ecuație se observă că se micșorează rolul energiei potențiale deoarece $\varphi \xi < \xi$ și crește rolul termenului pătratic. Pentru a se putea utiliza metoda de studiu din cazul castelelor de echilibru simple se introduc prin definiție castelele de echilibru exponențial variabile ca fiind acele castele la care legea de variație a secțiunii este astfel încât :

$$\frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{2} - \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \alpha \geq \frac{1}{2} \quad (2-11)$$

Pentru ~~prin~~ integrarea ecuației diferențiale de mai sus, care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă ea se pune la început sub forma clasică :

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha \varphi = \frac{1}{2} \quad (2-12)$$

Soluția generală a acestei ecuații este :

E-I-2-5

$$\varphi = C e^{-\alpha \xi} + \frac{1}{2\alpha} \quad (2-13)$$

Constanta de integrare se determină din condiția ca pentru $\xi = \xi_0$ să rezulte $\varphi = 1$:

$$C = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) e^{\alpha \xi_0} \quad (2-14)$$

Rezultă că la castelele denumite exponențial variabile legea de variație a secțiunii transversale este dată de relația :

$$\varphi = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) e^{\alpha(\xi_0 - \xi)} + \frac{1}{2\alpha} \quad (2-15)$$

ceea ce justifică denumirea dată acestui tip de castele. Introducând în ecuația cvasi oscilațiilor (2-10), aceasta devine :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \xi e^{\alpha(\xi_0 - \xi)} + \frac{1}{2\alpha} \xi = 0 \quad (2-16)$$

Condițiile inițiale referitoare la ecuația de mai sus sînt aceleași ca la castelele de echilibru simple.

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \xi = \xi_0$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{2\xi_0} \quad (2-17)$$

În continuare se va preciza modul de determinare al parametrului α . Acesta se poate determina din condiția ca pentru o valoare limită a lui ξ să se obțină o valoare dată a raportului arilor :

$$\xi = \xi_{\text{lim}} \Rightarrow \varphi = \varphi_{\text{lim}} \quad (2-18)$$

Se obține atunci, din relația (2-15) valoarea constantei α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \varphi_{\text{lim}}}{\varphi_{\text{lim}} - e^{\alpha(\xi_0 - \xi_{\text{lim}})}} \right] \quad (2-19)$$

În tabelul Nr.1 (81) sînt prezentate calculele numerice necesare pentru trasarea graficelor din figura Nr.1 (26), construite pentru următoarele 6 valori ale parametrului φ_{lim} care acoperă practic întreg domeniul de variație al acestui parametru :

$$\varphi_{\text{lim}} = 0,8000 ; 0,6250 ; 0,5000 ; 0,4000 ; 0,3425 ; 0,2500$$

Cu ajutorul acestui grafic, pentru una dintre valorile φ_{lim}

E-I-2-6

de mai sus și pentru valorile S_0 și S_{lim} considerate se poate determina cu suficientă precizie parametrul δ .

Modul în care se determină saltul maxim, prin integrarea ecuației diferențiale (2-16) cu condițiile inițiale (2-17) se va expune în capitolul următor, metoda fiind analogă aceleia utilizată în cazul castelelor de echilibru simple.

În încheierea acestui paragraf se vor face câteva precizări referitoare la geometria acestor castele de echilibru.

În tabelul Nr.2 (82) sînt prezentate calculele iar în reprezentările grafice Nr.2 (27) sînt trasate castele pentru $S_0 = -0,300$ și valori $\varphi_{lim} = 0,800 ; 0,625 ; 0,400$ și $0,250$.

Se observă din aceste grafice că aceste castele se apropie sensibil de cele tronconice de aceea rezultatele ce se vor obține vor fi aplicabile și castelelor tronconice.

REPREZENTAREA GRAFICA NR.1 (26)
 GRAFIC PENTRU DETERMINAREA PARAMETRULUI α

$$a; \varphi_{lim} = 0,8000$$

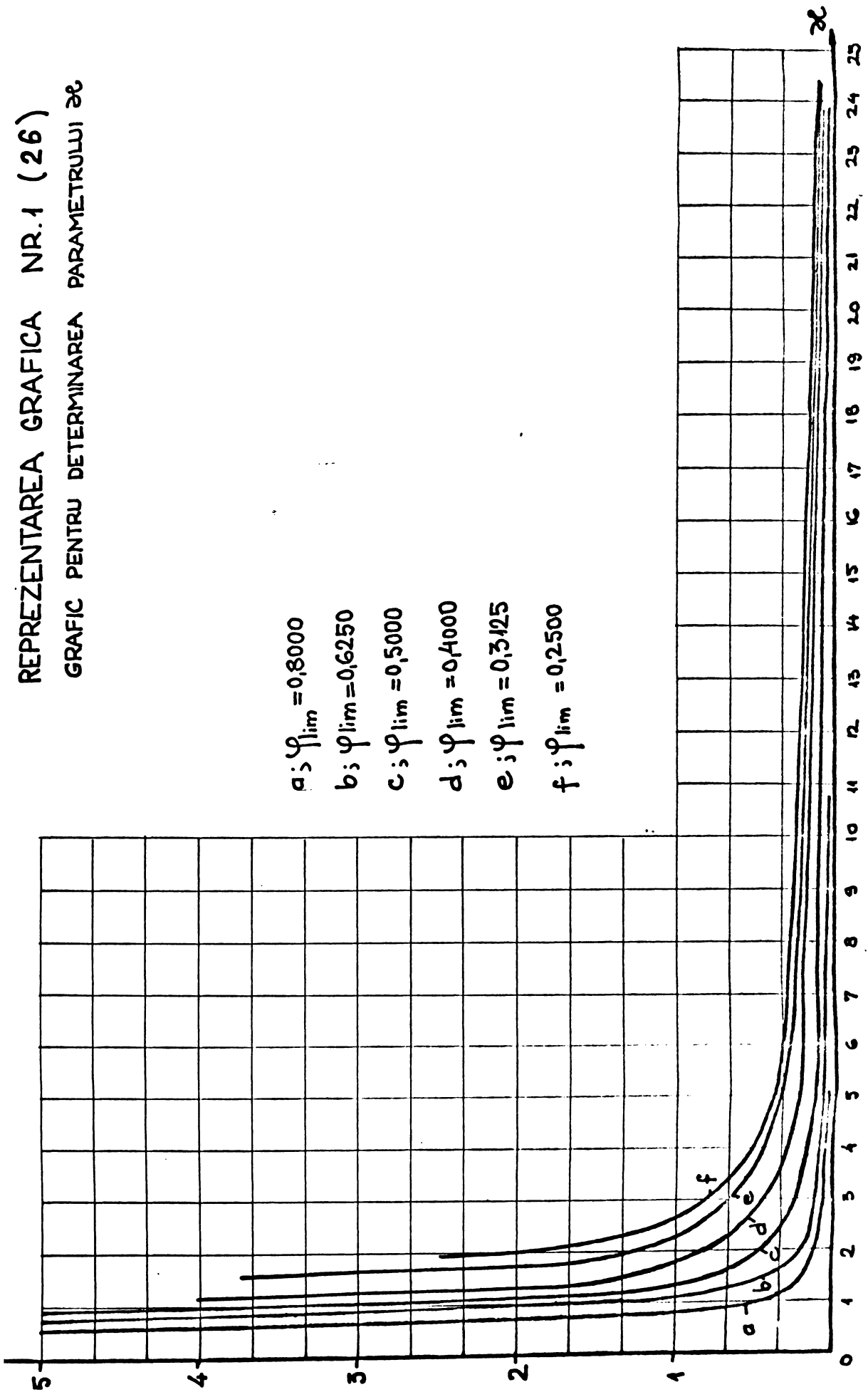
$$b; \varphi_{lim} = 0,6250$$

$$c; \varphi_{lim} = 0,5000$$

$$d; \varphi_{lim} = 0,4000$$

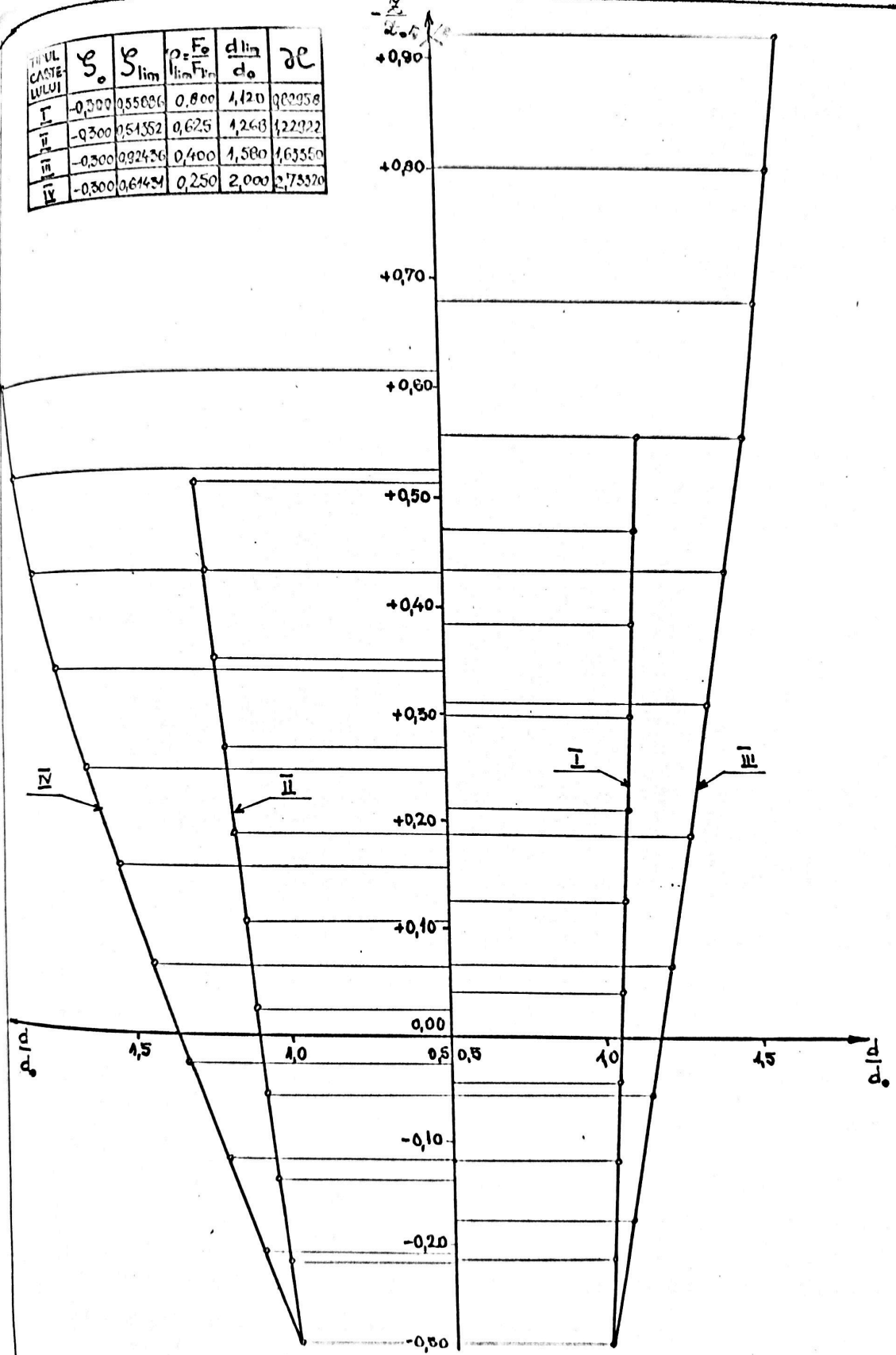
$$e; \varphi_{lim} = 0,3125$$

$$f; \varphi_{lim} = 0,2500$$



E-1-2-13

TR. UL. CASTE- LULUI	ξ_0	ξ_{lim}	$\rho = \frac{F_0}{F_{lim}}$	$\frac{d_{lim}}{d_0}$	αc
I	-0,300	0,55006	0,800	1,120	0,00058
II	-0,300	0,54352	0,625	1,248	0,22022
III	-0,300	0,02426	0,400	1,580	1,63550
IV	-0,300	0,61434	0,250	2,000	2,73370



REPREZENTAREA GRAFICA NR.2 (27)

CASTELE DE ECHILIBRU CU SECTIUNE EXPONENTIAL
 VARIABILA
 — TRASARE —

BUPT

E-I-3-1

E.- CASTELE DE ECHILIBRU PARTIAL PNEUMATICE
 CASTELE DE ECHILIBRU CU SECȚIUNE EXPONENTIAL
 VARIABILĂ

Capitolul II - INCHIDEREA TOTALĂ BRUSCA

§ 3.- Castele de echilibru cu secțiune exponențial
 variabilă. Determinarea saltului maxim

În capitolul anterior s-a ajuns la următorul model matematic al fenomenului oscilațiilor în masă în cazul castelelor cu secțiune exponențial variabilă :

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{d\mathfrak{z}^2} + \mathfrak{x} \left(\frac{d\mathfrak{S}}{d\mathfrak{z}} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2\mathfrak{x}} \right) \mathfrak{S} e^{\mathfrak{x}(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z})} + \frac{1}{2\mathfrak{x}} \mathfrak{S} = 0 \quad (3-1)$$

cu condițiile inițiale de tip Cauchy :

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 \iff \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{S}}{d\mathfrak{z}} = \sqrt{-2\mathfrak{S}_0} \quad (3-2)$$

În cadrul acestui paragraf se va urma metoda de la castelele de echilibru, realizându-se o primă integrare a ecuației de mai sus, suficientă pentru determinarea saltului maxim.

Se face în acest scop o substituție de funcție și de variabilă considerându-se $\dot{\mathfrak{S}}$ noua funcție și \mathfrak{S} noua variabilă .

În acest caz :

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{d\mathfrak{z}^2} = \frac{d\dot{\mathfrak{S}}}{d\mathfrak{z}} = \frac{d\dot{\mathfrak{S}}}{d\mathfrak{S}} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\mathfrak{S}}^2)}{d\mathfrak{S}} \quad (3-3)$$

și se obține din (3-1) următoarea ecuație diferențială liniară neomogenă de ordinul întâi în raport cu $\dot{\mathfrak{S}}^2$:

$$\frac{d(\dot{\mathfrak{S}}^2)}{d\mathfrak{S}} + 2\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{S}}^2 + \left(2 - \frac{1}{\mathfrak{x}} \right) \mathfrak{S} e^{\mathfrak{x}(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z})} + \frac{1}{\mathfrak{x}} \mathfrak{S} = 0 \quad (3-4)$$

cu condiția inițială de tip Cauchy :

E-I-3-2

$$\dot{S} = S_0 \Rightarrow \dot{S}^2 = -2S_0 \quad (3-5)$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este :

$$\dot{S}^2 = e^{-2\alpha S} \left[C - \int \left[\frac{1}{\alpha} S + \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right) S e^{\alpha(S_0 - S)} \right] e^{2\alpha S} dS \right] \quad (3-6)$$

în care C este constanta de integrare care se determină cu ajutorul condițiilor inițiale.

Efectuând integralele care au mai rămas de efectuat în relația de mai sus :

$$\frac{1}{\alpha} \int S e^{2\alpha S} dS = \frac{1}{4\alpha^2} e^{2\alpha S} \left(2S - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3-7)$$

$$\left(2 - \frac{1}{\alpha} \right) \int S e^{\alpha(S_0 + S)} dS = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(S_0 + S)} \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right) \left(S - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3-8)$$

se obține soluția generală sub forma :

$$\dot{S}^2 = e^{-2\alpha S} \left[C - \frac{1}{4\alpha^2} \left(2S - \frac{1}{\alpha} \right) e^{2\alpha S} - \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} \left(S - \frac{1}{\alpha} \right) e^{\alpha(S_0 + S)} \right] \quad (3-9)$$

Constanta de integrare se obține utilizând condiția inițială (3-5) :

$$C = \left[\frac{1}{4\alpha^2} \left(2S_0 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} \left(S_0 - \frac{1}{\alpha} \right) - 2S_0 \right] e^{2\alpha S_0} \quad (3-10)$$

sau încă :

$$C = \frac{e^{2\alpha S_0}}{4\alpha^3} \left[3 - 8\alpha - 2\alpha S_0 (2\alpha - 1)^2 \right] \quad (3-11)$$

Înlocuind expresia de mai sus a constantei în soluția generală :

$$\dot{S}^2 = \frac{e^{-2\alpha S}}{4\alpha^3} \left\{ e^{2\alpha S} \left[3 - 8\alpha - 2\alpha S_0 (2\alpha - 1)^2 \right] - (2\alpha S - 1) e^{2\alpha S} - 4(2\alpha - 1)(\alpha S - 1) e^{\alpha(S_0 + S)} \right\} \quad (3-12)$$

Pentru determinarea saltului maxim se face uz de proprietatea vitezei de a se anula atunci când nivelul apei în castel atinge nivelul maxim. Se obține următoarea ecuație prin a cărei rezolvare se obține nivelul maxim S_1 :

E-I-3-4

$$(2\alpha S_1 - 1)e^{2\alpha(S_1 - S_0)} + 4(2\alpha - 1)(\alpha S_1 - 1)e^{\alpha(S_1 - S_0)} = 3 - 8\alpha - 2\alpha S_0(2\alpha - 1)^2$$

sau :

$$(1 - 2\alpha S_1)e^{2\alpha(S_1 - S_0)} + 4(2\alpha - 1)(1 - \alpha S_1)e^{\alpha(S_1 - S_0)} = 8\alpha - 3 + 2\alpha S_0(2\alpha - 1)^2 \quad (3-13)$$

Se observă că dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ ecuația (3-13) se transformă în ecuația corespunzătoare castelelor simple ceea ce constituie o verificare parțială a calculelor de pînă aici.

Pentru a ușura aplicarea în proiectare a formulei s-a întocmit tabelul Nr.1 (83) și pe baza datelor înscrise în acest tabel, reprezentarea grafică Nr.1 (28).

Tabelul Nr.1 (83) a fost construit pentru următoarele valori ale parametrului α : $\alpha = 1$; $\alpha = 2$; $\alpha = 5$. La acestea se mai adaugă $\alpha = 1/2$ (castele cu secțiune constantă) și $\alpha = \infty$ castele cu secțiunea $F_{Lin} = \frac{F_0}{F_{Lin}} = 0$ ceea ce implică $F_{Lin} = \infty$ (deoarece $F_0 \neq 0$) la care $S_1 = 0$, oricare ar fi denivelarea inițială S_0 .

Din ecuația (3-13) rezultă faptul că $S_0 \rightarrow -\infty$ conduce la $S_1 \rightarrow \frac{1}{2\alpha}$, deci există și aici, ca și în cazul castelelor simple valori asimptotice. Deoarece $\alpha > \frac{1}{2}$ în cazul castelelor de acest tip rezultă că totdeauna S_1 va tinde spre un număr mai mic decît 1, deci mai mic decît S_1 corespunzător castelelor simple.

În plus se observă că la aceste castele apare ca specific în comparație cu castelele simple faptul că S_1 nu este o funcție monotonă de S_0 , deci există anumite variații de secțiune defavorabilă.

Utilizarea graficului este extrem de simplă și nu necesită comentarii. Se observă că fiind dat S_0 se poate alege după

E-I-3-5

dorință valoarea ξ_1 , iar din grafic rezultă valoarea necesară a parametrului \mathcal{X} .

Având și valoarea parametrului \mathcal{X} se poate trasa profilul castelului de echilibru cu ajutorul ecuației (2-16), problema rezolvându-se în acest mod destul de rapid și de exact.

Tabel Nr.1 (83)

Castele de echilibru cu secțiune exponențial variabilă
Determinarea saltului maxim

\mathcal{X}	ξ_0	Ecuația saltului maxim	ξ_1
		$(1-2\mathcal{X}\xi_1)e^{2\mathcal{X}(\xi_1-\xi_0)} + 4(2\mathcal{X}-1)(1-\mathcal{X}\xi_1)e^{\mathcal{X}(\xi_1-\xi_0)} = 8\mathcal{X}^{-3} + 2\mathcal{X}\xi_0(2\mathcal{X}-1)^2$	
1	-0,01	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,01)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,01} = 4,98$	0,1284
	-0,05	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,05)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,05} = 4,90$	0,2685
	-0,10	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,10)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,10} = 4,80$	0,3529
	-0,20	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,20)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,20} = 4,60$	0,4419
	-0,30	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,30)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,30} = 4,40$	0,5055
	-0,40	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,40)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,40} = 4,20$	0,5393
	-0,50	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,50)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,50} = 4,00$	0,5632
	-0,70	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,70)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+0,70} = 3,60$	0,5896
	-1,00	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+1,0)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+1,0} = 3,00$	0,6003
	-1,50	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+1,5)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+1,5} = 2,00$	0,5870
	-2,00	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+2,0)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+2,0} = 1,00$	0,5642
-5,00	$(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+5,0)} + 4(1-\xi_1)e^{\xi_1+5,0} = -5,00$	0,5041	
2	-0,01	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,01)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,01)} = 12,64$	0,1256
	-0,05	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,05)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,05)} = 11,20$	0,2422
	-0,10	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,10)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,10)} = 9,40$	0,3051
	-0,20	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,20)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,20)} = 5,80$	0,3634
	-0,30	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,30)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,30)} = 2,20$	0,3888
	-0,40	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,40)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,40)} = -1,40$	0,3942
	-0,50	$(1-4\xi_1)e^{4(\xi_1+0,50)} + 12(1-2\xi_1)e^{2(\xi_1+0,50)} = -5,00$	0,3975

E-I-3-6

	-0,70	$(1-4S_1)e^{4(S_1+0,7)} + 12(1-2S_1)e^{2(S_1+0,7)} = -12,20$	0,3789
	-1,00	$(1-4S_1)e^{4(S_1+1,0)} + 12(1-2S_1)e^{2(S_1+1,0)} = -23,00$	0,3417
	-1,50	$(1-4S_1)e^{4(S_1+1,5)} + 12(1-2S_1)e^{2(S_1+1,5)} = -41,00$	0,2924
	-2,00	$(1-4S_1)e^{4(S_1+2,0)} + 12(1-2S_1)e^{2(S_1+2,0)} = -59,00$	0,2663
	-5,00	$(1-4S_1)e^{4(S_1+5)} + 12(1-2S_1)e^{2(S_1+5)} = -167,00$	0,25
5	-0,01	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,01)} + 36(1-5S_1) = 29,10$	0,1104
	-0,05	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,05)} + 36(1-5S_1) = -3,50$	0,1894
	-0,10	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,10)} + 36(1-5S_1) = -4,40$	0,2178
	-0,20	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,20)} + 36(1-5S_1) = -125,0$	0,2249
	-0,30	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,30)} + 36(1-5S_1) = -206,0$	0,2104
	-0,40	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,40)} + 36(1-5S_1) = -287,0$	0,1893
	-0,50	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,50)} + 36(1-5S_1) = -368,0$	0,1674
	-0,70	$(1-10S_1)e^{10(S_1+0,70)} + 36(1-5S_1) = -530,0$	0,1320
	-1,00	$(1-10S_1)e^{10(S_1+1,0)} + 36(1-5S_1) = -773,0$	0,1077
	-5,00	$(1-10S_1)e^{10(S_1+5,0)} + 36(1-5S_1) = -4013,0$	0,10

Exemplu de calcul

Se consideră datele din /1-N/ relative la hidro-centrala

"Tanzmühle" :

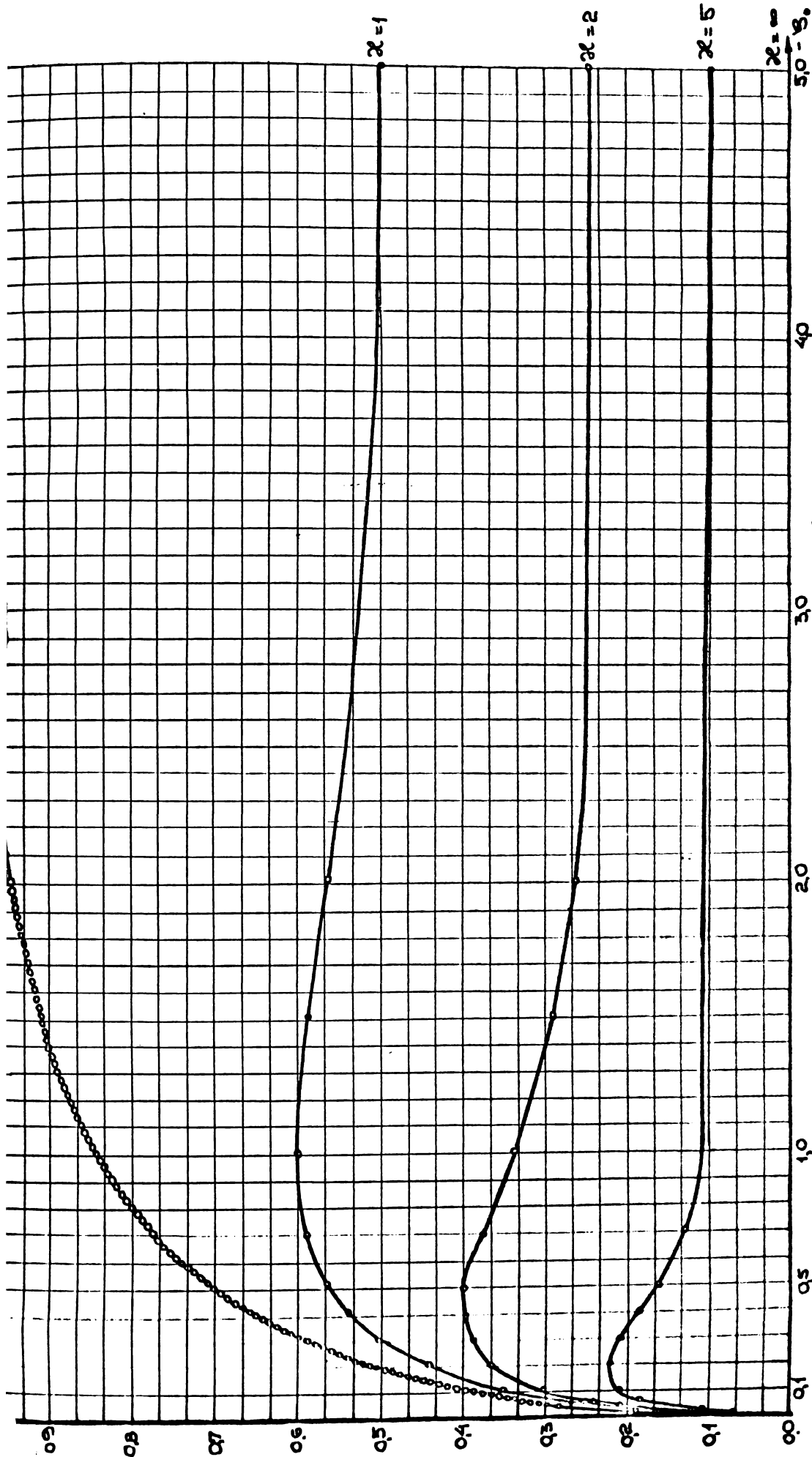
$$x_0 = -5,51m, \lambda_f = 0,01564, \sum S_{u_n} = 0,35, L = 2665m, f = 9,621m^2, d = 350m, F = 95,033m^2$$

Se calculează următorii parametri :

$$\lambda_e = \lambda_f + \frac{d}{L} \sum S_{u_n} = 0,0161; Z_* = \frac{df}{\lambda_e F} = 22,048m; S_0 = \frac{x_0}{Z_*} = -0,25$$

Se obțin rezultatele prezentate în tabelul de mai jos :

	U.M.	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 5$
S_1	-	0,55	0,48	0,38	0,22
Z_1	m	12,10	10,58	8,38	4,85
$\varphi_1 = \frac{F_0}{F_1}$	-	1,00	0,741	0,463	0,186
F_1	m ²	95,033	128,25	205,25	510,81
D_1	m	11,0	12,84	16,2	25,5



REPREZENTAREA GRAFICA NR. 1. (28)

CASTEL DE ECHILIBRU CU SECTIUNEA EXPONENTIAL VARIABILA - SALTUL MAXIM.

F-I-1-1

F. VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE
 CAPI CASTELE CILINDRICE SIMPLE. UTILIZAREA REZULTATELOR ALTOR CERCETARI

§ 1. Verificări utilizând rezultate ale IBCIF București

Prin amabilitatea colectivului de specialitate din cadrul Institutului de studii și proiectări pentru îmbunătățiri funciare (dr.ing. Mihail Popescu, ing. Gheorghe Constantinescu) ni s-au pus la dispoziție câteva variante de calcul de la amenajarea hidrotehnă a Lotru, realizate la calculator prin metoda diferențelor finite după un algoritim conceput de dr.ing. Mihail Popescu.

Datele respective permit o verificare pe un domeniu larg de variație al valorilor parametrului pierderilor inițiale de energie ξ_0 , rezultând concluzii atât pentru metodele din prezenta teză, cât și chiar pentru metoda diferențelor finite.

Datele comune tuturor variantelor sînt următoarele :

$$d = 5,0 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 4,074 \text{ m/s}$$

$$f = 19,635 \text{ m}^2$$

$$z_0 = -25,38 \text{ m}$$

$$L = 14284 \text{ m}$$

$$Q_0 = 80 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\lambda_{ec} = -\frac{2gdz_0}{L\omega_0^2} = 0,0105$$

Pasul de timp considerat a fost în toate cazurile $t = 5 \text{ s}$.

În teză, variantele au fost numerotate în funcție de diametrul castelului de echilibru conform următoarei scheme :

Diametrul castelului D (m)	2,22	3,14	4,45	8,00	12,00	15,00
Numărul variantei	1	2	3	4	5	6
F (m ²)	3,87052	7,74373	15,5529	50,2656	113,097	176,715

F-I-1-2

In tabela Nr.1 (84) sînt prezentate rezultatele calculelor cu diferențe finite referitoare la nivelurile extreme și la cvasi-semiperioade :

Tabela Nr.1 (84)

Niveluri extreme și cvasi-semiperioade în metoda diferențelor finite

Nr. var.	z_1	T_1	z_2	T_2	z_3	T_3	z_4	T_4
	m	s	m	s	m	s	m	s
1	331,44	30	-303,43	55	279,27	50	-261,57	55
2	228,23	40	-202,89	80	182,89	75	-166,31	75
3	158,75	60	-135,27	105	117,58	105	-104,38	110
4	80,80	110	-62,53	195	50,99	190	-43,10	195
5	50,87	170	-36,55	280	28,55	285	-23,43	280
6	36,30	230	-24,75	365	18,80	365	-15,17	360

In tabela Nr.2 (85) sînt calculate mărimile raționale de referință Z_x și T_x care vor servi la relativizarea mărimilor dimensionale, calculate cu formulele :

$$Z_x = \frac{df}{\lambda_{ec} F} = \frac{5 \times 19,635}{0,0405 \times F} = \frac{9350}{F} \quad (1-1)$$

$$T_x = \sqrt{\frac{LF}{9f}} = \sqrt{\frac{14284 F}{9,81 \times 19,635}} = \sqrt{74,15662 F} \quad (1-2)$$

Tabela Nr.2 (85)

Mărimile de referință Z_x și T_x

Varianta	1	2	3	4	5	6
Z_x	2415,70	1207,43	601,174	186,012	82,6724	52,9801
T_x	16,9418	23,9635	33,9611	61,0535	91,5800	114,475

F-I-1-3

In tabela care urmează s-au adimensionalizat mărimile din tabela Nr.1 (84) cu ajutorul mărimilor raționale de referință din tabela Nr.2 (85) introducând notațiile uzuale :

$$S_k = \frac{Z_k}{Z_*} \quad , \quad T_k = \frac{T_k}{T_*} \quad k = 1,2,3,4 \quad (1-3)$$

Tabela Nr.3 (86)

Niveluri extreme și cvasi semiperioade (diferențe finite) sub formă adimensională

Nr. var.	S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3	S_4
1	0,137202	1,77077	-0,125607	3,24641	0,115606	2,95128	-0,108279
2	0,189021	1,66921	-0,168035	3,33842	0,151470	3,12976	-0,137739
3	0,264066	1,76673	-0,225010	3,09177	0,195584	3,09177	-0,173627
4	0,434381	1,80170	-0,336161	3,19392	0,274122	3,11202	-0,231705
5	0,615320	1,85630	-0,442106	3,05744	0,345339	3,11203	-0,283408
6	0,686069	2,00917	-0,467775	3,18847	0,355320	3,18847	-0,286713

Nr. var.	T_4
1	3,24641
2	3,12976
3	3,23901
4	3,19392
5	3,05744
6	3,14479

A.- Verificări referitoare la primul nivel extrem

(nivelul maxim)

Pentru calculul primului nivel extrem s-au dat în cadrul

F-I-1-4

tezei mai multe metode. Se vor utiliza în cele ce urmează următoarele două metode :

a.- metoda bazată pe tabelul Nr.1 (1) din volumul întâi construit pe baza valorilor exacte ale saltului maxim, intrarea în acest tabel făcându-se prin intermediul parametrului inițial al pierderii de energie ;

b.- metoda bazată pe utilizarea formulei aproximative recomandată în teză :

$$\xi_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + \xi_0)(3 + \sqrt{-2\xi_0})}{(3 + 2\sqrt{-2\xi_0} - \xi_0)^2} \quad (1-4)$$

În care parametrul de comandă este de asemenea parametrul pierderii inițiale de energie.

Rezultatele metodei bazată pe tabelul valorilor exacte comparativ cu rezultatele obținute în metoda diferențelor finite sînt prezentate în tabela Nr.4 (87)

Tabela Nr.4 (87)

Rezultate comparative privind saltul maxim (tabel)

Nr. VARIATIE	ξ_{1DF} DIFERENȚE FINITE	ξ_{1VE} TABEL VALORI EXACTE	DIFERENȚA $\Delta = \xi_{1DF} - \xi_{1VE}$	DIFERENȚA RELATIVĂ $100 \frac{\Delta}{\xi_{1VE}} \%$	ξ_0	$\xi_1 < m >$ TABEL VALORI EXACTE
1	0,137202	0,138037	-0,000835	-0,605 %	-0,010506	333,456
2	0,189021	0,191267	-0,002246	-1,175 %	-0,021020	230,942
3	0,264066	0,263139	0,000927	0,352 %	-0,042217	158,192
4	0,434381	0,435665	-0,001284	-0,295 %	-0,136443	81,039
5	0,615320	0,593711	0,021609	3,640 %	-0,306995	49,084
6	0,686069	0,689317	-0,003248	-0,047 %	-0,479682	36,472

Concluzie . În ceea ce privește nivelul maxim în cazul cazetelor simple la închiderea totală metoda diferențelor finite sub forma algoritmului ISCIF dă rezultate foarte bune pentru valori ale

P-I-1-5

parametrului $|\xi_0| < 0,5$ pentru care s-au făcut verificările respective, chiar dacă Δt are o valoare relativ mare în comparație cu prima cvasi-semiperioadă (în varianta Nr.1 $\Delta t = 5$ s iar pînă la realizarea nivelului maxim $T_1 = 30$ s)

Avînd în vedere metodele de calcul a saltului maxim la închiderea totală expuse în teză, în cazul castelelor de echilibru simple nu se justifică utilizarea calculatorului electronic (care rămîne însă pînă în prezent mijlocul de calcul de bază în cazuri mai complexe).

b.- Utilizînd formula aproximativă (1-4) propusă de autorul prezentei teze se obțin rezultatele prezentate în tabela de mai jos :

Tabela Nr.5 (88)

Rezultate comparative privind saltul maxim (formulă)

NR. VARIANTE	ξ_0	$\sqrt{-2\xi_0}$	$3+2\sqrt{-2\xi_0}-\xi_0$	$(3+2\sqrt{-2\xi_0}-\xi_0)^2$	$(2,1+\xi_0)(3+\sqrt{-2\xi_0})$	ξ_{1F} FORMULA	ξ_{1DF} DIFERENTE FINITE
1	-0,010506	0,14496	3,30043	10,89284	6,57136	0,13818	0,13720
2	-0,021020	0,20938	3,43978	11,83209	6,67224	0,19441	0,18902
3	-0,042217	0,29057	3,62336	13,12874	6,77127	0,26320	0,26407
4	-0,136443	0,52239	4,18122	17,48260	6,91642	0,43667	0,43438
5	-0,306995	0,78357	4,87414	23,75724	6,78394	0,58960	0,61532
6	-0,479682	0,97947	5,43862	29,57859	6,44801	0,68858	0,68507

Concluzie - Formula aproximativă propusă în teză este suficient de precisă și poate fi aplicată în proiectare, ea permițînd o determinare rapidă a saltului maxim.

Se constată că și în acest caz, ca și în cazul anterior diferența cea mai mare se obține în cadrul variantei Nr.5.

F-I-1-6

B.- Verificări referitoare la al doilea nivel extrem

(primul nivel minim de după primul nivel maxim)

Pentru calculul celui de al doilea nivel extrem s-au dat în cadrul tezei mai multe metode. Se vor utiliza în cele ce urmează următoarele două metode :

a.- metoda bazată pe tabelele Nr.1(1) și Nr.2(2) din volumul întâi, construite pe baza tabelelor conținând valorile exacte ale saltului maxim.

b.- metoda bazată pe utilizarea formulei aproximative recomandate în cadrul tezei :

$$S_2 = -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{1}{1 + 1,5 \sqrt{-2S_0} - 4S_0} \right] \quad (1-5)$$

în care parametrul de comandă este S_0 .

a.- în această metodă se procedează în felul următor :

- cu valoarea S_1 se calculează $f_2(S_1)$ cu ajutorul tabelului Nr.2(2)

- se face $f_2(S_1) = f_1(S_2)$ și se determină S_2 cu ajutorul tabelului Nr.1(1) .

Rezultatele metodei bazată pe utilizarea celor două tabele comparativ cu rezultatele obținute în metoda diferențelor finite sînt prezentate în tabela Nr.6(89) .

Se constată și aici o concordanță bună între cele două metode, de asemenea în varianta a 5-a apărînd o diferență exagerat de mare în comparație cu celelalte, probabil datorită vreunei erori accidentale nedepistate. În concluzie metoda poate fi aplicată cu succes și face inutilă utilizarea calculatorului .

F-I-1-7

Tabela Nr.6(89)

Rezultate comparative privind al doilea nivel extrem (tabela:

Nr. VARIANTEI	S_{1VE} TABEL VALORI EXACTE	$f_2(S_1)$	S_{2VE} TABEL VALORI EXACTE	S_{2DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENTA $\Delta = S_{2DF} - S_{2VE}$	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{\Delta}{S_{2VE}} \%$	$Z_2 < m$ TABEL VA- LORI EXACTE
1	0,138037	0,008738	-0,126433	-0,125607	0,000826	-0,653 %	-305,424
2	0,191267	0,016254	-0,169626	-0,168035	0,001591	-0,938 %	-204,812
3	0,263139	0,029545	-0,223770	-0,225010	-0,001240	70,555 %	-134,525
4	0,435665	0,077099	-0,343051	-0,336161	0,007890	-2,300 %	- 63,812
5	0,593711	0,127646	-0,424000	-0,442106	-0,018106	4,28 %	- 35,053
6	0,689317	0,164806	-0,469918	-0,467775	0,002143	-0,457 %	- 24,863

b.- In această metodă se utilizează formula aproximativă (1-5). Rezultatele utilizării formulei pentru calculul celui de al doilea nivel extrem sînt prezentate în tabela Nr.7 (90).

Tabela Nr.7 (90)

Rezultate comparative privind al doilea nivel extrem
(formulă)

Nr. VARIANTEI	S_0	$1,5 \sqrt{-2S_0}$	$1+1,5\sqrt{-2S_0} - 4S_0$	1	S_{2F} FORMULA	S_{2DF} DIFERENTE FINITE
				$1+1,5\sqrt{-2S_0} - 4S_0$		
1	-0,010506	0,217440	1,259464	0,79399	-0,12561	-0,12561
2	-0,021020	0,314070	1,398150	0,71523	-0,17086	-0,16804
3	-0,042217	0,435855	1,604723	0,62316	-0,22610	-0,22501
4	-0,136443	0,783585	2,329357	0,42950	-0,34242	-0,33616
5	-0,306995	1,175355	3,403335	0,29385	-0,42370	-0,44211
6	-0,479682	1,469205	4,406033	0,22681	-0,46391	-0,46778

Concluzie : Se constată și în acest caz o concordanță bună între cele două metode de unde rezultă că formula aproximativă este pe deplin utilizabilă în proiectare.

F-I-1-8

c.- Verificări ale celui de al treilea nivel extrem
 (al doilea nivel maxim)

S-au utilizat și aici două metode și anume :

a.- metoda bazată pe tabelul Nr.3(3) din volumul întâi în care este dat un tabel care permite calculul nivelului extrem S_{j+1} dacă se cunoaște nivelul extrem S_j

b.- metoda bazată pe formula aproximativă

$$S_3 = \frac{-S_2}{1 - \frac{2}{3} S_2} \quad (1-6)$$

a.- În această metodă bazată pe tabela Nr.3(3) din volumul întâi se obțin rezultatele prezentate în tabelul Nr.8 (91) care sînt trecute, spre comparație și rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite.

Tabela Nr.8 (91)

Rezultate comparative privind al treilea nivel extrem (tabel)

Nr. VARIANTEI	S_{2VE} TABEL VALORI EXACTE	S_{3VE} TABEL VALORI EXACTE	S_{3DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENȚA $\Delta = S_{3DF} - S_{3VE}$	DIFERENȚA RELATIVĂ $100 \frac{\Delta}{S_{3VE}} \%$	$Z_3 < m >$ TABEL VALORI EXACTE
1	-0,126433	0,116460	0,115606	-0,000854	-0,734 %	281,332
2	-0,159626	0,152080	0,151470	-0,000610	-0,402 %	183,626
3	-0,223770	0,193440	0,195584	0,002144	1,109 %	116,291
4	-0,343051	0,278920	0,274122	-0,004798	-1,719 %	51,882
5	-0,424000	0,329700	0,345339	0,015639	4,745 %	27,257
6	-0,469918	0,357010	0,355320	-0,001690	-0,474 %	18,889

Se observă că rezultatele concordă foarte bine peste tot cu excepția aceleiași variante Nr.5 la care, ca și în celelalte cazuri diferența este relativ mare, această diferență datorîndu-se **muli** erori accidentale. Dacă se elimină această variantă diferența medie

F-I-1-9

relativă între cele două metode este de sub 1 % ceea ce reprezintă o concordanță foarte bună pentru acest gen de probleme. Ar fi necesar ca să fie mărit numărul liniilor din tabelul 3(3) ceea ce ar permite a se lucra mai bine cu acest tabel.

b.- Rezultatele obținute prin aplicarea formulei (1-6) sînt prezentate în tabela de mai jos.

Tabela Nr.9 (92)

Rezultate comparative privind al treilea nivel extrem

(formulă)

Nr. VARIANTEI	ξ_{2VE} TABEL VALORI EXACTE	$\frac{2}{3} \xi_{2VE}$	$1 - \frac{2}{3} \xi_{2VE}$	ξ_{3F} FORMULA	ξ_{3DF} DIFERENȚE FINITE
1	-0,126433	-0,084289	1,084289	0,11660	0,11561
2	-0,169626	-0,113004	1,113004	0,15239	0,15147
3	-0,223770	-0,149180	1,149180	0,19472	0,19558
4	-0,343051	-0,226701	1,226701	0,27920	0,27412
5	-0,424000	-0,282667	1,282667	0,33033	0,34534
6	-0,469918	-0,313279	1,313279	0,35762	0,35532

Se constată că și în acest caz concordanța este bună astfel că și această formulă este folosibilă în proiectare în condițiuni bune.

Diferența maximă apare la aceeași variantă Nr.5 unde, probabil, s-a strecurat pe undeva o mică greșeală (o eroare mai mare) care face ca la toate mărimile cercetate corespunzătoare variantei Nr.5 diferența să fie aici exagerat de mare.

D.- Verificări referitoare la al patrulea extrem

(al doilea nivel minim)

Se vor face verificări prin următoarele două metode :

F-I-1-10

a.- metoda care folosește tabelul Nr.3(3) din cuprinsul volumului întâi care permite calculul nivelului extrem sub formă adimensională S_{j+1} , atunci când se cunoaște nivelul extrem anterior sub formă adimensională S_j

b.- metoda bazată pe formula aproximativă de mai jos, care permite direct calculul nivelului extrem S_j atunci când se cunoaște nivelul extrem S_1 , dar nu se cunosc celelalte nivele extreme intermediare S_2, S_3, \dots, S_{j-1} ;

$$S_j = \frac{(-1)^{j-1} S_1}{1 + \frac{2(j-1)}{3} S_1} \Rightarrow S_4 = -\frac{S_1}{1 + 2S_1} \quad (1-7)$$

In cazul de față $j = 4$.

a.- Rezultatele obținute în această metodă sînt prezentate în tabela Nr.10(93), în care se face și o comparație cu rezultatele obținute în metoda diferențelor finite

Tabela Nr.10 (93)

Rezultate comparative privind al patrulea nivel extrem(tabel)

Nr. VARIANTEI	S_{3VE} TABEL VALORI EXACTE	S_{4VE} TABEL VALORI EXACTE	S_{4DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENTA $\Delta = S_{4DF} - S_{4VE}$	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{\Delta}{S_{4VE}} \%$	$Z_4 < m >$ TABEL VALORI EXACTE
1	0,11646	-0,10788	-0,10828	-0,00040	0,371 %	-260,606
2	0,15208	-0,13775	-0,13774	0,00001	-0,007 %	-168,323
3	0,19344	-0,17106	-0,17363	-0,00257	1,502 %	-102,837
4	0,27892	-0,23408	-0,23171	0,00237	-1,012 %	- 43,542
5	0,32970	-0,26993	-0,28341	-0,01348	4,995 %	- 22,316
6	0,35701	-0,28002	-0,28671	0,00131	-0,455 %	- 15,239

După cum se constată din tabel, diferența relativă este sub 2 %, cu excepția variantei Nr.5 care, ca și în celelalte verificări dă o diferență sensibil mai mare decît celelalte variante (circa 5 %)

F-I-1-11

In concluzie și în acest caz verificarea este concludentă și conduce la concluzia că metodele analizate conduc practic la același rezultat.

b.- In utilizarea formulei (1-6) se obțin rezultatele prezentate în tabela de mai jos :

Tabela Nr.11 (94)

Rezultate comparative privind al patrulea nivel extrem
(formulă)

Nr. VARIANTEI	S_{IVE} TABEL VALORI EXACTE	$2 S_{IVE}$	$1+2S_{IVE}$	S_{4F} FORMULA	S_{4DF} DIFERENTE FINITE
1	0,138037	0,276074	1,276074	-0,108173	-0,108279
2	0,191267	0,382534	1,382534	-0,138345	-0,137739
3	0,263139	0,526278	1,526278	-0,172406	-0,173627
4	0,435665	0,871330	1,871330	-0,232810	-0,231705
5	0,593711	1,187422	2,187422	-0,271420	-0,283408
6	0,689317	1,378634	2,378634	-0,289795	-0,286713

Se constată că și formula propusă da rezultate foarte apropiate de cele obținute în metoda diferențelor finite, diferența maximă corespunzând aceluiași caz Nr.5. Se menționează că după cunoștințele autorului este singura formulă întâlnită în literatura de specialitate care permite calculul direct al oricărui nivel extrem fără a fi necesar calculul nivelelor intermediare.

Ca o concluzie generală rezultată atât din acest paragraf cât și din celelalte de pînă aici se poate afirma că, avînd în vedere faptul că metodele indicate în teză sînt rapide și precise, în calculul castelelor de echilibru simple pentru determinarea nivelelor extreme la manevra de închidere bruscă și totală a vanei de reglaj utilizarea calculatorului electronic în varianta diferențelor finite este inutilă. In plus se constată că metoda diferențelor finite conduce la

F-I-1-12

rezultate bune în determinarea saltului maxim, chiar dacă pasul este relativ mare în raport cu perioada de oscilație și ceea ce este de asemenea important, diferențele relative între metode nu cresc în timp.

I.- Verificări referitoare la prima cvasi-semiperioadă

Se vor face verificări pe baza următoarelor metode prezentat detaliat în cadrul volumului al doilea, publicate și în revista "Eidrotehnica" :

- a.- pe baza metodei aproximative Legendre ;
- b.- pe baza metodei aproximative Arilov-Bogoliubov ;
- c.- pe baza formulei aproximative :

$$T_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{42}{100} \sqrt{-2\epsilon}. \tag{1-8}$$

a.- Rezultatele obținute pe baza metodei aproximative Legendre, comparativ cu cele obținute prin metoda diferențelor finite sîr prezentate în tabela de mai jos

Tabela Nr.12(95)

Rezultate comparative privind prima cvasi-semiperioadă
(Legendre)

NR. VARIANTEI	ϵ_0	T_{1DF} DIFERENTE FINITE	T_{1L} LEGENBRE	DIFERENTA $T_{1DF} - T_{1L}$	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{T_{1DF} - T_{1L}}{T_{1L}} \%$	$T_{1L} < \epsilon >$ LEGENBRE	$\frac{\Delta T}{T_{1L}}$
1	-0,010506	1,77077	1,62486	0,14591	8,98 %	27,528	0,182
2	-0,021020	1,66921	1,64250	0,02671	1,62 %	39,360	0,127
3	-0,042217	1,76673	1,67340	0,09333	5,57 %	56,831	0,088
4	-0,136443	1,80170	1,76523	0,03647	2,06 %	107,773	0,047
5	-0,306995	1,85630	1,87006	-0,01976	-1,05 %	171,810	0,029
6	-0,479682	2,00917	1,97084	0,03833	1,95 %	225,612	0,022

F-I-1-13

Se constată în varianta Nr.1, valoarea primei cvasi-semiperioade este afectată de o eroare grosolană. Faptul că valoarea este eronată rezultă și din tabelul Nr.3(86) din care se vede că în varianta Nr.2 în care $|\xi|$ crește valoarea primei cvasi-semiperioade sub formă adimensională scade ceea ce contravine rezultatelor teoretice cunoscute. Din lectura ultimei coloane a tabelului 12 (95) rezultă și cauza acestei erori : valoarea pasului $\Delta t = 5\Delta$ este prea mare în comparație cu prima cvasi-semiperioadă $T_1 = 27,53\Delta$

Intr-adevăr calculatorul ar fi putut să dea pentru T_1 valoarea 25 s sau 30 s și se constată că a indicat corect 30 s deoarece valoarea calculată cu metoda Legendre este $T_1 > 27,50\Delta$.

Avînd în vedere celelalte rezultate se impune indicația de a se lucra în metoda diferențelor finite în cazul că se urmărește determinarea cît mai exactă a cvasi semiperioadelor cu rapoarte $\frac{\Delta t}{T_1}$ mici pentru ca în mod cert să se obțină o eroare de sub 2 %.

Rezultă deci că în metoda diferențelor finite alegerea pasului Δt prezintă o importanță mai mare pentru problema cvasi semiperioadelor decît pentru problema nivelelor extreme. Se constată de asemenea că în mici una dintre variante, diferența absolută dintre rezultatele celor două metode nu depășește valoarea pasului $\Delta t = 5\Delta$ ceea ce este concludent. Se mai observă că, exceptînd varianta Nr.5 care prezintă îndoieli, calculatorul aproximează totdeauna în plus cvasi semiperioada.

b.- Rezultatele obținute pe baza metodei aproximative Krîlov-Bogoliubov, comparativ cu cele obținute prin metode diferențelor finite sînt prezentate în tabela de mai jos.

Se constată că pentru valori $|\xi|$ mici metoda Legendre și metoda Krîlov-Bogoliubov dau rezultate foarte apropiate, iar pentru valori mari $|\xi|$ metoda Krîlov-Bogoliubov, așa cum s-a arătat și anterior în cadrul tezei dă rezultate mai mici decît cele reale.

F-I-1-14

Tabela Nr.13 (96)

Rezultate comparative privind prima cvasi-semiperioadă
(Krilov-Bogoliubov)

Nr. VARIANTEI	ξ_0	$\mathcal{J}_{1,KB}$ KRILOV-BOGOLIN-BOV	$\mathcal{J}_{1,DF}$ DIFERENTE FINITE	DIFERENTA $\Delta = \mathcal{J}_{1,DF} - \mathcal{J}_{1,KB}$	DIFERENTA RELATI-VA $100 \frac{\Delta}{\mathcal{J}_{1,DF}} \%$
1	-0,010506	1,61095	1,77077	0,15982	9,02 %
2	-0,021020	1,65158	1,66921	0,01763	1,07 %
3	-0,042217	1,68366	1,76673	0,08307	4,71 %
4	-0,136443	1,76465	1,80170	0,03705	2,06 %
5	-0,306995	1,84050	1,85630	0,01580	0,85 %
6	-0,479682	1,87855	2,00917	0,13062	6,50 %

c.- Cu formula aproximativă (1-8) se obțin rezultatele prezentate în tabelul următor în care s-au trecut, spre a se putea face o comparație și rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite.

Tabela Nr.14(97)

Rezultate comparative privind prima cvasi-semiperioadă
(formula aproximativă)

Nr. VARIANTEI	ξ_0	$\sqrt{-2\xi_0}$	$\frac{42}{100} \sqrt{-2\xi_0}$	$\mathcal{J}_{1,F}$ FORMULA	$\mathcal{J}_{1,DF}$ DIFERENTE FINITE	DIFERENTE RELATIVE $100 \frac{\mathcal{J}_{1,DF} - \mathcal{J}_{1,F}}{\mathcal{J}_{1,F}} \%$
1	-0,010506	0,14495	0,06088	1,65158	1,77077	7,85 %
2	-0,021020	0,20938	0,08794	1,65674	1,66921	0,63 %
3	-0,042217	0,29057	0,12204	1,69284	1,76673	4,36 %
4	-0,136443	0,52239	0,21940	1,79020	1,80170	0,64 %
5	-0,306995	0,78357	0,32910	1,89990	1,85630	-2,30 %
6	-0,479682	0,97947	0,41138	1,98218	2,00917	1,34 %

Se constată că formula recomandată conduce la diferențele cele mai mici în comparație cu metoda diferențelor finite, aceasta

F-I-1-15

constituind o bună verificare a corectitudinii formulei.

Formula dată de regulă valori ale primei cvasi semiperioade mai mici decât acelea date de metoda diferențelor finite. Excepție face doar varianta Nr.5 care prezintă însă anumite semne de îndoială în ceea ce privește exactitatea datelor.

Rezultă în concluzie la prima cvasi semiperioadă faptul că metoda Legendre de integrare aproximativă și formula aproximativă recomandată conduc la rezultate în bună concordanță cu cele obținute prin metoda diferențelor finite în care, pentru a se obține rezultate bune trebuie considerat un pas Δt suficient de mic în comparație cu valoarea primei cvasi semiperioade.

F.- Verificări referitoare la cea de a doua cvasi semiperioadă

În cele ce urmează se vor face verificări referitoare la cea de a doua cvasi semiperioadă, utilizând în acest scop :

- a.- metoda aproximativă Legendre
- b.- formula aproximativă recomandată în teză :

$$\mathcal{Y}_2 = \pi + \frac{42}{100} \sqrt{2\mathcal{S}}. \quad (1-9)$$

a.- Rezultatele obținute prin utilizarea metodei aproximative de integrare Legendre sînt date, comparativ cu rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite în tabela de mai jos.

Se constată în primul rînd că datorită faptului că în metoda diferențelor finite pasul Δt este relativ mare nu se respectă legitatea stabilită anterior pe cale teoretică, în cadrul tezei ca odată cu creșterea lui $|\mathcal{S}|$ să se înregistreze și o creștere corespunzătoare a celei de a doua cvasi semiperioade.

În al doilea rînd se constată că există o concordanță bună între cele două metode.

F-I-1-16

Tabela Nr.15 (98)

Rezultate comparative privind cea de a doua cvasi semiperioadă (Legendre)

Nr. VARIANTE	ξ_0	\mathcal{F}_{2L} LEGENDRE	\mathcal{F}_{2DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENTA $\mathcal{F}_{2DF} - \mathcal{F}_{2L}$	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{\mathcal{F}_{2DF} - \mathcal{F}_{2L}}{\mathcal{F}_{2L}}$	$T_{2L} <S>$ LEGENDRE
1	-0,010506	3,14300	3,24541	0,10341	3,28 %	53,248
2	-0,021020	3,14317	3,33842	0,19525	6,20 %	75,321
3	-0,042217	3,14670	3,09177	-0,05493	-1,74 %	106,865
4	-0,136443	3,16084	3,19392	0,03308	1,04 %	192,980
5	-0,306995	3,17523	3,05744	-0,11884	-3,84 %	290,824
6	-0,479682	3,18478	3,18847	0,00369	0,12 %	364,578

De exemplu, chiar în varianta a doua în care diferența relativă atinge 6,20 % se constată că diferența absolută este sub valoarea Δt a pasului considerat. Această diferență apare datorită faptului că pasul considerat Δt este relativ mare în comparație cu cvasi semiperioada respectivă.

b.- Prin folosirea formulei (1-9) se obțin rezultate prezentate în tabela care urmează în care, pentru comparație, s-au trecut și datele obținute prin metoda diferențelor finite.

Tabela Nr.15 (99)

Rezultate comparative privind cea de a doua cvasi semiperioadă (formulă)

Nr. VARIANTE	ξ_0	$\sqrt{-2\xi_0}$	$\frac{42}{100} \sqrt{-2\xi_0}$	\mathcal{F}_{2F} FORMULA	\mathcal{F}_{2DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{\mathcal{F}_{2DF} - \mathcal{F}_{2F}}{\mathcal{F}_{2F}} \%$
1	-0,010506	0,14496	0,06009	3,14768	3,24641	3,13 %
2	-0,02120	0,20938	0,0879	3,15038	3,33842	5,96 %
3	-0,042217	0,29057	0,1220	3,15579	3,09177	-1,97 %
4	-0,136443	0,52239	0,2194	3,16353	3,19392	0,96 %
5	-0,306995	0,78357	0,3291	3,17450	3,05744	-3,69 %
6	-0,479682	0,97947	0,4114	3,18273	3,18847	0,18 %

F-I-1-17

Se constată și în acest caz o corespondență bună între cele două metode, eroarea mare din cazul variantei Nr.2 expunându-se prin aceea că valoarea pasului Δt este relativ mare în comparație cu cvasi semiperioada respectivă.

G.- Verificări referitoare la cea de a treia cvasi semiperioadă

În cele ce urmează se vor face verificări referitoare la cea de a treia cvasi semiperioadă, utilizând în acest scop :

- a.- metoda aproximativă Legendre
- b.- formula aproximativă recomandată în teză

$$T_3 = \pi + \frac{21}{1000} \sqrt{-2s}. \quad (1-10)$$

a.- Rezultatele obținute prin utilizarea metodei aproximative de integrare Legendre sînt date, comparativ cu rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite în tabela de mai jos :

Tabela Nr.17 (100)

Rezultate comparative privind cea de a treia cvasi semiperioadă (Legendre)

Nr. VARIANTE	s_0	T_{3L} LEGENDRE	T_{3DF} DIFERENTE FINITE	DIFERENTA $T_{3DF} - T_{3L}$	DIFERENTA RELATIVA $100 \frac{T_{3DF} - T_{3L}}{T_{3L}} \%$	$T_{3L} < \Delta >$ LEGENDRE
1	-0,010506	3,14020	2,95128	-0,18892	-6,01 %	53,201
2	-0,021020	3,14401	3,12976	-0,01425	-0,45 %	75,341
3	-0,042217	3,14595	3,09177	-0,05418	-1,72 %	106,840
4	-0,136443	3,15392	3,11202	-0,04190	-1,35 %	192,558
5	-0,306995	3,16014	3,11203	-0,04811	-1,55 %	289,406
6	-0,479682	3,16280	3,18847	0,02567	0,81 %	362,062

F-C-1-18

Se constată că și în acest caz concordanța rezultatelor este bună, diferența absolută între valorile cvasi semiperioadei nu depășește valoarea pasului Δt , cu excepția variantei Nr.5 ale cărei date nu sînt însă certe.

b.- În tabela de mai jos sînt prezentate rezultatele obținute prin utilizarea formulei (1-10), comparativ cu rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite.

Tabela Nr.18 (101)

Rezultate comparative privind cea de-a treia cvasi
semiperioadă (formula)

NUMAR. VARIANT.	ξ .	$\frac{21}{100} \sqrt{2\xi}$.	\mathcal{F}_{3F} FORMULA	\mathcal{F}_{3DF} DIFERENȚE FINITE	DIFERENȚA RELATIVĂ $100 \frac{\mathcal{F}_{3DF} - \mathcal{F}_{3F}}{\mathcal{F}_{3F}} \%$
1	-0,010506	0,00304	3,14463	2,95128	-6,15%
2	-0,021020	0,00439	3,14598	3,12976	-0,51%
3	-0,042217	0,00610	3,14769	3,09177	-0,18%
4	-0,136443	0,01097	3,15256	3,11202	-0,13%
5	-0,306995	0,01645	3,15004	3,11203	-0,15%
6	-0,479682	0,02057	3,16216	3,18647	+0,08%

Ca o concluzie generală se constată că în cazul castelelor de echilibru simple, închidere totală bruscă, în cazul cvasi semiperioadelor ca și în cazul nivelelor extreme utilizarea calculatoarelor este inutilă deoarece metodele analitice prezentate în teză sînt suficient de precise și mult mai ușor de aplicat. Utilizarea calculatoarelor, așa cum s-a mai menționat este de recomandat în cazurile mai complexe.

H.- Verificări referitoare la legea de oscilație în prima
cvasi semiperioadă

Pentru verificarea legii de oscilație s-au selecționat va-

F-I-1-19

H.- Verificări referitoare la legea de oscilație în prima
cvasi - semiperioadă

Pentru verificarea legii de oscilație s-au selecționat variabilele nr.4 și nr.6 care prezintă valori ale parametrului ξ , care se întâlnesc frecvent în practică și pentru care metoda diferențelor finite este în concordanță cea mai bună cu metodele celelalte, prezentate în teză.

Se vor utiliza în cele ce urmează :

a.- Metoda care pleacă de la un polinom algebric

b.- Metoda care pleacă de la un polinom trigonometric ambele metode fiind bazate pe un principiu variațional.

a.- Această metodă a fost prezentată anterior detaliat și s-au făcut și verificări utilizând rezultate publicate de prof.L.Escande în această metodă se împarte cvasi-semiperioada în zece subintervale de timp egale și se cercetează nivelele la extremitățile acestor subintervale. Nivelurile în aceste momente se calculează cu formula :

$$x_{1j} = x_0 + \frac{t_{1j}}{T_*} \sqrt{-2x_0 z_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{t_{1j}}{T_*} \right)^3 \sqrt{-2x_0 z_*} + \left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k \quad (1-11)$$

în care coeficienții A_k se calculează după relații date în lucrare.

Calculule efective pentru calculul coeficienților A_k s-au condus tabelar și sînt trecute în tabela nr.19 (102) și s-au considerat drept date inițiale datele obținute folosind formulele din teză și nu datele obținute prin metoda diferențelor finite ceea ce permite a se face o comparație completă a rezultatelor, dacă se utilizează numai formulele din teză sau numai metoda diferențelor finite.

În vederea utilizării relației (1-11) este necesar încă un tabel auxiliar în care se vor calcula valorile sumei care apare în respectiva relație.

F-I-1-20

Tabela nr.19 (102)

Calculul coeficienților A_k

Nr. VARIATIEI	k	$z_1 - z_0 = 406,419 \text{ m}$	$\int_1^2 z_1 = 252,52052 \text{ m}$	$\int_1 \sqrt{-2z_0 z_x} = 171,52703 \text{ m}$	$\int_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} = 534,48462 \text{ m}$	A_k
		$d_k(z_1 - z_0)$	$\beta_k \int_1^2 z_1^2$	$\gamma_k \int_1 \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\delta_k \int_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x}$	
4	0	5959,464	-757,56156	-6003,44605	890,80948	89,26588
	1	-14898,66	2146,42442	14408,27052	-1781,61362	-125,57866
	2	12770,280	-2020,16416	-12006,89210	1336,21155	79,43529
	3	-3724,665	631,30130	3430,54060	-356,32486	-19,13796
Nr. VARIATIEI	k	$z_1 - z_0 = 61,852 \text{ m}$	$\int_1^2 z_1 = 141,58722 \text{ m}$	$\int_1 \sqrt{-2z_0 z_x} = 102,13662 \text{ m}$	$\int_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} = 396,72004 \text{ m}$	A_k
		$d_k(z_1 - z_0)$	$\beta_k \int_1^2 z_1^2$	$\gamma_k \int_1 \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\delta_k \int_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x}$	
6	0	3463,712	-424,76176	-3574,78170	661,20139	125,36992
	1	-8659,280	1203,49137	8579,47608	-1322,39881	-198,71136
	2	7422,240	-1132,69776	-7149,56240	991,80010	131,77894
	3	-2164,820	353,96805	2042,73240	-264,48135	-32,60090

ACEST calcul este conținut în tabela nr.20 (103).

În tabela nr.21 (104) este dat calculul nivelelor z_{1j} la diferite momente reprezentînd un număr întreg de zecimi din prima cvasi-semiperioadă. În reprezentările grafice nr.1(29) și nr.2(30) sînt date comparativ legile de oscilație obținute prin diferențe finite și pe cale variațională.

Tabela nr.20 (103)

Calculul sumei $\left(\frac{j}{10}\right) \sum_{k=0}^5 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$

$\frac{j}{10}$	A_0	$A_1 \frac{j}{10}$	$A_2 \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$A_3 \left(\frac{j}{10}\right)^3$	$\sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$\left(\frac{j}{10}\right) \sum_{k=0}^5 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$
Varianta nr.4						
0,0	89,26588	0,00000	0,00000	0,00000	89,26588	0,00000

B-I-1-21

$\frac{j}{10}$	A_0	$A_1 \left(\frac{j}{10}\right)$	$A_2 \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$A_3 \left(\frac{j}{10}\right)^3$	$\sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$\left(\frac{j}{10}\right) \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$
0,1	89,26588	-12,55787	0,79435	-0,01914	77,48322	0,00077
0,2	89,26588	-25,11574	3,17741	-0,15310	67,17445	0,02150
0,3	89,26588	-37,67360	7,14918	-0,51672	56,22474	0,14149
0,4	89,26588	-50,23147	12,70965	-1,22483	50,51923	0,51732
0,5	89,26588	-62,78934	19,85882	-2,39225	43,94311	1,37322
0,6	89,26588	-75,34721	28,59670	-4,13380	38,37657	2,98416
0,7	89,26588	-87,90508	38,92329	-6,56432	33,71977	5,66728
0,8	89,26588	-100,46294	50,83859	-9,79864	29,84289	9,77892
0,9	89,26588	-113,02081	64,34258	-13,95157	26,63608	15,72834
1,0	89,26588	-125,57868	79,43529	-19,13796	23,98453	23,98453

Varianta nr.6

0,0	125,36993	0,00000	0,00000	0,00000	125,36993	0,00000
0,1	125,36993	-19,87114	1,31779	-0,03260	106,78398	0,00107
0,2	125,36993	-39,74227	5,27116	-0,26081	90,63801	0,02900
0,3	125,36993	-59,61341	11,86010	-0,88022	76,73640	0,18647
0,4	125,36993	-79,48454	21,08463	-2,08646	64,88356	0,66441
0,5	125,36993	-99,35568	32,94474	-4,07511	54,88388	1,71512
0,6	125,36993	-119,22682	47,44042	-7,04179	46,54174	3,61909
0,7	125,36993	-139,09795	64,57168	-11,18211	39,66155	6,66892
0,8	125,36993	-158,96909	84,33852	-16,69166	34,04770	11,15675
0,9	125,36993	-178,84022	106,74094	-23,76606	29,50459	17,42217
1,0	125,36993	-198,71136	131,77894	-32,60090	25,83661	25,83661

F-I-1-22

Tabela nr.21 (104)

Calculul nivelelor (polinom algebric)

$\frac{t_{Ij}}{T_x}$	$\frac{t_{Ij}}{T_x} \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\left(\frac{t_{Ij}}{T_x}\right)^3$	$-\frac{1}{6} \left(\frac{t_{Ij}}{T_x}\right) \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\left(\frac{j}{10}\right) \sum_{k=0}^{53} A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$z_{Ij} < m >$	$t_{Ij} < s >$
Varianta nr.4						
0,000000	0,000000	0,000000	-0,000000	0,000000	-25,380	0,000
0,176523	17,152701	0,005501	-0,08909	0,00077	-2,316	10,777
0,353044	34,30541	0,044004	-0,71264	0,02150	8,234	21,555
0,529569	51,45811	0,148514	-2,40518	0,14149	23,814	32,332
0,706092	68,61081	0,352033	-5,70116	0,51732	38,047	43,109
0,882615	85,76351	0,687565	-11,13509	1,37322	50,622	53,887
1,059138	102,91622	1,188113	-19,24145	2,98416	61,279	64,664
1,235661	120,06892	1,886679	-30,55470	5,66728	69,802	75,441
1,412184	137,22162	2,816267	-45,60935	9,77092	76,011	86,218
1,588707	154,37433	4,009880	-64,93987	15,72834	79,783	96,996
1,765230	171,52703	5,500522	-89,08079	23,98453	81,051	107,773

Tabela nr.21 (104) - URNARE

Calculul nivelelor

$\frac{t_{Ij}}{T_x}$	$\frac{t_{Ij}}{T_x} \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\left(\frac{t_{Ij}}{T_x}\right)^3$	$-\frac{1}{6} \left(\frac{t_{Ij}}{T_x}\right) \sqrt{-2z_0 z_x}$	$\left(\frac{j}{10}\right) \sum_{k=0}^{53} A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$z_{Ij} < m >$	$t_{Ij} < s >$
Varianta nr.6						
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-25,380	0,000
0,197084	19,21366	0,007655	-0,06612	0,00107	-15,231	22,561
0,394168	38,42732	0,061241	-0,52896	0,02900	-5,453	45,122
0,591252	57,64098	0,206689	-1,78524	0,10647	3,662	67,684
0,788336	76,85465	0,489930	-4,23168	0,55441	11,907	90,245
0,985420	96,06831	0,956895	-8,26501	1,71512	19,138	112,806
1,182504	115,28197	1,653514	-14,28192	3,61909	25,239	135,367

F-I-1-23

1,379588	71,49563	2,625719	-22,67917	6,66592	30,102	157,928
1,576672	81,70929	3,919441	-33,85345	11,15675	33,633	180,490
1,773756	91,92295	5,580609	-48,20149	17,42217	35,764	203,051
1,970840	102,13660	7,655156	-66,12001	25,83661	36,473	225,612

Se constată o concordanță foarte bună a curbelor obținute prin cele două metode principal diferite.

b.- În metoda care pleacă de la un polinom trigonometric, nivelurile în momentele reprezentând zecimi ale primei cvazi-semiperioade se calculează cu formula :

$$z_{Tj} = \alpha_j \sqrt{2z_0 z_x} + \beta_j z_0 + \delta_j z_1 \quad (1-12)$$

în care coeficienții α_j , β_j și δ_j au valori cunoscute.

Calcululele respective sînt prezentate în tabela nr.22 (105)

Tabela nr.22 (105)

Calculul nivelurilor (polinom trigonometric)

$t_{Tj} < n >$	α_j	$\alpha_j \sqrt{2z_0 z_x}$	β_j	$\beta_j z_0$	δ_j	$\delta_j z_1$	$z_{Tj} < m >$
		Varianta nr.4					
0,000	0,000000	0,000000	1,000000	-25,38000	0,000000	0,000000	-25,380
10,777	0,103619	10,06864	0,905358	-22,97799	0,039231	3,17924	- 9,730
21,555	0,074298	7,21952	0,792547	-20,11484	0,167721	13,59194	0,697
32,332	0,069104	6,71482	0,690858	-17,53398	0,272288	22,06595	11,247
43,109	0,061267	5,95330	0,578471	-14,68159	0,388766	31,50521	22,777
53,887	0,045233	4,39577	0,475808	-12,07601	0,500000	40,51950	32,039
64,664	0,043621	4,23864	0,365439	- 9,27484	0,611234	49,53379	44,498
75,441	0,025418	2,46986	0,258595	-6,56314	0,727812	58,98116	54,868
86,218	0,023594	2,29262	0,155104	-3,93694	0,832279	66,63667	64,993
96,996	0,008163	0,79320	0,034866	-0,88490	0,960769	77,85976	77,768
107,773	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	81,03900	81,039

F-I-1-24

$t_{ij} <n>$	α_j	$\alpha_j \sqrt{2z_0 z_1}$	β_j	$\beta_j z_0$	δ_j	$\delta_j z_1$	$z_{ij} <m>$
Varianta nr.6							
0,000	0,000000	0,000000	1,000000	-25,58000	0,000000	0,000000	-25,330
22,561	0,103619	5,36994	0,905358	-22,97799	0,039231	1,43083	-16,177
45,122	0,074298	3,85041	0,792547	-20,11484	0,167721	6,11712	-10,147
67,684	0,069104	3,58124	0,690358	-17,53398	0,272288	9,93089	-4,022
90,245	0,061267	3,17509	0,578471	-14,68159	0,388766	14,17907	2,673
112,806	0,045238	2,34441	0,475808	-12,07601	0,500000	18,23600	8,504
135,367	0,043621	2,26061	0,365439	-9,27484	0,611254	22,29293	15,279
157,928	0,025418	1,31720	0,258595	-6,56514	0,727012	26,54476	21,299
180,490	0,023594	1,22273	0,155104	-3,93854	0,852279	30,35486	27,341
203,051	0,008163	0,42304	0,034866	-0,88490	0,960769	35,04117	34,579
225,612	0,000000	0,000000	0,000000	0,00000	1,000000	38,47200	36,472

Reprezentarea valorilor din tabelul de mai sus este dată în graficele nr.1 (29) pentru varianta nr.4 și nr.2 (30) pentru varianta nr.6. Se constată că, așa cum s-a constatat și atunci când s-au făcut verificări utilizând rezultatele prof. Iscande, metoda care pleacă de la un polinom algebric dă rezultate mai bune decât metoda care pleacă de la un polinom trigonometric. Se constată din reprezentările grafice că graficele obținute în metoda diferențelor finite și în cea variațională (polinom algebric) aproape coincid. Autorul nu a întâlnit în literatura de specialitate o altă metodă care să permită exprimarea atât de fidelă a legii de oscilație.

I.- Verificări referitoare la legea de oscilație în cea de a doua cvasi-semiperioadă

In cea de a doua cvasi semiperioadă se vor utiliza de asemenea cele două metode amintite anterior :

F-I-1-25

a.- metoda care pornește de la un polinom algebric

b.- metoda care pornește de la un polinom trigonometric

ambele metode fiind bazate pe un principiu variațional, analog principiului lui Hamilton.

a.- In această metodă, se împarte cea de a doua cvasi semiperioadă într-un de zece subintervale de timp egale și se determină nivelurile la extremitățile acestor subintervale. Se va nota cu $T_{\Pi j}$ timpul considerând drept origine a timpului momentul când se realizează nivelul maxim în bazin și cu $t_{\Pi j}$ timpul considerând drept origine a timpului momentul în care se realizează manevra de închidere bruscă.

Nivelurile extreme se calculează cu formula :

$$Z_{\Pi j} = C_j Z_1 + D_j Z_2 \quad (1-13)$$

în care coeficienții C_j și D_j sînt dați în tabele.

Calcululele efectuate cu formula de mai sus sînt prezentate în tabelul nr.23 (406).

Tabela nr.23 (406)

Calculul nivelelor (polinom algebric)

$T_{\Pi j} <\lambda>$	C_j	$C_j Z_1$	D_j	$D_j Z_2$	$Z_{\Pi j} <m>$	$t_{\Pi j} <\lambda>$
	Varianta Nr.4					
0,000	1,00000	81,03900	0,00000	0,00000	81,039	107,773
19,298	0,95471	77,36874	0,00423	-0,26992	77,099	127,071
38,596	0,85280	69,11006	0,04543	-2,89898	66,211	146,369
57,894	0,73594	59,63984	0,15030	-9,59094	50,049	165,667
77,192	0,61068	49,48890	0,30316	-19,34525	30,144	184,965
96,490	0,46582	37,74959	0,46582	-29,72491	6,025	204,263
115,788	0,30316	24,56778	0,61068	-38,96871	-14,401	223,561

F-I-1-26

$T_{ij} < \alpha >$	C_j	$C_j Z_1$	D_j	$D_j Z_2$	$Z_{ij} < m >$	$t_{ij} < \alpha >$
135,086	0,15030	12,18016	0,73594	-46,96180	-34,782	242,859
154,384	0,04543	3,68160	0,85279	-54,41824	-50,737	262,157
173,682	0,00423	0,34279	0,95471	-60,92195	-60,579	281,455
192,980	0,00000	0,00000	1,00000	-63,81200	-63,812	300,753
Variante nr.6						
0,000	1,00000	36,47200	0,00000	0,00000	36,472	225,612
36,458	0,95471	34,82018	0,00423	-0,10515	34,715	262,070
72,916	0,85280	31,10332	0,04543	-1,12953	29,974	298,528
109,373	0,73594	26,84120	0,15030	-3,73691	23,104	334,985
145,831	0,61068	22,27272	0,30316	-7,53747	14,735	371,543
182,289	0,46582	16,98939	0,46582	-11,58168	5,408	407,901
218,747	0,30316	11,05685	0,61068	-15,18334	-4,126	444,359
255,205	0,15030	5,48174	0,73594	-18,29768	-12,816	480,817
291,662	0,04543	1,65692	0,85279	-21,20292	-19,546	517,274
328,120	0,00423	0,15428	0,95471	-23,73695	-23,583	553,732
364,578	0,00000	0,00000	1,00000	-24,86300	-24,863	590,190

Se constată din reprezentările grafice Nr.1 (29) și Nr.2 (30) că rezultatele obținute prin metoda variațională și varianta polinomului algebric se apropie foarte mult de rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite.

b.- În această metodă formula de calcul a nivelurilor la momente reprezentând diferite zecimi din cea de a doua cvasi-semiperioadă este :

$$Z_{ij} = A_j Z_1 + B_j Z_2 \tag{1-14}$$

în care coeficienții A_j și B_j sînt dați în tabele, fiind aceeași

F-I-1-27

pentru orice amenajare cu castel de echilibru simplu și invarianța în raport cu parametrii caracteristici ai amenajării.

Calculule în această metodă sînt prezentate în tabela nr.24 (107).

Reprezentările sînt date în graficele Nr.1 (29) pentru Varianta Nr.4 respectiv Nr.2 (30) pentru Varianta Nr.6.

Se constată din aceste reprezentări grafice că metoda polinomului ^{TRIGONOMETRIC} algebric dă rezultate cu puțin mai slabe decît metoda polinomului algebric.

Tabela Nr.24 (107)

Calculul nivelelor Z_{IIj} (polinom trigonometric)

$T_{2j} <\Delta>$	A_j	$A_j Z_1$	B_j	$B_j Z_2$	$Z_{IIj} <m>$	$t_{IIj} <\Delta>$
Varianta Nr.4						
0,000	1,00000	81,03900	0,00000	0,00000	81,039	107,773
19,298	0,95451	77,35254	0,01215	-0,77552	76,577	127,071
38,596	0,84661	68,60843	0,11173	-7,12971	61,479	146,369
57,894	0,71668	58,07903	0,24998	-15,95172	42,127	165,667
77,192	0,50223	48,00412	0,35611	-22,72409	26,080	184,965
96,490	0,48333	39,16858	0,48333	-30,84225	8,326	204,263
115,788	0,35611	28,85880	0,60223	-38,42950	-9,571	223,561
135,086	0,24998	20,25813	0,71668	-45,73278	-25,475	242,859
154,384	0,11173	9,05449	0,84661	-54,02388	-44,969	262,157
173,682	0,01215	0,98462	0,95451	-60,90919	-59,925	281,455
192,980	0,00000	0,00000	1,00000	-63,81200	-63,812	300,753
Varianta Nr.6						
0,000	1,00000	36,47200	0,00000	0,00000	36,472	225,612
36,458	0,95451	34,81289	0,01215	-0,30209	34,511	262,070
72,916	0,84661	30,87756	0,11173	-2,77794	28,100	298,528

F-I-1-28

109,373	0,71668	25,13875	0,24998	-6,21525	19,924	334,985
145,831	0,60223	21,96453	0,35611	-8,85396	13,111	371,443
182,289	0,48333	17,62301	0,48333	-12,01703	5,611	407,901
218,747	0,35611	12,98804	0,60223	-14,97324	-1,985	444,359
255,205	0,24998	9,11727	0,71668	-17,81381	-8,702	480,817
291,662	0,11173	4,07502	0,84661	-21,04926	-16,974	517,274
328,120	0,01215	0,44313	0,95451	-23,73198	-23,289	553,732
364,578	0,00000	0,00000	1,00000	-24,86300	-24,863	590,130

J.- Verificări referitoare la legea de oscilație în cea
de a treia cvasi semiperioadă

În cea de a treia cvasi semiperioadă se vor utiliza de asemenea cele două metode anterioare și anume :

a.- metoda care pornește de la un polinom algebric

b.- metoda care pornește de la un polinom trigonometric

ambele metode fiind bazate pe un principiu variațional analog principiului lui Hamilton.

a.- În această metodă se împarte cea de a treia cvasi semiperioadă într-un număr de zece subintervale de timp egale și se determină nivelurile la extremitățile intervalului.

Se va nota cu T_j timpul dacă se consideră drept origine a timpului momentul în care se realizează nivelul maxim și cu t_j timpul, dacă se consideră drept origine a timpului momentul în care se realizează manevra de închidere bruscă.

Nivelurile extreme se calculează cu formula :

$$\tilde{x}_{ij} = C_j x_2 + D_j x_3 \quad (1-15)$$

în care coeficienții C_j și D_j sînt dați în tabele și sînt aceiași ca și în perioada anterioară.

F-I-1-29

Calcululele efectuate cu formula de mai sus sînt conținute de tabelul nr.25 (108) iar reprezentarea este data in graficele nr.1 (29) și nr.2 (30).

Tabela Nr.25 (108)

Calculul nivelelor $Z_{\bar{m}j}$ (polinom algebric)

$T_{\bar{m}j} <\Delta>$	C_j	$C_j Z_2$	D_j	$D_j Z_3$	$Z_{\bar{m}j} <m>$	$t_{\bar{m}j} <\Delta>$
Varianta Nr.4						
0,000	1,00000	-13,81200	0,00000	0,00000	-33,012	300,753
19,256	0,95471	-30,92195	0,00423	0,21946	-30,702	320,009
38,512	0,85200	-54,41067	0,04543	2,05700	-32,062	339,265
57,767	0,73594	-46,98100	0,15030	7,75706	-39,164	350,520
77,023	0,61068	-39,06871	0,30316	15,72855	-23,240	377,775
96,279	0,46582	-29,72491	0,46582	24,10757	-5,557	397,032
115,535	0,30316	-19,34525	0,61068	31,68360	12,538	416,288
134,791	0,15030	-9,59094	0,73594	38,18204	28,591	435,544
154,046	0,04543	-2,89898	0,85279	44,24445	41,345	454,799
173,302	0,00423	-0,26992	0,95471	49,53226	49,262	474,055
192,558	0,00000	0,00000	1,00000	51,082	51,082	493,311
Varianta Nr.6						
0,000	1,00000	-24,86300	0,00000	0,00000	-24,863	590,190
36,206	0,95471	-23,73695	0,00423	0,07390	-23,657	626,396
72,412	0,85280	-21,20317	0,04543	0,05813	-20,345	662,602
108,619	0,73594	-18,29768	0,15030	2,83902	-15,459	698,009
144,825	0,61068	-15,18334	0,30316	5,72539	-9,457	735,015
181,031	0,46582	-11,58160	0,46582	0,79007	-2,783	771,221
217,237	0,30316	-7,53747	0,61068	11,53513	3,998	807,427
253,443	0,15030	-3,73691	0,73594	13,90117	10,164	843,633
289,650	0,04543	-1,12953	0,85279	16,10835	14,979	879,840

F-I-1-30

325,856	0,00423	-1,05170	0,95471	18,03352	16,982	916,046
362,062	0,00000	0,00000	1,00000	18,88900	18,889	952,252

b.- In această metodă, pentru calculul nivelurilor se utilizează formula :

$$z_{mj} = A_j z_2 + B_j z_3 \quad (1-16)$$

Calcululele sint conținute în tabela nr.26 (109)

Tabela Nr.26 (109)

Calculul nivelelor z_{mj} (polinom trigonometric)

$T_{mj} < \lambda >$	A_j	$A_j z_2$	B_j	$B_j z_3$	$z_{mj} < m >$	$t_{mj} < \lambda >$
Varianta Nr.4						
0,000	1,00000	-52,81200	0,00000	0,00000	-52,812	300,753
19,256	0,95451	-50,90919	0,01215	0,53037	-50,279	320,003
38,512	0,84661	-54,02388	0,11173	5,79666	-48,227	339,265
57,767	0,71668	-45,73278	0,24998	12,96946	-32,763	358,520
77,023	0,50223	-38,42950	0,35611	18,47570	-19,954	377,776
96,279	0,48333	-30,84225	0,48333	25,07613	-5,766	397,032
115,535	0,35611	-22,72409	0,50223	31,24490	8,521	416,288
134,791	0,24998	-15,95172	0,71668	37,13279	21,231	435,544
154,046	0,11173	-7,12971	0,84661	43,92382	36,794	454,799
173,302	0,01215	-7,7532	0,95451	49,52189	48,747	474,055
192,558	0,00000	0,0000	1,00000	51,88200	51,882	493,311
Varianta Nr.6						
0,000	1,00000	-24,80500	0,00000	0,00000	-24,863	590,190
36,206	0,95451	-23,73198	0,01215	0,22950	-23,502	626,396
78,412	0,84661	-21,04926	0,11173	2,11047	-18,939	662,602
108,619	0,71668	-17,81681	0,24998	4,72187	-13,097	698,809

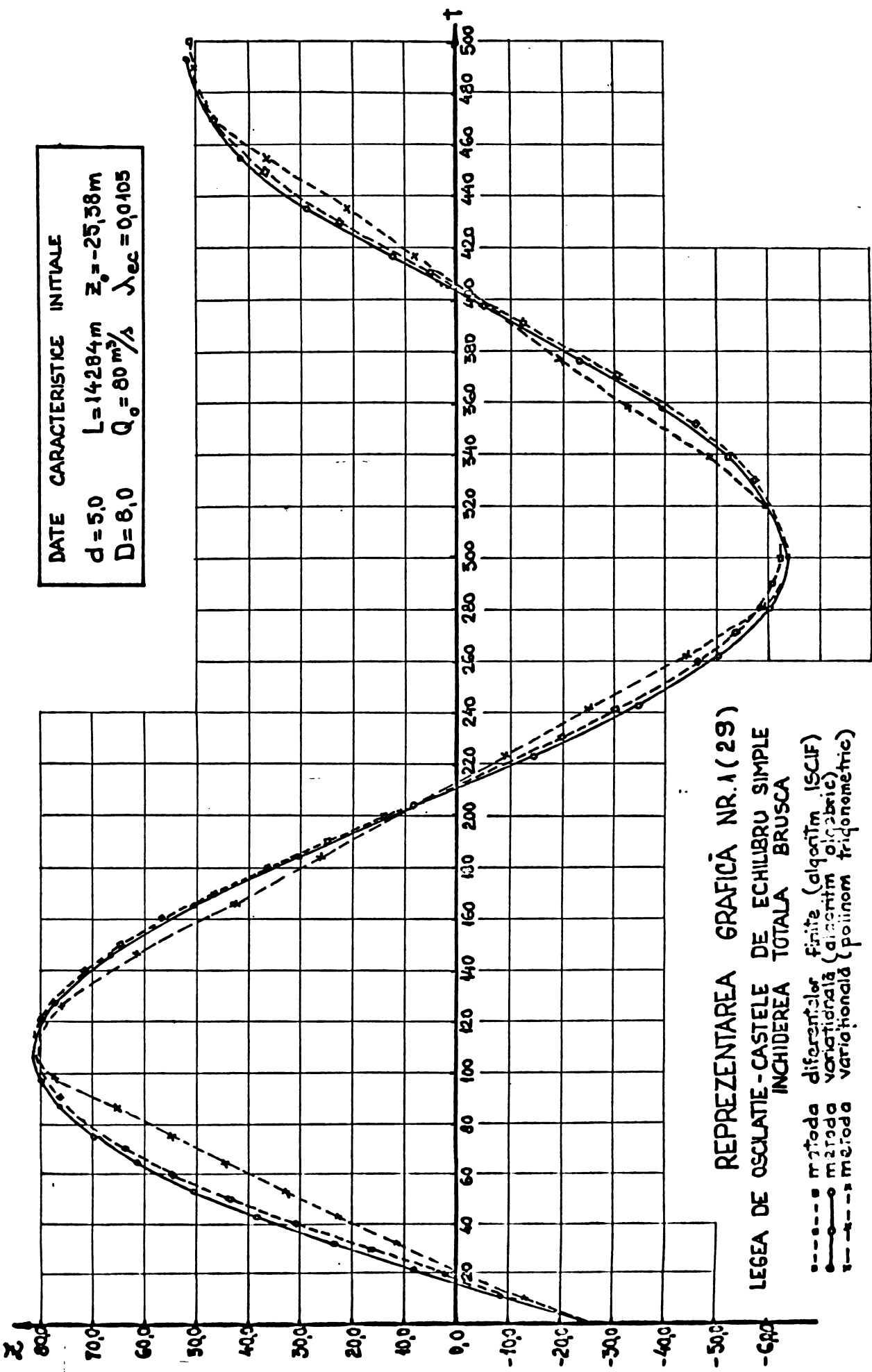
F-I-1-31

144,825	0,60223	-14,97324	0,35611	6,72656	-8,247	735,015
181,031	0,48333	-12,01703	0,48333	9,12962	-2,887	771,221
217,237	0,35611	-8,85396	0,60223	11,37552	2,522	807,427
253,443	0,24998	-6,21525	0,71668	13,53737	7,322	843,633
289,650	0,11173	-2,77794	0,84661	15,99162	13,214	879,840
325,856	0,01215	-0,30209	0,95451	18,02974	17,728	916,046
362,062	0,00000	0,00000	1,00000	18,88900	18,889	952,252

Se constată și în această cvasi semiperioadă că în reprezentările grafice Nr.1 (29) și Nr.2 (30) există o concordanță foarte bună între rezultatele diferitelor metode.

Ca o concluzie generală ~~se~~ se desprinde, din verificările efectuate în cadrul acestui paragraf, ideea că la manevra de închidere bruscă și totală, în cadrul castelelor de echilibru simple dacă se urmăresc nivelurile extreme, cvasi semiperioadele sau chiar legea de oscilație utilizarea metodei diferențelor finite prin programare la calculator nu este necesară deoarece metodele indicate în teză sînt mult mai rapide și tot atît de precise, calculatorul urmînd a fi folosit în cazurile mai complexe.

DATE CARACTERISTICE INITIALE
 $d = 5,0$ $L = 14284\text{ m}$ $Z_0 = -25,38\text{ m}$
 $D = 6,0$ $Q_0 = 80\text{ m}^3/\text{s}$ $\lambda_{ec} = 0,0105$

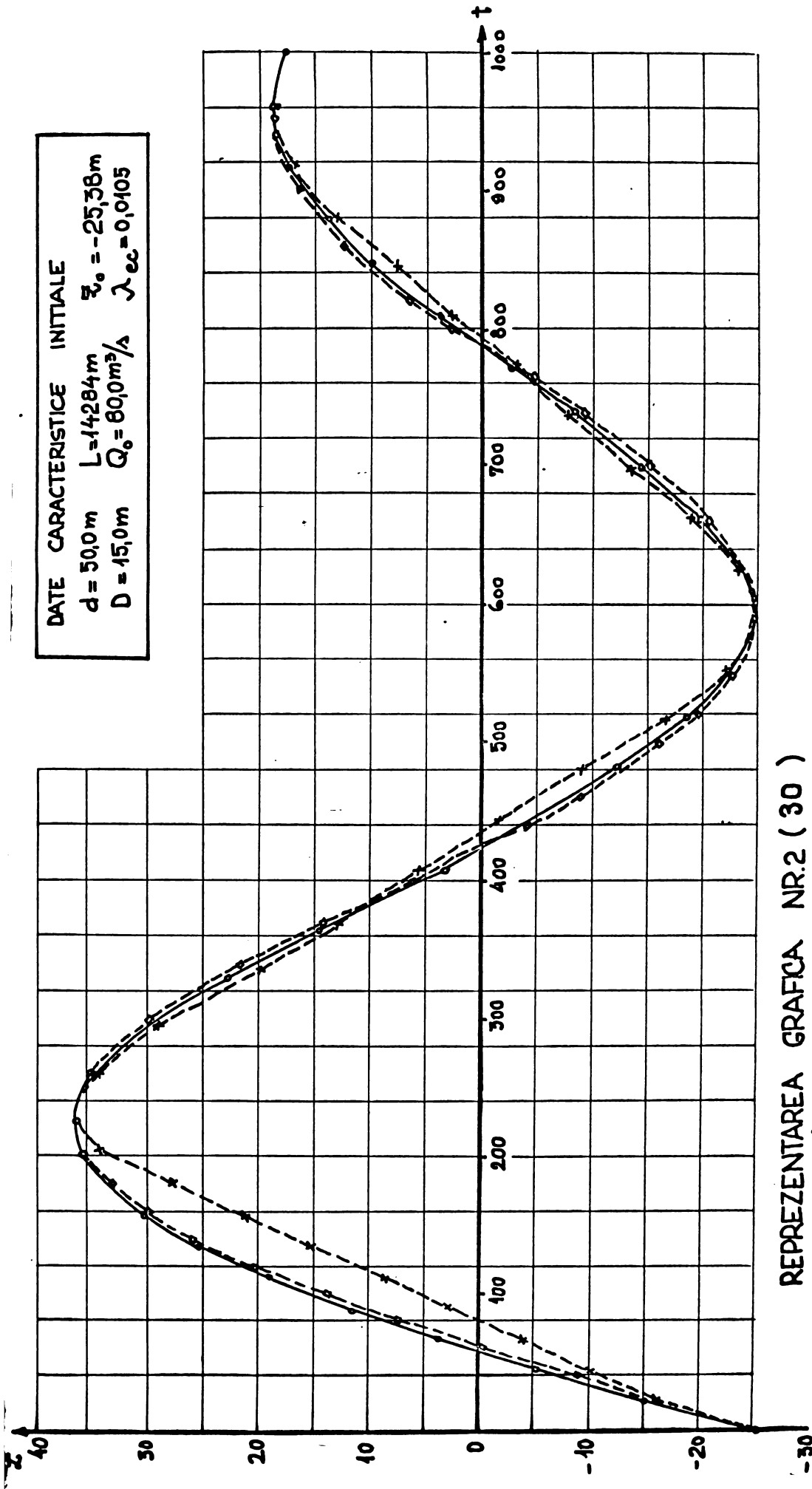


REPREZENTAREA GRAFICĂ NR.1 (29)

LEGEA DE OSCILATIE - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE
 INCHIDEREA TOTALA BRUSCA

- metoda diferentelor finite (algoritm ISCIF)
- metoda variatională (algoritm olcabbic)
- ×--- metoda variatională (polinom trigonometric)

DATE CARACTERISTICE INITIALE
 $d = 50,0\text{ m}$ $L = 14284\text{ m}$ $\bar{x}_0 = -25,38\text{ m}$
 $D = 15,0\text{ m}$ $Q_0 = 60,0\text{ m}^3/\text{s}$ $\lambda_{ec} = 0,0105$



REPREZENTAREA GRAFICA NR.2 (30)

LEGEA DE OSCILATIE - CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE - INCIDERE TOTALA BRUSCA

- metoda diferentelor finite (algoritm ISCIF)
- metoda variatională (polinom algebric)
- x--- metoda variatională (polinom trigonometric)

F-I-2-1

F. VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Cap.I. CAZUL CASTELELOR CILINDRICE SIMPLE.

INCHIDEREA TOTALA BRUSCA

& 2.- Utilizarea rezultatelor cercetărilor experimentale
efectuate de către prof.dr.ing.Mihai Bălă

In anul 1969 in teza de doctorat intitulată "Contribuții la studiul castelilor de echilibru de formă tronconică", prof.dr. ing.Mihai Bălă comunică și rezultatele cercetărilor experimentale efectuate cu un castel cilindric simplu, model avind diametru de 0,350 m, deci un model relativ de diametru mare dacă ne raportăm la modelele utilizate de către recunoscutul specialist francez in domeniul castelilor de echilibru L.Escande in laboratoarele de la Toulouse.

Rezultatele experimentale referitoare la castelul cilindric au fost preluate in prezenta teză intrucit ele pot reprezenta o confirmare a metodelor teoretice recomandate in prezenta teză.

Datele experimentale referitoare la inchiderea totală bruscă au fost transcrise in tabelul nr.1 (140) pentru regimul Nr.1 și respectiv, in tabelul Nr.2 (141) pentru regimul Nr.2.

Tabelul Nr.1 (140)

Măsurători pe model - castel cilindric simplu -
Regimul Nr.1 . Inchidere totală bruscă

α_0	Nr. extremului 1	Nivele maxime	Nivele minime	Cvasisemi- perioade
-1,011	1	0,344		43,2
	2		-0,203	45,8
	3	0,146		46,9
	4		-0,118	47,5
	5	0,096		47,8
	6		-0,078	47,6

F-I-2-2

Alte date caracteristice importante :

- Debit corespunzător regimului permanent $Q_0 = 6,05 \text{ l/s}$
- Temperatura apei $t^{\circ}\text{C} = 21^{\circ} \text{C}$
- Pierdere specifică de energie măsurată $h_T = 1,011 = -z_0$
- Lungimea conductei de aducțiune $L = 180,83 \text{ m}$
- Diametrul castelului cilindric $D = 0,350 \text{ m}$
- Secțiunea castelului cilindric $F = 0,097 \text{ m}^2$
- Diametrul conductei de aducțiune $d = 0,105 \text{ m}$
- Secțiunea conductei de aducțiune $f = 0,0087 \text{ m}^2$
- Viteza în conducta de aducțiune în regim permanent $= 0,696 \text{ m/s}$
- Coeficient cinematic de viscozitate (după Poiseuille)
 $\nu = 0,988 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- Rugozitatea absolută a conductei de aducțiune $k = 0,5 \text{ mm}$
- Coeficient de rezistență Darcy (după N.Z.Frenkl) $\lambda = 0,0244$
- Pierdere de energie specifică calculată $z_0 = -1,030 \text{ m}$

Tabelul Nr.2 (111)

Măsurători pe model - castel cilindric simplu -
Regimul Nr.2 - Inchidere totală bruscă

z_0 m	Nr. extremului j	Nivele maxime z_j m	Nivele minime z_j m	Cvasisemipe- rioadă T_j s
-0,539	1	0,316		36,5
	2		-0,194	46,5
	3	0,143		47,5
	4		-0,116	46,8
	5	0,094		46,8
	6		-0,077	47,6
	7	0,063		48,3
	8		-0,052	48,0

Alte date caracteristice importante :

- Debitul corespunzător regimului permanent $Q_0 = 0,0040 \text{ m}^3/\text{s}$
- Viteza apei în conducta de aducțiune $w_0 = 0,46 \text{ m/s}$
- Pierdere specifică de energie măsurată $h_T = 0,539 = -z_0$

F-I-2-3

- Coeficientul de rezistență Darcy (experimental)

$$\lambda_l = - \frac{2 g d z_1}{L v^2} = 0,02785$$

- Temperatura apei 21°

- Lungimea conductei de aducțiune $L = 180,83$ m

- Diametrul castelului cilindric $D = 0,350$ m

- Secțiunea castelului cilindric $F = 0,097$ m²

- Diametrul conductei de aducțiune $d = 0,105$ m

- Secțiunea conductei de aducțiune $f = 0,0087$ m²

Verificarea concordanței rezultatelor teoretice cu cele experimentale s-a făcut urmărindu-se următoarele aspecte :

1.- cunoscîndu-se mărimile care caracterizează, din punct de vedere hidraulic, regimul permanent, anterior manevrei de închidere totală, s-a calculat valoarea z_1 a saltului maxim și s-a comparat cu valoarea determinată pe cale experimentală

2.- cunoscîndu-se mărimile care caracterizează regimul permanent, s-a calculat valoarea z_j , $j = 2,3, \dots, 10$ a nivelurilor extreme succesive și s-a comparat cu valorile măsurate de către experimentatorul citat

3.- cunoscîndu-se mărimile care caracterizează regimul permanent, s-au calculat valorile cvasisemiperioadelor succesive T_j , $j = 1,2, \dots, 10$ și s-au comparat cu valorile determinate pe cale experimentală

4.- cunoscîndu-se mărimile caracteristice ^{REGIMULUI} nivelului permanent, s-a determinat pe cale teoretică ecuația curbelor de amortizare și s-a comparat cu ecuația determinată în teza prof. Bălă, prin folosirea rezultatelor experimentale și a metodei celor mai mici patrate a lui Gauss.

Se vor analiza pe rînd cele patru puncte de mai sus 1+2.

F-I-2-4

1+2) Conform metodei de calcul prezentată în partea A , se calculează la început mărimile de referință Z și T :

$$Z_* = \frac{d f}{\lambda F}$$

$$T_* = \sqrt{\frac{L F}{g f}} \tag{1-2}$$

Cu ajutorul lui Z_{*} , se determină valoarea parametrului inițial al pierderii de energie S₀ :

$$S_0 = \frac{Z_0}{Z_*} \tag{1-3}$$

Folosind apoi tabelul Nr.1(110) s-a calculat S_j = S_{max} iar folosind tabelul Nr.3(112) s-au calculat apoi nivelele extreme succesive S_j , j = 2,3,...,10

De la nivelele extreme sub formă adimensională se trece la nivelele extreme sub formă dimensională prin simpla înmulțire cu mărimea de referință Z_{*} :

$$Z_j = S_j Z_* \tag{1-4}$$

Rezultatele numerice sînt trecute în tabelul Nr.3 pentru regimul Nr.1 și în tabelul Nr.4 pentru regimul Nr.2, în tabele fiind dată și o comparație a rezultatelor teoretice cu cele experimentale

TABEL Nr.3 (112)

Regimul Nr.1

Z ₀ < m >	S ₀	Nr EXTREM d	S _j = S _{jmax}	S _j = S _{jmin}	Z _j < m >		Δ Z _j = Z _{j exp} - Z _{j teor} < m >	Δ Z _j % Z _{j exp}
					TEORETIC	EXPERIM.		
-1,011	-2,620	1	0,97236		0,3750	0,344	-0,031	- 9 %
		2		-0,58209	0,2245	-0,203	0,0215	- 10 %
		3	0,41805		0,1615	0,146	-0,0155	- 10 %
		4		-0,32615	0,1260	-0,118	0,008	- 6 %
		5	0,26303		0,1015	0,096	-0,0019	- 2 %
		6		-0,22245	0,0860	-0,078	0,008	- 10 %

F-I-2-5

TABEL Nr.4(110)

Regimul Nr.2

Z_0 <m>	S_0	Nr EXTR. j	$S_j = S_{j \max}$	$S_j = S_{j \min}$	Z_j <m>		$\Delta Z_j =$ $-Z_{j \exp} - Z_{j \text{teor}}$ <m>	$\frac{\Delta Z_j}{Z_{j \exp}}$ %
					TEOR.	EXPER.		
-0,539	-1,595	1	0,91904		0,3105	0,316	0,0055	+ 1,7 %
		2		-0,56610	-0,1910	-0,194	-0,0030	+ 1,5 %
		3	0,40973		0,1372	0,143	0,0058	+ 4,0 %
		4		-0,32105	-0,1085	-0,116	-0,0075	+ 6,5 %
		5	0,26414		0,0885	0,094	0,0055	+ 5,9 %
		6		-0,22462	-0,0759	-0,077	-0,0011	+ 1,4 %
		7	0,19409		0,0656	0,063	-0,0026	- 4,1 %
		8		-0,17154	-0,0580	-0,052	0,0060	-11,5 %

Se constată că verificarea rezultatelor teoretice prin aceste experiențe nu poate fi apreciată ca bună, dar poate fi apreciată ca mulțumitoare avînd în vedere că la regimul Nr.1 se obțin la primele nivele extreme erori relative negative, pe cînd la al doilea regim se obțin erori relative pozitive. De asemenea după cum se observă din reprezentările grafice Nr.1 și Nr.2, diferențele dintre desfășurarea teoretică și cea reală a fenomenului oscilatoriu nu sînt mari în ansamblu. De asemenea se menționează că diferențele absolute între nivelele teoretice și cele experimentale sînt mici și nu depășesc în medie 1,5 cm la regimul 1 și 0,5 cm la regimul 2.

De asemenea se menționează că determinarea debitului s-a făcut cu ajutorul unui deversor triunghiular, ceea ce de asemenea poate duce la erori destul de mari în cursul determinărilor experimentale.

Pe de altă parte, din punctul de vedere al calculului teoretic s-a arătat că în mod uzual valorile lui S_0 sînt în valoare absolută subunitare la marea majoritate a amenajărilor, iar metoda teoretică conduce la erori mai mari cu cît $|S_0|$ este mai mare. Totuși, numai din erorile metodei teoretice aceste diferențe existente între rezultatele teoretice și cele experimentale nu se pot explica, fiind necesară și luarea în considerare a erorilor experi-

F-I-2-6

mentale, care, în cazul de față par a fi destul de mari.

Autorul prezentei teze, efectuând cercetări experimentale proprii cu ajutorul a trei modele de castele cilindrice a obținut diferențe mai mici între rezultatele teoretice și experimentale. De asemenea și rezultatele experimentale ale altor cercetări prezintă diferențe mai mici față de rezultatele teoretice ale prezentei teze, atât în cazul cercetărilor pe modele, cât și în cazul cercetărilor pe castele de echilibru existente.

3.- În capitolul III în care s-a studiat problema timpului s-au dat curbele care dau valoarea primelor trei cvasisemiperioade, sub formă adimensională în funcție de parametrul pierderii inițiale de energie S_0 sau de parametrul S_1 . Pentru următoarele cvasisemiperioade se poate lua $T_j \cong \pi$.

Se compară rezultatele teoretice din cap. III, § 5 și § cu rezultatele experimentale din lucrarea 7-B prin intermediul tabelului Nr.5(114).

TABEL Nr.5(114)

$T_j = T_j^* T_k$ Compararea cvasisemiperioadelor

REGIM	S_0	S_1	j	g_j	T_j teoretic. < >	T_j experim < >	$\frac{\Delta T_j}{T_j \text{ exper.}}$ %
1	-2,620	0,97236	1	2,758	39,58	43,2	8,38 %
			2	3,214	46,12	45,8	-2,11 %
			3	3,1725	45,52	46,9	2,94 %
			4	π	45,08	47,5	5,09 %
			5	π	45,08	47,8	5,69 %
			6	π	45,08	47,6	5,29 %
2	-1,595	0,91904	1	2,423	34,77	36,5	4,74 %
			2	3,210	46,06	46,5	1,05 %
			3	3,1712	45,51	47,5	4,19 %
			4	π	45,08	46,8	3,68 %
			5	π	45,08	47,5	5,09 %
			6	π	45,08	47,6	5,29 %
			7	π	45,08	48,3	6,67 %
			8	π	45,08	48,0	6,08 %

F-I-2-7

Se constată că diferențele relative între rezultatele teoretice și cele experimentale sînt în medie de 5 % și doar o singură dată diferențele ating 8 %. Se menționează că manevrarea vanei a fost realizată manual, iar timpii au fost citați cu cronometrul fără a exista o instalație care să citească automat timpii, ceea ce evident conduce la erori.

4.- Se face o comparație între formulele aproximative obținute în cap.IV, & 3 privind parametrii curbelor maximelor și minimele și valorile aceluiași parametrii determinați pe cale experimentală .

În tabelele Nr.6(115) și Nr.7(116) sînt determinate valorile parametrilor prin formulele :

$$d_M = \frac{2\mathcal{E}_3}{3\pi T_x}$$

$$A_M = \mathcal{E}_3 e^{\frac{2\mathcal{E}_3}{3} \left(2 + \frac{\mathcal{F}_1}{\pi} \right)}$$

$$d_m = \frac{d_M}{1 + \frac{2}{3} \mathcal{E}_3}$$

$$A_m = \frac{e^{d_M \pi T_x}}{1 + \frac{2}{3} \mathcal{E}_3} A_M$$

TABEL Nr.6 (115)

Determinarea factorilor de amortizare d_M și d_m

$$\pi T_x = 45,08186$$

Nr regim	\mathcal{E}_3	$3\pi T_x$ <5>	$2\mathcal{E}_3$	d_M < $\frac{1}{3}$ >	$\frac{2\mathcal{E}_3}{3}$	$1 + \frac{2}{3} \mathcal{E}_3$	d_m < $\frac{1}{3}$ >
1	0,41805	135,24558	0,83610	0,006182	0,27870	1,27870	0,004835
2	0,40973	135,24558	0,81946	0,006059	0,27315	1,27315	0,004759

F-I-2-8

TABEL Nr.7 (116)

Determinarea elongațiilor A_M și A_R

Nr. REGIM	η_1	$\frac{\eta_1}{\pi}$	$2 + \frac{\eta_1}{\pi}$	$\frac{2\eta_3}{3} (2 + \frac{\eta_1}{\pi})$	$e^{\frac{2\eta_3}{3} (2 + \frac{\eta_1}{\pi})}$
1	3,010453	0,958257	2,958257	0,824466	2,28066
2	2,543554	0,809638	2,809638	0,767453	2,15427

Nr REGIM	ξ_3 <m>	A_m <m>	$\alpha_m T_x \pi$	$e^{\alpha_m T_x \pi}$	A_m <m>
1	0,1615	0,3683	0,21797	1,24357	0,3582
2	0,1372	0,2956	0,21454	1,24036	0,2880

Tabelul Nr.8 conține o comparație a rezultatelor de mai sus cu rezultatele din lucrarea /7-B/, obținute prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate șirului de rezultate experimentale, format din zece nivele extreme.

TABEL Nr.8 (117)

Nr regie	A_M		A_m		α_M		α_m	
	TEORETIC	EXPERIM.	TEORET.	EXPERIM.	TEORETIC	EXPERIM.	TEORETIC	EXPERIM.
1	0,3683	0,3658	0,3582	0,3150	0,006182	0,00530	0,004835	0,00467
2	0,2956	0,3370	0,2880	0,3200	0,006059	0,00513	0,004759	0,00452

După cum se constată din tabelul de mai sus rezultatele sînt destul de apropiate, acest mod de comparare a valorilor scoțînd în evidență în mod exagerat diferența între valorile teoretice și cele experimentale.

Pentru a justifica această afirmație s-a calculat tabelul Nr.9 (118) cu ordonatele celor două curbe, corespunzătoare regimului

F-I-2-9

1 , teoretic și experimental, iar pe baza datelor din tabel s-au reprezentat grafic /graficul Nr. 1 (31)/. Se constată că diferența ordonatelor curbilor este de același ordin de mărime ca și diferența între nivelele extreme determinate teoretic și experimental.

TABEL Nr.9 (118)

Nr REGIM	t - t ₀ < >	$z_M = A_m e^{-\lambda_M(t-t_0)}$		$z_m = A_m e^{-\lambda_m(t-t_0)}$	
		TEORETIC	EXPERIMEN.	TEORETIC	EXPERIM.
1	0	0,3683	0,3658	-0,3582	-0,3150
	50	0,2704	0,2806	-0,2813	-0,2494
	100	0,2005	0,2153	-0,2209	-0,1975
	150	0,1494	0,1652	-0,1735	-0,1563
	200	0,1070	0,1267	-0,1362	-0,1238
	300	0,0576	0,0746	-0,0840	-0,0776
	400	0,0311	0,0439	-0,0518	-0,0487
	500	0,0166	0,0258	-0,0319	-0,0305

Avînd în vedere cele de mai sus se poate trage concluzia că rezultatele experimentale din lucrarea /7-B/ obținute pe modele verifică satisfăcător relațiile teoretice stabilite în prezenta teză, diferențele relative mergînd în unele cazuri pînă la 10 %, în general situîndu-se în limitele 3-5 %.

În plus trebuie remarcat faptul că modelul experimental prezintă caracteristici care îl situează într-o zonă periferică a domeniului de utilizare a castelurilor de echilibru, zonă în care metodele aproximative curente întîlnite în literatură conduc la rezultate complet greșite.

F-I-3-1

**F.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE OBTINUTE
IN CADRUL TEZEI**

**Capitolul I - CASTELE SIMPLE. INCHIDERE TOTALA BRUSCA
SE UTILIZEAZA REZULTATELE ALTOR CERCETATORI**

§ 3.- Utilizarea rezultatelor experimentale ale lui G.Naber

Rezultatele lui G.Naber sînt deosebit de importante deoarece au fost obținute prin măsurători la scară naturală la amenajarea hidrotehnică "Tanzmühle" și publicate în revista "Water Power" nr.6, 1964.

Parametrii caracteristici ai amenajării sînt :

$d = 3,50$ m , diametrul galeriei de aducțiune

$f = 9,621$ m² , aria secțiunii transversale a galeriei

$F = 95,033$ m² , aria secțiunii transversale a casteiului de echilibru

$D = 11$ m , diametrul castelului de echilibru

$\lambda_f = 0,01564$, coeficientul de rezistență liniară al galeriei

$\sum \xi_{loc} = 0,35$, suma coeficienților locali de rezistență

$w_0 = 2,98$ m/s , viteza apei în galerie în regimul permanent inițial

$L = 2665$ m , lungimea galeriei de aducțiune

$z_0 = -5,51$ m , nivelul apei în castel în regim inițial permanent

Se calculează atunci următorii parametri :

$\lambda_e = \lambda_f + \frac{d}{L} \sum \xi_{loc} = 0,0161$, coeficient de rezistență echivalent

, mărime adimensională de referință

$Z_* = \frac{df}{\lambda_e F} = 22,008$ m avînd dimensiune de lungime

F-I-3-2

$$T_* = \sqrt{\frac{FL}{gf}} = 51,80 \Delta$$

• mărime adimensională de referință
având dimensiune de timp

$$\xi_0 = \frac{z_0}{Z_*} = -0,25$$

• parametrul pierderii inițiale
de energie

Din reprezentarea grafică Naber se citesc următoarele valori:

Tabelul Nr.1 (119)

Rezultatele experimentale. Hidrocentrala "Tanzmühle"

K	z_k <m>	t_k < $\Delta T_k <\Delta Observații $	T_k < $\Delta Observații $	Observații
0	- 5,51	0,0	-	Temperatura apei 11°C Timpul de închidere 26Δ
1	12,00	96,0	96,0	
2	- 8,60	261,5	165,5	
3	7,00	426,0	164,5	
4	- 5,50	589,0	163,0	
5	4,70	751,0	162,0	
6	- 4,10	913,0	162,0	

a.- Verificare relativă la nivelul maxim prin utilizarea
tabelului Nr.1 () construit cu valorile exacte $\xi_1 = \xi_1(\xi_0)$

In tabelul citat, la pag A-II-3-10 și următoarele, ce citește

$$\xi_0 = 0,248508 \longrightarrow \xi_1 = 0,550$$

$$\xi_0 = 0,254681 \longrightarrow \xi_1 = 0,555$$

Interpolând liniar :

$$\begin{array}{r} 0,006173 \dots\dots 0,005 \\ 0,0001492 \dots\dots x \\ \hline \end{array}$$

$$x = 0,0012$$

Rezultă deci :

$$\xi_0 = -0,250 \longrightarrow \xi_1 = 0,5512$$

Revenind la mărimile dimensionale

$$\xi_1 = \xi_1 Z_* = 12,13 \text{ m}$$

F-I-3-3

Comparînd cu valoarea determinată experimental rezultă o diferență absolută :

$$Z_1 - Z_{1E} = 0,13 \text{ m}$$

și o diferență relativă raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{Z_1 - Z_{1E}}{|Z_{1E}| + |Z_0|} = 100 \frac{0,13}{17,51} = 0,74 \%$$

care se înscrie în valoarea admisă a erorilor și este cam de același ordin de mărime cu erorile obținute în cadrul celorlalte verificări.

b.- Verificare relativă la nivelul maxim prin utilizarea formulei recomandate în teză.

În cuprinsul volumului întîi s-a recomandat următoarea formulă aproximativă :

$$S_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + S_0)(3 + \sqrt{-2S_0})}{(3 + 2\sqrt{-2S_0} - S_0)^2} \mathcal{H}(2,1 + S_0)$$

în care \mathcal{H} este funcția lui Heaveside.

Utilizînd această formulă se obține rezultatul :

$$S_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{1,85 \cdot 3,70711}{4,66422^2} = 0,54965$$

Revenind la mărimea dimensională

$$Z_1 = S_1 Z_* = 12,10 \text{ m}$$

Se constată că formula se verifică foarte bine deoarece diferența absolută față de valoarea măsurată experimental este :

$$Z_1 - Z_{1E} = 0,10 \text{ m}$$

iar diferența relativă, raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{Z_1 - Z_{1E}}{|Z_{1E}| + |Z_0|} = 0,57 \%$$

ceea ce este concludent.

c.- Verificare relativă la cel de al doilea nivel extrem folosind tabelele cu valori exacte.

F-I-3-4

S-a indicat în volumul întâi modul în care se utilizează tabelul Nr.1 (1) și Nr.2 (2). Considerând $\xi_1 = 0,5512$ rezultă din tabelul Nr.2 (2).

$$\xi_1 = 0,550 \longrightarrow f_2(1\xi_1) = 0,111745$$

$$\xi_1 = 0,560 \longrightarrow f_2(1\xi_1) = 0,115314$$

SI INTERPOLIND LINIAR

$$\xi_1 = 0,5512 \longrightarrow f_2(1\xi_1) = 0,112173$$

Cu această valoare se intră în tabelul Nr.1 (1) luind

$$f_1(1\xi_2) = f_2(1\xi_1)$$

și se obține $\xi_2 = -0,402$.

Revenind la valoarea dimensională prin înmulțire cu Z_* :

$$\xi_2 = \xi_2 Z_* = -8,847 \text{ m}$$

Comparind cu valoarea determinată experimental $\xi_{2E} = -8,6 \text{ m}$ rezultă o diferență absolută :

$$|\xi_2 - \xi_{2E}| = 0,247 \text{ m}$$

căreia îi corespunde o diferență relativă raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{|\xi_2 - \xi_{2E}|}{|\xi_{1E}| + |\xi_{2E}|} = 100 \frac{0,247}{20,6} = 1,19\%$$

care se înscriu în valorile diferențelor admise.

d.- Verificare relativă la cel de al doilea nivel extrem utilizând formula recomandată în cadrul tezei

În cadrul tezei a fost propusă următoarea formulă de calcul a celui de al doilea nivel extrem (primul nivel minim de după primul maxim) :

$$\xi_2 = -\frac{3}{5} \left[1 - \frac{1}{1 + 1,5 \sqrt{-2\xi_0 - 4\xi_0}} \right]$$

Utilizând formula în problema studiată se obține :

F-I-3-5

$$\mathcal{S}_2 = -0,6 \left[1 - \frac{1}{1 + 1,5 \times 0,70711 + 1} \right] = -0,404$$

Revenind la valoarea dimensională prin înmulțire cu se obține :

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{S}_2 Z_x = -0,891 \text{ m}$$

Se compară valoarea obținută mai sus cu cea determinată pe cale experimentală rezultând o diferență absolută :

$$|\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_{2E}| = 0,291 \text{ m}$$

căreia îi corespunde o diferență relativă raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{|\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_{2E}|}{|\mathcal{Z}_{1E}| + |\mathcal{Z}_{2E}|} = 100 \frac{0,291}{20,6} = 1,41 \%$$

Ambele diferențe se înscriu în valorile diferențelor admise pentru acest gen de probleme.

e.- Verificare relativă la al doilea nivel extrem utilizând tabelul

$$\mathcal{S}_{k+1} = f(\mathcal{S}_k)$$

În volumul întâi s-a arătat că independent de ordinul k al cvazi semiperioadei există o legătură unică între două niveluri consecutive. Particularizând pentru $k = 1$, din tabelul Nr.3 (3) se obține :

$$\mathcal{S}_1 = 0,550 \longrightarrow \mathcal{S}_2 = -0,40138$$

$$\mathcal{S}_1 = 0,590 \longrightarrow \mathcal{S}_2 = -0,42212$$

Interpolând liniar :

$$\mathcal{S}_1 = 0,5512 \longrightarrow \mathcal{S}_2 = -0,402$$

Se constată că s-a obținut aceeași valoare ca la punctul "c" la care s-au dat valoarea dimensională precum și valorile diferențelor absolute și relative.

f.- Verificare referitoare la al treilea nivel extrem utilizând tabelul

$$\mathcal{S}_{k+1} = f(\mathcal{S}_k)$$

F-I-3-6

Particularizînd pentru $K = 2$, din tabelul Nr.3 (3) din cadrul volumului întîi se obține

$$\xi_2 = -0,384 \longrightarrow \xi_3 = 0,30540$$

$$\xi_2 = -0,452 \longrightarrow \xi_3 = 0,34678$$

Interpolînd liniar pentru $\xi_2 = -0,402$ se găsește $\xi_3 = 0,316$.

Trecînd la valoarea dimensională prin înmulțire cu Z_* :

$$z_3 = \xi_3 Z_* = 6,955 \text{ m}$$

Acestei valori îi corespunde o diferență absolută față de valoarea măsurată $z_{3E} = 7,0$ m de:

$$|z_3 - z_{3E}| = 0,045 \text{ m}$$

ceea ce revine la o diferență relativă, raportată la suma amplitudinilor

$$100 \frac{|z_3 - z_{3E}|}{|z_{2E}| + |z_{3E}|} = 100 \frac{0,045}{15,6} = 0,29\%$$

Ambele diferențe se constată că sînt foarte mici, practic neglijabile.

g.- Verificare referitoare la al treilea nivel extrem utilizînd formula care permite calculul nivelului extrem ξ_{k+1} dacă se cunoaște nivelul extrem ξ_k

În teză s-a dat următoarea formulă care permite calculul precărui nivel extrem în funcție de nivelul precedent. Pentru cazul în care $K \neq 2$ se obține:

$$\xi_3 = \frac{-\xi_2}{1 - \frac{2}{3}\xi_2} = \frac{0,402}{1 + \frac{2}{3} \cdot 0,402} = 0,316$$

Această valoare a fost obținută și la punctul anterior de aceea nu se mai continuă calculele în cadrul acestui punct.

h.- Verificare relativă la al patrulea nivel extrem utilizînd tabelul $\xi_{k+1} = f(\xi_k)$

F-I-B-7

Din tabelul Nr.3 (3) se scoate :

$$\xi_3 = 0,308 \longrightarrow \xi_4 = -0,25538$$

$$\xi_3 = 0,348 \longrightarrow \xi_4 = -0,28822$$

Interpolând linear pentru valoarea $\xi_3 = 0,316$ se obține :

$$\xi_3 = 0,316 \longrightarrow \xi_4 = -0,261$$

Trecînd la variabila dimensională prin înmulțire cu Z_* :

$$z_4 = \xi_4 Z_* = -5,744 \text{ m}$$

Diferența absolută față de valoarea măsurată în cursul experimentării $z_{4E} = -5,5$ este :

$$|z_4 - z_{4E}| = 0,244 \text{ m}$$

iar diferența relativă, raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{|z_4 - z_{4E}|}{|z_{3E}| + |z_{4E}|} = 100 \frac{0,244}{12,5} = 1,95 \%$$

Ambele diferențe se mențin la valori mici, în limite unanim acceptate în acest gen de probleme.

i.- Verificare relativă la al patrulea nivel extrem utilizînd formula $\xi_4 = \xi_4(\xi_3)$

Utilizînd formula care permite calculul unui nivel extrem dacă se cunoaște nivelul extrem precedent, particularizată în acest caz se obține :

$$\xi_4 = \frac{-\xi_3}{1 + \frac{2}{3}\xi_3} = -\frac{0,316}{1 + \frac{2}{3} \cdot 0,316} = -0,263 \text{ m}$$

care este aproape identică cu cea determinată anterior.

j.- Verificare relativă la al patrulea nivel utilizînd formula $\xi_4 = \xi_4(\xi_1)$

În teză s-a dat o formulă care permite, spre deosebire de formulele existente în literatura de specialitate, de a se calcula direct orice nivel extrem funcție de nivelul ξ_1 , fără să mai fie nevoie de cunoașterea nivelelor intermediare.

$$\xi_4 = \frac{-\xi_1}{1 + \frac{2 \cdot 3}{3}\xi_1} = \frac{-0,5512}{1 + 1,1024} = -0,260 \text{ m}$$

F-I-3-8

Valoarea, după cum se constată este foarte apropiată de valorile determinate anterior prin alte metode.

k.- Verificare relativă la al cincilea nivel extrem, utilizând tabelul $\xi_{k+1} = f(\xi_k)$

Din tabelul Nr.3(3) se extrage :

$$\xi_4 = -0,256 \longrightarrow \xi_5 = 0,21730$$

$$\xi_4 = -0,308 \longrightarrow \xi_5 = 0,25538$$

Interpolând liniar pentru valoarea $\xi_4 = -0,261$ se obține:

$$\xi_4 = -0,261 \longrightarrow \xi_5 = 0,221$$

Valoarea mărimii dimensionale se obține prin înmulțire cu

$$\xi_5 = \xi_5 Z_* = 4,864 \text{ m}$$

Diferența absolută față de valoarea măsurată în cursul experimentării $\xi_{5E} = 4,7 \text{ m}$ este :

$$|\xi_5 - \xi_{5E}| = 0,164 \text{ m}$$

iar diferența relativă corespunzătoare, raportată la suma amplitudinilor este :

$$100 \frac{|\xi_5 - \xi_{5E}|}{|\xi_{4E}| + |\xi_{5E}|} = 100 \frac{0,164}{10,2} = 1,61\%$$

Se constată că și în acest caz ambele diferențe se mențin mici, ceea ce confirmă corectitudinea procedeeilor de calcul stabilite în teză.

l.- Verificare relativă la al cincilea nivel extrem utilizând formula $\xi_5 = \xi_5(\xi_4)$

În volumul întâi s-a recomandat formula :

$$\xi_5 = \frac{-\xi_4}{1 - \frac{2}{3}\xi_4} = \frac{0,261}{1 + \frac{2}{3} \cdot 0,261} = 0,222$$

Valoarea obținută fiind aproape identică cu cea obținută anterior se consideră verificarea încheiată în cadrul acestui punct.

m.- Verificare relativă la al cincilea nivel extrem utilizând formula $\xi_5 = \xi_5(\xi_4)$

F-I-3-9

În teză s-a dat și o formulă care permite de a se calcula direct orice nivel extrem funcție de nivelul maxim, fără a mai fi nevoie de cunoașterea nivelelor intermediare :

$$\xi_5 = \frac{\xi_1}{1 + \frac{2 \cdot 4}{3} \xi_1} = \frac{0,5512}{1 + \frac{8}{3} \cdot 0,5512} = 0,223$$

Si această valoare fiind foarte apropiată de celelalte nu se mai insistă asupra diferențelor, absolută și relativă, ce apar față de rezultatele experimentale.

n.- Verificare relativă la al șaselea nivel extrem utilizând tabelul $\xi_{k+1} = f(\xi_k)$

Extrăgînd din tabelul nr.3(3) ceea ce interesează în cazul de față se obține :

$$\xi_5 = 0,188 \longrightarrow \xi_6 = -0,16704$$

$$\xi_5 = 0,256 \longrightarrow \xi_6 = -0,21734$$

Prin interpolare liniară pentru $\xi_5 = 0,221$ se obține

$$\xi_5 = 0,221 \longrightarrow \xi_6 = -0,19144$$

Valoarea mărimii dimensionale corespunzătoare se obține prin înmulțire cu Z_* :

$$\xi_6 = \xi_6 Z_* = -4,213 \text{ m}$$

Diferența absolută față de valoarea măsurată în cursul experimentărilor $\xi_{6E} = -4,1 \text{ m}$ este de :

$$|\xi_6 - \xi_{6E}| = 0,113 \text{ m}$$

iar diferența relativă corespunzătoare, raportată la suma amplitudinilor este :

$$100 \frac{|\xi_6 - \xi_{6E}|}{|\xi_{5E}| + |\xi_{6E}|} = \frac{11,3}{8,8} = 1,28\%$$

Se constată că și în acest caz concordanța rezultatelor teoretice obținute utilizînd metodele prezentate în teză cu rezultatele experimentale este foarte bună.

o.- Verificare relativă la al șaselea nivel extrem utilizînd

F-I-3-10

formula $\xi_6 = \xi_6(\xi_5)$

În volumul întâi s-a recomandat formula :

$$\xi_6 = \frac{-\xi_5}{1 + \frac{2}{3}\xi_5} = \frac{0,221}{1 + \frac{2}{3}0,221} = -0,1928$$

Rezultă, prin înmulțire cu mărimea de referință Z_* , mărimea dimensională $\xi_6 = -4,243$ m, care conduce la următoarea diferență absolută față de datele experimentale de :

$$|\xi_6 - \xi_{6E}| = 0,143 \text{ m}$$

și la următoarea diferență relativă, raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{|\xi_6 - \xi_{6E}|}{|\xi_{5E}| + |\xi_{6E}|} = 100 \frac{0,143}{8,8} = 1,62\%$$

În acest caz se obține, după cum se observă, de asemenea valori mici ale ambelor diferențe, care sînt de același ordin de mărime cu diferențele obținute la celelalte nivele extreme.

p.- Verificare relativă la al șaselea nivel extrem, utilizînd formula $\xi_6 = \xi_6(\xi_1)$

Formula menționată are forma :

$$\xi_6 = \frac{-\xi_1}{1 + \frac{2,5}{3}\xi_1} = -\frac{0,5512}{1 + \frac{10}{3}0,5512} = -1,947$$

Prin înmulțire cu mărimea de referință Z_* se obține

$\xi_6 = -4,285$ care conduce la următoarea diferență absolută față de valoarea măsurată $|\xi_6 - \xi_{6E}| = 0,185$ m și la următoarea diferență relativă, raportată la suma amplitudinilor :

$$100 \frac{|\xi_6 - \xi_{6E}|}{|\xi_{5E}| + |\xi_{6E}|} = 100 \frac{0,185}{8,8} = 2,1\%$$

Valorile ambelor diferențe se înscriu printre valorile admise.

r.- Verificare relativă la primele șase nivele extreme în care se folosește un grafic cu două curbe.

Această metodă a fost indicată în cuprinsul volumului întâi

F-I-3-11

și a fost publicată și în revista "Hidrotehnica". Metoda permite, pe baza a două curbe unice, invariante în raport cu parametrii caracteristici ai amenajării să se găsească, succesiv și rapid, nivelurile extreme. Determinarea efectivă a nivelelor cu această metodă se poate urmări în reprezentarea grafică Nr.1 (32).

Rezultatele metodei grafice, ca și diferențele față de rezultatele determinărilor experimentale sînt prezentate concentrat în tabelul nr.2 (120).

Tabelul Nr.2 (120)

Nr. niv. extrem k	Valori experim. χ_{KE} <m>	Valori prin metoda grafică ξ_k	Nivele extreme prin metoda grafică ξ_k <m>	Diferențe absolute $ \xi_k - \chi_{KE} $ <m>	Diferențe relative $\frac{ \xi_k - \chi_{KE} }{ \xi_k - \chi_{KE} + \chi_{KE} } \cdot 100$
1	12,0	11,55	12,1	0,1	0,49 %
2	-8,6	-8,40	-8,8	0,2	0,97 %
3	7,0	7,32	7,0	0,0	0,00 %
4	-5,5	-5,26	-5,7	0,2	1,60 %
5	4,7	4,22	4,8	0,1	0,98 %
6	-4,1	-4,19	-4,2	0,1	1,14 %

Se constată că și această metodă conduce la rezultate care sînt în bună concordanță cu determinările experimentale.

Ca o concluzie generală relativă la calculul nivelurilor extreme rezultă concluzia că oricare dintre metodele analitice sau grafice recomandate prin teză se pot aplica în condițiuni foarte bune, eroarea maximă care s-ar putea face prin utilizarea lor este în general sub 2 % și doar excepțional poate fi între 2 % și 3 %. Avînd în vedere rapiditatea cu care se pot aplica metodele recomandate cît și precizia lor rezultă că în cazul determinării nivelurilor extreme la închiderea totală bruscă este inutilă programarea la calculator prin metoda diferențelor finite.

F-I-3-12

s.- Verificare relativă la prima cvasi semiperioadă, utilizând metoda aproximativă de integrare Legendre.

Rezultatele utilizării acestei metode de integrare sînt cuprinse în volumul doi al tezei și au fost publicate și în revista Hidrotehnica.

Din tabelul cu rezultate rezultă pentru $\xi_0 = -0,250$ o valoare a primei cvasi semiperioade sub formă adimensională $\mathcal{J}_1 = 1,843$. Pentru aflarea primei cvasi semiperioade sub formă dimensională se face înmulțirea cu $T_* = 51,80$ s rezultînd :

$$T_1 = \mathcal{J}_1 \cdot T_* = 95,5 \Delta$$

Valoarea determinată prin măsurători este $T_{1E} = 96,0$ s.

Rezultă atunci o diferență absolută

$$|T_1 - T_{1E}| = 0,5 \Delta$$

căreia îi corespunde o diferență relativă în procente :

$$100 \frac{|T_1 - T_{1E}|}{T_{1E}} = 0,55 \%$$

Se observă că ambele diferențe sînt foarte mici, ceea ce indică o concordanță foarte bună a rezultatelor obținute pe cale teoretică cu cele obținute pe cale experimentală.

ș.- Verificare relativă la prima cvasi semiperioadă utilizînd metoda aproximativă de integrare Simpson.

Rezultatele obținute prin utilizarea acestei metode sînt cuprinse în volumul al doilea al tezei și au fost publicate și în revista "Hidrotehnica".

Din tabelul cu rezultate se găsește :

$$\xi_0 = -0,250 \longrightarrow \mathcal{J}_1 = 1,833$$

După înmulțirea cu T_* se obține prima cvasi semiperioadă sub formă dimensională :

$$T_1 = \mathcal{J}_1 T_* = 95 \Delta$$

Diferența absolută față de valoarea experimentală este :

$$|T_1 - T_{1E}| = 1 \Delta$$

F-I-3-13

iar diferența relativă corespunzătoare, în procente, este :

$$100 \frac{|T_1 - T_{1E}|}{T_{1E}} = 1,10\%$$

Se observă că și diferențele date de această metodă sînt mici, metoda fiind utilizabilă.

t.- Verificare relativă la prima cvasi semiperioadă, utilizînd metoda aproximativă de integrare Krîlov - Bogoliubov.

Rezultatele obținute prin utilizarea acestei metode sînt cuprinse în volumul al doilea al tezei și au fost publicate și în revista /"Hidrotehnica".

Din tabelul cu rezultate relativ la această metodă se găsește :

$$\xi_0 = -0,250 \longrightarrow \mathcal{J}_1 = 1,820$$

După înmulțirea cu T_* rezultă prima cvasi semiperioadă sub formă dimensională :

$$T_1 = \mathcal{J}_1 \cdot T_* = 94,3 \Delta$$

Diferența absolută față de mărimea determinată experimental este :

$$|T_1 - T_{1E}| = 1,7 \Delta$$

iar diferența relativă corespunzătoare, în procente, este :

$$100 \frac{|T_1 - T_{1E}|}{T_{1E}} = 1,77\%$$

Se observă că și aceste diferențe, deși mai mari decît cele obținute prin metodele precedente sînt totuși acceptabile, astfel încît și această metodă poate fi aplicată (deși nu se recomandă utilizarea ei).

Ț.- Verificare relativă la prima cvasi semiperioadă utilizînd formula $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1(\xi_0)$

În teză s-a recomandat următoarea formulă de calcul a primei cvasi semiperioade, formulă care a fost publicată și în

F-I-3-14

revista "Hidrotehnica"

$$\mathcal{J}_1 = \frac{J\Gamma}{2} + \frac{42}{100} \sqrt{-2\xi_0}$$

Utilizând formula în cazul de față pentru $\xi_0 = -0,25$ se obține prima cvasi semiperioadă sub formă adimensională :

$$\mathcal{J}_1 = 1,5706 + 0,2970 = 1,8678$$

Pentru a găsi mărimea dimensională a primei cvasi semiperioade se înmulțește cu mărimea de referință T_* :

$$T_1 = \mathcal{J}_1 T_* = 96,8 \Delta$$

Rezultă o diferență absolută față de mărimea măsurată:

$$|T_1 - T_{1E}| = 0,8 \Delta$$

căreia îi corespunde o diferență relativă în procente :

$$100 \frac{|T_1 - T_{1E}|}{T_{1E}} = 0,83\%$$

Se observă că ambele diferențe sînt foarte mici ceea ce indică o bună concordanță a rezultatelor teoretice cu cele experimentale.

u.- Verificare relativă la cea de a doua cvasi semiperioadă utilizînd metoda aproximativă de integrare Legendre.

Rezultatele obținute prin utilizarea acestei metode de integrare sînt cuprinse în volumul al doilea al tezei și au fost publicate și în revista "Hidrotehnica".

Din tabelul cu rezultate rezultă că pentru $\xi_0 = -0,250$ se obține următoarea valoare adimensională a celei de a doua cvasi semiperioade $\mathcal{J}_2 = 3,171$.

După înmulțire cu mărimea de referință se obține mărimea celei de a doua cvasi semiperioade, sub formă dimensională:

$$T_2 = \mathcal{J}_2 T_* = 164,6 \Delta$$

Față de valoarea măsurată $T_{2E} = 165,5 \Delta$ rezultă o diferență absolută :

$$|T_2 - T_{2E}| = 0,9 \Delta$$

F-I-3-15

și o diferență relativă corespunzătoare, în procente :

$$100 \frac{T_2 - T_{2E}}{T_{2E}} = 100 \frac{0,9}{165} = 0,55\%$$

Se constată că ambele diferențe sînt foarte mici ceea ce indică o bună concordanță între rezultatele teoretice și cele experimentale.

v.- Verificare relativă la cea de a doua cvasi semiperioadă utilizînd formula $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2(\xi_0)$

În volumul al doilea al tezei s-a recomandat următoarea formulă de calcul a celei de a doua cvasi semiperioade, formulă care a fost publicată și în revista "Hidrotehnica"

$$\mathcal{J}_2 = \pi + \frac{42}{1000} \sqrt{-2\xi_0}$$

Utilizînd formula pentru situația de față în care $\sqrt{-2\xi_0} = 0,70711$ se obține :

$$\mathcal{J}_2 = 3,1416 + 0,0297 = 3,1713$$

După înmulțire cu mărimea de referință T_* se obține mărimea celei de a doua-cvasi semiperioade sub formă dimensională :

$$T_2 = \mathcal{J}_2 T_* = 164,6 \text{ s}$$

Intrucît a rezultat aceeași valoare ca și în cazul anterior verificarea în cadrul acestui punct se consideră încheiată.

w.- Verificare relativă la cea de a treia cvasi semiperioadă utilizînd metoda de integrare aproximativă Legendre.

Rezultatele obținute prin utilizarea acestei metode de integrare sînt cuprinse în volumul al doilea al tezei și au fost publicate și în revista "Hidrotehnica".

Din tabelul cu rezultate se extrage :

$$\begin{array}{l} \xi_0 = -0,200 \longrightarrow \mathcal{J}_0 = 3,159 \\ \xi_0 = -0,300 \longrightarrow \mathcal{J}_0 = 3,160 \end{array}$$

Interpolînd liniar rezultă că pentru valoarea din problemă

$\xi_0 = -0,250$ se obține următoarea valoare adimensională a celei de a treia cvasi semiperioadă sub formă adimensională $\mathcal{J}_3 = 3,1595$

F-I-3-16

După înmulțire cu mărimea de referință T_* se obține mărimea celei de a treia cvasi semiperioade sub formă dimensională.

$$T_3 = \tilde{T}_3 T_* = 163,6 \Delta$$

Față de valoarea măsurată $T_{3E} = 164,5$ s rezultă o diferență absolută

$$|T_3 - T_{3E}| = 0,9 \Delta$$

și o diferență relativă corespunzătoare, în procente :

$$100 \frac{|T_3 - T_{3E}|}{T_{3E}} = 100 \frac{0,9}{164,5} = 0,55\%$$

Se constată că diferențele sînt de același ordin de mărime ca și în cazul anterior, de unde rezultă că este foarte bună concordanța rezultatelor.

x.- Verificare relativă la cea de a treia cvasi semiperioadă utilizînd formula $\tilde{T}_3 = \tilde{T}_3(\xi_0)$

În volumul al doilea al tezei s-a recomandat următoarea formulă de calcul a celei de a treia cvasi semiperioade, formulă publicată și în revista "Hidrotehnica"

$$\tilde{T}_3 = \pi + \frac{42}{2 \times 1000} \sqrt{-2 \xi_0}$$

Utilizînd formula pentru situația de față se obține

$$\tilde{T}_3 = 3,1416 + 0,0149 = 3,1565$$

După înmulțire cu mărimea de referință Z_* se obține mărimea celei de a treia cvasi semiperioade sub formă dimensională:

$$T_3 = \tilde{T}_3 T_* = 163,6 \Delta$$

S-a obținut o valoare aproape identică cu cea anterioară astfel încît verificarea se consideră terminată în cadrul acestui punct.

y.- Verificare relativă la cea de a patra cvasi semiperioadă utilizînd formula $\tilde{T}_4 = \tilde{T}_4(\xi_0)$

În volumul al doilea al tezei s-a recomandat formula

$$\tilde{T}_4 = \pi + \frac{42}{3 \times 1000} \sqrt{-2 \xi_0}$$

F-I-3-17

Utilizată în cazul de față formula conduce la :

$$\mathcal{J}_4 = 3,1416 + 0,0099 = 3,1515$$

Trecînd la mărimea dimensională prin înmulțire cu T_* se obține :

$$T_4 = \mathcal{J}_4 \cdot T_* = 163,2 \text{ s}$$

În comparație cu valoarea măsurată $T_{4E} = 163 \text{ s}$ se obține o diferență absolută $|T_4 - T_{4E}| = 0,2 \text{ s}$ care conduce la o diferență relativă corespunzătoare, în procente de :

$$100 \frac{|T_4 - T_{4E}|}{T_{4E}} = 100 \frac{0,2}{163} = 0,12\%$$

Diferențele de mai sus indică o foarte bună concordanță a rezultatelor.

z.- Verificare relativă la cea de a cincea cvasi semiperioadă utilizînd formula $\mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_5(\xi_0)$

În volumul al doilea al tezei s-a recomandat formula

$$\mathcal{J}_5 = \mathcal{J} + \frac{42}{4 \times 1000} \sqrt{-2\xi_0}$$

Utilizată în problema de față formula conduce la :

$$\mathcal{J}_5 = 3,1416 + 0,0075 = 3,1491$$

Trecînd la mărimea dimensională prin înmulțire cu T_* se obține :

$$T_5 = \mathcal{J}_5 \cdot T_* = 163,0 \text{ s}$$

În comparație cu valoarea măsurată $T_{5E} = 162 \text{ s}$ se obține o diferență absolută :

$$|T_5 - T_{5E}| = 1 \text{ s}$$

căreia îi corespunde o diferență relativă, în procente de :

$$100 \frac{|T_5 - T_{5E}|}{T_{5E}} = \frac{100}{162} = 0,62\%$$

și diferențele din acest caz indică o bună concordanță a celor două rezultate, respectiv experimentale și teoretice.

F-I-3-18

α - Verificare relativă la cea de a șasea cvasi semiperioadă utilizând formula $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_G(\xi_0)$

În volumul al doilea al tezei s-a recomandat formula

$$\mathcal{T}_G = \pi + \frac{42}{5 \times 1000} \sqrt{-2\xi_0}$$

În cazul problemei de față formula de mai sus conduce la

$$\mathcal{T}_G = 3,1416 + 0,0055 = 3,1471$$

Trecând la mărimea dimensională prin înmulțire cu T_* se obține :

$$T_G = \mathcal{T}_G T_* = 163 \Delta$$

se obține în continuare aceleași diferențe absolute și relative ca și în cazul anterior, deoarece valorile care intervin sînt identice. Ca o concluzie generală la verificările referitoare la problema cvasi semiperioadelor apare că metodele teoretice expuse în teză se verifică foarte bine prin măsurătorile efectuate de Naber pe o amenajare hidrotehnică la scară naturală.

β - Verificare referitoare la legea de oscilație în prima cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta care pornește de la un polinom algebric.

În teză, în cadrul metodei variaționale s-au expus două metode, dintre care una care pornește de la un polinom algebric și alta care pornește de la un polinom trigonometric.

Prima metoda dă nivelurile care se realizează în momente de timp reprezentînd un număr întreg de zecimi de cvasi semiperioadă după formula :

$$z_{Ij} = z_0 + \frac{t_{Ij}}{T_*} \sqrt{-2z_0 Z_*} - \frac{1}{6} \left(\frac{t_{Ij}}{T_*} \right)^3 \sqrt{-2z_0 Z_*} + \left(\frac{t_{Ij}}{T_*} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{t_{Ij}}{T_*} \right)^k$$

Pentru a putea utiliza formula se calculează la început coeficienții A_k calculele aferente acestei operații fiind efectuate în tabelul Nr.3(). S-au considerat exclusiv valorile date de metoda teoretică de calcul pentru a se putea face în final o

F-I-3-19

verificare concludentă prin comparație cu valorile măsurate.

Tabelul Nr.3 (121)

Calculul coeficienților

K	$\bar{x}_{max} - \bar{x}_0$	$\mathcal{J}_1^2 \bar{x}_{max}$	$\mathcal{J}_1 \sqrt{-2\bar{x}_0 Z_*}$	$\mathcal{J}_1^3 \sqrt{-2\bar{x}_0 Z_*}$	A_k
	17,64	41,20	28,68	97,418	
0	987,84	-123,60	-1003,80	162,36	22,80
1	-2469,60	350,20	2409,12	-324,73	-35,01
2	2116,80	-329,60	-2007,60	243,55	23,15
3	-617,40	103,00	573,60	-64,95	-5,75

In tabelul Nr.4 (122) este calculată suma care intervine în relația de calcul anterioară

Tabelul Nr.4 (122)

Calculul sumei $\left(\frac{j}{10}\right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$

$\frac{j}{10}$	A_0	$A_1 \frac{j}{10}$	$A_2 \left(\frac{j}{10}\right)^2$	$A_3 \left(\frac{j}{10}\right)^3$	$\sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$\left(\frac{j}{10}\right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$
0,0	22,80	0,00	0,00	-0,00	22,80	0,000
0,1	22,80	-3,50	0,23	-0,01	19,52	0,000
0,2	22,80	-7,00	0,93	-0,05	16,68	0,005
0,3	22,80	-10,50	2,08	-0,16	14,22	0,035
0,4	22,80	-14,00	3,70	-0,37	12,13	0,124
0,5	22,80	-17,51	5,79	-0,72	10,36	0,324
0,6	22,80	-21,01	8,33	-1,24	8,88	0,691
0,7	22,80	-24,51	11,34	-1,97	7,66	1,287
0,8	22,80	-28,01	14,82	-2,94	6,67	2,186
0,9	22,80	-31,51	18,75	-4,19	5,85	3,450
1,0	22,80	-35,01	23,15	-5,75	5,19	5,190

Calculul nivelelor apei în castelul de echilibru în momente reprezentînd un număr întreg de zecimi ale primei cvasi

F-I-3-20

semiperioade este prezentat în tabelul Nr.5 (123).

Tabelul Nr.5 (123)

Calculul nivelului apei în secimi ale primei cvasi semi-
perioade

$\frac{j}{10}$	$\frac{t_{Ij}}{T_*}$	$\frac{t_{Ij}}{T_*} \sqrt{-2z_0 z_*}$	$\left(\frac{t_{Ij}}{T_*}\right)^3$	$-\frac{1}{6} \left(\frac{t_{Ij}}{T_*}\right)^3 \sqrt{-2z_0 z_*}$	$\left(\frac{j}{10}\right)^5 \sum_{k=0}^5 A_k \left(\frac{j}{10}\right)^k$	$z_{Ij} < m >$	$t_{Ij} < \Delta >$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-5,51	0,00
0,1	0,1843	2,8681	0,0063	-0,0163	0,0000	-2,66	9,55
0,2	0,3686	5,7362	0,0501	-0,1299	0,0050	0,10	19,10
0,3	0,5529	8,6042	0,1690	-0,4383	0,0350	2,69	28,65
0,4	0,7372	11,4723	0,4006	-1,0390	0,1240	5,05	38,20
0,5	0,9215	14,3404	0,7825	-2,0296	0,3240	7,12	47,75
0,6	1,1058	17,2085	1,3522	-3,5070	0,6910	8,88	57,30
0,7	1,2901	20,0765	2,1472	-5,5690	1,2870	10,28	66,85
0,8	1,4744	22,9446	3,2051	-8,3130	2,1860	11,31	76,40
0,9	1,6587	25,8127	4,5636	-11,837	3,4500	11,92	85,95
1,0	1,8430	28,6808	6,2600	-16,237	5,1900	12,13	95,50

Comparația cu rezultatele experimentale este dată în gra-
ficul Nr.2 (33), în care se observă o foarte bună concordanță a
rezultatelor teoretice cu cele experimentale în această primă
cvasi semiperioadă.

✓ - Verificare referitoare la legea de oscilație în pri-
ma cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta care
pornește de la un poligon trigonometric.

În teză, în cadrul metodei variaționale, varianta care
pornește de la un polinom trigonometric s-a ajuns la următoarea
formulă de calcul a nivelurilor în momente de timp reprezentând
un număr întreg de secimi ale cvasi semiperioadei :

$$z_{Ij} = \alpha_j \sqrt{-2z_0 z_*} + \beta_j z_0 + \gamma_j z_1$$

F-I-3-21

Coeficienții $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ sînt prezentați tabelar în teză.

Calculule respective sînt prezentate în tabelul Nr.6 (124)

iar graficul este dat în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.6 (124)

Legea de oscilație în prima cvasi semiperioadă (polinom trigonometric)

$\frac{j}{10}$	$\alpha_j \sqrt{-2z_0 z_*}$	$\beta_j z_0$	$\gamma_j z_0$	$\tilde{x}_{Ij} < m >$	$t_{Ij} < \Delta >$
0,0	0,0000	- 5,5100	0,0000	-5,51	0,00
0,1	1,6125	- 4,9885	0,4759	-2,90	9,55
0,2	1,1562	- 4,3667	2,0345	-1,18	19,10
0,3	1,0754	- 3,8066	3,3029	0,57	28,65
0,4	0,9534	- 3,1874	4,7157	2,48	38,20
0,5	0,7040	- 2,6217	6,0650	4,15	47,75
0,6	0,6788	- 2,0136	7,4143	6,08	57,30
0,7	0,3956	- 1,4249	8,8284	7,80	66,85
0,8	0,3672	- 0,8546	10,0955	9,61	76,40
0,9	0,1270	- 0,1921	11,6541	11,59	85,95
1,0	0,0000	-0,0000	12,1300	12,13	95,50

\int - Verificare referitoare la legea de oscilație în cea de a doua cvasi semiperioadă utilizînd metoda variațională, varianta polinomului algebric.

În teză în această variantă s-a ajuns la o foarte simplă formulă care permite calculul nivelelor în momente reprezentînd un număr întreg de secimi ale celei de a doua cvasi semiperioade momente notate T_{Ij} . Dacă se consideră drept origine a timpului momentul efectuării manevrei de închidere bruscă atunci aceste momente se vor nota t_{Ij} . Între ele există relația evidentă :

$$t_{Ij} = T_{Ij} + T_I$$

F-I-3-22

în care T_I este prima cvasi semiperioadă.

Formula de calcul a nivelurilor este :

$$z_{IIj} = C_j z_1 + D_j z_2$$

în care constantele C_j și D_j sînt prezentate tabelar în teză.

Calcululele respective sînt cuprinse în tabelul Nr.7 (125), iar graficul în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.7 (125)

Legea de oscilație în a doua cvasi semiperioadă (polinom algebric)

$\frac{j}{10}$	$C_j z_1$	$D_j z_2$	$z_{IIj} < m >$	$T_{IIj} < \lambda >$	$t_{IIj} < \lambda >$
0,0	12,1300	0,0000	12,13	0,00	99,50
0,1	11,5806	-0,0374	11,54	16,46	111,96
0,2	10,3445	-0,4021	9,94	32,92	128,48
0,3	8,9270	-1,3302	7,60	49,38	144,88
0,4	7,4075	-2,6830	4,72	65,84	161,34
0,5	5,6504	-4,1225	1,53	82,30	177,80
0,6	3,6773	-5,4045	-1,73	98,76	194,26
0,7	1,8231	-6,5131	-4,69	115,22	210,72
0,8	0,5511	-7,5472	-7,00	131,68	227,18
0,9	0,0513	-8,4492	-8,40	148,14	243,64
1,0	0,0000	-8,8500	-8,85	164,60	260,10

ξ - Verificare referitoare la legea de oscilație în cea de a doua cvase semiperioadă utilizînd metoda variațională, varianța polinomului trigonometric.

În această variantă se ajunge la o formulă de calcul a nivelurilor avînd o structură similară celei anterioare și anume :

$$z_{IIj} = A_j z_1 + B_j z_2$$

F-I-3-23

în care constantele A_j și B_j sînt prezentate tabelar în teză, avînd mabele avantaj al invarianței în raport cu parametrii caracteristici ai amenajării hidrotehnice.

Calcululele respective sînt prezentate în tabelul Nr.8 (126) iar graficul se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33)

Tabelul Nr.8 (126)

Legea de oscilație în a doua cvasi semiperioadă (polinom trigonometric)

$\frac{j}{10}$	$A_j z_1$	$B_j z_2$	$z_{IIj} < m \rangle$	$T_{IIj} < \Delta \rangle$	$\tau_{IIj} < \Delta \rangle$
0,0	12,1300	0,0000	12,13	0,00	95,50
0,1	11,5782	-0,1075	11,47	16,46	111,96
0,2	10,2694	-0,9888	9,28	32,92	128,48
0,3	8,6933	-2,2123	6,48	49,38	144,88
0,4	7,3050	-3,1516	4,15	65,84	161,34
0,5	5,8628	-4,2775	1,60	82,30	177,80
0,6	4,3196	-5,3297	-1,01	98,76	194,26
0,7	3,0323	-6,3426	-3,31	115,22	210,72
0,8	1,3553	-7,4925	-6,14	131,68	227,18
0,9	0,1474	-8,4474	-8,30	148,14	243,64
1,0	0,0000	-8,8500	-8,85	164,60	260,10

§ - Verificare referitoare la legea de oscilație în a treia cvasi semiperioadă utilizînd metoda variațională, varianta polinom algebric.

Formula la care s-a ajuns în teză și care se va utiliza pentru calculul poziției nivelurilor în momente reprezentînd zecimi ale cvasi semiperioadei a treia este :

$$z_{IIIj} = C_j z_2 + D_j z_3$$

Calcululele aferente sînt prezentate în tabelul Nr.9 (127),

F-I-3-24

iar graficul se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.9 (127)

Legea de oscilație în cea de a treia cvasi semiperioadă
(polinom algebric)

$\frac{j}{10}$	$C_j z_2$	$D_j z_3$	$z_{mj} < m >$	$T_{mj} < \Delta >$	$t_{mj} < \Delta >$
0,0	-8,8500	0,0000	-8,85	0,00	260,10
0,1	-8,4492	0,0294	-8,42	16,36	276,46
0,2	-7,5473	0,3162	-7,23	32,72	292,82
0,3	-6,5042	1,0461	-5,46	49,08	309,18
0,4	-5,4045	2,1100	-3,29	65,44	325,54
0,5	-4,1225	3,2421	-0,88	81,80	341,90
0,6	-2,6830	4,2503	1,57	98,16	358,26
0,7	-1,3302	5,1221	3,79	114,52	374,62
0,8	-0,4021	5,9354	5,53	130,88	390,98
0,9	-0,0374	6,6448	6,61	147,24	407,34
1,0	0,0000	6,9600	6,96	163,60	423,70

η - Verificare referitoare la legea de oscilație în a treia cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta polinom trigonometric.

Formula la care s-a ajuns în teză și care se va utiliza pentru calculul poziției nivelurilor apei în castelul de echilibru în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a treia este :

$$z_{mj} = A_j z_2 + B_j z_3$$

Calcululele aferente sînt prezentate în tabelul nr.10 (128)

iar graficul se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33)

F-I-3-25

Tabelul Nr.10 (128)

Legea de oscilație în cea de a treia cvasi semiperioadă
(polinom trigonometric)

$\frac{\delta}{10}$	$A_j z_2$	$B_j z_3$	$\bar{x}_{nj} < m >$	$T_{nj} < \Delta >$	$\bar{x}_{nj} < \Delta >$
0,0	-8,8500	0,0000	-8,85	0,00	260,10
0,1	-8,4474	0,0846	-8,36	16,36	276,46
0,2	-7,4925	0,7776	-6,71	32,72	292,82
0,3	-6,3426	1,7399	-4,60	49,08	309,18
0,4	-5,3297	2,4785	-2,75	65,44	325,54
0,5	-4,2775	3,3640	-0,91	81,80	341,90
0,6	-3,1516	4,1915	1,04	98,16	358,26
0,7	-2,2123	4,9881	2,78	114,52	374,62
0,8	-0,9888	5,8924	4,90	130,88	390,98
0,9	-0,1164	6,6435	6,53	147,24	407,34
1,0	0,0000	6,9600	6,96	163,60	423,70

⊕ - Verificare referitoare la legea de oscilație în a patra cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta polinom algebric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care se utilizează în continuare pentru calculul poziției nivelurilor în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a patra este :

$$\bar{x}_{nj} = C_j z_3 + D_j z_4$$

Calcululele cerute de aplicarea acestei formule sînt prezentate în tabelul Nr.11 (129), iar graficul se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.11 (129)

Legea de oscilație în cea de a patra cvasi semiperioadă
(polinom algebric)

F-I-3-26

$\frac{j}{10}$	$C_j z_3$	$D_j z_4$	$z_{\bar{u}j} < m >$	$T_{\bar{u}j} < \Delta >$	$t_{\bar{u}j} < \Delta >$
0,0	6,9600	0,0000	6,96	0,00	423,70
0,1	6,6448	-0,0243	6,62	16,32	439,92
0,2	5,9354	-0,2608	5,68	32,64	456,24
0,3	5,1221	-0,8627	4,26	48,96	472,56
0,4	4,2503	-1,7401	2,51	65,28	488,88
0,5	3,2421	-2,6738	0,57	81,60	505,20
0,6	2,1100	-3,5053	-1,40	97,92	521,52
0,7	1,0461	-4,2243	-3,18	114,24	537,84
0,8	0,3162	-4,8950	-4,58	130,56	554,16
0,9	0,0294	-5,4800	-5,45	146,88	570,48
1,0	0,0000	-5,7400	-5,74	163,20	586,80

i.- Verificare referitoare la legea de oscilație în a patra cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională varianta polinom trigonometric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care urmează a se utiliza pentru calculul nivelurilor apei în castel în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a patra este :

$$z_{\bar{u}j} = A_j z_3 + B_j z_4$$

Calcululele aferente sînt prezentate în tabelul Nr.12 (130) iar gra-icul respectiv e dat în reprezentarea grafică Nr.2 (33)

Tabelul Nr.12 (130)

Legea de oscilație în cea de a patra cvasi semiperioadă
(polinom trigonometric)

$\frac{j}{10}$	$A_j z_3$	$B_j z_4$	$z_{\bar{u}j} < m >$	$T_{\bar{u}j} < \Delta >$	$t_{\bar{u}j} < \Delta >$
0,0	6,9600	0,0000	6,96	0,00	423,70
0,1	6,6435	-0,0697	6,57	16,32	439,92
0,2	5,8924	-0,6413	5,25	32,64	456,24

F-I-3-27

0,3	4,9881	-1,4349	3,55	48,96	472,56
0,4	4,1915	-2,0441	2,15	65,28	488,88
0,5	3,3640	-2,7743	0,59	81,60	505,20
0,6	2,4785	-3,4568	-0,98	97,92	521,52
0,7	1,7399	-4,1137	-2,37	114,24	537,84
0,8	0,7776	-4,8595	-4,08	130,56	554,16
0,9	0,0846	-5,4789	-5,39	146,88	570,48
1,0	0,0000	-5,7400	-5,74	163,20	586,80

k.- Verificare referitoare la legea de oscilație în a cincea cvasi semiperioade utilizând metoda variațională, varianta polinom algebric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care urmează a se utiliza pentru calculul nivelurilor apei în castel în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a cincea este :

$$z_{\bar{y}j} = C_j z_4 + D_j z_5$$

Calcululele cerute de aplicarea acestei formule sînt prezentate în tabelul Nr.13 (131), iar graficul respectiv se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.13 (131)

Legea de oscilație în cea de a cincea cvasi semiperioadă
(polinom algebric)

$\frac{j}{10}$	$C_j z_4$	$D_j z_5$	$z_{\bar{y}j} < m >$	$T_{\bar{y}j} < s >$	$t_{\bar{y}j} < s >$
0,0	-5,7400	0,0000	-5,74	0,00	586,80
0,1	-5,4800	0,0206	-5,46	16,30	603,10
0,2	-4,8950	0,2208	-4,67	32,60	619,40
0,3	-4,2243	0,7305	-3,49	48,90	635,70
0,4	-3,5053	1,4734	-2,03	65,20	652,00
0,5	-2,6738	2,2639	-0,41	81,50	668,30

F-I-3-28

0,6	-1,7401	2,9679	1,23	97,80	684,60
0,7	-0,8627	3,5767	2,71	114,10	700,90
0,8	-0,2608	4,1446	3,78	130,40	717,20
0,9	-0,0243	4,6399	4,62	146,70	733,50
1,0	0,0000	4,8600	4,86	163,00	749,80

λ - Verificare referitoare la legea de oscilație în a cincea cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta polinom trigonometric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care se aplică în continuare pentru calculul nivelurilor apei în castelul de echilibru în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a cincea are forma :

$$\bar{z}_{\bar{y}j} = A_j \bar{z}_4 + B_j \bar{z}_5$$

Calcululele aferente sînt prezentate în tabelul Nr.14 (132) iar graficul respectiv este trecut în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.14 (132)

Legea de oscilație în a șasea cvasi semiperioadă
(polinom trigonometric)

$\frac{j}{10}$	$A_j \bar{z}_4$	$B_j \bar{z}_5$	$\bar{z}_{\bar{y}j} \langle m \rangle$	$\bar{T}_{\bar{y}j} \langle \lambda \rangle$	$t_{\bar{y}j} \langle \lambda \rangle$
0,0	-5,7400	0,0000	-5,74	0,00	586,30
0,1	-5,4789	0,0591	-5,42	16,30	603,10
0,2	-4,8595	0,5431	-4,32	32,60	619,40
0,3	-4,1137	1,2149	-2,90	48,90	635,70
0,4	-3,4568	1,7307	-1,73	65,20	652,00
0,5	-2,7743	2,3490	-0,44	81,50	668,30
0,6	-2,0441	2,9268	0,88	97,80	684,60
0,7	-1,4349	3,4831	2,05	114,10	700,90

F-I-3-29

0,8	-0,6413	4,1145	3,47	130,40	717,20
0,9	-0,0697	4,6399	4,57	146,70	733,50
1,0	0,0000	4,8600	4,86	163,00	749,80

μ.- Verificare referitoare la legea de oscilație în a șasei cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta polinom algebric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care urmează a se utiliza pentru calculul nivelurilor apei în castel în momente reprezentând zecimi ale cvasi semiperioadei a șasea este :

$$\hat{z}_{\bar{v}j} = C_j z_5 + D_j z_6$$

Calcululele cerute de aplicarea acestei formule sînt prezentate în tabelul Nr.15 (133), iar graficul respectiv se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33).

Tabelul Nr.15 (133)

Legea de oscilație în cea de a șasea cvasi semiperioadă (polinom algebric)

$\frac{j}{10}$	$C_j z_5$	$D_j z_6$	$\hat{z}_{\bar{v}j} < \mu >$	$T_{\bar{v}j} < \Delta >$	$t_{\bar{v}j} < \Delta >$
0,0	4,8600	0,0000	4,86	0,00	749,80
0,1	4,6399	-0,0178	4,62	16,30	766,10
0,2	4,1446	-0,1913	3,95	32,60	782,40
0,3	3,5767	-0,6328	2,94	48,90	798,70
0,4	2,9679	-1,2763	1,69	65,20	815,00
0,5	2,2639	-1,9611	0,30	81,50	831,30
0,6	1,4734	-2,5710	-1,10	97,80	847,60
0,7	0,7305	-3,0983	-2,37	114,10	863,90
0,8	0,2208	-3,5902	-3,37	130,40	880,20
0,9	0,0206	-4,0193	-4,00	146,70	896,50
1,0	0,0000	-4,2100	-4,21	163,00	912,80

F-I-3-30

✓ - Verificare referitoare la legea de oscilație în a șasea cvasi semiperioadă utilizând metoda variațională, varianta poligon trigonometric.

Formula la care s-a ajuns în cadrul tezei și care se aplică în continuare pentru calculul nivelurilor apei în castelul de echilibru în momente reprezentând secimale cvasi semiperioadei a șasea are forma :

$$z_{\bar{v}j} = A_j z_5 + B_j z_6$$

Calcululele aferente sînt prezentate în tabelul Nr.16 (134) iar graficul respectiv se găsește în reprezentarea grafică Nr.2 (33)

Tabelul Nr.16 (134)

Legea de oscilație în cea de a șasea cvasi semiperioadă (polinom trigonometric)

$\frac{j}{10}$	$A_j z_5$	$B_j z_6$	$z_{\bar{v}j} < m >$	$T_{\bar{v}j} < \Delta >$	$t_{\bar{v}j} < \Delta >$
0,0	4,8600	0,0000	4,86	0,00	749,80
0,1	4,6399	-0,0512	4,59	16,30	766,10
0,2	4,1145	-0,4704	3,64	32,60	782,40
0,3	3,4831	-1,0524	2,43	48,90	798,70
0,4	2,9268	-1,4992	1,43	65,20	815,00
0,5	2,3490	-2,0348	0,31	81,50	831,30
0,6	1,7307	-2,5354	-0,80	97,80	847,60
0,7	1,2149	-3,0172	-1,80	114,10	863,90
0,8	0,5431	-3,5642	-3,02	130,40	880,20
0,9	0,0591	-4,0185	-3,96	146,70	896,50
1,0	0,0000	-4,2100	-4,21	163,00	912,80

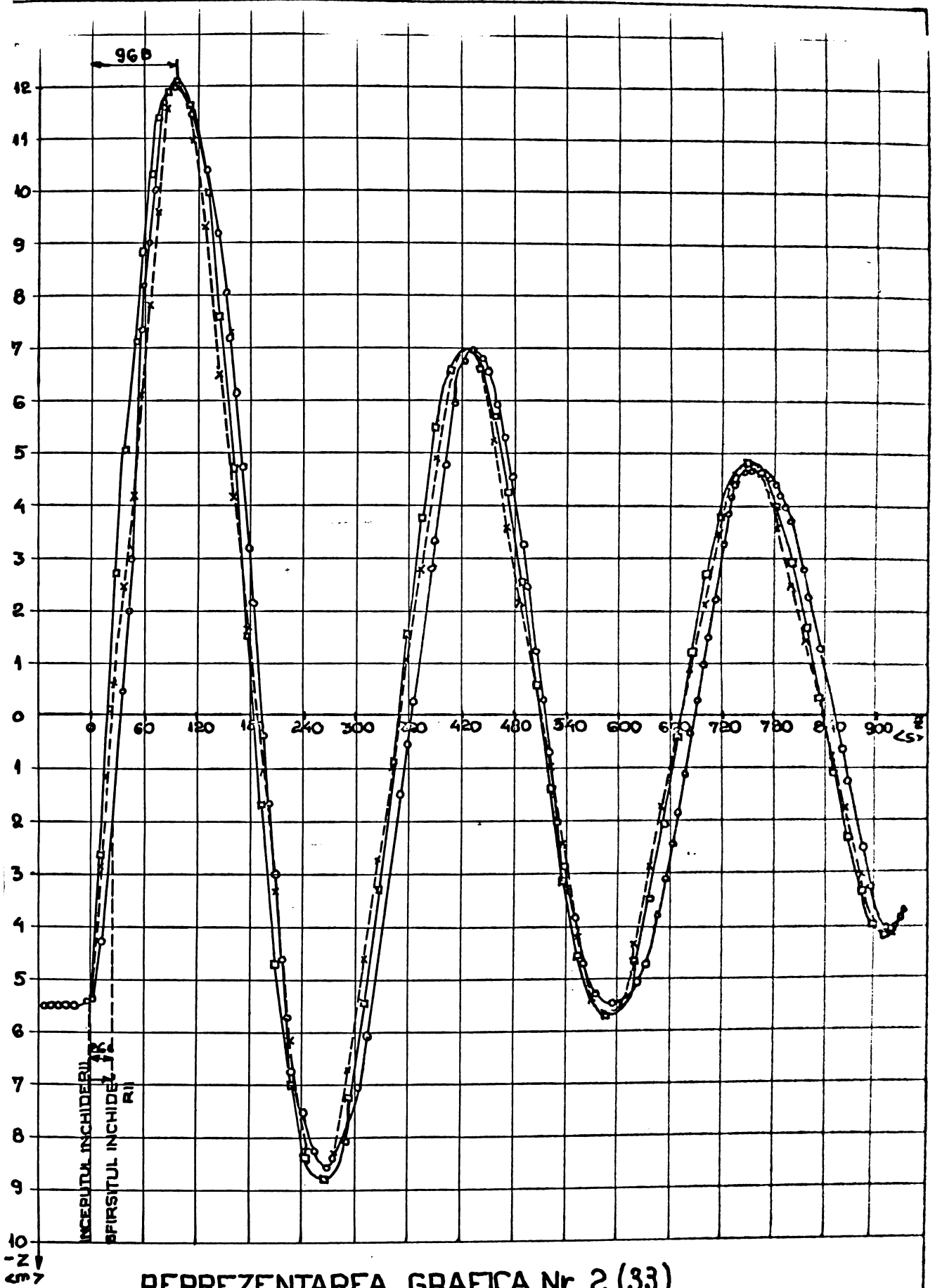
Ca o concluzie referitoare la legea de oscilație se constată din reprezentarea grafică Nr.2, că metoda variațională, în cele două variante analizate conduce la rezultate care sînt în

F-I-3-31

bună concordanță cu cele experimentale. Este de menționat că autorul nu a găsit în literatura de specialitate metode sau formule care să conducă la rezultate mai precise.

Ca o concluzie generală referitoare la acest paragraf se impune aceea că există o foarte bună concordanță între toate metodele și formulele recomandate în teză și rezultatele experimentale obținute de Naber la amenajarea hidrotehnica "Tanzmühle".

Această concluzie, valabilă în cazul tuturor verificărilor efectuate în cadrul tezei, testează corectitudinea metodelor și formulelor recomandate în teză și le recomandă, având în vedere și simplitatea lor deosebită, de a fi utilizate în proiectare.



REPREZENTAREA GRAFICA Nr. 2 (33)

HIDROCENTRALA TANZMÜHLE - INCHIDERE TOTALA BRUSCA

- DIAGRAMA EXPERIMENTALA
- DIAGRAMA TEORETICA-POLIGON ALGEBRIC
- ×— DIAGRAMA TEORETICA-POLIGON TRIGONOMETRIC

F-II-1-1

F.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Capitolul II - INCHIDEREA TOTALA BRUSCA.

UTILIZAREA REZULTATELOR PROPRII

§ 1.- Descrierea standului experimental

Standul experimental a fost amplasat în aer liber, în curtea laboratorului Catedrei de construcții hidrotehnice și îmbunătățiri funciare. Cercetările experimentale au fost efectuate în vara anilor 1970, 1971 și 1972.

Standul respectiv se compune din următoarele elemente principale, care sînt reprezentate și în figura Nr.1(9) conținînd o vedere în plan a standului :

1.- rezervor amonte cilindric de mare capacitate (6 m^3) prevăzut cu preaplin care asigură un nivel constant al apei din rezervor. Alimentarea rezervorului se face de la stația centrală de pompare a laboratorului, cu debite pînă la 150 l/s.

Pentru a se realiza un front de deversare cît mai lung, întregul perete circular al rezervorului a fost amenajat pentru a funcționa ca deversor circular al prea-plinului. Această cerință este impusă de necesitatea ca în rezervor, care modelează lacul de acumulare al amenajării hidrotehnice, să se asigure cît mai riguros constanța nivelului apei în rezervor în timpul desfășurării procesului cvasi oscilatoriu care ia naștere prin închiderea bruscă și totală a vanei de reglaj cu acțiune rapidă. Acest rezervor alimentează aducțiunea, nivelul apei fiind în rezervor cu 2 m mai sus decît axul conductei de aducțiune.

F-II-1-2

In foto Nr.1 și Nr.2 este prezentat rezervorul amonte. In foto Nr.1 se observă conducta de alimentare a rezervorului prevăzută cu o vană de control cu acțiune lentă, conducta de aducțiune iar în partea superioară jgheabul exterior al dispozitivului prea plin. In foto Nr.2 este redat un aspect din timpul funcționării deversorului prea plin.

2.- Din rezervorul amonte apa intră într-o conductă metalică cu diametrul $d = 0,108$ m, care modelează galeria de aducțiune a amenajării hidrotehnice. Această conductă are o lungime de $L = 180,88$ m, suficient de mare pentru a se putea modela în cadrul laboratorului amenajări cu galerii de aducțiune oricât de lungi. Pe conductă au fost montate o vană cu închidere lentă și o diafragmă.

In foto Nr.3 și Nr.4 este prezentată aducțiunea.

3.- La capătul aval al aducțiunii se găsește amplasat castelul de echilibru. S-au utilizat în cursul cercetărilor experimentale castele de echilibru confecționate din țevi de oțel de diferite diametri :

- 3 castele de echilibru simple ;
- 9 variante de castele de echilibru perfect pneumatice (camera superioară de aer închisă etanș) ;
- 9 variante de castele de echilibru parțial pneumatice (camera superioară de aer cu orificii mici), fiecare variantă fiind studiată cu câte doi diametri diferiți ai orificiilor.

Operația de confecționare și schimbare a castelelor a fost operația care a necesitat un mare consum de muncă fizică, muncă pe care au prestat-o muncitorii din atelier și studenții, pentru care le mulțumesc tuturor și pe această cale.

Pentru vizualizarea nivelului apei în castele, acestea au fost prevăzute cu câte un piezometru montat la baza castelelor și având o înălțime egală cu aceea a castelelor.

F-II-1-3

Pentru ca nivelul apei în piezometru să indice nivelul apei în castel, în cazul castelelor simple piezometrul a fost pus în contact cu aerul atmosferic, pe cînd în cazul castelelor perfect sau parțial pneumatice piezometrul a fost pus în contact cu aerul din camera superioară a castelului de echilibru.

Pentru măsurarea presiunii maxime care se atinge în castelul de echilibru în cazul castelelor de echilibru pneumatice a fost montat și cîte un manometru.

În foto Nr.5 și Nr.6 sînt prezentate castelele de echilibru montate în stand, respectiv un castel de echilibru simplu și un castel de echilibru perfect pneumatic.

În foto Nr.7 sînt prezentate cele trei castele de echilibru simple înainte de a fi montate în stand, iar în foto Nr.8 două din castelele de echilibru pneumatice.

În foto Nr.9 se observă cum au fost executate capacele castelelor de echilibru pentru a fi transformate în castele pneumatice, împreună cu ștuțul filetat pe care se înșuruba fie un robinet de abur (castele perfect pneumatice) fie capace cu orificiu (castele parțial pneumatice).

În foto Nr.10 se arată cum în capătul ștuțului filetat s-a montat un robinet pentru abur care izolează perfect aerul din camera superioară în cazul castelelor denumite perfect pneumatice.

În foto Nr.11 și Nr.12 se observă cele două tipuri de capace cu orificii cu diametrul de 1 mm și 2 mm, folosite în cazul castelelor parțial pneumatice.

4.- Imediat în aval de castelul de echilibru se găsește amplasată vana sertar cu închidere rapidă, special adaptată în acest scop în cadrul atelierului catedrei . Această vană nu permite deschiderea decît în două poziții distincte. Aspectul exterior al vanei și model în care ea este montată în circuitul hi-

F-II-1-4

draulic se observă în foto Nr.13.

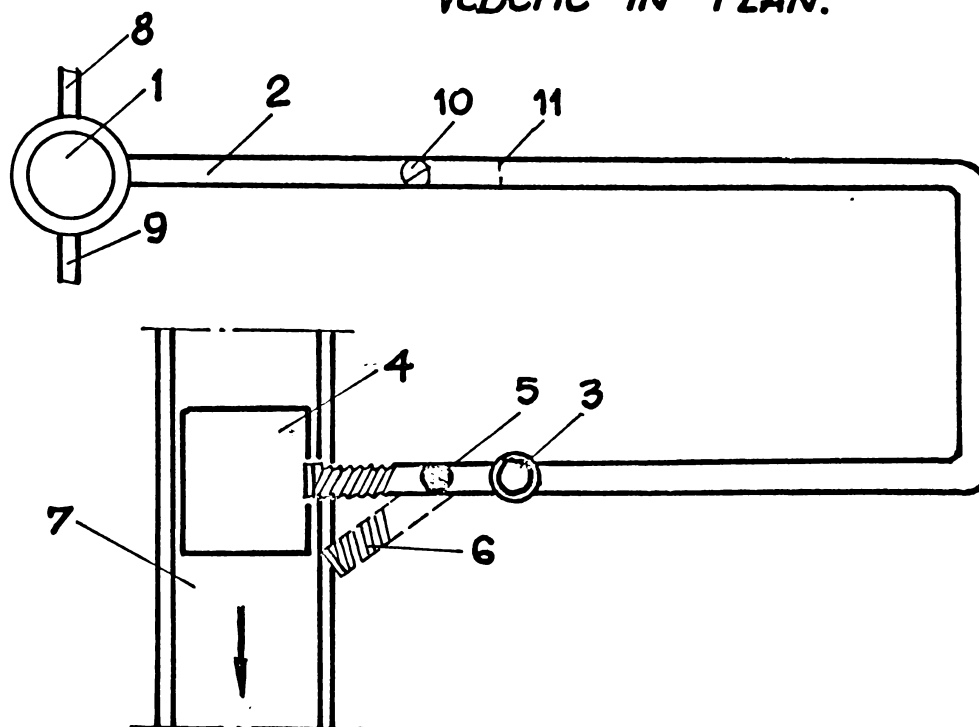
5.- De la vana sertar cu acțiune rapidă pornește o conductă flexibilă, legătura între vană și conducta flexibilă se observă în foto Nr.13. Celălalt capăt al conductei flexibile poate fi plasat astfel încît apa să curgă într-un rezervor etalonat (foto Nr.14) sau într-un canal de evacuare, conductă flexibilă avînd și funcția de deflector.

6.- În cercetările experimentale premergătoare, care au fost apoi repetate parțial în mod periodic pentru a se constata dacă nu au intervenit unele schimbări accidentale ale coeficienților de rezistență premergătoare s-a mai utilizat un vas etalonat cu un volum de 1 m^3 prezentat în foto Nr.15 și Nr.16.

Pentru a se accelera golirea vasului etalonat s-au montat un număr de două robinete de golire a vasului etalonat.

O bună parte a standului experimental a fost primită de la tov.prof.dr.ing.Bălă Mihai, care a utilizat-o la elaborarea tezei referitoare la castelele de echilibru tronconice și căruia autorul îi mulțumește și pe această cale.

VEDERE IN PLAN.



- | | |
|---|------------------------|
| 1. Rezervor cilindric cu nivel constant | 7. Canal de beton |
| 2. Galerie de aducțiune | 8. Evacuare prea plin |
| 3. Castel de echilibru | 9. Conductă alimentare |
| 4. Rezervor etalonat | 10. Vană lentă |
| 5. Vană șerpar cu acțiune rapidă | 11. Diafragmă. |
| 6. Conductă mobilă flexibilă | |

FIGURA NR.1(9)
STANDUL EXPERIMENTAL



Foto Nr.1 - Rezervorul
de alimentare



Foto Nr.2 - Deversorul de prea-
plin al rezervorului de alimen-
tare



Foto Nr.3 - Conductă de aducțiu-
ne în zona amonte.



Foto Nr.4 - Conducta de aducțiune
în zona aval



Foto Nr.5 - Castel de echilibru
perfect pneumatic Tip A III



Foto Nr.6 - Castel de
echilibru simplu tip B

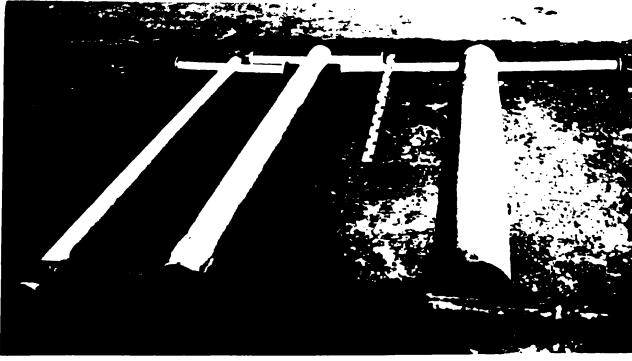


Foto Nr.7 - Castele de echilibru simple tip A,B,C



Foto Nr.8 - Capac castele de echilibru perfect pneumatic tip A



Foto Nr.9 - Capac castel de echilibru perfect pneumatic tip B

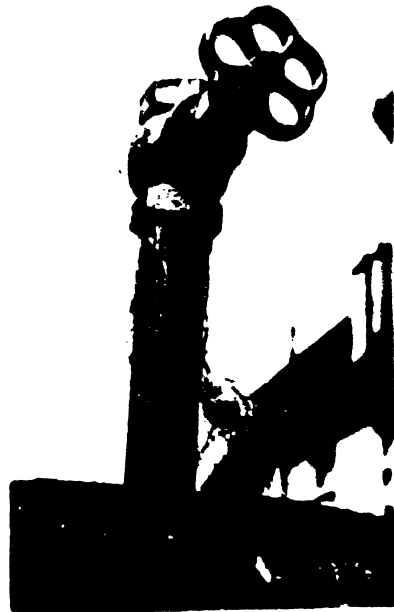


Foto Nr.10 - Robinet etans

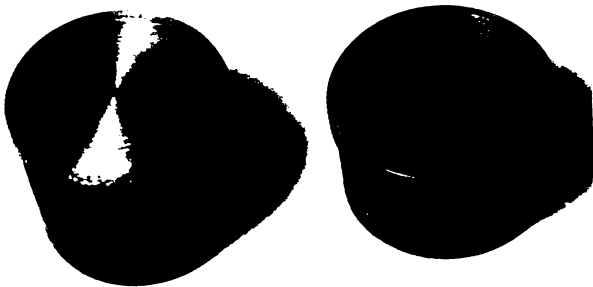


Foto Nr.11 - Capace cu orificii



Foto Nr.12 - Capace cu orificii

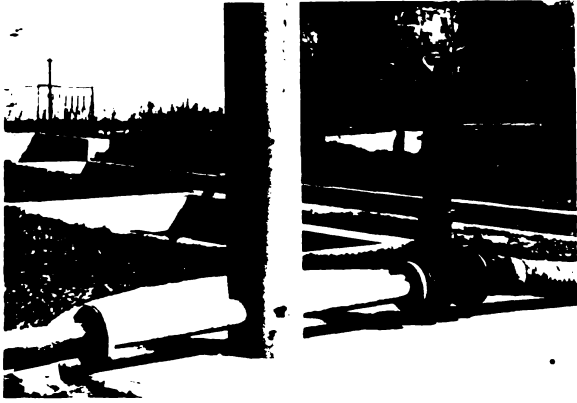


Foto Nr.13 - Vana cu acțiune rapidă

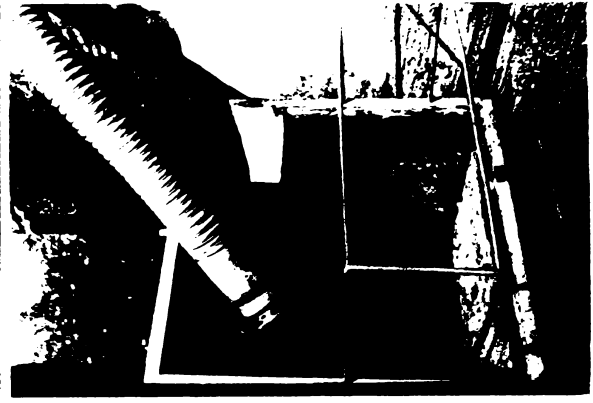


Foto Nr.14 - Conducta flexibilă



Foto Nr.15 - Rezervor etalonat

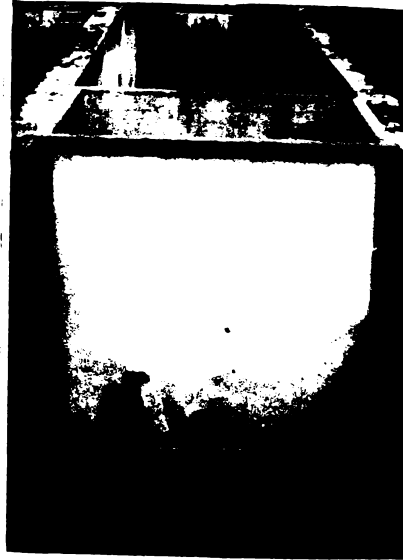


Foto Nr.16 - Rezervor etalonat



Foto Nr.17 - Castel perfect pneumatic tip A în stand



Foto Nr.18 - Castel perfect pneumatic tip B în stand

F-II-2-1

N.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Capitolul II - INCHIDEREA TOTALA BRUSCA.

UTILIZAREA REZULTATELOR PROPRII

§ 2.- Studiul aducțiunii

Înainte de a trece la studiul propriu zis al oscilațiilor în castelele de echilibru a fost necesar a se face un studiu al pierderilor de energie specifică (pierderi de sarcină) pe conducta de aducțiune pentru determinarea coeficientului de rezistență echivalent al galeriei de aducțiune deoarece acest coeficient reprezintă unul dintre parametrii importanți care intervine în calculul mărimii de referință Z_* .

Pentru calculul acestui coeficient de rezistență echivalent notat λ_e se utilizează formula care-l definește (formula Darcy) :

$$h_r = -z_0 = \lambda_e \frac{L}{d} \frac{w_0^2}{2g} \Rightarrow \lambda_e = - \frac{2gdz_0}{Lw_0^2}$$

Din formula de mai sus, rezultă că pe lângă mărimile d , g , L care nu depind de regimul de mișcare este necesar ca la fiecare regim să se măsoare z_0 și w_0 .

Pentru măsurarea pierderii de sarcină z_0 în regim permanent se utilizează drept piezometru chiar castelul de echilibru. Aceasta asigură o eroare suficient de mică, chiar în cazul valorilor mici ale lui $|z_0|$. Astfel pentru cazul cel mai defavorabil $z_0 \approx -0,2$ m considerînd că se pot aproxima la piezometru jumătăți de milimetru rezultă o eroare relativă maximă :

$$\varepsilon_{h_r} = \varepsilon_{z_0} = \frac{0,5}{200} 100 = 0,25 \%$$

F-II-2-2

Măsurarea vitezei W_0 se face pe cale indirectă prin măsurarea debitului și a secțiunii de curgere. Măsurarea debitului se realizează prin metoda vasului etalonat cu o eroare maximă de 0,5 mm la piezometru ceea ce corespunde la o eroare a volumului de 0,5 l și cu o eroare maximă de 0,05 s la cronometrul "Ruhla" cu care s-au făcut cronometrările :

$$\text{Deoarece : } Q_0 = \frac{\Delta V \alpha}{\Delta t}$$

rezultă , considerînd un volum minim măsurat cu ajutorul vasului etalonat de 500 l și un timp minim de 25 s, o eroare relativă maximă :

$$\varepsilon_{Q_0} = \varepsilon_{\Delta V \alpha} + \varepsilon_{\Delta t} = \frac{0,5}{500} \cdot 100 + \frac{0,05}{25} \cdot 100 = 0,3\%$$

Eroarea relativă maximă de determinare a secțiunii considerînd o eroare maximă de determinare a diametrului de 0,25 mm conduce la :

$$\varepsilon_f = 2\varepsilon_d = 2 \frac{0,25}{100} \approx 0,5\%$$

Rezultă , atunci o eroare maximă relativă de determinare a vitezei W_0 , determinată prin relația $W_0 = \frac{Q_0}{f}$

$$\varepsilon_{W_0} = \varepsilon_{Q_0} + \varepsilon_f = 0,8\%$$

Se poate formula din cele de mai sus concluzia că eroarea relativă maximă de determinare a coeficientului de rezistență este de ($\varepsilon_L \approx 0,05\%$)

$$\varepsilon_{\lambda_e} = \varepsilon_d + \varepsilon_{\alpha_0} + \varepsilon_L + 2\varepsilon_{W_0} = 2,40\%$$

Evident, eroarea relativă determinată anterior reprezintă o margine superioară a erorii, conform teoriei probabilităților și: fiind foarte puțin probabil ca toate erorile să fie de același sens, în mod uzual apărînd o compensare naturală a erorilor, de aceea eroarea relativă reală este totdeauna mult mai mică decît eroarea relativă maximă determinată mai sus.

Totuși, această valoare relativ mare a erorii relative maxime a obligat la efectuarea unor calcule îngrijite care să elimi-

F-II-2-3

ne practic erorile de calcul, reducându-le la erori relative de sub 0,1 %, astfel ca să se mențină o eroare relativă maximă sub 25% .

Temperatura apei s-a măsurat cu termometrul și a rezultat experiențele fiind făcute totdeauna în timpul verii, o temperatură medie de $t = 18^{\circ}\text{C}$.

În urma măsurărilor s-au ridicat două curbe caracteristice ale aducțiunii , dintre care una dimensională exprimând dependența dintre pierderea de sarcină și viteză $\lambda_e = f(w_0)$ și o a doua , adimensională, exprimând dependența dintre coeficientul de rezistență echivalent λ_e și numărul lui Reynolds, calculat cu relația :

$$Re = \frac{w_0 d}{\nu}$$

în care ν este coeficientul cinematic de vîscozitate la temperatura respectivă. Curbele sînt date în reprezentările grafice Nr.1 (34) și Nr.2 (35), iar calculele aferente în tabelul Nr.1 (135).

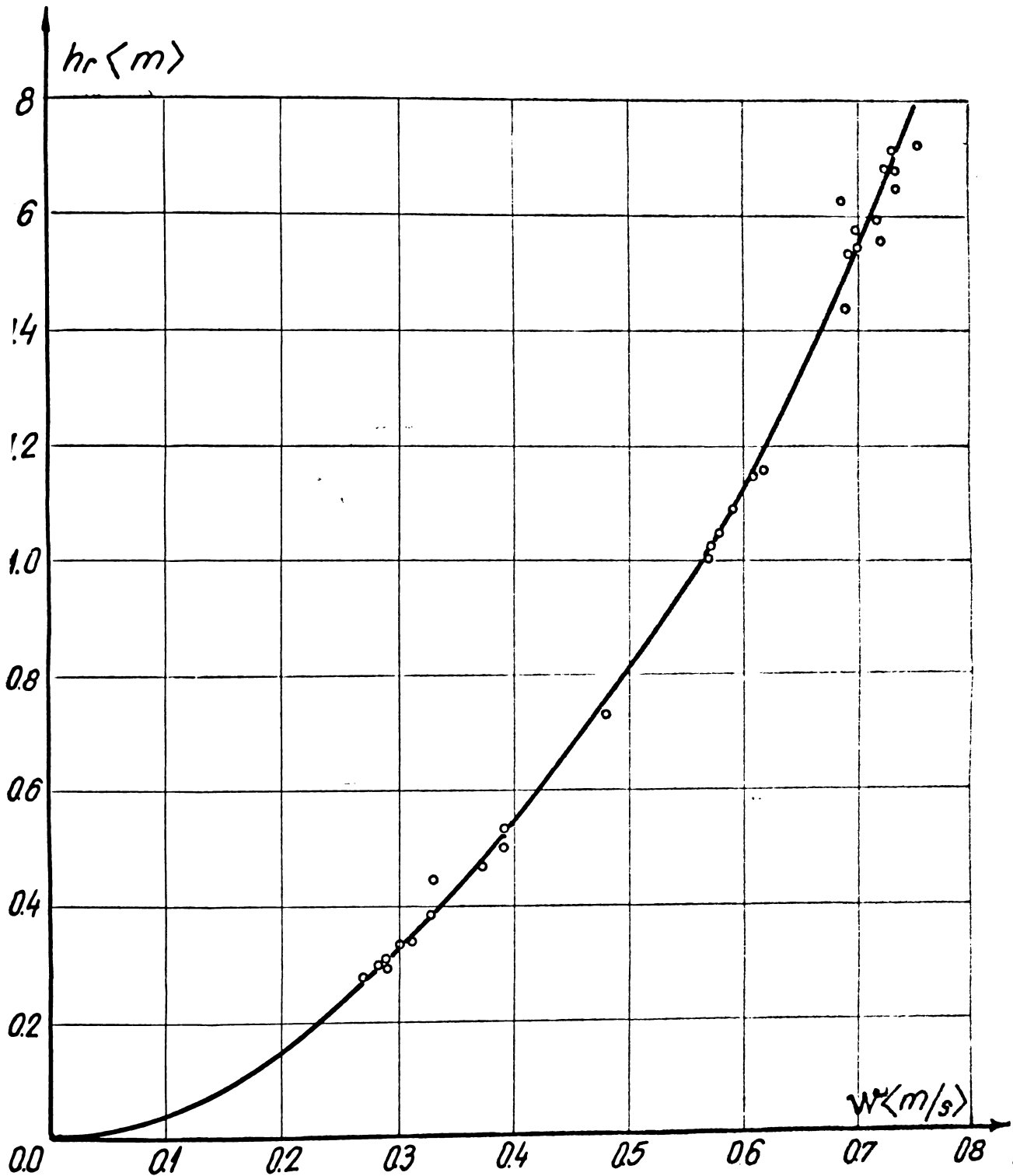
Tabelul Nr. 1 (135)

Curba caracteristică a aducțiunii

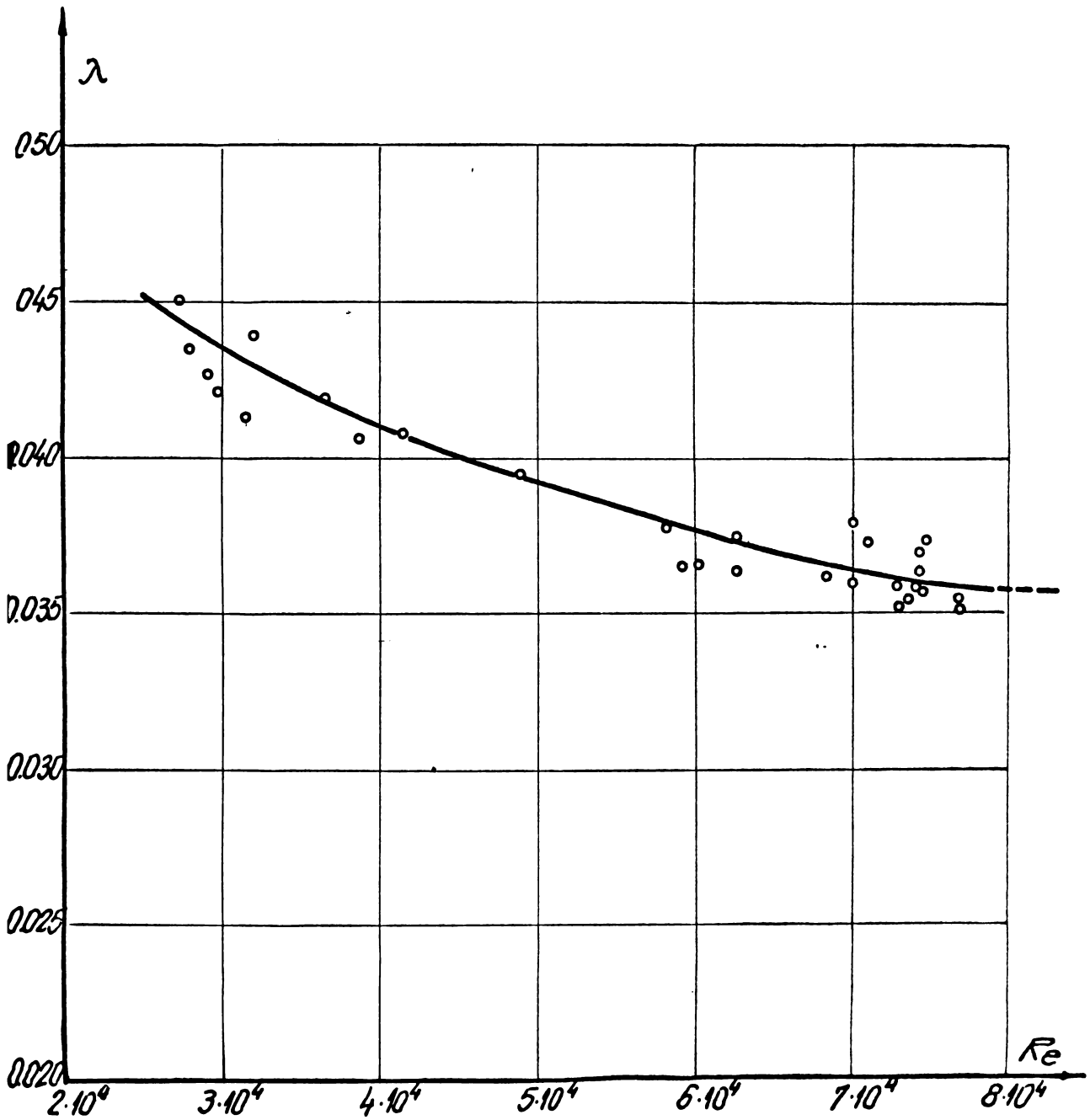
NUMĂRUL SERIAL	VOLUM ΔV < m ³ >	TIMP Δt < s >	PIERDERE DE SARCINĂ $h_r = \lambda_e$ < m >	DEBIT Q_0 l/s	VITEZA w_0 m/s	λ_e	Re
1	0,605	92	1,580	6,58	0,719	0,0358	73200
2	0,542	81	1,630	6,69	0,730	0,0358	74400
3	0,705	105	1,640	6,71	0,733	0,0356	74700
4	0,552	159	0,500	3,47	0,379	0,0406	38600
5	0,730	221	0,441	3,30	0,361	0,0419	36800
6	0,675	248,5	0,330	2,715	0,2965	0,0439	32000
7	0,667	100	1,645	6,67	0,729	0,0362	74300
8	0,690	133	1,021	5,25	0,573	0,0361	68400
9	0,752	304,5	0,280	2,465	0,2695	0,0450	27400

F-II-2-4

10	0,795	118,5	1,580	6,63	0,724	0,0354	73800
11	0,767	253	0,390	3,03	0,331	0,0415	33800
12	0,658	95,5	1,680	6,875	0,750	0,0350	76500
13	0,694	205,5	0,470	3,36	0,367	0,0430	37400
14	0,532	121	0,730	4,40	0,480	0,03895	48800
15	0,873	157	1,145	5,59	0,610	0,0374	62200
16	0,724	132	1,089	5,40	0,590	0,0365	60100
17	0,952	267,5	0,528	3,56	0,389	0,0408	41600
18	0,634	121	1,005	5,21	0,570	0,0367	58100
19	0,750	131	1,162	5,64	0,615	0,0362	62650
20	0,963	180,5	1,050	5,31	0,580	0,0364	59150
21	0,728	279,5	0,301	2,605	0,2845	0,0435	29000
22	0,325	47	1,720	6,915	0,755	0,0354	77000
23	0,737	110	1,710	6,700	0,732	0,0373	74700
24	0,724	271	0,305	2,67	0,2915	0,0421	29700
25	0,615	92	1,684	6,685	0,730	0,0370	74400
26	0,595	210,5	0,335	2,825	0,309	0,0411	31500
27	0,687	109	1,535	6,303	0,688	0,0379	70200
28	0,683	107	1,545	6,383	0,697	0,0372	71100
29	0,603	96	1,425	6,281	0,686	0,0359	70000
30	0,734	111,5	1,55	6,583	0,719	0,0352	73400
31	0,694	264	0,30	2,629	0,2875	0,0425	29300



REPREZENTAREA GRAFICA NR. 1 (34)
CURBA CARACTERISTICA A ADUCTIUNII $h_r = h_r(w)$



REPREZENTAREA GRAFICA NR. 1 (35)
CURBA $\lambda_e = \lambda_e(Re)$ A ADUCTIUNII

F-II-3-1

F.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Capitolul II - ÎNCHIDEREA TOTALĂ BRUSCĂ

UTILIZAREA REZULTATELOR PROPRII

§ 3.- Castele de echilibru simple

S-au cercetat oscilațiile care apar la închiderea bruscă totală utilizându-se trei castele de echilibru, confecționate în atelierul catedrei din țevi de oțel, notate AO, BO, CO în ordinea descreșterii diametrului castelului.

Dimensiunile castelelor sînt date în figura Nr.1(10). Pentru fiecare castel s-au cercetat oscilațiile corespunzătoare celor două poziții în care se poate fixa vana sertar cu închidere rapidă.

Rezultatele măsurătorilor sînt trecute în tabelul Nr.1(136) Nr.2 (137) și Nr.3 (138) pentru prima poziție a vanei căreia îi corespunde regimul de curgere numerotat cu 1 și la care, în regimul permanent, cota apăi în castel este $\xi_0 = -0,455$ m

În tabelele Nr.4 (139), Nr.5 (140) și Nr.6 (141) sînt trecute rezultatele măsurătorilor pentru cea de a doua poziție a vanei căreia îi corespunde regimul de curgere numerotat cu 2 și la care, în regimul permanent, cota apei în castelul de echilibru este $\xi_0 = -1,605$ m.

Cercetările experimentale au avut drept scop de a face o comparație între unele rezultate teoretice obținute în cadrul tezei și rezultatele determinărilor experimentale pentru un număr cât mai mare de valori ale parametrului S_0 , parametru adimen-

F-II-3-2

sional care caracterizează complet oscilațiile în castele de echilibru la închiderea totală bruscă.

Comparația s-a limitat la nivelele extreme succesive care apar în timpul procesului cvasi oscilatoriu notate \tilde{x}_j , respectiv sub formă adimensională \mathcal{S}_j cât și la intervalele de timp între acestea, denumite în lucrare cvasi semiperioade notate T_j , respectiv sub formă adimensională \mathcal{T}_j . Aspectul cantitativ al acestor comparații s-a limitat la doi indicatori considerați caracteristici și anume diferența absolută și diferența relativă.

Diferența absolută a fost exprimată în unitățile metri, respectiv secunde și a fost definită prin relațiile :

- în cazul nivelurilor extreme $|\Delta\tilde{x}_j| = |\tilde{x}_{jT} - \tilde{x}_{jE}|$ în care cu \tilde{x}_{jT} s-a notat valoarea nivelului extrem de indice determinată pe cale teoretică, utilizând tabelele cu valori exacte din volumul I, iar cu \tilde{x}_{jE} s-a notat valoarea aceluiași nivel extrem determinată pe cale experimentală ;

- în cazul cvasi semiperioadelor $|\Delta T_j| = |T_{jT} - T_{jE}|$, în care cu T_{jT} s-a notat valoarea cvasi semiperioadei de indice j determinată pe cale teoretică utilizând tabelul cu rezultatele metodei de integrare Legendre din volumul II, iar cu T_{jE} s-a notat valoarea aceluiași nivel extrem determinată pe cale experimentală.

Diferența relativă a fost exprimată în procente și a fost definită prin relațiile :

- în cazul nivelurilor extreme s-a utilizat drept mărime de referință denivelarea inițială $|\tilde{x}_0|$ ceea ce reprezintă o mărime de referință defavorabilă în ceea ce privește diferențele relative $\rightarrow 100 \left| \frac{\Delta\tilde{x}_j}{\tilde{x}_0} \right|$

- în cazul cvasi semiperioadelor s-a utilizat drept mărime de referință cvasi semiperioada $T_j \rightarrow 100 \left| \frac{\Delta T_j}{T_j} \right|$

Se constată din analizarea datelor înscrise în tabele că:

F-II-3-3

A.- Cazul nivelurilor extreme

- diferența absolută maximă a fost de $|\Delta z_j|_{\max} = 0,041 \text{ m}$,

- diferența absolută medie a fost de :

$$|\Delta z_j|_{\text{med}} = \frac{0,0033 + 0,007 + 0,009 + 0,004 + 0,015 + 0,025}{6} = 0,0106 \text{ m}$$

- diferența absolută a crescut în general cu creșterea amplitudinii cvasi oscilațiilor, ceea ce este normal

- diferența relativă maximă a fost de 3,08 %

- diferența relativă medie a fost de

$$\frac{0,72 + 1,57 + 1,86 + 0,25 + 0,91 + 1,61}{6} \% = 1,15 \%$$

- diferența relativă în general nu depinde de variația amplitudinii cvasi oscilațiilor.

B. Cazul cvasi semiperioadelor

- diferența absolută maximă a fost de $|\Delta T_j|_{\max} = 1,5 \text{ s}$.

- diferența absolută medie a fost de

$$|\Delta T_j|_{\text{med}} = \frac{1,08 + 1,1 + 0,87 + 1,3 + 1,1 + 0,85}{6} = 1,054$$

- diferența relativă maximă a fost de 4,63 %

- diferența relativă medie a fost de

$$\frac{2,41 + 3,42 + 4,41 + 2,73 + 3,82 + 4,09}{6} = 3,39 \%$$

Din cele de mai sus se constată că diferențele relative sînt mai mici în cazul nivelurilor extreme și ceva mai mari în cazul cvasi semiperioadelor. Acest lucru se datorește în cea mai mare parte evoluției fenomenului studiat și metodicii experimentale care a permis determinarea cu mai mare precizie a nivelurilor extreme și cu mai mică măsură a cvasi semiperioadelor. Într-adevăr în momentul în care nivelul apei atinge un nivel extrem, viteza de mișcare a nivelului apei în castelul de echilibru este nulă. În plus într-un interval destul de mare de timp în jurul avestui nivel viteza de mișcare a apei este foarte mică, uneori chiar insesizabilă. Aceasta facilitează în cursul efectuării măsurătorilor determinarea poziției în spațiu a nivelurilor extreme

F-II-3-4

dar îngreunează mult determinarea poziției în timp a acestor nivele. De asemenea, așa cum s-a arătat și teoretic, timpul efectiv de închidere al vanei are și el o importanță mai mare asupra cvasi perioadelor decît asupra nivelurilor extreme.

Cu toate acestea, considerăm că diferențele obținute atît în cazul nivelurilor extreme cît și în cazul cvasi semiperioadelor permit să se tragă concluzia că rezultatele teoretice ale tezei sînt verificate în mod concludent de cercetările experimentale. Avem în vedere și faptul, deosebit de important că nu se constată o creștere a erorilor pe măsură ce procesul cvasi oscilatoriu se desfășoară în timp.

În reprezentările grafice Nr.1 (36) și Nr.2 (37) sînt date oscilațiile în cele trei castele de echilibru corespunzătoare primului și respectiv celui de al doilea regim studiat. Întrucît nu s-au făcut decît măsurători corespunzătoare nivelelor extreme, în diagrame acestea au fost unite prin linie dreaptă.

FIGURA NR. 1(10)
CASTELE DE ECHILIBRU SIMPLE

TIPUL CASTELELOR UTILIZATE ÎN CERCETAREA EXPERIMENTALĂ.			
DUPĂ DIAMETRU D DUPĂ ÎNĂLȚIMEA COLĂNEI DE AER h_F	A. (D = 0,355 m)	B. (D = 0,255 m)	C. (D = 0,155 m)
0 ($h_F \approx \infty$)			

TABEL Nr. 4 (136)

Tipul caz-te-lului	Nr. re-gi-mu-lui	Nr. niv. ex-trem j	Valori experimentale				Valori teoretice									
			z_j	t_j	f_j	s_j	g_j	z_j	T_j	DIF. ABSOL.	DIF. REL.	DIF. ABS.	DIF. RELAT.			
			m	Δ	Δ	-	m	Δ	m	%	%	Δ	%			
AO	1	0	-0,455	0		-1,813	-		-0,455		0,000	0,000	0,000	0,000	0,8	2,22
		1	0,230	36	36	0,936	2,50	0,235	35,2	0,005	0,005	1,10	0,44	0,9	1,90	
		2	-0,145	83,5	47,5	-0,571	3,31	-0,143	46,6	0,002	0,002	0,44	0,44	1,2	2,58	
		3	0,100	130,0	46,5	0,412	3,17	0,107	44,8	0,007	0,007	1,54	0,44	1,2	2,61	
		4	-0,085	176,0	46,0	-0,330	3,17	-0,083	44,8	0,002	0,002	1,10	0,44	1,2	2,61	
		5	0,065	222,0	46,0	0,270	3,17	0,070	44,8	0,005	0,005	1,10	0,44	1,2	2,61	
		6	-0,055	268,0	46,0	-0,229	3,17	-0,057	44,8	0,002	0,002	0,44	0,44	1,2	2,61	
Σ										0,023	5,06	6,5	14,44			
Valori importante			$D = 0,355$ m	$L = 180,88$ m	$S_0 = -1,813$	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{\text{mediu}} = 0,0033$ m										
			$F = 0,099$ m ²	$h_T = -z_0 = 0,455$ m	$Z^* = 0,251$ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{\text{mediu}} = 0,72$ %										
			$d = 0,108$ m	$\lambda_0 = 0,0399$	$T^* = 14,10$ s	$100 \left \frac{\Delta T_j}{T_j} \right _{\text{mediu}} = 2,41$ %										

TABEL Nr. 2 (137)

Tipul cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. extrem j	Valori experimentale				Valori teoretice									
			z_j m	t_j s	T_j s	S_j m	T_j s	z_j m	T_j s	DIF. ABSOL. $ \Delta z_j $ m	DIF. RELAT. $100 \frac{ \Delta z_j }{z_j}$ %	DIF. ABSOL. $ \Delta T_j $ s	DIF. RELAT. $100 \frac{ \Delta T_j }{T_j}$ %			
		0	-0,455	0,0		-0,937					0,000	0,00				
		1	0,390	23,0	23	0,829	2,15	22,2	0,402	22,2	0,012	2,64	0,8	3,48		
		2	-0,245	57,0	34	-0,530	3,20	33,0	-0,257	33,0	0,012	2,64	1,0	2,94		
	1	3	0,130	91,0	34	0,390	3,17	32,8	0,189	32,8	0,009	1,98	1,2	3,52		
		4	-0,145	125,0	34	-0,316	3,17	32,8	-0,153	32,8	0,008	1,76	1,2	3,52		
		5	0,120	159,0	34	0,261	3,17	32,8	0,126	32,8	0,006	1,32	1,2	3,52		
		6	-0,105	193,0	34	-0,222	3,17	32,8	-0,108	32,8	0,003	0,66	1,2	3,52		
		Σ									0,050	11,00	0,6	20,50		
Valori importante			D = 0,255 m	L = 180,80 m	$S_0 = -0,937$	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_j} \text{ mediu} = 1,57 \%$										
			$\bar{r} = 0,0511 \text{ m}^2$	$h_T = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$T^* = 10,31 \text{ s}$	$ \Delta T_j \text{ mediu} = 1,1 \text{ s}$										
			d = 0,108 m	$\lambda_e = 0,0399$	$ \Delta z_j \text{ mediu} = 0,007 \text{ m}$											
			f = 0,009156 m ²	$Z^* = 0,485 \text{ m}$		$100 \frac{ \Delta T_j }{T_j} \text{ mediu} = 3,42 \%$										

TABLE Nr. 3 (438)

Tipul castel	Nr. reg.	Nr. niv. extrem j	Valori experimentale				Valori teoretice								
			z_j m	t_j s	T_j s	S_j -	S_j -	Z_j m	T_j m	DF. ABSOL. $ \Delta Z_j $ m	DF. RELAT. $100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_j}$ %	DIF. ABS. $ \Delta T_j $ s	DIF. RELAT. $100 \frac{ \Delta T_j }{T_j}$ %		
		0	-0,455	0,0	-0,347	-	-	-0,455		0,000	0,00				
		1	0,800	12,0	0,620	1,90	0,814	11,7	0,014	3,08	0,3	2,56			
		2	-0,560	32,5	-0,437	3,18	-0,574	19,6	0,014	3,08	0,9	4,38			
	1	3	0,440	53,0	0,344	3,16	0,452	19,5	0,012	2,64	1,0	4,88			
		4	-0,360	73,5	-0,282	3,16	-0,370	19,5	0,010	2,20	1,0	4,88			
		5	0,305	94,0	0,237	3,16	0,311	19,5	0,006	1,32	1,0	4,88			
		6	-0,265	114,5	-0,204	3,16	-0,268	19,5	0,003	0,66	1,0	4,88			
									0,059	12,98	5,2	26,46			
Valori importante			$D = 0,155$ m	$L = 100,88$ m	$S_0 = 0,347$					$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_j} \text{ mediu} = 1,86$ %					
			$H = 0,01886$ m ²	$h_T = -z_0 = 0,455$ m	$T_K = 6,16$ s					$100 \frac{ \Delta T_j }{T_j} \text{ mediu} = 0,87$ %					
			$d = 0,108$ m	$\lambda e = 0,0399$	$Z^* \text{ mediu} = 0,009$ m										
			$f = 0,009156$ m ²	$Z^* = 1,312$ m						$100 \frac{ \Delta T_d }{T_d} \text{ mediu} = 4,41$ %					

TABEL Nr. 4 (139)

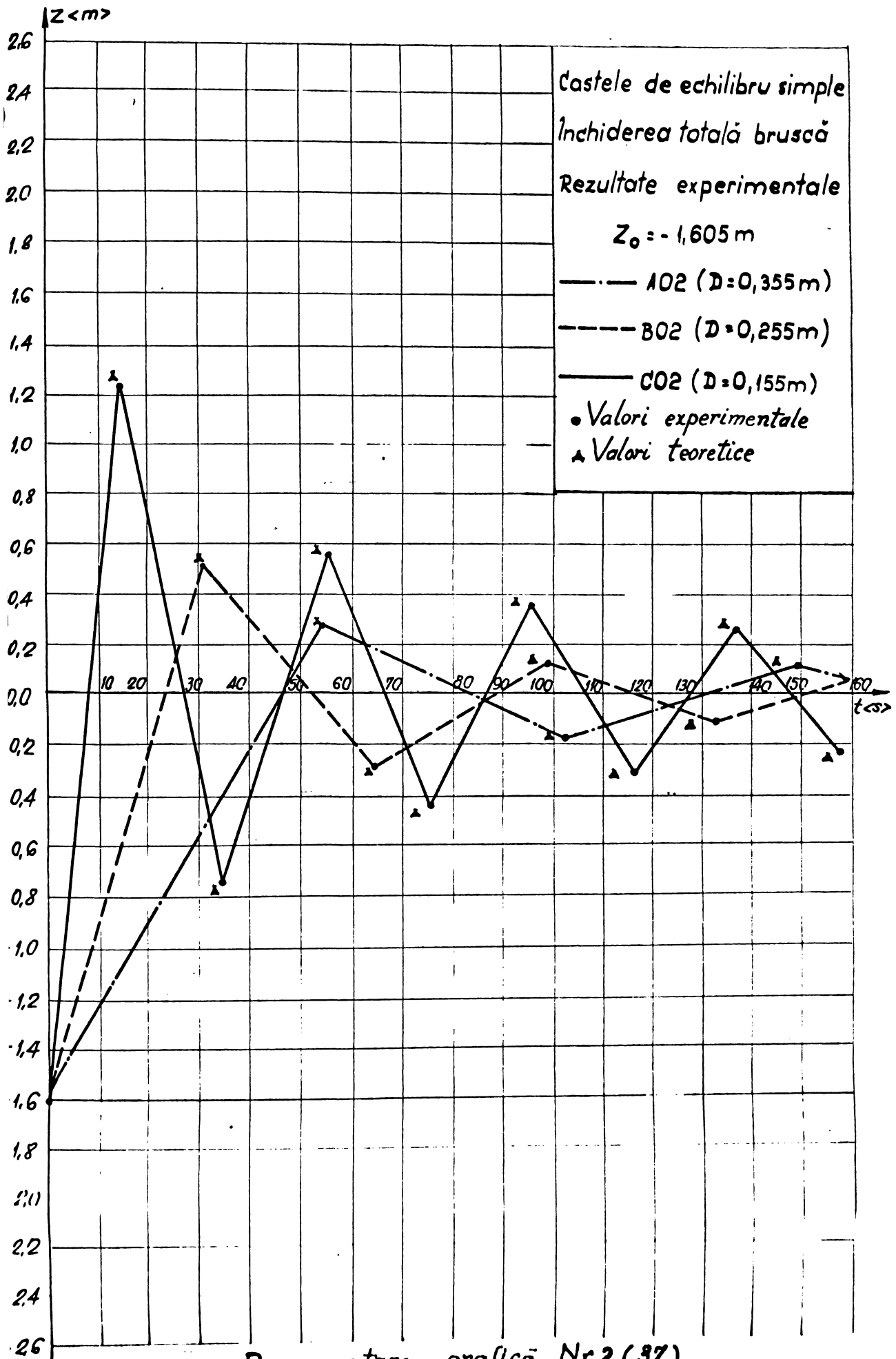
Tipul castel	Nr. reg.	Nr. niv. ex-trem j	Valori experimentale				Valori teoretice					
			\bar{x}_j m	t_j s	T_j s	S_j m	\bar{y}_j m	T_j s	DIFER. ABS.		DIF. RELAT.	
									$ \Delta x_j $ m	%	$ \Delta T_j $ s	%
AO		0	-1,605	0	54,5	-5,820	-1,605		0,000	0,00		
		1	0,270	54,5	54,5	1,000	0,270	53,0	0,005	0,57	1,5	2,03
		2	-0,175	102,5	48,0	-0,632	-0,174	46,5	0,001	0,06	1,5	3,12
		3	0,115	148,5	46,0	0,443	0,122	44,8	0,007	0,45	1,2	2,61
		4	-0,095	194,5	46,0	-0,350	-0,097	44,8	0,002	0,13	1,2	2,61
		5	0,070	240,5	46,0	0,290	0,080	44,8	0,010	0,63	1,2	2,61
		6	-0,065	286,5	46,0	-0,243	-0,067	44,8	0,002	0,13	1,2	2,61
	Σ								0,028	1,77	7,8	15,99
Valori importante			$D = 0,355$ m $F = 0,099$ m ² $\bar{d} = 0,108$ m $f = 0,009156$ m ²				$S_0 = -5,820$ $T_k = 14,10$ s $ \Delta \bar{x}_j _{\text{mediu}} = 0,004$ m $ \Delta T_j _{\text{mediu}} = 1,5$ s				$100 \frac{ \Delta \bar{x}_j }{\bar{x}_j} _{\text{mediu}} = 0,25$ % $100 \frac{ \Delta T_j }{T_j} _{\text{mediu}} = 2,75$ %	

TABLE Nr.5(140)

Tipul castel	Nr. res.	Nr. niv. ex- tram j	Valori experimentale					Valori teoretice						
			z_j	t_j	T_j	S_j	q_j	z_j	T_j	DIF.ABSOLUTA $ \Delta z_j $	DIF.RELAT. $100 \frac{ \Delta z_j }{z_0}$	DIFER.ABS. DIFER.RELAT. $ \Delta T_j $	$100 \frac{ \Delta T_j }{T_j}$	
			m	Δ	Δ	-	-	m	Δ	m	%	Δ	%	
		0	-1,505	0,0		-2,940		-1,505		0,000	0,00			
		1	0,505	31,0	31,0	0,900	2,90	0,535	30,0	0,030	1,07	1,0	3,22	
		2	-0,295	655,0	34,0	-0,507	3,21	-0,321	33,1	0,026	1,62	0,9	2,85	
BO	2	3	0,130	99,0	34,0	0,234	3,17	0,144	32,8	0,014	0,87	1,2	3,52	
		4	-0,110	153,0	34,0	-0,224	3,17	-0,122	32,8	0,012	0,75	1,2	3,52	
		5	0,095	167,0	34,0	0,195	3,17	0,106	32,8	0,011	0,69	1,2	3,52	
		6	-0,085	201,0	34,0	-0,172	3,17	-0,094	32,8	0,009	0,56	1,2	3,52	
		Σ								0,102	6,36	6,7	19,95	
Valori importante			$l = 0,255$ m	$h = 150,68$ m	$S_0 = -2,940$	$h_T = -0,001, 005$	$T_K = 10,91$ s	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0} / \text{mediu} = 0,91$ %						
			$d = 0,0411$ m ²			$\lambda_0 = 0,005915$		$ \Delta z_j / \text{mediu} = 0,015$ m						
			$\bar{r} = 0,108$ m			$Z_K = 0,546$		$ \Delta T_j / \text{mediu} = 1,1$ s						
			$\bar{r} = 0,009155$ m ²					$100 \frac{ \Delta T_j }{T_j} / \text{mediu} = 3,52$ %						

TABEL Nr.6(144)

Tipul castel	Nr. reg.	Nr. niv. extrem j	Valori experimentale				Valori teoretice							
			z _j		t _j		S _j		T _j		DIFER.ABS.		DIFER.REL.	
			m	Δ	Δ	Δ	—	—	m	Δ	m	Δ	%	%
		0	-1,605	0,0		-1,088				0,000	0,00	0,00		
		1	1,235	14,0	14,0	0,857	2,23	13,7	13,7	0,030	1,87	0,3	2,14	
		2	-0,755	34,5	20,5	-0,540	3,20	19,7	19,7	0,041	2,48	0,8	3,90	
CO	2	3	0,555	55,0	20,5	0,396	3,17	19,55	19,55	0,029	1,81	0,95	4,63	
		4	-0,440	75,5	20,5	-0,319	3,17	19,55	19,55	0,030	1,87	0,95	4,63	
		5	0,360	96,0	20,5	0,263	3,17	19,55	19,55	0,028	1,74	0,95	4,63	
		6	-0,310	116,5	20,5	-0,223	3,17	19,55	19,55	0,020	1,25	0,95	4,63	
		7	0,260	137,0	20,5					0,178	11,22	5,10	24,56	
		8	-0,220	157,5	20,5	Σ								
Valori importante			D = 0,155 m	L = 180,88 m	S ₀ = -1,605									
			F = 0,01886 m ²	h _T = z ₀ = 1,605	T _K = 6,16 s									
			d = 0,108 m	λ _e = 0,03545	Δz _j _{mediu} = 0,025 m									
			f = 0,009156 m ²	Z _K = 1,475	100 Δz _j _{mediu} = 1,61 %									
					100 ΔT _j _{mediu} = 4,09 %									



Reprezentare grafică Nr.2 (37)

F-II-4-1

F.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Capitolul II - INCHIDEREA TOTALA BRUSCA.

UTILIZAREA REZULTATELOR PROPRII

§ 4.- Castele de echilibru perfect pneumatice
(cu camera superioară etansă)

În cadrul acestui paragraf s-au cercetat pe cale experimentală oscilațiile care apar la închiderea bruscă totală în cazul castelelor perfect pneumatice și s-a făcut o comparație cu rezultatele teoretice. S-au utilizat castele având 3 diametri diferiți, notați ca și în cazul castelelor de echilibru simple, în ordinea descrescătoare a diametrilor, cu literele A, B, C. Pentru fiecare diametru s-au realizat câte trei înălțimi de castele, notate în ordine descrescătoare cu cifrele romane I, II, III. Pentru fiecare din aceste castele s-au studiat câte două regimuri de curgere notate cu cifrele arabe 1 și 2.

Rezultă că cercetarea experimentală s-a extins asupra unui număr de $3 \times 3 \times 2 = 18$ variante de oscilații în castele de echilibru. Dimensiunile castelelor utilizate și notarea lor este dată în figura Nr.1(41)

Rezultatele obținute prin măsurători au fost trecute în tabelele Nr.1 (42) pînă la Nr.6 (47) pentru castelele de diametru maxim avînd indicativul A, în tabelele Nr.7 (48) pînă la Nr.12 (53) pentru castelele de echilibru de diametru mediu avînd indicativul B și în tabelele Nr.13 (54) pînă la Nr.18 (59) pentru castelele de echilibru de diametrul minim, avînd indicativul C.

F-II-4-2

Cercetările experimentale au avut drept scop de a face o comparație între unele rezultate teoretice obținute în cadrul tezei și rezultatele determinărilor experimentale pentru un număr cât mai mare de valori ale parametrilor caracteristici, care; așa cum s-a arătat, în cazul castelelor de echilibru parțial pneumatice sînt în număr de trei.

Comparația între rezultatele teoretice și cele experimentale s-a limitat la nivelurile extreme succesive care apar în timpul procesului cvasi oscilatoriu notate \bar{x}_j , pentru care în teză s-a dat și o metodă teoretică de calcul.

De asemenea s-a comparat presiunea din camera superioară etanșă corespunzătoare primului nivel maxim, măsurată pe de o parte cu ajutorul unui manometru și calculată pe de altă parte cu ajutorul legii Boyle-Mariotte. Se constată că transformarea de stare a aerului închis în camera etanșe se apropie mult, la supra-presiunile de sub 0,25 at cu care s-a lucrat, de transformarea izotermă Boyle-Mariotte, ceea ce confirmă ipotezele acceptate în literatură /8-6/.

Aspectul cantitativ al comparației făcute s-a limitat la doi parametri considerați caracteristici și anume diferența absolută și diferența relativă. Diferența absolută a fost exprimată în metri și definită prin formula $|\Delta \bar{x}_j| = |\bar{x}_{jT} - \bar{x}_{jE}|$ în care cu \bar{x}_{jT} s-a notat valoarea nivelului extrem de indice j determinată pe cale teoretică și cu \bar{x}_{jE} s-a notat valoarea nivelului extrem determinată pe cale experimentală.

Diferența relativă a fost exprimată în procente și a fost obținută prin expresia $100 \left| \frac{\Delta \bar{x}_j}{\bar{x}_0} \right|$, în care se observă că s-a utilizat drept mărime de referință denivelarea inițială \bar{x}_0 care, așa ca și în cazul castelelor simple reprezintă o mărime de refe-

F-II-4-3

rință destul de defavorabilă în ceea ce privește diferențele relative.

Din analizarea datelor înscrise în tabele se constată următoarele :

- diferența absolută maximă a fost de $|\Delta z_j|_{\max} = 0,085 \text{ m}$ de două ori mai mare decât diferența absolută maximă în cazul castelelor de echilibru simple.

- diferența absolută crește în general cu creșterea denivelării $|z_0|$, ceea ce este de așteptat.

- diferența absolută medie a fost de :

$$|\Delta z_j|_{\text{med}} = \frac{0,428}{18} = 0,024 \text{ m}$$

de asemenea de două ori mai mare decât diferența absolută maximă în cazul castelelor de echilibru simple.

- diferența relativă maximă a fost de 6,38 %, de asemenea de două ori mai mare decât diferența relativă maximă în cazul castelelor de echilibru simple.

- diferența relativă medie a fost de :

$$100 \left| \frac{\Delta z_j}{z_0} \right| = \frac{47,56}{18} = 2,64 \%$$

de asemenea dublă decât cea corespunzătoare castelelor de echilibru simple.

Deși diferențele între rezultatele teoretice și cele experimentale sînt de două ori mai mari decât în cazul castelelor simple, considerăm că rezultatele experimentale, unicele pe care le cunoaște autorul din literatura de specialitate, verifică în mod satisfăcător rezultatele teoretice. Trebuie ținut cont în explicarea acestor diferențe că fenomenul cvasi oscilatoriu este mult mai complex decât în cazul castelelor simple, că nu se constată

F-II-4-4

nici în acest caz o creștere a diferențelor în timp, că ipotezele de bază sînt mai numeroase, că oscilațiile sînt mult mai rapide ceea ce micșorează precizia citirilor în cadrul cercetărilor experimentale și în fine că oscilațiile se reduc mult în amplitudine.

Un ultim aspect al studiului acestor castele vizează suprapresiunile care apar față de castelele de echilibru simple. Ea indicativi ai acestor suprapresiuni s-a ales în primul rînd diferența absolută notată $|\Delta_j|$ între presiunea corespunzătoare coloanei de apă a castelelor de echilibru simple la nivelul hidrostatic și presiunea, la același nivel și tot măsurată prin înălțimea coloanei de apă în cazul castelelor de echilibru perfect pneumatice. În al doilea rînd s-a ales diferența relativă $100 \left| \frac{\Delta_j}{z_{jcs}} \right|$ în care z_{jcs} este presiunea la nivelul hidrostatic, măsurată cu înălțimea coloanei de apă în cazul castelelor simple.

S-au obținut următoarele valori :

- diferența absolută maximă $|\Delta_j|_{\max} = 2,470 \text{ m col H}_2\text{O}$

- diferența absolută medie :

$$|\Delta_j|_{\text{med}} = \frac{11,834}{18} = 0,657 \text{ m}$$

- diferența absolută crește cu creșterea denivelării inițiale , cu scăderea diametrului castelului de echilibru și cu scăderea volumului de aer aîlat în camera superioară etanșă.

- diferența relativă maximă este de $100 \left| \frac{\Delta_j}{z_{jcs}} \right| = 956\%$

- diferența relativă medie este de

$$100 \left| \frac{\Delta_j}{z_{jcs}} \right|_{\text{med}} = \frac{5548}{18} = 308\%$$

După fiecare tabel conținînd datele măsurate este dată și o reprezentare grafică a cvasi oscilațiilor, punctele corespunzătoare nivelurilor extreme fiind unite cu o linie dreaptă. Pe ace-

F-II-4-5

leși reprezentări grafice s-a dat pentru comparație oscilația nivelului de apă în castelul de echilibru ca și variația presiunii la nivelul hidrostatic, măsurată în m col H_2O pentru a putea fi reprezentată în același grafic. Se constată că deși oscilațiile nivelului de apă se reduc mult în amplitudine comparativ cu castelul de echilibru simplu de același diametru, totuși oscilațiile presiunii, care se transmit la turbină, sînt mult mai mari în amplitudine și mai rapide de aceea regulatorul turbinei va avea condiții mai grele de lucru în cazul unui castel de echilibru perfect pneumatic decît în cazul unui castel de echilibru simplu.

În concluzia acestui paragraf se poate trage concluzia că în cazul castelelor de echilibru perfect pneumatice (cu camera superioară etanșe) rezultatele cercetărilor experimentale au prezentat o concordanță satisfăcătoare cu rezultatele obținute pe cale teoretică.

FIGURA NR.1(11)
CASTELE DE ECHILIBRU PERFECT PNEUMATICE

TIPUL CASTELELOR PNEUMATICE UTILIZATE IN CERCET. EXP.			
DUPA DIAMETRU D. DUPA INALTIMEA COLONEI DE AER h_f	A.	B.	C.
	$D = 0,355 \text{ m.}$	$D = 0,255 \text{ m.}$	$D = 0,155 \text{ m.}$
I-I			
II-II			
III-III			

Tip caz tel	Nr. reg.	Nr. niv. extrem j	Valori experimentale				Valori teoretice			Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale								
			z_j m	t_j Δ	T_j Δ	Δp_j aer	S_j -	Z_j m	DIFERENTA ABSOLUTA RELAT. $ \Delta z_j $ 100	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ aer	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ aer	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ aer	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ aer	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ aer				
		0	-0,455	0,0		0,00	-1,813	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
		1	-0,235	9,5	9,5	0,12	-0,880	0,014	3,08	-0,221	0,014	3,08	0,123	0,995	0,230	0,765	333	
		2	-0,450	27,5	18,0		-1,900	0,027	5,94	-0,477	0,027	5,94	0,003	-0,420	-0,145	0,275	190	
		3	-0,310	45,0	17,5		-1,175	0,015	3,30	-0,295	0,015	3,30	0,078	0,470	0,100	0,370	370	
		4	-0,420	62,0	17,0		-1,732	0,015	3,30	-0,435	0,015	3,30	0,018	-0,240	-0,085	0,155	182	
		5	-0,335	79,0	17,0		-1,266	0,017	3,74	-0,318	0,017	3,74	0,064	0,305	0,065	0,240	370	
		6	-0,405	96,0	17,0		-1,668	0,018	2,86	-0,418	0,018	2,86	0,026	-0,145	-0,055	0,090	164	
		7	-0,350	113,0	17,0								0,055	0,200				
		8	-0,390	130,0	17,0								0,050	-0,050				
		9	-0,360	147,0	17,0								0,050	0,140				
		10	-0,380	164,0	17,0								0,037	-0,010				
		11	-0,365	181,0	17,0								0,047	0,105				
		Σ						0,101	22,22								1,895	1609
Valori importante			$D = 0,355 \text{ m}$ $F = 0,099 \text{ m}^2$ $d = 0,108 \text{ m}$ $f = 0,009156 \text{ m}^2$ $L = 180,88 \text{ m}$				$\rho_r = -z_0 = 0,456 \text{ m}$ $\lambda_e = 0,0399$ $Z^* = 0,251 \text{ m}$ $T^* = 14,10 \Delta$			$\gamma_0 = -1,813$ $\delta = 6,180$ $\mu = 41,2$ $S_{\infty} = -1480$ $Z_{\infty} = -0,372 \text{ m}$			$\gamma = 7,66$ $\gamma_0 = -0,333$ $\rho_0 = -0,317$ $\rho_F = 1549 \text{ m}$			$ \Delta z_j _{\text{mediu}} = 0,014 \text{ m}$ $100 \frac{ \Delta z_j }{z_0} = 3,17\%$ $ \Delta p_j _{\text{mediu}} = 0,274 \text{ m}$ $100 \frac{ \Delta p_j }{z_j \cdot g} = 230\%$		

Tip cas- tel	Nr. niv. cadr. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale							
		z_j m	k_j Δ	T_j Δ	Δp_j aer Pa	S_j m	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ %	$\frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ m	$z_j + \frac{\Delta p_j}{\rho \cdot g}$ m	z_j CASTEL SIMPLU m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_j} \right $ %				
	0	-1,605	0,0		0,00	-5,820	-1,605	0,000	0,00	-1,605	-1,605	0,000	000				
	1	-1,065	11,0	11,0	0,23	-3,672	-1,015	0,050	3,12	1,255	0,270	0,985	365				
	2	-1,365	29,5	18,5		-5,128	-1,418	0,053	3,30	-0,455	-0,175	0,280	160				
	3	-1,180	47,0	17,5		-4,166	-1,150	0,030	1,87	0,560	0,115	0,445	387				
	4	-1,315	64,0	17,0		-4,894	-1,350	0,035	2,18	-0,185	-0,095	0,090	95				
AI	5	-1,210	81,0	17,0		-4,304	-1,190	0,020	1,25	0,390	0,070	0,320	457				
	6	-1,300	98,0	17,0		-4,792	-1,321	0,021	1,51	-0,110	-0,065	0,045	70				
	7	-1,230	115,0	17,0						0,151							
	8	-1,285	132,0	17,0						0,126							
	9	-1,245	149,0	17,0						0,144							
	10	-1,280	166,0	17,0						0,127							
	11	-1,255	183,0	17,0						0,139							
	Σ												2.165				
Valori importante		$D = 0,555 \text{ m}$ $F = 0,099 \text{ m}^2$ $d = 0,108 \text{ m}$ $f = 0,009156 \text{ m}^2$ $L = 180,88 \text{ m}$				$S_0 = -z_0 = 1,605 \text{ m}$ $\lambda_2 = 0,03545$ $Z_* = 0,276 \text{ m}$ $T_* = 14,10 \Delta$				$\gamma = 10,18$ $\gamma_0 = -1,25$ $\rho_0 = -1,382$ $\rho_{TF} = 1,549 \text{ m}$				$ \Delta z_j _{med} = 0,1030 \text{ m}$ $100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{med} = 1,86\%$ $ \Delta z_j _{med} = 0,309 \text{ m}$ $100 \left \frac{\Delta z_j}{z_j} \right _{med} = 2,19\%$			

Tip cas- tel	Nr. reg. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale			
		z_j m	k_j Δ	T_j Δ	Δp_j aer	φ_j -	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$\frac{ \Delta z_j }{z_0} \cdot 100$ %	Δp_j aer	$\frac{\Delta p_j}{z_j + \delta_{aer}}$ m	z_j cs CASTEL SIMPLU	$\frac{ \Delta z_j \cdot 100}{z_j \cdot \delta_{cs}}$ %
	0	-0,455	0,0		0,00	-1,813	-0,455	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	000
	1	-0,350	7,0	7,0	0,18	-1,325	-0,332	0,018	5,96	0,175	0,230	1,170	509
	2	-0,480	21,0	14,0		-2,006	-0,502	0,022	4,83	-0,034	-0,720	0,575	397
	3	-0,375	34,5	13,5		-1,446	-0,362	0,013	2,86	0,128	0,100	0,805	805
	4	-0,460	47,5	13,0		-1,917	-0,481	0,021	4,62	-0,007	-0,530	0,445	524
	5	-0,390	60,5	13,0		-1,512	-0,380	0,010	2,20	0,102	0,065	0,565	870
	6	-0,450	73,5	13,0		-1,867	-0,468	0,018	3,96	0,007	-0,380	0,225	410
	7	-0,405	86,5	13,0						0,075	0,345		
	8	-0,440	99,5	13,0						0,022	-0,220		
	9	-0,415	112,5	13,0						0,060	0,185		
	10	-0,435	125,5	13,0						0,029	-0,145		
	11	-0,420	138,5	13,0						0,052	0,100		
	Σ								0,102	22,43	3,865	3,865	3515
Valori importante		$D = 0,355 \text{ m}$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_r = -z_0 = 0,455 \text{ m}$
		$F = 0,099 \text{ m}^2$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_* = 0,251 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_* = 0,251 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$
		$d = 0,180 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$T_* = 14,10 \text{ A}$	$\lambda_e = 0,10399$	$T_* = 14,10 \text{ A}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$
		$f = 0,009156 \text{ m}^2$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_{\infty} = -1,170$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_{\infty} = -1,170$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$
		$L = 100,88 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_{\infty} = -0,427 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$Z_{\infty} = -0,427 \text{ m}$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$
			$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$	$\lambda_e = 0,10399$

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			Z_j	f_j	T_j	A_{pj} acc	S_j	Z_j	$ Δz_j $	$100 \frac{ Δz_j }{z_0}$	$\frac{Δp_j}{a_{af}}$	Z_{jcs} CASTEL SIMPLU	$\frac{ Δj - z_{jcs} }{(z_j + \gamma)}$	$100 \frac{ Δj }{z_{jcs}}$	
			ml	l	l	part	ml	ml	ml	part	ml	ml	ml	%	
		0	-1,605	0,0		0,00	-5,820	-1,605	0,000	0,00	0,000	-1,605	0,000	000	
		1	-1,200	9,5	9,5	0,28	-4,197	-1,158	0,042	2,62	0,279	1,590	0,270	1,320	
		2	-1,475	24,5	15,0		-5,527	-1,525	0,050	3,12	0,075	-0,725	-0,175	0,550	
		3	-1,290	38,0	13,5		-4,618	-1,275	0,015	0,94	0,205	0,760	0,115	0,645	
		4	-1,435	51,0	13,0		-5,319	-1,470	0,035	2,18	0,101	-0,425	-0,095	0,330	
		5	-1,310	64,0	13,0		-4,745	-1,310	0,000	0,00	0,189	0,580	0,070	0,510	
		6	-1,415	77,0	13,0		-5,225	-1,540	0,025	1,56	0,114	-0,275	-0,065	0,210	
		7	-1,325	90,0	13,0						0,178	0,455			
		8	-1,405	103,0	13,0						0,121	-0,195			
		9	-1,340	116,0	13,0						0,167	0,330			
		10	-1,395	129,0	13,0						0,128	-0,115			
		11	-1,355	142,0	13,0						0,156	0,205			
		Σ							0,157	1042				3,565	
Valori importante			<p> $D = 0,355 \text{ ml}$ $f_r = -z_0 = 1,605 \text{ ml}$ $\gamma_0 = -5,820$ $\gamma = 5,805$ $Δz_j _{med} = 0,022 \text{ ml}$ $F = 0,099 \text{ m}^2$ $\lambda_e = 0,03545$ $\delta = 0,905$ $\gamma_0 = -0,815$ $100 \frac{ Δz_j }{z_0} _{med} = 1,49\%$ $d = 0,108 \text{ ml}$ $Z_* = 0,276 \text{ ml}$ $\mu = 36,20$ $\gamma_0 = -0,843$ $Δj _{med} = 0,509 \text{ ml}$ $f = 0,009156 \text{ m}^2$ $T_* = 14,104$ $S_{00} = 5,005$ $f_p = 0,250 \text{ ml}$ $100 \frac{ Δj }{z_{jcs}} _{med} = 395\%$ $L = 180,88 \text{ ml}$ $z_{00} = -1,381 \text{ ml}$ </p>												

TABEL Nr. 6 (1977)

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			\bar{x}_j	t_j	T_j	Δp_j aer	S_j	\bar{z}_j	$ \Delta \bar{z}_j $	$ \Delta \bar{z}_j $ 100 $ \bar{z}_0 $	Δp_j aer	$\frac{\Delta p_j \text{ aer}}{\bar{z}_j + \delta \text{ aer}}$	\bar{z}_j cs CASTEL SIMPLU	$ \Delta \bar{z}_j = \bar{z}_j \text{ cs} - \bar{z}_j $ $-\frac{\Delta p_j}{\bar{z}_j + \delta}$	$100 \frac{ \Delta \bar{z}_j }{ \bar{z}_j \text{ cs} }$
			m	s	s	pat	m	m	m	pat	m	m	m	m	%
		0	-1,605	0,0		0,00	-5,820	-1,605	0,000	0,00	0,000	-1,605	0,000	0,000	000
		1	-1,240	9,0	9,0	0,27	-4,269	-1,179	0,061	3,80	0,271	1,470	0,270	1,200	444
		2	-1,500	22,5	13,5		-5,575	-1,539	0,039	2,43	0,065	-0,850	-0,175	0,675	386
		3	-1,340	35,5	13,0		-4,678	-1,292	0,048	2,99	0,184	0,500	0,115	0,385	334
		4	-1,460	48,0	12,5		-5,372	-1,481	0,021	1,31	0,092	-0,540	-0,095	0,445	468
		5	-1,355	60,5	12,5		-4,802	-1,328	0,027	1,68	0,171	0,355	0,070	0,285	408
		6	-1,445	73,0	12,5		-5,280	-1,458	0,013	0,81	0,103	-0,415	-0,065	0,350	539
		7	-1,370	85,5	12,5						0,159	0,220			
		8	-1,430	98,0	12,5						0,152	-0,290			
		9	-1,380	110,5	12,5						0,114	0,140			
		10	-1,415	123,0	12,5						0,125	-0,165			
		11	-1,385	135,5	12,5						0,148	0,095			
		Σ												3,340	12579
Valori importante			$D = 0,355 \text{ mL}$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$	$\lambda_T = -\bar{z}_0 = 1,605$	$\lambda_e = 0,103545$
			$F = 0,1099 \text{ mL}^2$	$Z^* = 0,276 \text{ mL}$	$T^* = 14,10 \text{ s}$	$\gamma_0 = -5,820$	$\delta = 0,381$	$\mu = 36,20$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$
			$d = 0,108 \text{ mL}$	$Z^* = 0,276 \text{ mL}$	$T^* = 14,10 \text{ s}$	$\gamma_0 = -5,820$	$\delta = 0,381$	$\mu = 36,20$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$
			$f = 0,009156 \text{ mL}^2$	$Z^* = 0,276 \text{ mL}$	$T^* = 14,10 \text{ s}$	$\gamma_0 = -5,820$	$\delta = 0,381$	$\mu = 36,20$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$
			$L = 180,80 \text{ mL}$	$Z^* = 0,276 \text{ mL}$	$T^* = 14,10 \text{ s}$	$\gamma_0 = -5,820$	$\delta = 0,381$	$\mu = 36,20$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$	$\lambda_F = 0,105 \text{ mL}$

TABEL NR. 7 (170)

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale					
			\bar{x}_j	t_j	T_j	Δp_j	S_j	\bar{x}_j	$ \Delta \bar{x}_j $	$100 \frac{ \Delta \bar{x}_j }{\bar{x}_0}$	Δp_j	$\frac{\Delta p_j}{\bar{x}_j + \bar{x}_{jcs}}$	\bar{x}_j	$\frac{ \Delta \bar{x}_j - \bar{x}_{jcs} }{\bar{x}_j + \bar{x}_{jcs}}$	$100 \frac{ \Delta \bar{x}_j - \bar{x}_{jcs} }{\bar{x}_j + \bar{x}_{jcs}}$	
			mm	Δ	Δ	part	—	mm	mm	%	part	mm	mm	mm	mm	%
BI		0	-0,455	0,0		0,00	-0,937	-0,455	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	0,000	0,000	000
		1	-0,155	7,5	7,5	0,15	-0,280	-0,136	0,019	4,18	0,153	1,375	0,402	0,973	242	242
		2	-0,535	21,5	14,0		-1,144	-0,555	0,020	4,40	0,034	-0,875	0,257	0,618	241	241
		3	-0,240	35,0	13,5		-0,464	-0,225	0,015	3,30	0,105	0,810	0,189	0,621	328	328
		4	-0,480	48,0	13,0		-1,021	-0,495	0,015	3,30	0,011	-0,590	0,153	0,437	285	285
		5	-0,280	61,0	13,0		-0,555	-0,269	0,011	2,42	0,084	0,560	0,126	0,434	344	344
		6	-0,455	74,0	13,0		-0,958	-0,465	0,010	2,20	0,000	-0,455	0,108	0,347	322	322
		7	-0,310	87,0	13,0						0,069	0,380				
		8	-0,435	100,0	13,0						0,009	-0,345				
		9	-0,330	113,0	13,0						0,059	0,260				
		10	-0,420	126,0	13,0						0,016	-0,260				
		11	-0,340	139,0	13,0						0,054	0,200				
		\bar{x}_0									0,090	19,80			3,430	1762
Valori importante			$D = 0,255 \text{ mm}$	$t_{cr} = -\bar{x}_0 = 0,455 \text{ mm}$	$S_0 = -0,937$	$ \Delta \bar{x}_j _{med} = 0,013 \text{ mm}$										
			$F = 0,0511 \text{ mm}^2$	$\lambda_e = 0,0399$	$\bar{\sigma} = 3,72$	$100 \frac{ \Delta \bar{x}_j }{\bar{x}_0} _{med} = 2,83\%$										
			$d = 0,108 \text{ mm}$	$Z_* = 0,485 \text{ mm}$	$\mu = 21,25$	$ \Delta \bar{x}_j _{med} = 0,490 \text{ mm}$										
			$f = 0,009156 \text{ mm}^2$	$T_* = 10,31 \Delta$	$S_{00} = -0,183$	$100 \frac{ \Delta \bar{x}_j }{\bar{x}_j + \bar{x}_{jcs}} _{med} = 2,52\%$										
			$L = 180,68 \text{ mm}$		$\bar{x}_{00} = 1,801 \text{ mm}$											

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice			Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale						
			z_j	k_j	T_j	Δp_j aer	S_j	z_j	$ \Delta z_j $	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0}$	Δp_j aer	$\frac{\Delta p_{j,aer}}{z_j + \frac{\Delta p_{j,aer}}{v}}$	z_j cs CASTEL SIMPLU	$ \Delta z_j z_{j,cs}$ $-(z_j + \frac{\Delta p_{j,aer}}{v})$	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_{j,cs}}$	
			m	Δ	Δ	pați	m	m	%	pați	m	m	m	m	%	
		0	-1,605	0,0		0,00	-2,940	-1,605	0,00	0,00	0,000	-1,605	0,000	0,000	000	
		1	-0,795	8,5	8,5	0,31	-1,398	-0,765	0,030	1,87	0,312	2,325	0,505	1,820	360	
		2	-1,500	22,5	14,5		-2,817	-1,535	0,035	2,18	0,032	-1,180	0,295	0,885	300	
		3	-1,035	36,0	13,5		-1,870	-1,020	0,015	0,94	0,201	0,975	0,130	0,845	650	
		4	-1,390	49,0	13,0		-2,591	-1,412	0,022	1,37	0,058	-0,710	0,110	0,600	545	
		5	-1,105	62,0	13,0		-2,006	-1,095	0,010	0,62	0,172	0,615	0,095	0,520	547	
	2	6	-1,345	75,0	13,0		-2,492	-1,360	0,015	0,94	0,082	-0,515	0,085	0,430	506	
		7	-1,165	88,0	13,0						0,148	0,315				
		8	-1,305	101	13,0						0,097	-0,335				
		9	-1,200	114	13,0						0,135	0,150				
		10	-1,275	127	13,0						0,132	-0,205				
		11	-1,210	140	13,0						0,131	0,100				
		Σ							0,127	7,92				5,120	2908	
Valori importante			$D = 0,1255 \text{ m}$	$h_r = -z_0 = 1,605 \text{ m}$	$\gamma_0 = -2,940$	$\chi = 5,57$	$ \Delta z_j _{med} = 0,018 \text{ m}$									
			$F = 0,0541 \text{ m}^2$	$\lambda_c = 0,03545$	$\delta = 3,20$	$\psi_0 = -0,670$	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0} _{med} = 1,13\%$									
			$d = 0,108 \text{ m}$	$Z_* = 0,545 \text{ m}$	$\mu = 18,92$	$\tau_0 = -1,184$	$ \Delta z_j _{med} = 0,1731 \text{ m}$									
			$f = 9009156 \text{ m}^2$	$T_* = 10,731 \Delta$	$S_{\infty} = -2,270$	$h_F = 1,801 \text{ m}$	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_{j,cs}} _{med} = 415\%$									
			$L = 189,88 \text{ m}$		$z_{\infty} = -1,240$											

TABEL Nr. 9 (150)

Tip cas-tol	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale											
			t_j	T_j	Δp_j aer	S_j	Z_j	$ \Delta Z_j $	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0}$	$\frac{\Delta p_j}{\rho g Z_j}$	$\frac{\Delta p_j}{\rho g Z_j}$	$\frac{ \Delta p_j }{\rho g Z_j}$	$100 \frac{ \Delta p_j }{\rho g Z_j}$									
		0	-0,455	0,0	0,00	-0,937	-0,455	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	0,000	000								
		1	-0,250	5,5	0,20	-0,481	-0,233	0,017	3,74	0,196	1,710	0,402	1,308	326								
		2	-0,525	17,5		-1,126	-0,546	0,021	4,62	-0,053	-1,055	-0,257	0,798	311								
		3	-0,295	29,0		-0,590	-0,286	0,009	1,98	0,147	1,175	0,169	0,986	521								
		4	-0,490	40,5		-1,043	-0,506	0,016	3,52	-0,027	-0,760	-0,153	0,607	396								
		5	-0,325	52,0		-0,651	-0,316	0,009	1,98	0,116	0,835	0,126	0,709	562								
		6	-0,465	63,5		-0,996	-0,483	0,012	3,96	-0,008	-0,545	-0,108	0,437	404								
		7	-0,350	75,0						0,092	0,570											
		8	-0,445	86,5						0,008	-0,365											
		9	-0,370	98,0						0,073	0,360											
		10	-0,570	109,5						0,021	-0,220											
		11	-0,385	121,0						0,060	0,215											
									0,090	1,9,80			4,945	2520								
Valori importante			$D = 0,1250 \text{ m}$ $F = 0,0511 \text{ m}^2$ $d = 0,100 \text{ m}$ $f = 0,009156 \text{ m}^2$ $L = 100,00 \text{ m}$				$h_r = -Z_0 = 0,455 \text{ m}$ $h_e = 0,0399$ $Z_{*} = 0,485 \text{ m}$ $T_{*} = 10,31 \text{ s}$				$S_0 = -0,937$ $\delta = 1,636$ $\mu = 2,125$ $S_{00} = -0,834$ $Z_{*0} = -0,405 \text{ m}$				$\chi = 2,470$ $\psi_0 = -0,103$ $\epsilon_0 = -0,002$ $h_e = 0,1795 \text{ m}$				$ \Delta Z_j _{\text{med}} = 0,013 \text{ m}$ $100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0} _{\text{med}} = 2,03\%$ $ \Delta p_j _{\text{med}} = 0,692 \text{ m}$ $100 \frac{ \Delta p_j }{\rho g Z_j} _{\text{med}} = 3,60\%$			

TABEL Nr. 10 (151)

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			Δz_j	t_j	T_j	ΔP_j aer	S_j	Z_j	$ \Delta Z_j $	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0}$	ΔP_j aer	$\frac{\Delta P_{aer}}{Z_j + r_{apa}}$	Z_j CASTEL SIMPLU	$10 \frac{ \Delta z_j }{Z_j}$	
			m	s	s	Pat	m	m	%	Pat	m	m	m	%	
		0	-1,605	0,0		0,00	-2,940	-1,605	0,000	0,00	-1,605	-1,605	0,000	000	
		1	-1,000	7,5	7,5	0,34	-1,739	-0,947	0,053	3,30	2,370	0,505	1,865	369	
		2	-1,530	19,5	12,0		-2,915	-1,588	0,058	3,62	-1,210	-0,295	0,915	310	
		3	-1,165	31,5	12,0		-2,074	-1,130	0,035	2,18	1,075	0,130	0,945	727	
		4	-1,450	43,0	11,5		-2,740	-1,495	0,045	2,80	-0,760	-0,110	0,550	591	
		5	-1,185	54,5	11,5		-2,190	-1,192	0,007	0,44	0,212	0,095	0,840	884	
		6	-1,405	66,0	11,5		-2,654	-1,445	0,040	2,42	0,091	-0,495	0,410	482	
		7	-1,205	77,5	11,5						0,200	0,795			
		8	-1,385	89,0	11,5						0,099	-0,395			
		9	-1,220	100,5	11,5						0,101	0,690			
		10	-1,370	112,0	11,5						0,100	-0,290			
		11	-1,235	123,5	11,5						0,182	0,585			
		Σ							0,238	14,76			5,625	3363	
Valori importante			D = 0,255 m	$h_f = -Z_0 = 1,605$ m	$S_0 = -2,940$	$\chi = 3,90$	$ \Delta Z_j _{mediu} = 0,034$ m								
			F = 0,0511 m ²	$\lambda_e = 0,03545$	$d = 1,460$	$\psi_0 = -0,410$	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0} _{mediu} = 2,11\%$								
			d = 0,106 m	$Z_* = 0,545$ m	$\mu = 18,92$	$\beta_0 = -0,505$	$ \Delta z_j _{mediu} = 0,804$ m								
			f = 0,009156 m ²	$T_x = 10,31$	$S_0 = -2440$	$h_f = 0,795$									
			L = 180,88 m		$Z_{00} = -1330$ m		$100 \frac{ \Delta z_j }{Z_j} _{mediu} = 481\%$								

TABEL Nr. 14 (152)

Tip cas-cel	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
		z_j m	t_j s	T_j s	ΔP_j aer	S_j -	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ %	ΔP_j aer	z_j CASTEL SIMPLU m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_j} \right $ %		
	0	-0,455	0,0		0,00	-0,937	-0,455	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	000	
	1	-0,370	4,0	4,0	0,13	-0,741	-0,360	0,010	2,20	0,128	0,910	0,408	2,508	
	2	-0,465	15,5	11,0		-1,000	-0,485	0,020	4,40	-0,013	-0,595	-0,257	0,338	
	3	-0,385	26,5	11,0		-0,761	-0,369	0,016	3,52	0,103	0,645	0,189	0,456	
	4	-0,455	37,5	11,0		-0,983	-0,476	0,021	4,52	0,000	-0,455	-0,153	0,302	
	5	-0,390	48,5	11,0		-0,777	-0,377	0,013	2,86	0,095	0,560	0,126	0,434	
	6	-0,445	59,5	11,0		-0,969	-0,470	0,025	5,50	0,013	-0,315	-0,108	0,207	
	7	-0,395	70,5	11,0						0,087	0,475			
	8	-0,440	81,5	11,0						0,020	-0,240			
	9	-0,400	92,5	11,0						0,079	0,390			
	10	-0,435	103,5	11,0						0,027	-0,165			
	11	-0,405	114,5	11,0						0,071	0,305			
	Σ												2,245	
Valori importante		D = 0,255 m	$h_r = -Z_0 = 0,485$ m	$S_0 = -0,937$	$\lambda_e = 0,0399$	$\lambda = 1,033$	Δz_j mediu = 0,015 m							
		F = 0,0511 m ²	$\lambda_e = 0,0399$	$d = 0,608$	$\psi_0 = -0,061$	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ mediu = 3,30%								
		d = 0,108 m	$Z_x = 0,485$ m	$\mu = 21,25$	$\psi_0 = -0,010$	$ \Delta z_j $ mediu = 0,321 m								
		f = 0,009166 m ²	$T_x = 10,31$	$S_{\infty} = -0,876$	$h_r = 0,295$ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_{jcs}} \right = 176\%$								
		L = 160,88 m		$Z_{\infty} = -0,425$										

TABEL Nr. 12 (153)

Tip cas-cab	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale			Valori teoretice			Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale						
			z_j m	t_j s	T_j s	ΔP_j aer	S_j -	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0}$ %	ΔP_j aer	$z_j + \frac{\Delta P_j}{\gamma_{apa}}$ m	z_{jes} CASTEL SIMPLU m	$ \Delta j = z_{jes} - (z_j + \frac{\Delta P_j}{\gamma})$ m	$100 \frac{ \Delta j }{z_{jes}}$ %
		0	-1,605	0,0		0,00	-2,940	-1,605	0,000	0,00	0,000	-1,605	0,000	0,000	000
		1	-1,095	6,5	6,5	0,37	-1,895	-1,032	0,063	3,92	0,367	2,575	2,070	410	
		2	-1,570	18,0	11,5		-2,974	-1,620	0,050	3,12	0,019	-1,380	1,085	368	
		3	-1,215	29,0	11,0		-2,182	-1,190	0,025	1,55	0,258	1,365	1,235	950	
		4	-1,465	40,0	11,0		-2,818	-1,535	0,070	4,36	0,080	-0,665	0,555	499	
	2	5	-1,255	51,0	11,0		-2,288	-1,301	0,046	2,87	0,226	1,005	0,910	956	
		6	-1,415	62,0	11,0		-2,750	-1,500	0,085	5,30	0,111	-0,305	0,220	259	
		7	-1,285	73,0	11,0						0,202	0,735			
		8	-1,400	84,0	11,0						0,121	-0,190			
		9	-1,320	95,0	11,0						0,175	0,440			
		10	-1,390	106,0	11,0						0,128	-0,110			
		11	-1,340	117,0	11,0						0,162	0,280			
		Σ													
Valori importante			$D = 0,255$ m	$b_f = -z_0 = 1,605$ m	$\chi = 3,07$	Δz_j mediu = 0,049 m									
			$F = 0,0541$ m ²	$\lambda_e = 0,03545$	$\sigma = 0,54$	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0}$ mediu = 3,02%									
			$d = 0,108$ m	$Z_x = 0,545$ m	$\mu = 0,41$										
			$f = 0,009156$ m ²	$T_x = 10,31$ s	$S_w = -2,530$	$ \Delta j $ mediu = 0,868 m									
			$L = 160,88$ m		$Z_w = -1,380$ m	$100 \frac{ \Delta j }{z_{jes}}$ mediu = 4,92%									

TABEL Nr. 13 (154)

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			z_j m	t_j s	T_j Pat	ΔP_j aer	S_j m	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ %	ΔP_j aer	$\frac{\Delta P_{aer}}{z_j + \frac{\Delta P_j}{r}}$ m	z_{jcs} CASTEL SIMPLU m	$ \Delta j = z_{jcs} - z_j $ m	$100 \left \frac{\Delta j}{z_{jcs}} \right $ %
OI	1	0	-0,455	0,0	0,00	0,00	-0,347	0,000	0,00	0,000	-0,455	-0,455	0,000	0,000	0,000
		1	-0,050	6,0	0,22	0,22	-0,053	0,020	4,40	0,218	2,130	0,300	1,330	1,330	167
		2	-0,620	15,0			-0,489	0,021	4,62	-0,069	-1,310	-0,560	0,750	134	
		3	-0,155	23,5			-0,109	0,012	2,64	0,155	1,395	0,440	0,955	217	
		4	-0,565	32,0			-0,446	0,020	4,40	-0,047	-1,035	-0,360	0,675	188	
		5	-0,195	40,5			-0,143	0,010	2,20	0,132	1,125	0,305	0,820	269	
		6	-0,535	49,0			-0,419	0,015	3,30	-0,035	-0,885	-0,265	0,620	234	
		7	-0,230	57,5						0,112	0,890				
		8	-0,505	66,0						-0,022	-0,725				
		9	-0,260	74,5						0,096	0,700				
		10	-0,475	83,0						-0,009	-0,565				
11	-0,285	91,5						0,082	0,535						
Valori importante			$\Pi = 0,155$ m	$h_r = -z_0 = 0,455$ m	$S_0 = -0,347$	$\chi = 1,645$	$ \Delta z_j _{mediu} = 0,014$ m	$5,150$	$1,209$						
			$F = 0,01686$ m ²	$\lambda_e = 0,0399$	$\sigma = 1,358$	$\psi_0 = -0,060$	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{mediu} = 3,08$ %								
			$d = 0,108$ m	$Z_K = 1,312$ m	$\mu = 7,87$	$\xi_0 = -0,0324$									
			$\beta = 0,009156$ m ²	$T_K = 6,16$ s	$S_{00} = -0,287$	$h_F = 1,782$ m									
			$L = 160,88$ m		$z_{\infty} = -0,376$ m										

TABEL NR. 14 (155)

Tip cose- tel	Nr. reg. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
		x_j m	t_j s	T_j s	ΔP_j aer	S_j m	z_j m	$ \Delta z_j $ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ %	ΔP_j aer	$z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho \cdot g}$ m	z_{jcs} CASTEL SIMPLU m	$ \Delta j = z_j - z_{jcs} $ m	$100 \left \frac{\Delta j}{z_{jcs}} \right $ %
					P_{at}									
	0	-1,605	0,0		0,00	-1,088	-1,605	0,000	0,00	0,000	-1,605	0,000	0,000	000
	1	-0,600	7,0	7,0	0,42	-0,367	-0,540	0,060	3,74	0,420	3,600	2,365	2,365	193
	2	-1,840	16,0	9,0		-1,205	-1,775	0,065	4,05	-0,065	-2,490	1,735	1,735	230
	3	-0,895	24,5	8,5		-0,540	-0,797	0,038	2,37	0,295	2,115	1,560	1,560	201
	4	-1,645	33,0	8,5		-1,090	-1,610	0,035	2,22	-0,009	-1,135	1,295	1,295	294
	5	-0,895	41,5	8,5		-0,628	-0,925	0,029	1,91	0,086	+1,165	1,405	1,405	390
	6	-1,540	50,0	8,5		-1,028	-1,515	0,025	1,56	0,020	-1,340	1,030	1,030	332
	7	-0,960	58,5	8,5						0,235	1,390			
	8	-1,460	67,0	8,5						0,175	0,650			
	9	-1,100	75,5	8,5						0,045	-1,010			
	10	-1,405	84,0	8,5						0,063	-0,770			
	11	-1,165	92,5	6,5						0,149	0,325			
	Σ													
Valori importante		$D = 0,155$ m	$h_T = z_0 = 1,605$ m	$S_0 = -1,088$	$\chi = 2,05$	$ \Delta z_j _{mediu} = 0,036$ m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{mediu} = 2,25\%$	$\sigma = 1,21$	$\psi_0 = -0,248$	$z_0 = -0,1675$	$h_F = 1,782$ m	$100 \left \frac{\Delta j}{z_{jcs}} \right = 246\%$		
		$F = 0,01886$ m ²	$\lambda_e = 0,03545$	$\mu = 7,01$	$S_\infty = -0,840$			$Z^* = 0,03545$						
		$d = 0,108$ m	$Z^* = 1,475$ m	$Z_\infty = -1,240$ m										
		$f = 0,009156$ m ²	$T^* = 6,16$ s											
		$L = 180,88$ m												

TABEL Nr. 15 (156)

Tip cas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			Z_j	t_j	T_j	ΔP_j aer	S_j	Z_j	$ \Delta Z_j $	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0}$	ΔP_j aer	$Z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho_{aer}}$	Z_{jcs} CASTEL SIMPLU	$ \Delta_j = Z_{jcs} - (Z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho}) $	$100 \frac{ \Delta_j }{Z_{jcs}}$
			m	s	s	Pat	m	m	%	Pat	m	m	m	%	
		0	-0,455	0,0		0,00	-0,347	-0,455	0,00	0,000	0,000	-0,455	0,000	000	
		1	-0,190	5,0	5,0	0,19	-0,136	-0,178	2,64	0,189	1,700	0,800	0,900	113	
		2	-0,560	13,5	8,5		-0,448	-0,588	6,15	-0,059	-1,150	-0,560	0,590	105	
		3	-0,230	21,5	8,0		-0,166	-0,218	2,64	0,156	1,330	0,440	0,690	202	
		4	-0,525	29,5	8,0		-0,422	-0,554	6,38	-0,040	-0,925	-0,560	0,565	157	
		5	-0,245	37,5	8,0		-0,176	-0,271	3,08	0,144	1,195	0,505	0,690	272	
		6	-0,505	45,5	8,0		-0,406	-0,534	6,38	-0,029	-0,795	-0,265	0,530	200	
		7	-0,260	53,5	8,0					0,132	1,060				
		8	-0,470	61,5	8,0					-0,020	-0,690				
		9	-0,275	69,5	8,0					0,121	0,935				
		10	-0,475	77,5	8,0					-0,012	-0,595				
		11	-0,290	85,5	8,0					0,110	0,810				
		Σ													
Valori importante			$U = 0,155$ m	$h_{re} = Z_0 = 0,455$ m	$S_0 = -0,347$	$\chi = 1,286$	$ \Delta Z_j _{mediu} = 0,018$ m	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0} = 3,90\%$							
			$F = 0,01886$ m ²	$\lambda_e = 0,0399$	$\sigma = 0,926$	$\psi_0 = -0,047$									
			$d = 0,108$ m	$Z_x = 4,312$ m	$\mu = 7,87$	$\psi_0 = -0,045$									
			$f = 0,009156$ m ²	$T_x = 6,16$ s	$S_0 = -0,300$	$h_F = 4,216$ m									
			$L = 180,88$ m		$Z_0 = -0,394$	$100 \frac{ \Delta_j }{Z_{jcs}} = 150\%$									

TABEL NR. 16 (157)

Tip cas-cel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice			Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			z_j m	t_j s	T_j s	ΔP_j aer Pat	S_j m	z_j m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right $ %	ΔP_j aer Pat	$\frac{\Delta P_j}{z_j + P_{aer}}$ m	z_{jcs} CASTEL SIMPLU m	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_{jcs}} \right $ %	
		0	-1,605	0,0		0,00	-1,088	-1,605	0,000	0,00	-1,605	0,000	000	
		1	-0,740	5,5	5,5	0,45	-0,470	-0,694	0,046	2,97	3,680	0,442	1,235	193
		2	-1,700	14,0	8,5		-1,201	-1,771	0,071	4,43	-2,020	-0,032	-0,755	153
		3	-0,935	22,0	8,0		-0,609	-0,899	0,036	2,24	2,185	0,312	0,555	230
		4	-1,575	30,0	8,0		-1,102	-1,030	0,055	3,42	-1,455	0,012	-0,440	230
	2	5	-1,030	38,0	0,0		-0,680	-1,002	0,028	1,75	1,530	0,296	0,350	325
		6	-1,505	45,0	0,0		-1,050	-1,345	0,040	2,43	-1,125	0,030	-0,310	263
		7	-1,100	54,0	0,0						1,080	0,216		
		8	-1,445	62,0	0,0						-0,845	0,060		
		9	-1,150	70,0	0,0						0,770	0,122		
		10	-1,400	78,0	0,0						-0,620	0,078		
		11	-1,180	86,0	0,0						0,590	0,177		
		Σ												
Valori importante			$U = 0,155$ m	$h_T = -z_0 = 1,605$ m	$S_0 = -1,088$	$\chi = 1,70$	$\Delta z_j _{mediu} = 0,040$ m							
			$F = 0,01886$ m ²	$\lambda_e = 0,03545$	$\delta = 0,824$	$\psi_0 = -0,212$	$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_0} \right _{mediu} = 2,46\%$							
			$d = 0,108$ m	$Z_x = 1,475$ m	$\mu = 7,01$	$\psi_0 = -0,415$	$ \Delta z_j _{mediu} = 1,181$ m							
			$f = 0,009156$ m ²	$T_x = 6,16$ s	$S_{\infty} = -0,876$	$h_F = 1,216$ m								
			$L = 180,88$ m		$Z_{\infty} = -1,291$ m		$100 \left \frac{\Delta z_j}{z_{jcs}} \right = 240\%$							

TABEL Nr. 17 (158)

Tip pas-tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale			
			Z_j m	b_j s	T_j s	ΔP_j aer	S_j -	Z_j m	$ \Delta Z_j $ m	$100 \frac{ \Delta Z_j }{S_0}$ %	ΔP_j aer	$Z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho g}$ m	Z_{jcs} CASTEL SIMPLU m	$ \Delta j = Z_j - (Z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho g})$ m
		0	-0,455	0,0		0,00	-0,547	-0,455	0,000	0,00	0,000	-0,455	0,000	000
		1	-0,280	4,5	4,5	0,19	-0,201	-0,264	0,016	3,52	0,188	1,600	0,800	100
		2	-0,530	12,0	7,5		-0,421	-0,554	0,024	5,27	-0,064	-1,170	0,610	109
		3	-0,500	19,0	7,0		-0,217	-0,285	0,015	3,30	0,163	1,330	0,890	202
		4	-0,515	26,0	7,0		-0,408	-0,556	0,021	4,82	-0,051	-1,025	0,665	185
	1	5	-0,515	35,0	7,0		-0,228	-0,500	0,015	3,30	0,145	1,135	0,830	272
		6	-0,505	40,0	7,0		-0,397	-0,521	0,016	3,52	-0,043	-0,935	0,670	252
		7	-0,330	47,0	7,0						0,128	0,950		
		8	-0,435	54,0	7,0						-0,035	-0,845		
		9	-0,345	61,0	7,0						0,111	0,765		
		10	-0,405	66,0	7,0						-0,027	-0,755		
		11	-0,360	75,0	7,0						0,094	0,580		
		Σ							0,107	25,73			4,465	1120
Valori importante			$D = 0,155$ m	$b_T = Z_0 = 0,455$ m	$S_0 = -0,347$	$\chi = 0,810$	$ \Delta Z_j _{\text{mediu}} = 0,015$	$\psi_0 = -0,032$	$100 \frac{ \Delta Z_j }{Z_0}$	$ \text{mediu} = 3,39 \%$	$\psi_0 = 0,007$	$ \Delta j _{\text{mediu}} = 0,638$ m	$100 \frac{ \Delta j }{Z_{jcs}}$	$ \text{mediu} = 160 \%$
			$F = 0,01886$ m ²	$\lambda_e = 0,0399$	$\sigma = 0,495$	$\mu = 7,87$	$b_F = 0,651$ m	$S_{00} = -0,315$	$Z_{00} = -0,414$ m					
			$d = 0,108$ m	$Z_* = 1,312$ m										
			$f = 0,009156$ m ²	$T_* = 6,16$ s										
			$L = 180,86$ m											

TABEL Nr. 18 (159)

Tip cas- tel	Nr. reg.	Nr. niv. ext. j	Valori experimentale				Valori teoretice				Valori calculate cu ajutorul rezultatelor experimentale				
			z_j	t_j	T_j	ΔP_j acr	S_j	z_j	$ \Delta z_j $	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0}$	ΔP_j acr	$z_j + \frac{\Delta P_j}{\rho \cdot a}$ rapă	z_{jcs} CASTEL SIMPLU	$ \Delta z_j = z_j - z_{jcs} $	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_{jcs}}$
			m	Δ	m	Pat	m	m	%	Pat	m	m	m	m	%
		0	-1,605	0,0		0,00	-1,088	-1,605	0,00	0,000	-1,605	-1,605	0,000	0,000	000
		1	-0,895	5,0		0,46	-0,594	-0,875	0,020	1,25	3,705	1,235	2,470	200	
		2	-1,690	12,5			-1,183	-1,745	0,055	3,43	-2,050	-0,755	1,295	171	
		3	-0,980	19,5			-0,693	-1,020	0,040	2,49	2,850	0,555	2,305	415	
		4	-1,995	26,5			-1,113	-1,640	0,045	2,80	-1,545	-0,440	1,105	251	
		5	-1,065	33,5			-0,743	-1,095	0,030	1,87	2,085	0,360	1,725	480	
		6	-1,545	40,5			-1,070	-1,580	0,035	2,18	-1,275	-0,310	0,965	312	
		7	-1,140	47,5							1,460				
		8	-1,501	54,5							-1,021				
		9	-1,205	61,5							0,955				
		10	-1,480	68,5							-0,890				
		11	-1,240	75,5							0,690				
		Σ													
Valori importante			$D = 0,156$ m	$h_r = -2_0 = 1,605$ m	$S_0 = -1,088$	$\alpha = 1,358$	$ \Delta z_j _{mediu} = 0,035$ m	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_0} _{mediu} = 2,00\%$	$ \Delta z_j _{mediu} = 1,409$ m	$100 \frac{ \Delta z_j }{z_{jcs}} _{mediu} = 261\%$					
			$F = 0,0188$ m ²	$\lambda_e = 0,03545$	$\sigma = 0,441$	$\psi_0 = -0,171$									
			$d = 0,108$ m	$Z_x = 1,475$ m	$\mu = 7,01$	$\psi_0 = -0,067$									
			$f = 0,009156$ m ²	$T_x = 6,16$ s	$S_{20} = -0,917$	$h_F = 0,651$ m									
			$L = 180,68$ m		$Z_{20} = -1,351$ m										

F-II-5-1

F.- VERIFICARI ALE REZULTATELOR TEORETICE

Capitolul II - INCHIDEREA TOTALA BRUSCA.

UTILIZAREA REZULTATELOR PROPRII

§ 5.- Castele de echilibru parțial pneumatice (cu orificii)

Avînd în vedere unele rezerve care există la utilizarea castelelor de echilibru perfect pneumatice, rezerve legate în special de posibilitatea creșterii presiunii aerului din camera etanșă la valori exagerat de mari, s-au cercetat experimental castelele de echilibru parțial pneumatice. Acestea sînt castelele la care există orificii la partea superioară care permit un schimb limitat de aer între aerul din camera superioară și aerul atmosferic. Ele reprezintă deci o soluție intermediară între castelele de echilibru simple și castelele de echilibru parțial pneumatice, soluție care prezintă deosebite avantaje.

Astfel aerul din camera superioară exercită un efect de micșorare a creșterii nivelului de apă în castelul de echilibru. în cazul închiderii brusce totale. Odată cu ridicarea nivelului de apă aerul este evacuat din camera superioară în atmosferă, astfel încît creșterea presiunii aerului în camera superioară este mai mică decît în cazul castelelor pneumatice. Datorită ieșirii aerului din camera superioară dispare efectul negativ al destinderii aerului, după ce nivelul apei a atins nivelul maxim, efect negativ care se manifestă în cazul castelelor pneumatice.

În acest fel oscilațiile nivelului de apă și implicit ale presiunii se micșorează.

Un alt avantaj deosebit care nu a fost sesizat decît după

F-II-5-2

cercetarea experimentală este acela că fenomenul își pierde repede caracterul periodic, cvasi oscilatoriu, ceea ce indică în general o amortizare puternică uneori efectuându-se doar o singură cvasi oscilație, după care nivelul apei în castel crește continuu spre nivelul hidrostatic, care reprezintă poziția de echilibru a sistemului. Este interesant de remarcat că deși reprezintă o soluție constructivă intermediară între castelele de echilibru simple și castelele de echilibru perfect pneumatice, aceste castele de echilibru capătă calități noi, care nu le au celelalte tipuri de casteluri. S-ar putea face o comparație între castelul parțial pneumatic cercetat și castelul cu rezistențe interioare (orificii, diafragmă) așezate la baza castelului, la racordarea acestuia cu galeria de aducțiune. Rezultatul acestei comparații este net favorabil castelului parțial pneumatic deoarece rezistențele interioare au efect maxim în momentul inițial, efectul lor apare ca un șoc atunci când viteza apei e maximă și se cumulează cu fenomenul loviturii de berbec care se manifestă intens tocmai în această perioadă inițială. Această, în timp ce efectul orificiilor din camera superioară a castelelor parțial pneumatice se simte treptat, ca la orice amortizor elastic, având efect maxim în faza finală când viteza apei este nulă, când fenomenul loviturii de berbec s-a amortizat deja astfel că din acest punct de vedere, al împiedicării pătrunderii loviturii de berbec în galeria de aducțiune, acest tip de castel păstrează avantajele castelului simplu, fiind mult superior castelului cu rezistențe interioare.

În figura Nr.1 (12) este dată schema programului experimental. S-au folosit castele având trei diametri diferiți, notați în ordine descrescătoare A, B, C fiecare dintre cele trei castele s-au cercetat cu trei înălțimi diferite, notate în ordine descrescătoare I, II, III, pentru fiecare înălțime s-au utilizat ci-

F-II-5-3

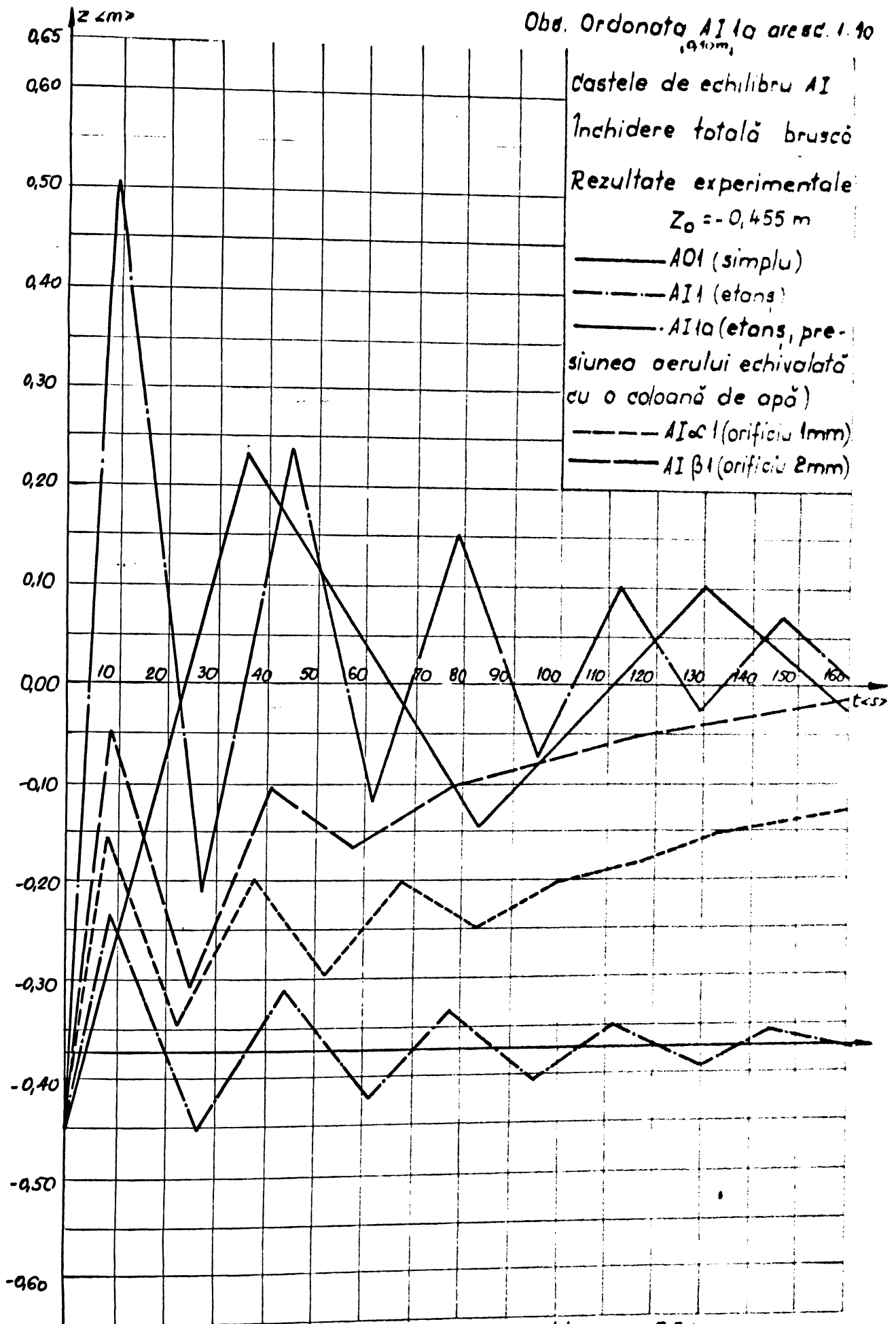
te două tipuri de orificii circulare α pentru \emptyset 1 mm și β pentru \emptyset 2 mm și în fine pentru fiecare orificiu s-au cercetat câte două regimuri notate cu 1 și 2. Rezultă un total de $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ variante care au fost cercetate, cercetările limitându-se la nivelurile extreme și la cvasi-semiperioade. Rezultatele determinărilor experimentale au fost înscrise în tabelele Nr.1 (160) până la Nr. 6 (165) pentru castelele tip A, în tabelele Nr.7 (166) până la Nr. 12 (171) pentru castelele de tip B și în tabelele Nr.13 (172) până la Nr.18 (177) pentru castelele de tip C.

După fiecare tabel s-a dat și reprezentarea grafică respectivă.

Din aceste grafice rezultă clar avantajele acestui tip de castele : oscilațiile se amortizează rapid iar amplitudinea lor este mică. Aceste avantaje recomandă utilizarea în practică a acestui tip de castele, care probabil că nu s-au răspândit încă datorită faptului că sînt insuficient studiate, studiul fiind dificil.

FIGURA NR. 1(12)
CASTELE DE ECHILIBRU PNEUMATICE

TIPUL CASTELELOR PNEUMATICE UTILIZATE IN DESCETARILE EXP.			
DUPA DIAMETRU DUPA INALTIMEA GOLDAHEI DE AER. h _f	A. D=0.355 m.	B. D=0.255 m.	C. D=0.156 m.
I. α=orificiu φ1 mm β=orificiu φ2 mm.			
II. α=orif φ1 mm β=orif φ2 mm.			
III. α=orif φ1 mm β=orif φ2 mm			

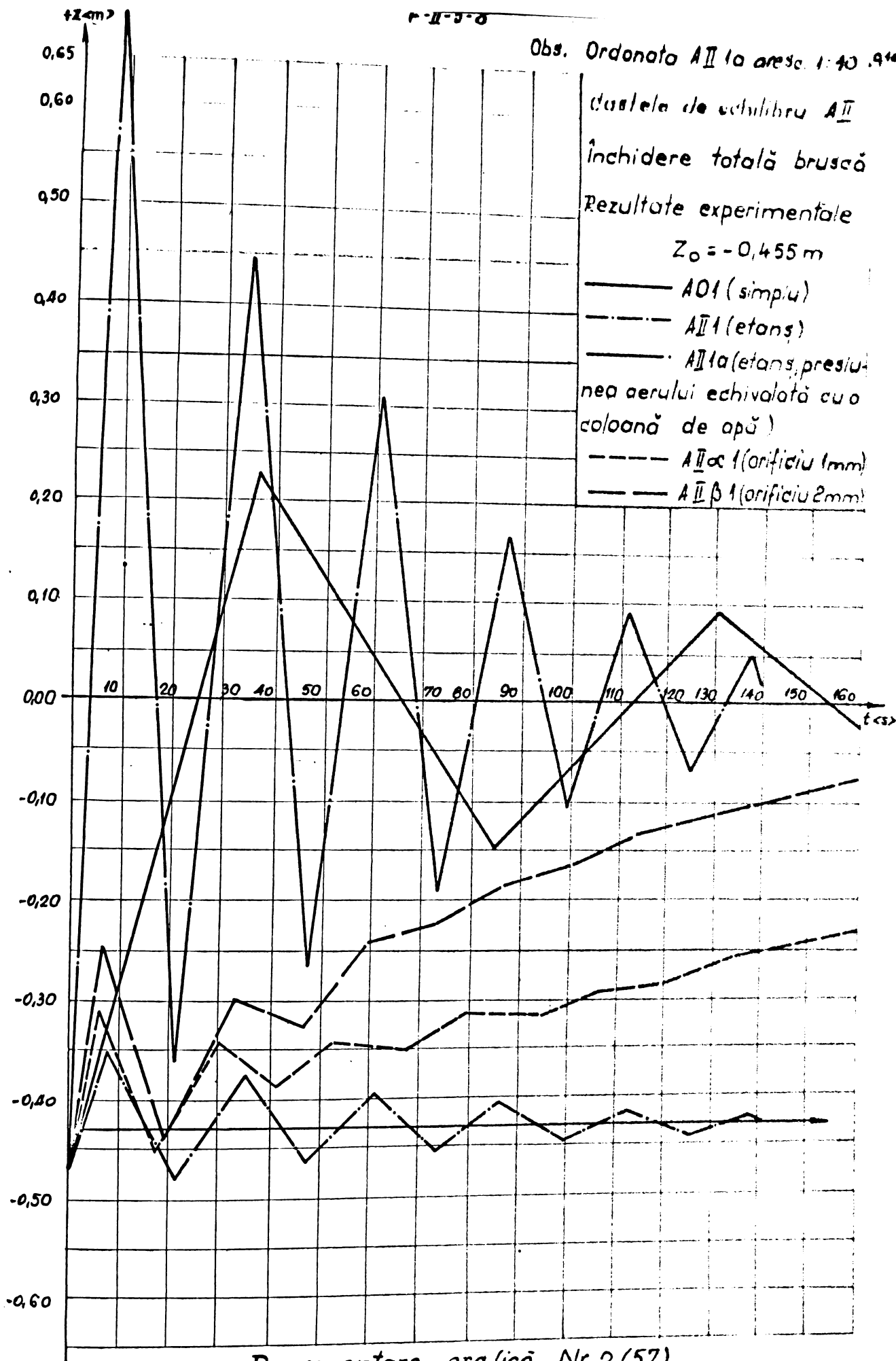


Reprezentare grafică Nr.1 (56)

0.4.6

1-11-58

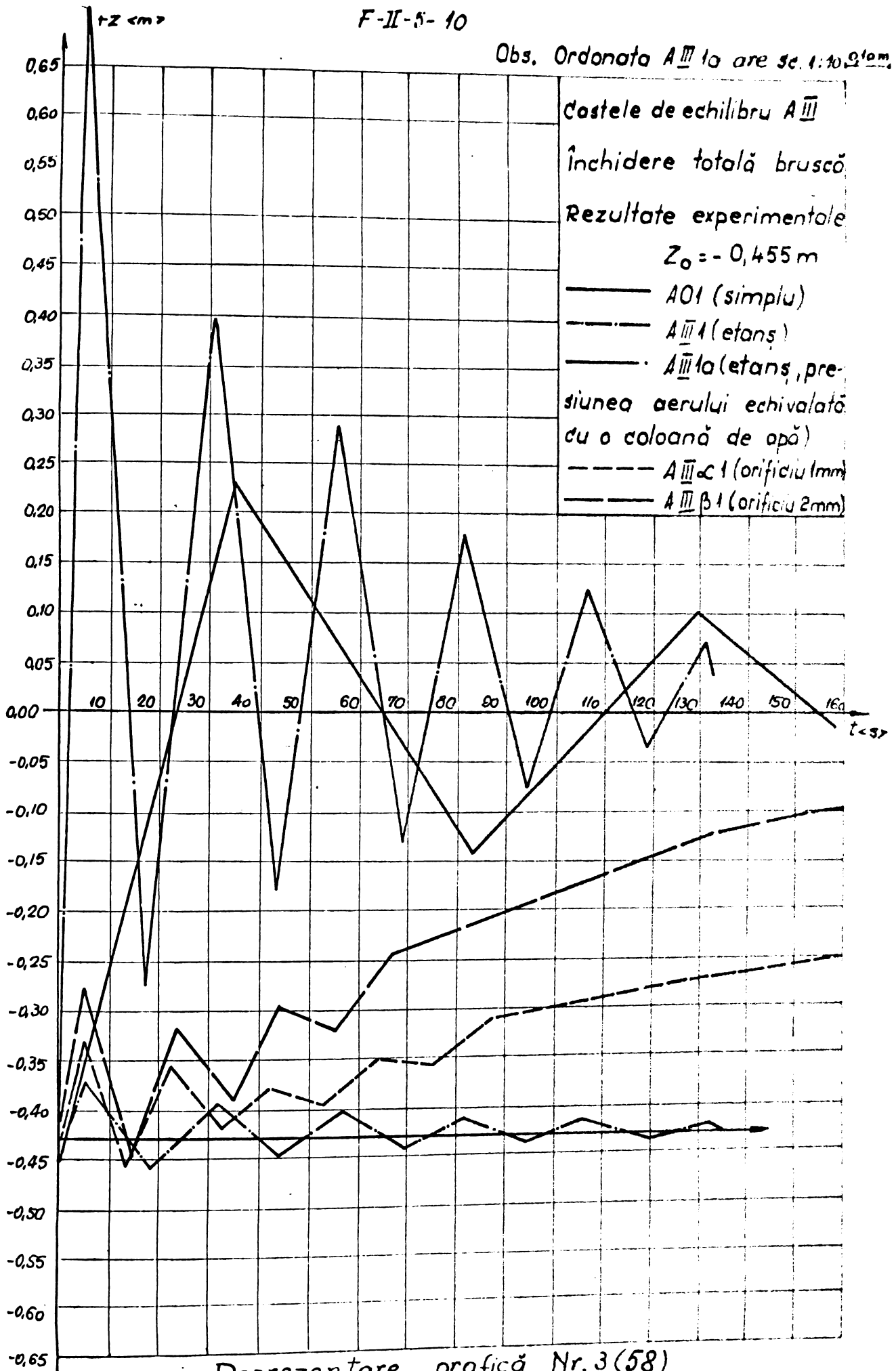
Obs. Ordonata AII la arca 1:40, 9^o 10^o 20^o



Reprezentare grafică Nr.2 (57)

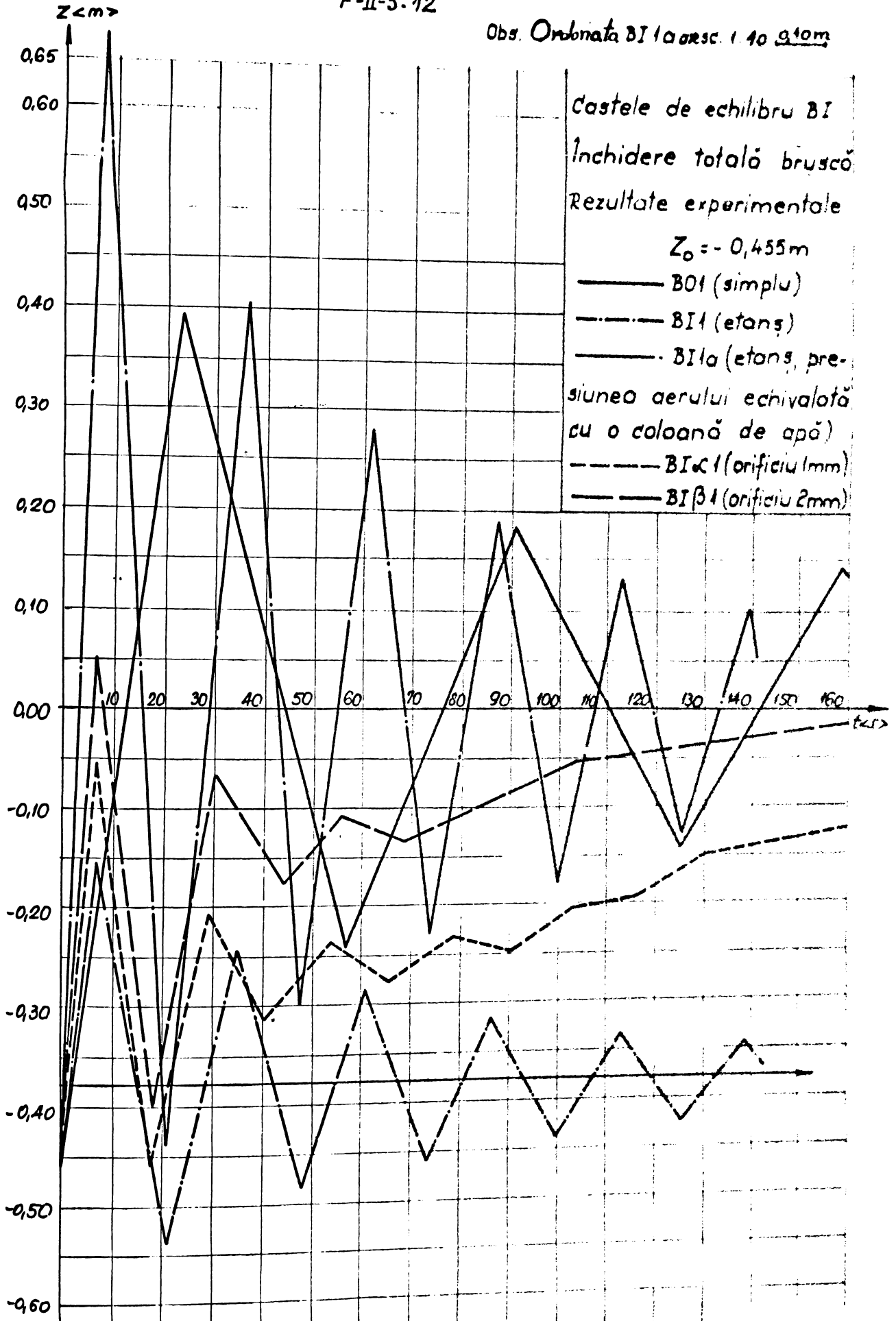
F-II-5-10

Obs. Ordonata A III la are sc. 1:10²10m.

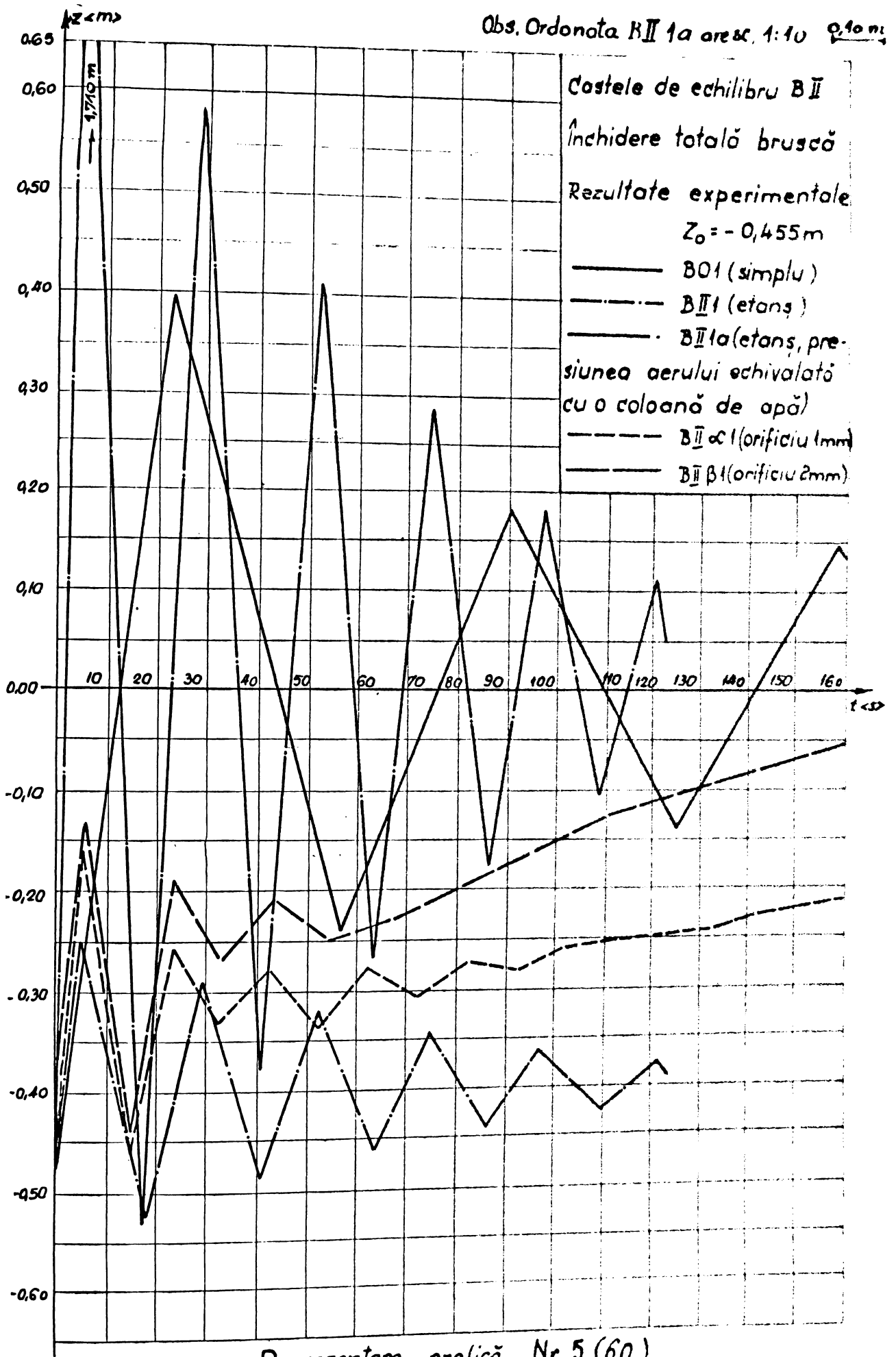


F-II-5.12

Obs. Ordonata BI la cresc. 1 la 910m

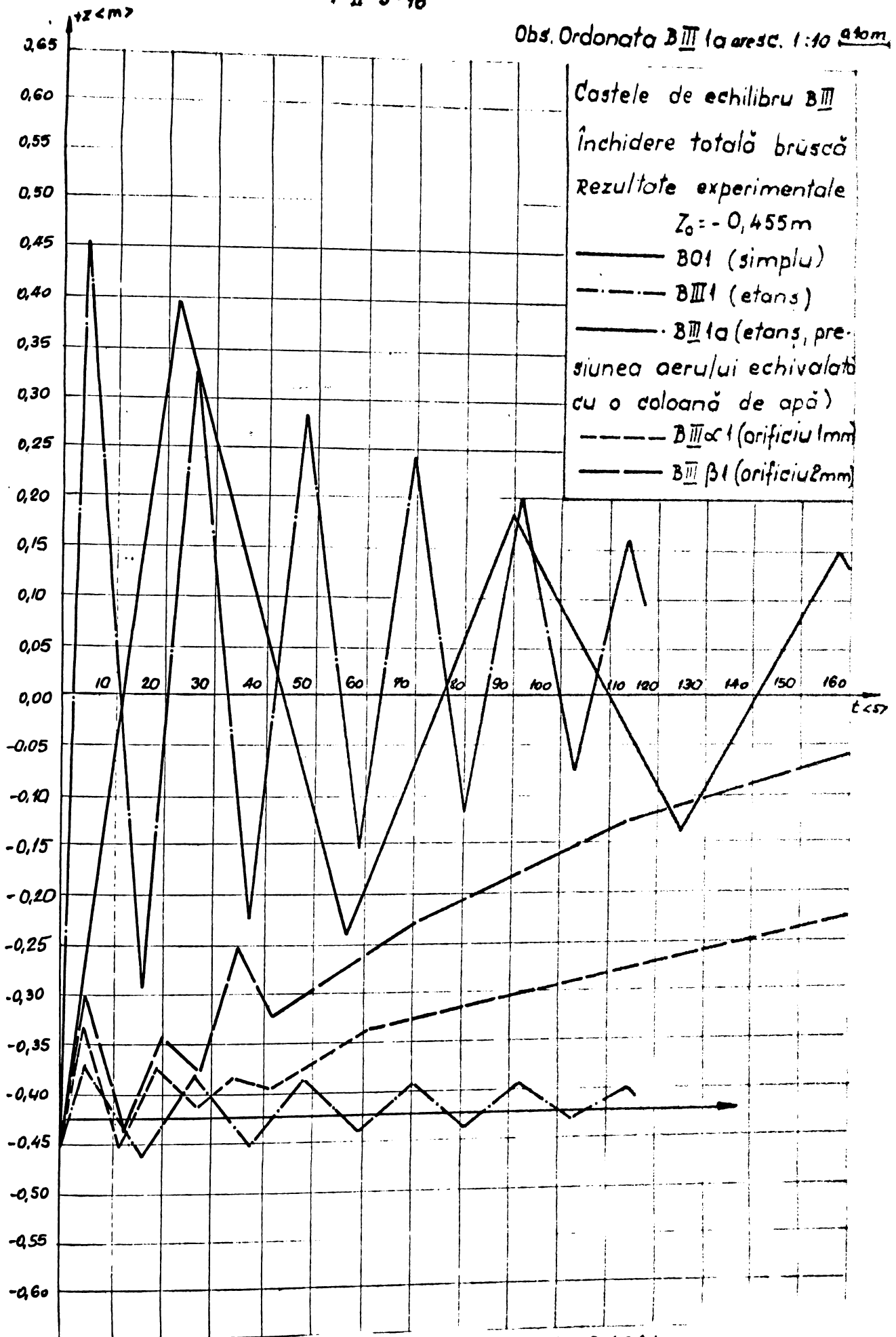


Reprezentarea grafică Nr 4 (59)

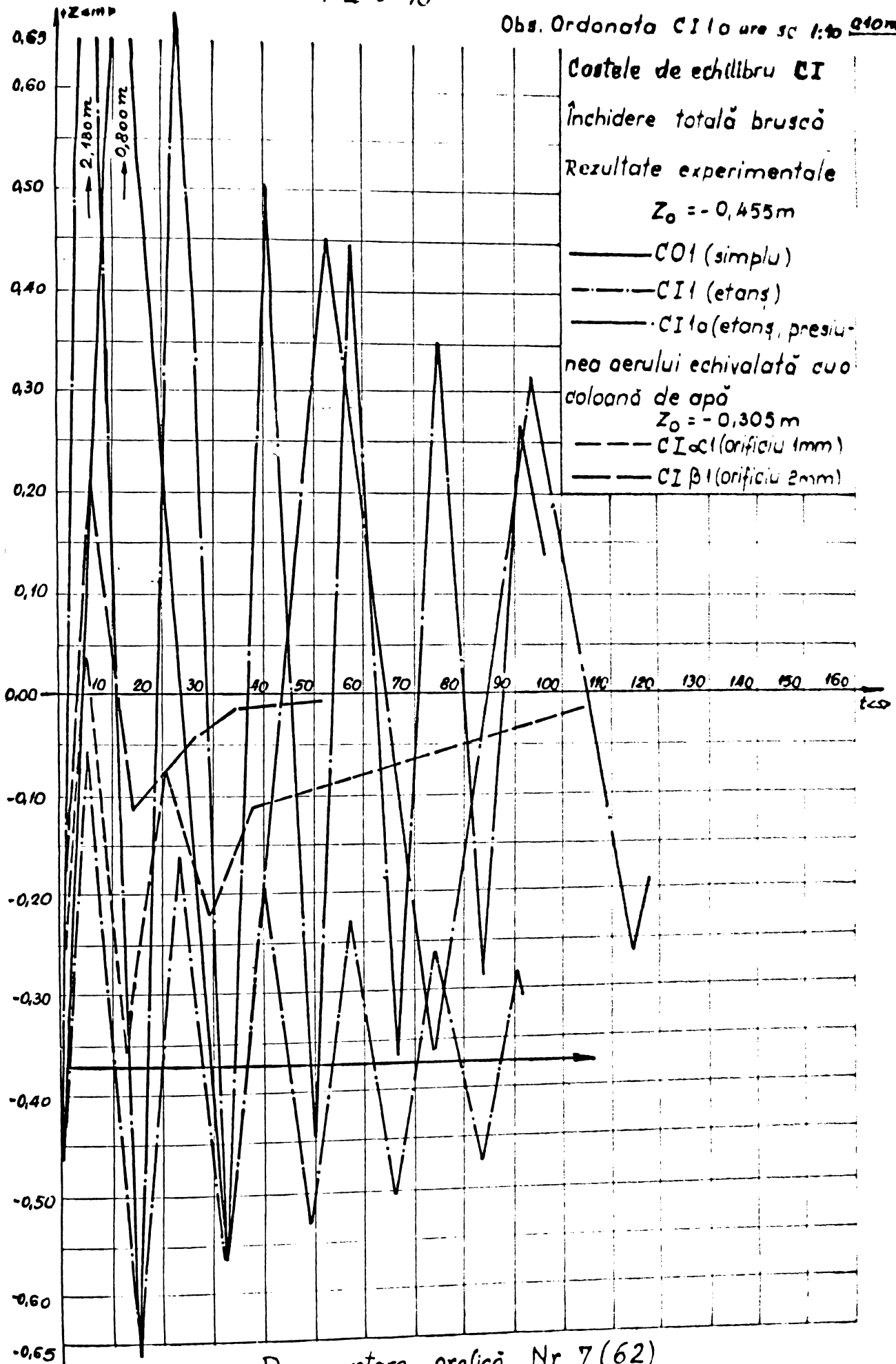


F-II-5-16

Obs. Ordonata BIII (a cresc. 1:10 a 10m)



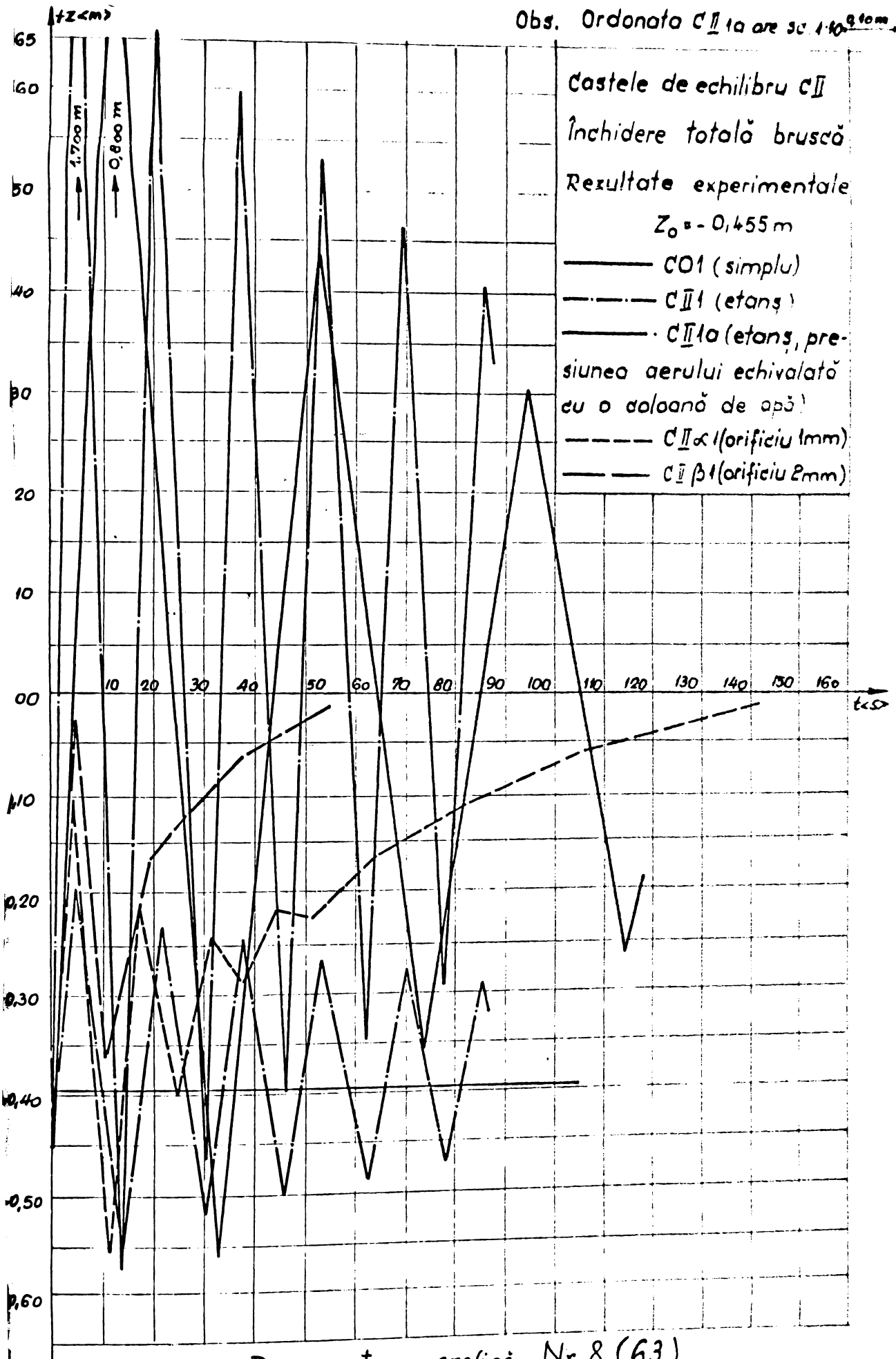
Reprezentare grafică Nr.6 (61)



Reprezentare grafică Nr. 7 (62)

Scara

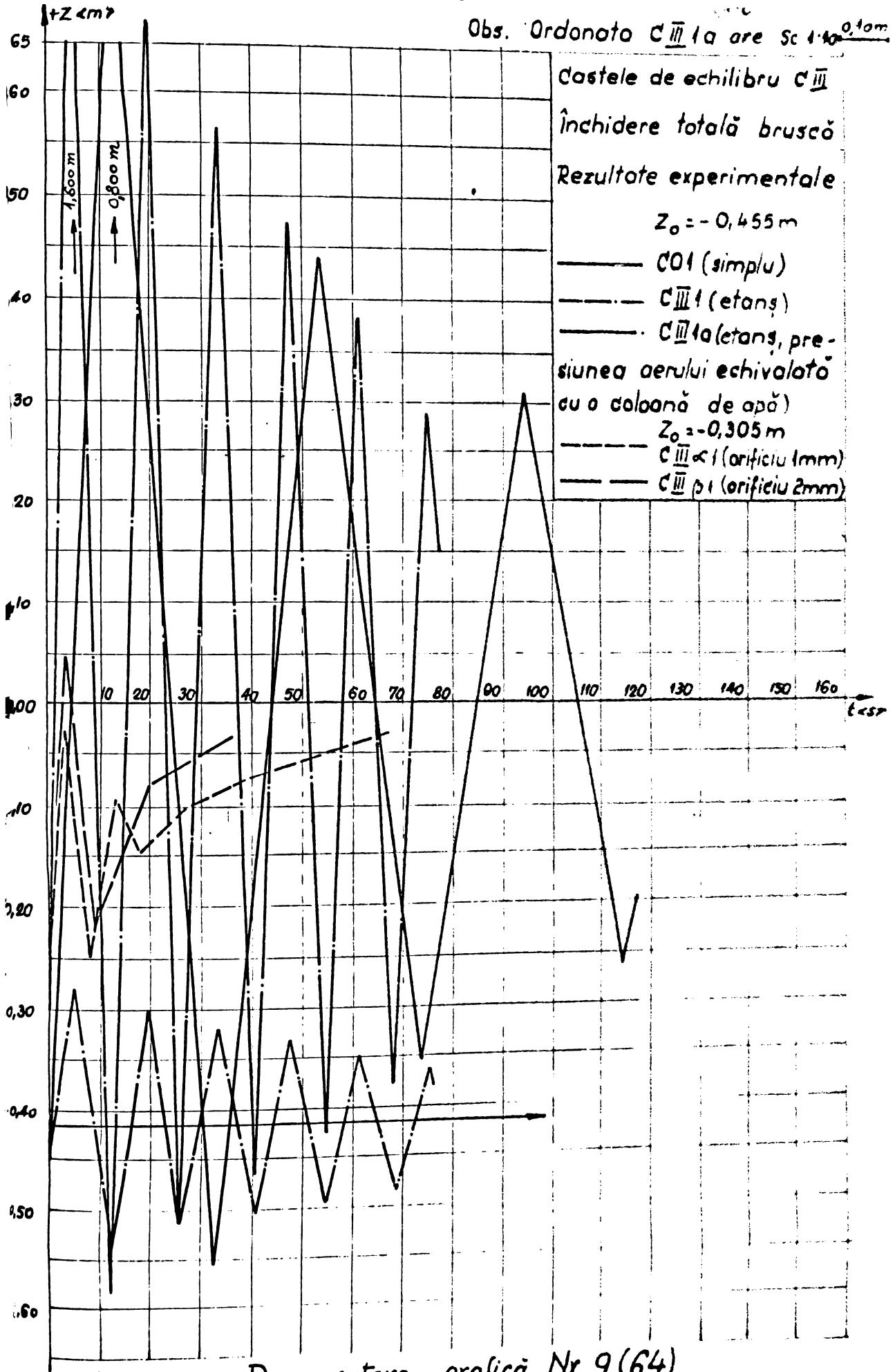
Obs. Ordonata C II la are se 1-10⁹ tom.



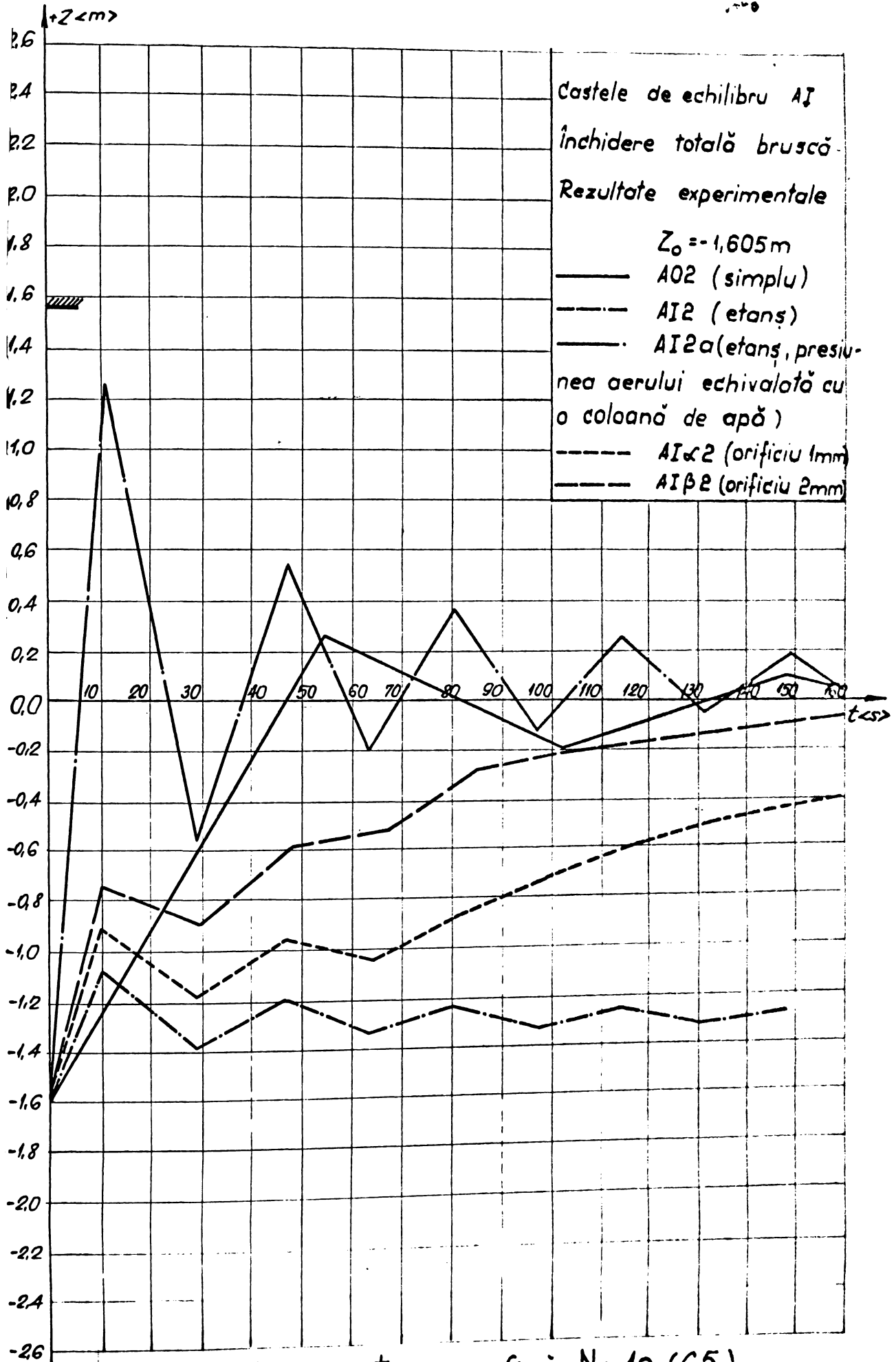
Reprezentare grafică Nr. 8 (63)

F-II-5-22

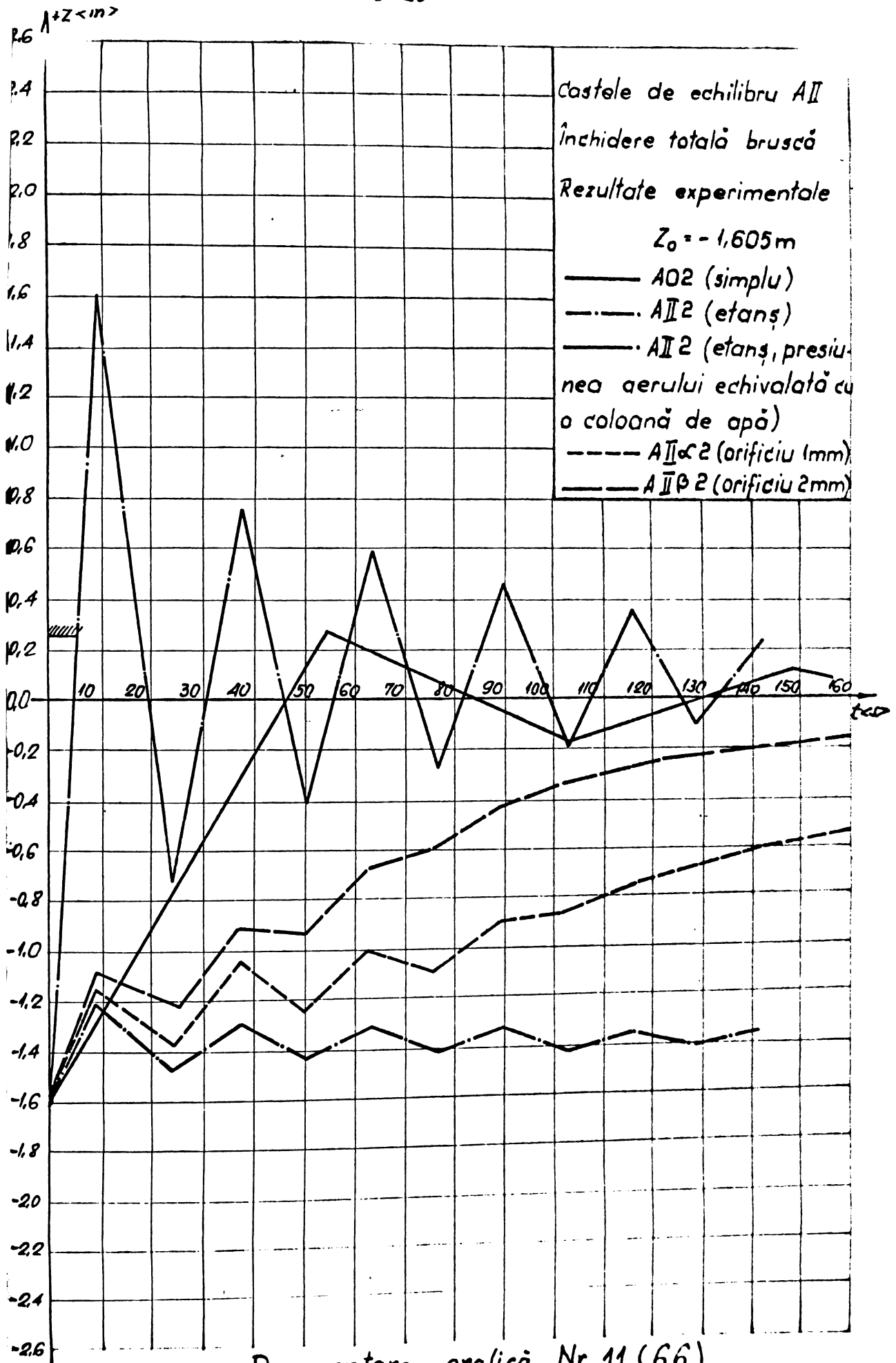
Obs. Ordonata C_{III} la are Sc 1-10^{0,10m}



Reprezentare grafică Nr. 9 (64)

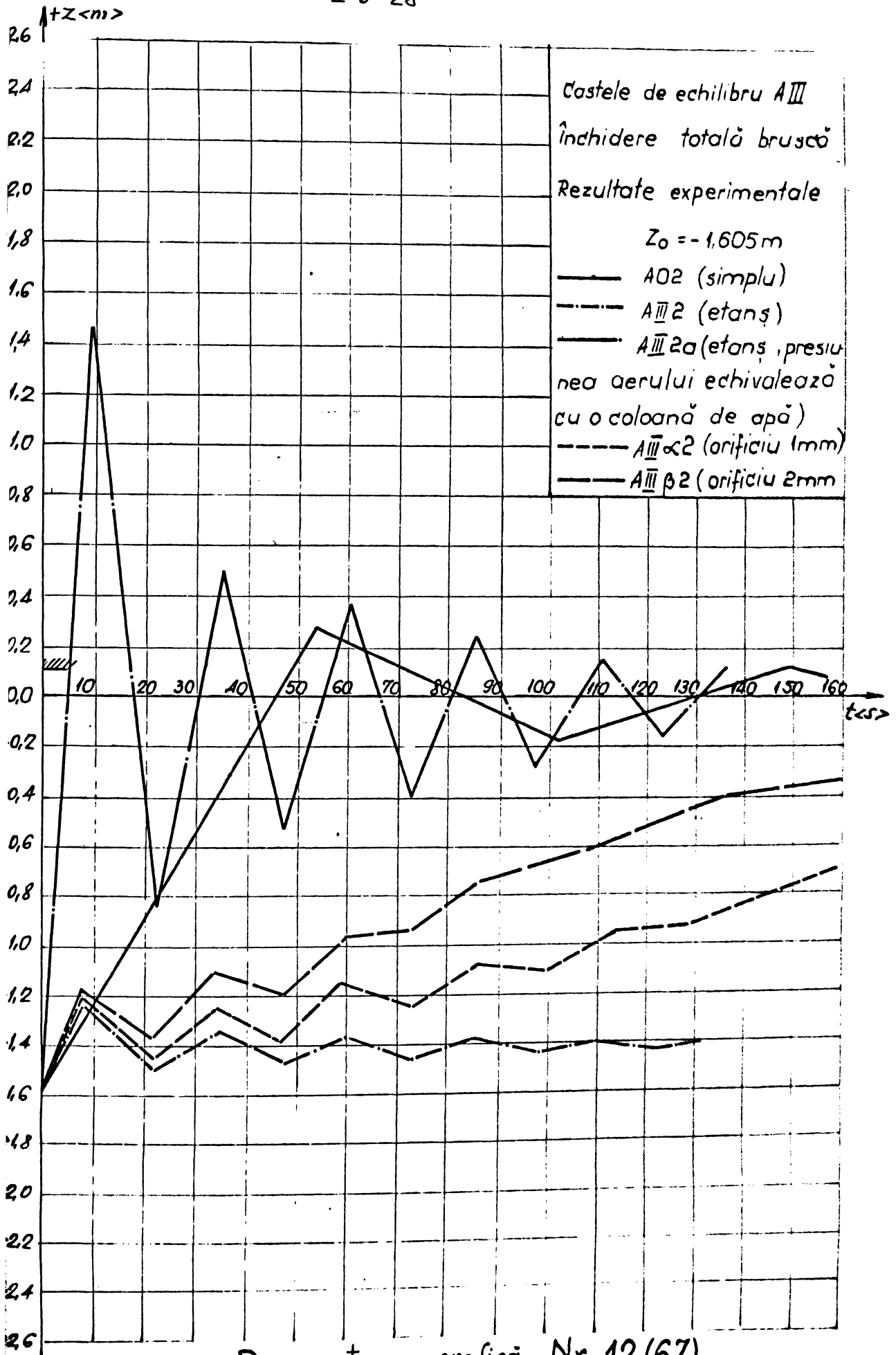


Reprezentare grafică Nr. 10 (65)



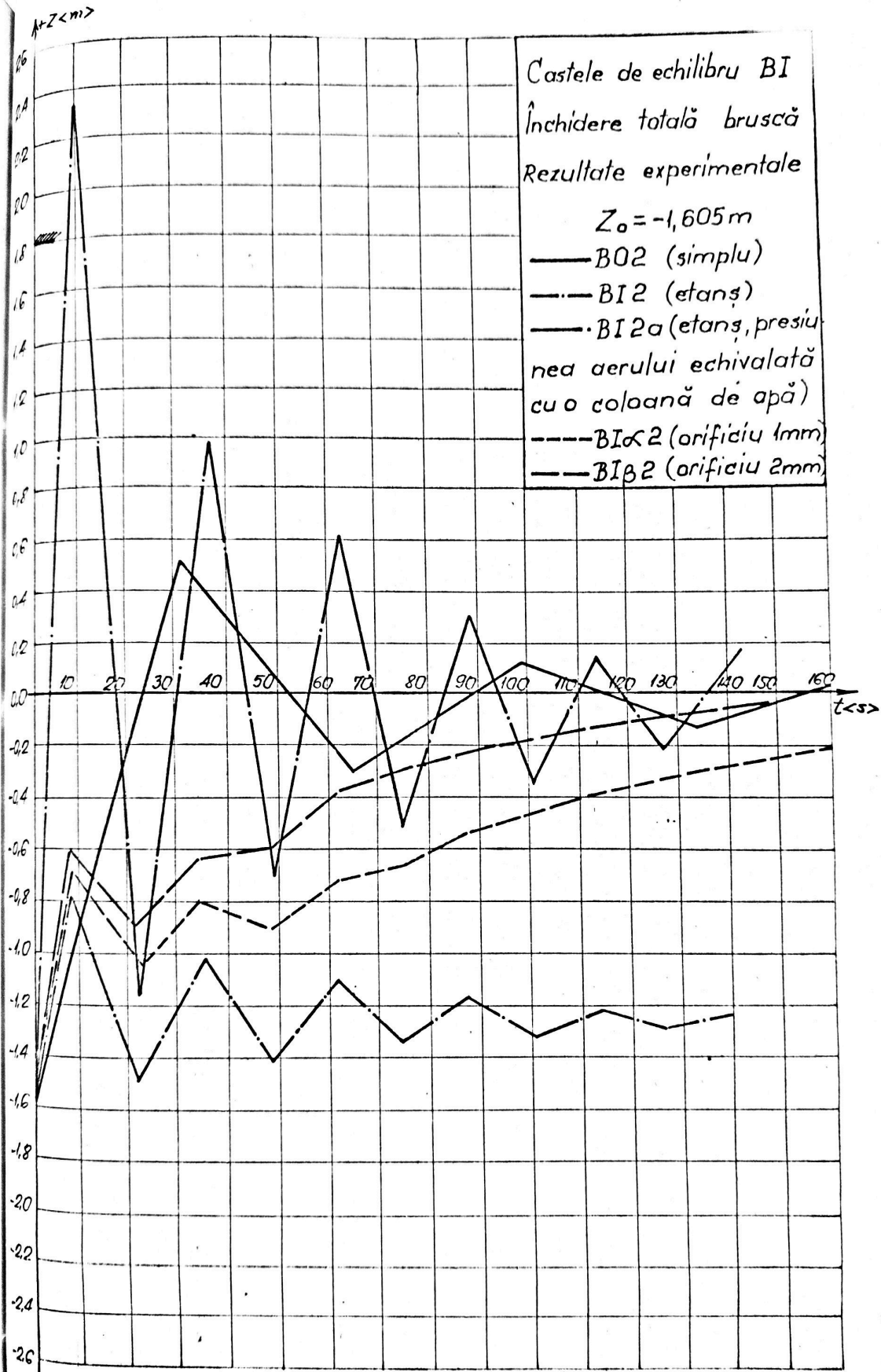
Reprezentare grafică Nr. 11 (66)

F-II-5-28

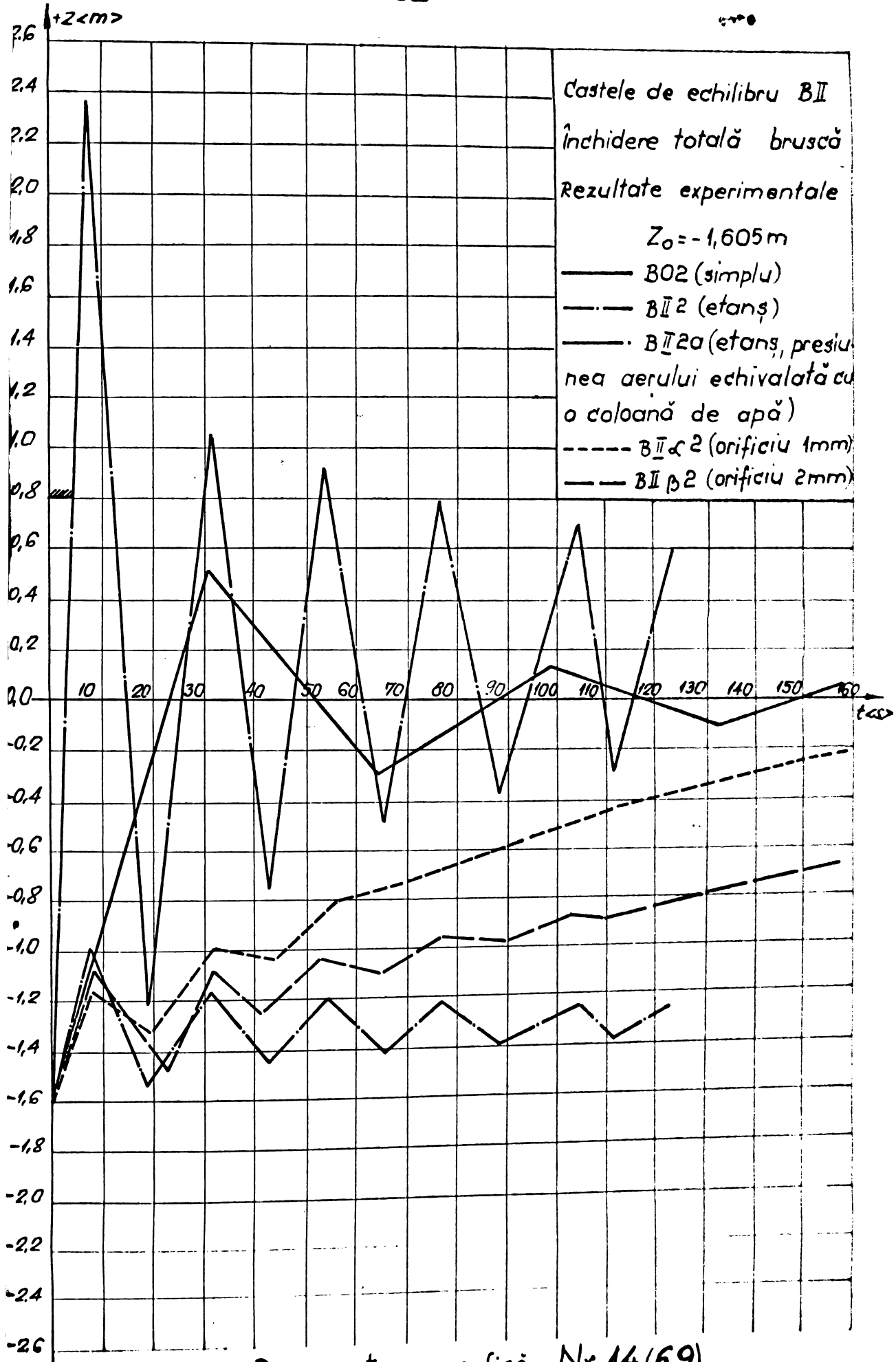


Reprezentare grafică Nr. 12 (67)

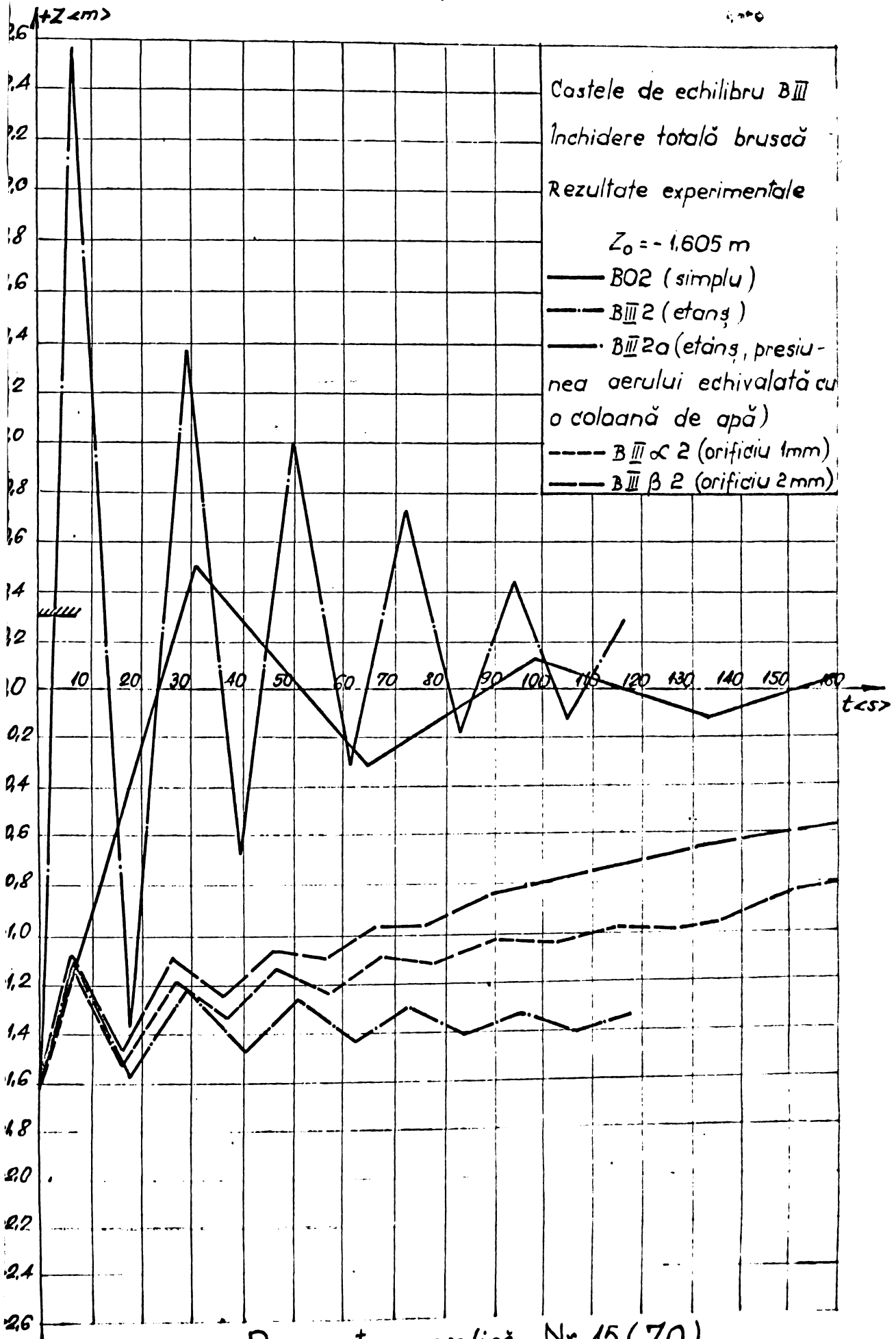
F-II-5-30



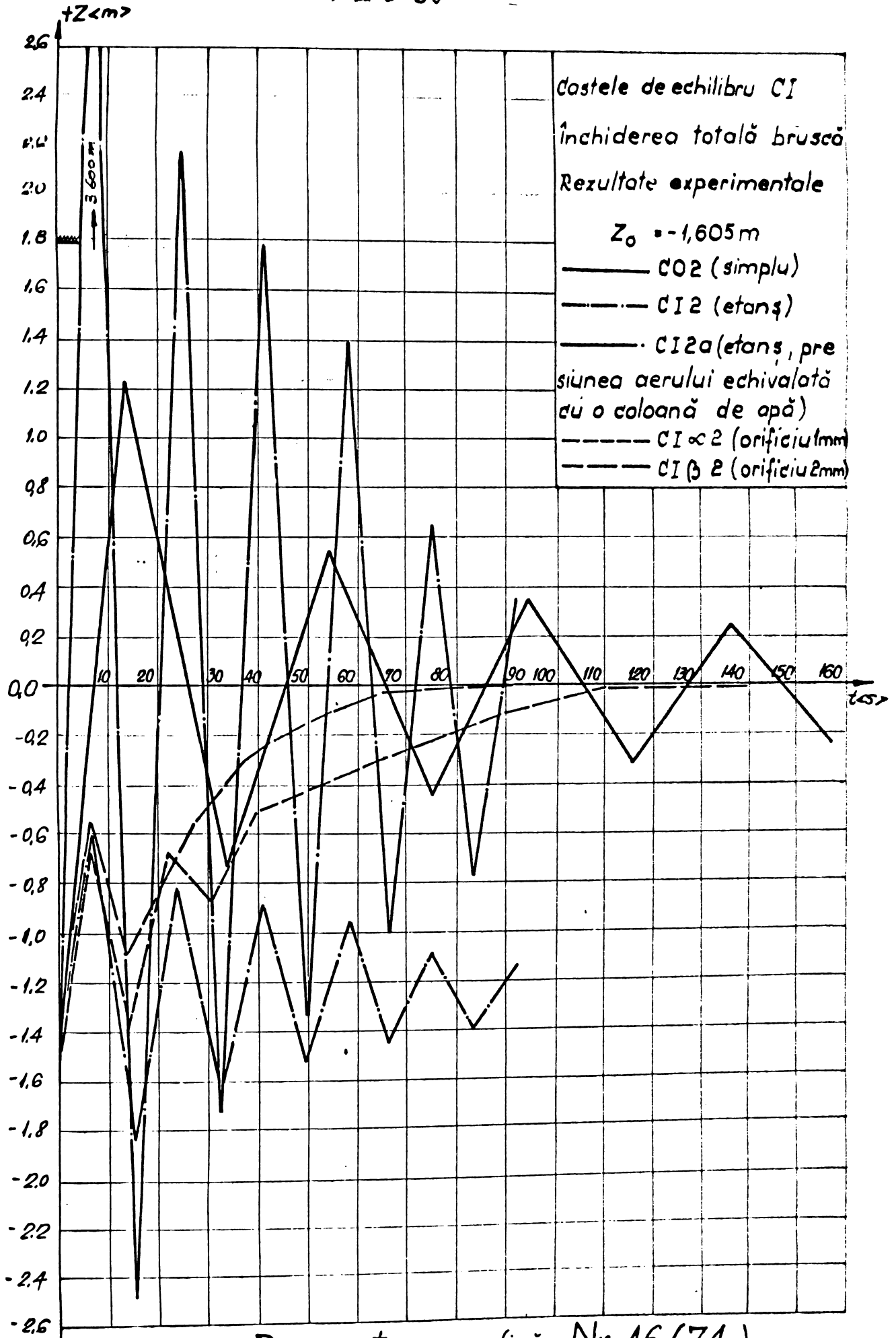
Reprezentare grafică Nr. 13(68)



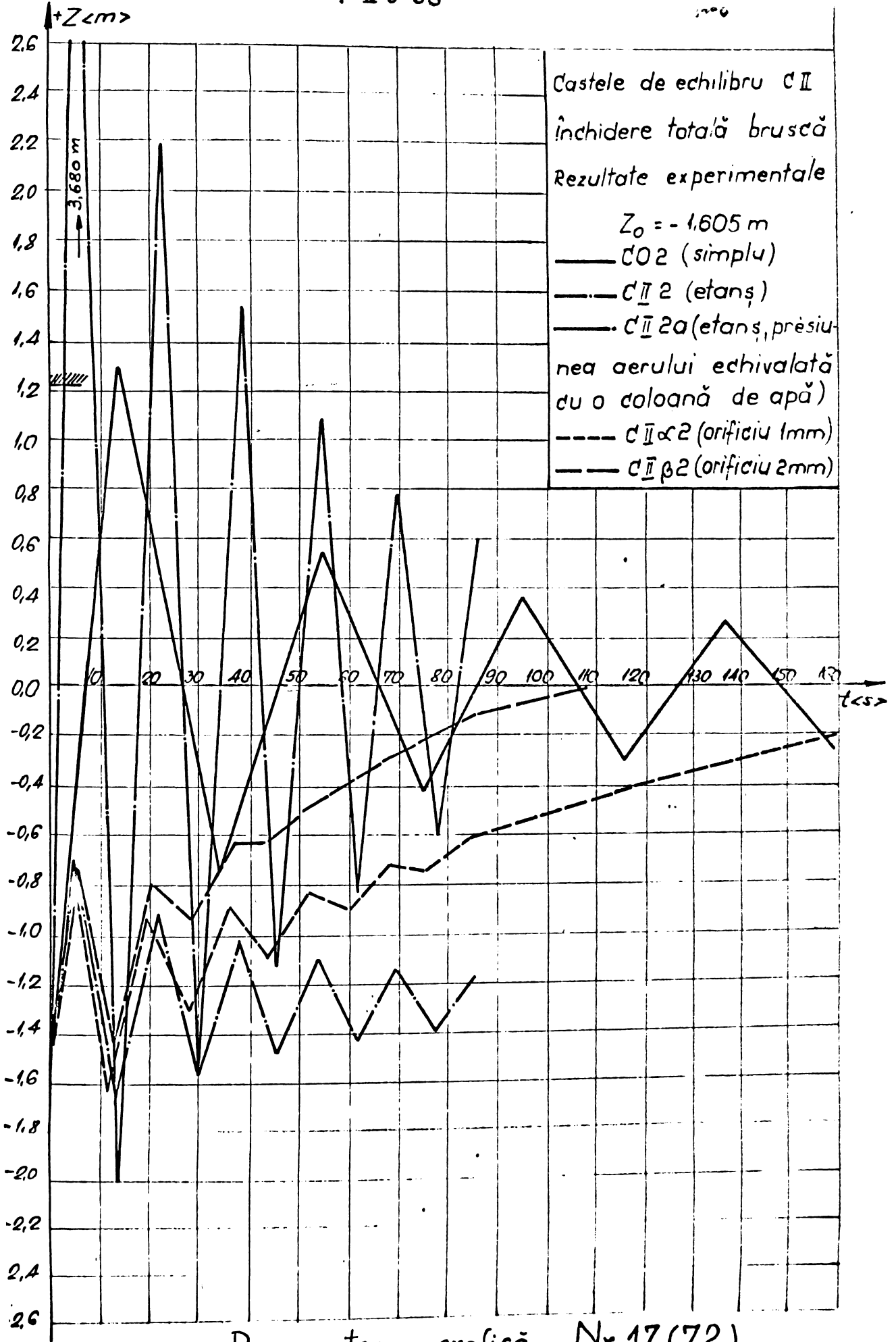
Reprezentare grafică Nr.14(69)



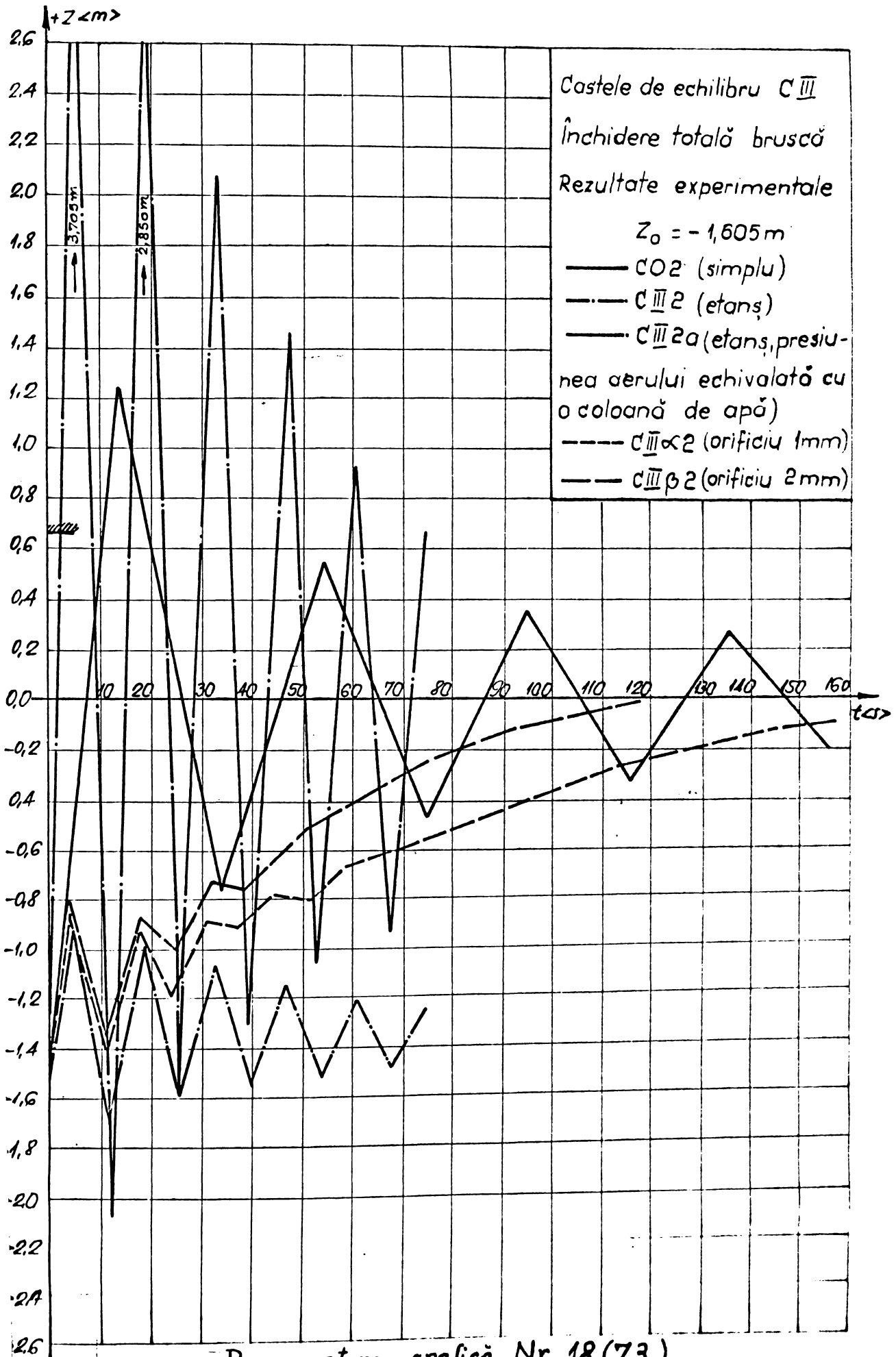
Reprezentare grafică Nr. 15 (70)



Reprezentare grafică Nr. 16 (71)



Reprezentare grafică Nr.17 (72)



Reprezentare grafică Nr. 18 (73)

CONCLUZII

Cercetările conținute în prezenta teză au fost grupate în două părți, în concordanță cu conținutul lor care, de asemenea, prezintă două aspecte distincte.

În prima parte se studiază castelele de echilibru simple, în scopul optimizării metodelor de calcul hidraulic a acestor castele, considerate a fi tipul de bază. În cea de a doua parte se studiază alte tipuri de castele de echilibru aproape neutilizate în practica mondială, atât din punct de vedere analitic, prin transpunerea unor rezultate și metode din prima parte, cât și din punct de vedere experimental.

Linia predominantă în optimizarea calculului hidraulic, exprimată în lucrări ca /1-E/, /2-P/, constă în întocmirea unor algoritme de calcul, bazate pe adoptarea unui model matematic utilizând diferențele finite. Aceste algoritme permit programarea în diferite limbaje și efectuarea efectivă a calculelor de un calculator electronic. Prezenta teză consideră optimizarea într-un alt sens, studiind structura însăși a modelului matematic și a modului în care este obținut, punând în evidență unele aspecte cu caracter general, unele proprietăți analitice calitative ale soluțiilor și în fine stabilind pe baza perfecționării modelului matematic formule și metode grafice rapide, simple și precise. În acest mod devine posibilă utilizarea în mai bune condițiuni a calculatoarelor electronice prin aceea că în cazul manevrelor simple problemele proiectării castelelor de echilibru din punct de vedere hidraulic pot fi rezolvate în totalitate, într-un mod unitar prin folosirea metodelor de calcul recomandate în teză. Rămâne astfel, ca un domeniu eficient de utilizare al calculatoarelor, studiul aprofundat al castelelor de echilibru în condiții complexe de exploatare, cu considerarea unor ipoteze suplimentare mai apropiate de evoluția reală a fenomenelor cvasi oscilatorii.

Con 2

Evident și relațiile recomandate prin teză pot fi programate la calculator. Ele au însă expresii tot atât de simple încât, la costul actual al calculatorului, acesta ar constitui o cheltuială neeconomică.

Fiecare din cele două părți ale tezei cuprinde un număr de trei subdiviziuni, a căror titulatură indică rezumativ conținutul respectiv :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| Partea I
<i>Castele simple</i> | A Inchiderea totală bruscă
B Deschiderea totală bruscă și stabilitatea
C Manevre parțiale izolate și combinate |
| Partea II
<i>Castele speciale</i> | D Castele de echilibru perfect pneumatice
E Castele de echilibru parțial pneumatice.
Castele de echilibru cu secțiune exponențial variabilă.
F Verificări ale rezultatelor teoretice stabilite în cadrul tezei. |

În legătură cu punctul F se menționează că verificările se referă atât la rezultatele teoretice din partea I cât și din partea II și că s-au folosit, în primul rând, datele publicate sau transmise direct prin bunăvoință de alți cercetători cât și în al doilea rând, rezultatele unor modeste cercetări experimentale proprii.

Se menționează în teză că se folosesc denumiri ca : fenomen cvasi-oscilatoriu, ecuația cvasi-oscilațiilor, cvasi-semiperioadă, care nu sînt uzuale în literatura castelurilor de echilibru, dar pe care autorul le consideră mai potrivite, această terminologie fiind inspirată de lucrarea /4 -S/ a prof.dr.ing.Silaș Gheorghe și popularizată de autorul tezei în unele articole publicate.

Con.3

După această prezentare extrem de sumară a tezei, se vor expune în continuare principalele concluzii obținute, care reprezintă în același timp și contribuții originale.

A.- Inchiderea totală bruscă1.- Forma adimensională optimă^{x)}

În literatura de specialitate se cunosc mai multe moduri de adimensionalizare a ecuației cvasi-oscilațiilor între care cele mai cunoscute sînt cele ale lui Vogt și Calame Gaden. Se pune întrebarea dacă nu s-ar putea stabili unele criterii care să permită să se aprecieze care dintre aceste moduri de adimensionalizare este optim în raport cu celelalte.

Se propun următoarele trei criterii :

1.- mărimile de referință utilizate pentru adimensionalizare să nu depindă de regimul de curgere. Aceasta prezintă avantajul că nu este necesară recalcularea mărimilor respective de fiecare dată cînd se schimbă regimul de curgere ;

2.- ecuația cvasi-oscilațiilor conține trei termeni: inerțial, cinetic și potențial. În consecință, împărțind la coeficientul unuia dintre cei trei termeni rezultă că ecuația conține un număr de doi parametri independenți. Pe de altă parte sînt două mărimi de referință independente care se utilizează pentru adimensionalizarea relației. Rezultă atunci, că un sistem de mărimi de referință care se impune în mod natural este acela la care mărimile de referință sînt astfel de funcții de cei doi parametri din ecuația cvasi-oscilațiilor încît forma adimensională a acestei ecuații să conțină numărul minim de parametri adimensionali, în cazul de față acest număr fiind zero. În acest fel ecuația cvasi-oscilațiilor devine invariabilă cu caracteristicile amenajării.

3.- mărimile de referință utilizate să nu conducă la situații de nedeterminare în cazurile limită, cînd denivelarea apei în castel

x) Conținutul acestui punct a fost publicat într-un articol din revista "Hidrotehnica" nr.11, 1971

în regimul permanent inițial $\lambda_e \rightarrow 0$ sau $\lambda_e \rightarrow -\infty$.

Se constată că nici unul dintre sistemele de mărimi de referință utilizat în literatură nu satisface nici unul dintre cele trei criterii mai sus menționate. Se face totuși observația că hidraulicianul sovietic A.A. Morozov studiind parțial problema, în sensul determinării unui grafic pentru primul și al doilea nivel extrem a introdus un parametru $S = \frac{C^2 R f}{2 g F}$ (C coeficient Chezy al aducțiunii, R raza hidraulică a aducțiunii, f secțiunea aducțiunii, F secțiunea castelului de echilibru, g accelerația gravitațională) avînd dimensiunea de lungime care satisface cele trei criterii.

De asemenea, în cadrul sistemului mărimilor de referință Calame-Gaden există mărimea de referință T_* , avînd dimensiunea de timp care de asemenea satisface cele trei criterii.

Pe baza acestei analize critice a modului în care diverși cercetători au adimensionalizat ecuația cvasi-oscilațiilor se propune un sistem complet de mărimi de referință care satisface toate criteriile de mai sus. Acest sistem apare ca o sinteză a mărimilor utilizate de Morozov la Calame-Gaden, deși mărimile propuse nu sînt identice cu nici una dintre mărimile citate, diferind de acestea prin coeficienți. Se propun în teză mărimile de referință $Z_* = \frac{d f}{\lambda_e F}$ (d diametrul aducțiunii și λ_e coeficient de rezistență global de tip Darcy al aducțiunii) și $T_* = \sqrt{\frac{L F}{g F}}$. Deoarece diametrul galeriei de aducțiune este mare, regimul de curgere va fi un regim pătratic, coeficientul λ_e va depinde doar de rugozitatea relativă a aducțiunii și va fi în consecință, independent de regimul de curgere.

Mărimile de referință propuse permit următoarele interpretări fizice:

- mărimea Z_* reprezintă saltul maxim în castel în cazul în care denivelarea inițială a apei $\lambda_e \rightarrow -\infty$

- mărimea T_* reprezintă perioada împărțită cu 2π a mișcării oscilatorii care ar apare în cazul în care apa ar fi un lichid perfect.

Con.5

Cu aceste mărimi de referință, ecuația cvasi-oscilațiilor su formă adimensională capătă forma invariantă :

$$\frac{d^2 \mathcal{S}}{d\mathcal{C}^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{C}} \right| \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{C}} + \mathcal{S} = 0; \quad \mathcal{S} = \frac{z}{z_*}, \quad \mathcal{C} = \frac{t}{T_*} \quad (1)$$

cu condițiile inițiale de tip Cauchy, reprezentînd condițiile de unitate ale fenomenului :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \implies \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 < 0, \quad \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{C}} = \sqrt{-2\mathcal{S}}. \quad (2)$$

Din cele de mai sus apare foarte clar un aspect specific cvasi-oscilațiilor în castele de echilibru, anume dependența celor două condiții inițiale de tip Cauchy. De asemenea apare foarte clar rolul de criteriu de similitudine al parametrului \mathcal{S}_0 , denumit în teză și parametrul pierderii inițiale de energie specifică. Dacă se păstrează similitudinea geometrică, condiția $\mathcal{S}_0 = \text{idem}$ conduce la legea Froude, iar dacă se face o modelare fără similitudine geometrică se ajunge la similitudinea Durand generalizată sau chiar, este posibilă o generalizare a acesteia.

2.- Obținerea modelului matematic prin utilizarea unui principiu variațional^{x)}

În literatura de specialitate, modelul matematic este totdeauna obținut prin utilizarea ecuației lui Bernoulli. În teză s-a prezentat o altă cale de a deduce ecuația cvasi-oscilațiilor, utilizînd în acest scop un principiu variațional de tipul principiului lui Hamilton. Avînd în vedere noutatea metodei în problema cercetată s-a impus verificarea corectitudinii metodei. Această verificare se consideră efectuată deoarece :

- utilizarea ecuației Bernoulli conduce la aceeași ecuație a cvasi-oscilațiilor ;
- utilizarea metodelor analizei funcționale, care face abstracție de semnificația fizică a termenilor conduce la aceeași expresie a funcționalei ca și metoda bazată pe principiul lui Hamilton.

Avantajul utilizării metodei variaționale constă în esență în aceea că înlocuiește problema găsirii unei funcții - soluție a unei ecuații diferențiale, în cazul de față neliniare cu problema găsirii unei funcții - extremală a unei funcționale.

Deși funcția necunoscută este aceeași în ambele probleme de mai sus, în cazul în care soluția nu poate fi exprimată sub formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare cunoscute, cum este situația în cazul de față, procedeele de căutare a soluției

x) Conținutul acestui punct a făcut obiectul a două articole publicate în Buletinul Științific și Tehnic a I.P. "Traian Vuia" Timișoara, Seria Construcții Nr.1/1971 tom.16(30) și Nr.2/1972, tom.17(31)

Con. 6

sînt diferite, iar rezultatele aproximînd soluția exactă în cele două probleme pot fi de asemenea diferite. Procedeele de calcul care permit găsirea unei funcții, extremală a unei funcționale sînt cunoscute sub denumirea de procedee variaționale, în teză fiind utilizat efectiv procedeul Ritz.

Funcționala a cărei extremală este chiar soluția ecuației (1) are forma :

$$F(\xi) = \int \left[\xi \frac{d\xi}{dz} + \xi^2 + \int_0^\xi \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 d\xi \right] dz = \int \left[\left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 - \xi - \int_0^\xi \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 d\xi \right] dz \quad (3)$$

Este de menționat că în hidraulică în general metoda variațională se aplică sporadic; în țară autorul tezei nu cunoaște decît lucrările prof.dr.doc. Simion Hîncu și lucrările proprii în care s-a utilizat această metodă.

3. Niveluri extreme. *)

Problema nivelurilor extreme este problema care a fost studiată cel mai mult în cadrul tezei, ceea ce se justifică și prin importanța practică deosebită a acestei probleme.

Nivelurile se pot determina în general pe cale analitică prin trei metode :

- 1) metoda bazată pe diferențe finite, adaptată pentru utilizarea calculatorului electronic;
- 2) Metoda bazată pe experimentarea aproximativă a legii de oscilație, obținută prin metoda liniarizării (s-a studiat varianta Prașil, varianța Prașil îmbunătățită, variantă originală) sau prin metoda Kriflov - Bogoliubov, ambele fiind me-

*) Conținutul acestu punct a făcut obiectul unui articol publicat în revista "Hidrotehnica" , Nr.8, 1972.

Con. 7

tode de interpretare aproximativă permițind și o a doua integrare a ecuației cvasi-oscilațiilor.

- 3) Metoda cea mai indicată, se bazează pe o primă integrare ecuației cvasi-oscilațiilor, integrare ce se poate realiza utilizând o schimbare corespunzătoare de funcție și de variabilă. Utilizându-se proprietatea de anulare a vitezei de mișcare a apei din castelul de echilibru se obțin ecuații "înlănțuite" sub formă implicită care permit, în principiu, determinarea succesivă a nivelurilor extreme.

Deoarece metoda bazată pe diferențe finite, așa cum s-a arătat, analizată în detaliu de alți cercetători, în teză se studiază celelalte metode. Grupul de metode bazat pe experimentarea aproximativă a fost testat pentru un număr de valori ale parametrului S , acoperind practic întregul domeniu de utilizare al castelurilor de echilibru și s-a dovedit că erorile obținute sînt mari, în teză fiind date tabele și grafice comparative.

Metoda Krîlov - Bogoliubov, în primă aproximație a fost programată în limbaj FORTRAN IV pentru calculatorul "IRIS" al Centrului Teritorial de calcul Timișoara. Pentru compilarea programului calculatorul a folosit 36 secunde iar pentru calculul numeric efectiv al unui nivel maxim a folosit în medie 3 secunde. Rezultatele sînt cu atît mai apropiate de cele exacte cu cît valorile parametrului inițial $/S_0/$ sînt mai mici. Concluzia relativă la acest grup de metode este aceea că structura însăși a acestor metode nu este corespunzătoare pentru a servi la determinarea nivelurilor extreme. În ceea ce privește prima metodă autorul tezei a considerat că mai există posibilități de perfecționare a metodei, legate și de sistemul superior al mărimilor de referință care a fost utilizat. Rezultatele obținute pe această linie au fost duse pînă la forma care să permită utilizarea lor

Con. 8

în proiectare. Se vor menționa în cele ce urmează principalele concluzii ale tezei în această direcție.

a) Printr-o primă integrare a ecuației cvasi-oscilațiilor se obțin relațiile :

$$\frac{dS}{d\tau} = \sqrt{2} \sqrt{1-S} e^{S_0-S} ; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$$

$$\frac{dS}{d\tau} = (-1)^{j+1} \sqrt{2} \sqrt{1+(-1)^j - [1+(-1)^j S_{j-1}]} e^{(-1)^j (S-S_{j-1})}$$
(4)

Se observă că expresia vitezei de mișcare a nivelului apei în castel în prima cvasi-semiperioadă nu se poate îngloba în expresia generală valabilă în toate celelalte cvasi-semiperioade. Această observație se va menține și în problema timpului și în problema legii de oscilație ceea ce permite a se trage concluzia generală că în prima cvasi-semiperioadă mișcarea are un caracter specific.

Având viteze corespunzătoare nivelurilor extreme următorul sistem de ecuații "înălțuite" care permite determinarea succesivă a nivelurilor extreme :

$$S_1 + \ln(1-S_1) = S_0$$

$$|S_j| + \ln(1-|S_j|) = -|S_{j-1}| + \ln(1+|S_{j-1}|)$$
(5)

Pentru determinarea primului nivel extrem s-a construit un tabel cu valorile funcției $f_1(S) = S + \ln(1-S)$ pentru un număr de 400 valori ale variabilei $S \in [0,1]$. Cu ajutorul acestui tabel care conține perechi exacte de valori (S_0, S_1) , determinarea nivelului extrem se reduce la o simplă operație de interpolare. Tabelul evident este bun pentru orice castel de echilibru simplu, fiind invariant cu caracteristicile amenajării hidrotehnice. Metoda bazată pe acest tabel apare ca fiind cea mai precisă și mai rapidă dintre toate metodele cunoscute, ea se

Con. 9

poate încă îmbunătăți prin mărirea numărului de linii ale tabelului. Precizia metodei este superioară preciziei obținute în metoda diferențelor finite.

Această metodă comportă și o variantă grafică evidentă, rezultată din transpunerea grafică a punctelor având coordonatele exprimate prin perechi (S_0, S_1) , pe axa absciselor fiind măsurat (S_0) , iar pe axa ordonatelor fiind măsurat S_1 .

b) Pentru determinarea succesivă a celorlalte niveluri extreme a fost necesară și întăbularea funcției $f_2(S) = -S + \ln(1+S)$ pentru $S \in [0, 1)$, în teză tabelul respectiv conținând un număr de 200 valori ale variabilei S . Dacă s-a determinat S_{j-1} din tabel rezultă $f_2(1/S_{j-1})$, se trece la tabelul anterior considerând $f_2(1/S_{j-1}) = f_1(1/S_j)$ și din acest tabel rezultă valoarea $1/S_j = (-1)^{j-1} S_j$.

Determinarea unui nivel extrem oarecare cînd se cunoaște nivelul extrem anterior necesită în acest fel două operații de interpolare.

Si această metodă are o variantă grafică în care cele două tabele sînt înlocuite prin două curbe, permițînd determinarea rapidă a nivelurilor extreme succesive. Avantajul metodei, față de metoda grafică similară a lui Mises este acela că aici cele două curbe sînt invariante de la problemă la problemă, se contruiesc o singură dată și în consecință se poate adopta o scară convenabilă suficient de mare, curbale fiind trasate prin puncte suficient de dese. În metoda Mises, bazată tot pe două curbe, acestea trebuie trasate separat pentru fiecare variantă de exploatare studiată, de fiecare dată trebuind să fie calculate și coordonatele respectivelor curbe, ceea ce îngreunează considerabil aplicarea metodei.

c) Prin aplicarea metodei anterioare pentru un număr suficient

Con. 10

de mare de valori ale parametrului (S_0) este posibil a se da un tabel unic, respectiv în varianta grafică o curbă unică, care să reprezinte direct dependența $S_{K+1} = f(S_K)$ valabil pentru $M = 1, 2, 3, \dots$. Cu ajutorul acestui tabel determinarea unui nivel extrem, dacă se cunoaște nivelul extrem anterior, se reduce la o singură operație de interpolare, însă construcția tabelului respectiv este ceva mai laborioasă decât a celorlalte două tabele anterioare.

d) Pe lângă metodele prezentate pînă aici, avînd la bază tabelele cu valori exacte, este important a se da și formule aproximative utilizabile în cazul în care lipsesc tabelele sau în cazul în care tratarea analitică solicită astfel de formule.

Avînd în vedere importanța lor practică, mulți cercetători au dat formule pentru primul nivel extrem, mai puțini pentru al doilea nivel extrem (primul minim de după primul maxim) și nici unul nu a dat formule pentru celelalte niveluri extreme.

Formulele aproximative date de literatura de specialitate sînt în exclusivitate formule de tip parabolic, care au un domeniu relativ restrîns de valabilitate. Aceasta apare clar dacă considerăm că $S_0 \rightarrow \infty$ atunci s-a arătat că $S_1 \rightarrow 1$ pe cînd formulele parabolice dau eronat $S_1 \rightarrow \infty$. Eroarea tuturor formulelor cunoscute crește odată cu densitatea inițială $|S_0|$. În teză se recomandă o formulă de alt tip care satisface condițiile soluției exacte la $S \rightarrow 0$ și $S_0 \rightarrow -\infty$ atât pentru funcție cît și pentru primele două derivate. După aproximări succesive în determinarea valorii numerice a parametrilor s-a propus formula :

$$S_1 = 1 - \frac{10}{7} \frac{(2,1 + S_0)(3 + \sqrt{-2S_0})}{(3 + 2\sqrt{-2S_0} - S_0)^2} \mathcal{H}(2,1 + S_0) \quad (6)$$

în care \mathcal{H} este funcția unitate a lui Heavyside, utilizată frecvent în special în teoria distribuțiilor.

Formula este valabilă pe întreg domeniul de variație al

Con 11

parametrului $S_0 \in (-\infty, 0]$. Coeficientul de corelație al acestei formule, calculat pentru un număr de 20 valori diferite ale parametrului inițial S_0 , acoperind întregul domeniu de definiție este de $r = 0,9995$ ceea ce indică o corelație excepțională, sau cu alte cuvinte, formula propusă exprimă fidel dependența exactă $S_1 = f(S_0)$. Eroarea relativă maximă a formulei este sub 5 ‰, însă pentru valorile uzuale ale parametrului S_0 nu depășește 2 ‰.

e) Pentru cel de al doilea nivel extrem, primul minim de după primul maxim, prin calcule analoge s-a ajuns la formula următoare:

$$S_2 = -\frac{3}{5} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \sqrt{-2S_0} - 4S_0} \right) \quad (7)$$

Eroarea relativă maximă este de sub 5 ‰, în cazuri uzuale nu depășește însă 1 ‰. Formula este valabilă pe întregul domeniu de definiție a variabilei $S_0 \in (-\infty, 0]$.

f) Utilizând procedeul expus de Kauderer în lucrarea / -K/, bazat pe dezvoltări în serie și rețeaua unui număr finit de termeni s-a obținut următoarea formulă extrem de simplă care leagă două niveluri extreme succesive :

$$|S_{k+1}| = \frac{|S_k|}{1 + \frac{2}{3} |S_k|} ; \text{sing } S_k = (-1)^{k-1} ; k=1,2,3,\dots \quad (8)$$

Eroarea acestei formule este sub 1 ‰ pentru $k = 3,4,5,\dots$, pentru $k = 2$ fiind recomandată formula anterioară care este mai precisă. Aplicând metoda inducției complete se poate obține o formulă care să permită calculul direct al nivelului extrem S_k în funcție direct de nivelul extrem S_1 , fără să mai fie necesară determinarea succesivă a nivelurilor intermediare. Aceasta este singura formulă de acest tip cunoscută în literatură de specialitate :

$$S_k = (-1)^{k-1} \frac{S_1}{1 + \frac{2(k-1)}{3} S_1} \quad (9)$$

4) Cvasi - semiperioade.*)

Problema determinării cvasi-semiperioadelor, adică a intervalelor de timp între două niveluri extreme succesive este relativ puțin studiată în literatura de specialitate; se poate afirma în acest sens că prezenta teză umple un gol. Formulele empirice existente, ca de exemplu formula Vogt, țin cont de alți parametri decât parametrul S_0 care, așa cum rezultă din modelul matematic este unicul parametru de care pot să depindă cvasi-semiperioadele. Calculele numerice la care se ajunge sînt laborioase și necesită experiență și cunoștințe în probleme de calcul numeric.

În esență determinarea cvasi-semiperioadelor necesită o a doua integrare a ecuației cvasi-oscilațiilor, ecuație neliniară a cărei soluție nu poate exprima sub formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare cunoscute. S-a procedat atunci la utilizarea metodelor numerice de integrare pentru un număr de 20 valori ale parametrului S_0 , acoperind domeniul de variație al acestui parametru. S-au ales două dintre metodele de integrare considerate în literatura matematică drept cele mai precise : metoda Simpson cu patru intervale și metoda Legendre cu un polinom de interpolare de gradul șapte. Deoarece nu existau date de comparație a fost necesar să se aplica ambele metode numerice pentru a avea un control relativ al rezultatelor și să nu risca obținerea unor rezultate eronate.

Principala dificultate în aplicarea metodelor numerice s-a datorat existenței singularităților de la extremitățile intervalelor de integrare în care viteza de mișcare a nivelului apei se anulează iar integranzii iau valori infinite. Pentru eliminarea

*) Conținutul acestui punct a făcut obiectul unui articol publicat în revista "Hidrotehnica", Nr. 5, 1973.

Gen. 13

singularităților s-au făcut substituțiile adecvate.

Se demonstrează pe cale teoretică faptul că metodele menționate conduc la erori relative de sub 1 % și acest lucru este confirmat de calculele numerice.

Este de menționat că este posibil să se găsească și anumite valori exacte ale cvasi-semiperioadelor. În cazul în care se consideră un proces de trecere la limită în care timpul crește nemărginit, pe măsura amortizării cvasi-oscilațiilor comportarea apei se apropie tot mai mult de a unui lichid ideal la care valoarea exactă a cvasi-semiperioadei este $T_{\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} T_K = \pi$

Trecând la limită și în cazul metodelor numerice se obțin următoarele valori limită ale cvasi-semiperioadelor :

- metoda Simpson $T_{\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} T_K = 3,1423$
- metoda Legendre $T_{\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} T_K = 3,14152$

Se constată că metodele dau valori foarte apropiate de valoarea exactă, în metoda Simpson eroarea relativă fiind de 0,043 %, iar în metoda Legendre de 0,001 %.

Un al doilea caz în care se cunoaște valoarea exactă a cvasi-semiperioadei este acela în care $S_0 \rightarrow 0$, în care caz, comportarea apei tinde de la început spre aceea a unui lichid ideal, iar valoarea exactă a primei cvasi-semiperioade este $T_1 = \frac{\pi}{2}$. Metodele de integrare folosite conduc la următoarele valori numerice :

- metoda Simpson $\lim_{S_0 \rightarrow 0} T_1 = 1,57315$
- metoda Legendre $\lim_{S_0 \rightarrow 0} T_1 = 1,57078$

Si în acest al doilea caz limită metodele dau valori foarte apropiate de valoarea exactă, în metoda Simpson eroarea relativă fiind de 0,14 %, iar în metoda Legendre eroarea relativă

Con. 14

fiind de 0,0013 %.

Calcululele numerice au fost efectuate numai pentru primele trei cvasi-semiperioade.

Prima cvasi-semiperioadă care de fapt este o cvasi-semiperioadă incompletă are valori cu atât mai mari decât $\frac{\pi}{2}$, cu cât parametrul $/S_0/$ are valori mai mari.

A doua cvasi-semiperioadă are de asemenea valori cu atât mai mari decât π cu cât parametrul $/S_0/$ are valori mai mari. Dintre toate cvasi-semiperioadele, această a doua are valoarea maximă după care valoarea cvasi-semiperioadelor descrește monoton spre valoarea limită $T_\infty = \pi$. Din această evoluție a cvasi-semiperioadelor rezultă concluzia că nu este potrivit pentru caracterizarea în timp a fenomenului cvasi-oscilatoriu să se utilizeze cvasi-perioadele, după cum este uzanța ci este recomandabil să se utilizeze cvasi-semiperioadele.

S-au calculat cvasi-semiperioadele și prin metoda Krilov-Begeliubov, programată la calculatorul "MIS", constatându-se că ea dă rezultate corespunzătoare numai pentru valorile parametrului inițial $/S_0/ < 0,5$.

Rezultatele anterioare au fost prelucrate în mod corespunzător în scopul de a se elabora formule de calcul a cvasi-semiperioadelor obținându-se în final următoarele formule :

$$T_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{42}{100} \sqrt{-2S_0} \tag{10}$$

$$T_k = \pi + \frac{42}{1000(k-1)} \sqrt{-2S_0} ; \quad k=2,3,4,\dots$$

Prima formulă conduce la un coeficient de corelație de peste 0,99 iar cea de a doua formulă la un coeficient de corelație de peste 0,98 ceea ce demonstrează faptul că ele aproximează în mod corespunzător fenomenul studiat.

Cen. 15

5. Legea cvasi-oscilațiilor.*)

În continuarea studiului fenomenului cvasi-oscilatoriu s-a mers în adâncime, cercetînd nu numai problema nivelurilor extreme și a momentelor în care ele se realizează, ci însăși legea cvasi-oscilațiilor $S = S(\zeta)$.

Este cunoscut că aceasta nu se poate exprima analitic cu ajutorul funcțiilor elementare uzuale. Drept date de referință, considerate certe s-au considerat datele publicate de profesorul Escande în lucrarea /1 -E/, date care au fost obținute la calculator și în plus au fost concludent verificate pe modelul mare de la Institutul de Electrotehnică din Toulouse.

Comparația între rezultatele Escande și rezultatele tezei s-a făcut totdeauna la momente reprezentînd un număr întreg de zecimi de cvasi-semiperioadă. Toate cvasi-semiperioadele analizate au fost împărțite într-un număr de zece sub-intervale egale comparația rezultatelor relative la niveluri, obținute prin diverse metode făcîndu-se la extremitățile acestor sub-intervale deci s-a utilizat o comparație discretă

Utilizarea metodelor clasice, cum sînt :

- metoda liniarizării (variantea Prașil) dă erori relative de pînă la 7 %, deși s-a considerat o mărime de referință relativ mare (suma amplitudinilor din cvasi-semiperioada respectivă) ceea ce conduce la erori relative mici (în celelalte paragrafe s-au luat drept mărime de referință numai una dintre amplitudinile din cvasi semi-perioada respectivă, ceea ce ar fi mărit în acest caz și mai mult eroarea relativă).

- metoda Krilov-Bogoliubov dă erori de pînă la 20 %, mărimea

*) Conținutul acestui punct a fost publicat într-un articol din revista "Hidrotehnica" Nr. 12 1973.

Con. 16

de referință fiind aceiași ca și în cazul metodei Pragil. Erorile maxime s-au obținut în momentele în care apa trece prin poziția de echilibru (nivelul hidrostatic).

Se vede că, deși s-au utilizat o mărime de referință mare, care micșorează în mod artificial valoarea erorii relative totuși acestea din urmă rămân inacceptabil de mari. Aceste rezultate au stimulat căutări noi pentru determinarea unor alte modele matematice pentru legea de oscilație. În acest scop s-a utilizat metoda variațională, în două variante, una care pornește de la un polinom trigonometric și alta care pornește de la un polinom algebric. Coeficienții acestor polinoame, inițial necunoscuți s-au determinat prin procedeul Ritz.

În varianta polinomului trigonometric se obține următoarea expresie care aproximează legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă :

$$S = S_0 + \frac{S_1 - S_0}{Z_1 - Z_0} (Z - Z_0) + \frac{Z_1 - Z_0}{8\pi} \sqrt{-2S_0} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{Z_1 - Z_0} (Z - Z_0) - \frac{S_1 - S_0}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k} \sin \frac{2k\pi}{Z_1 - Z_0} (Z - Z_0) \quad (11)$$

Expresia de mai sus a fost prelucrată astfel încît să permită o determinare rapidă a nivelului S în momente reprezentînd zecimi de cvasi-semiperioadă. Notînd cu Z_{Ij} nivelul apei corespunzător zecimii j a primei cvasi-semiperioade, s-a obținut următoarea relație simplă :

$$Z_{Ij} = \alpha_j \sqrt{-2Z_0 Z_*} + \beta_j Z_0 + \gamma_j Z_1 ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (12)$$

În care coeficienții $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ au marele avantaj al invarianței în raport cu caracteristicile amenajării și în consecință au fost întabelați, tabelul respectiv fiind utilizabil pentru orice nivel de echilibru simplu. Evident, tabelul s-ar putea extinde

la nevoie pentru sutimi de cvasi-semiperioadă și nu numai pentru zecimi.

Tot în cadrul variantei care pornește de la un polinom trigonometric, pentru toate celelalte perioade, de indice generic $K = \text{II}, \text{III}, \text{IV} \dots$ se obține următoarea formulă tip foarte simplă :

$$\begin{aligned} z_{kj} &= A_j z_k + B_j z_{k+1} & K &= \text{II}, \text{III}, \text{IV} \dots \\ & & l &= 0, 1, 2 \dots, 10 \end{aligned} \quad (12)$$

în care A_j, B_j , invarianți atât în raport cu caracteristicile amenajării au fost întabelați în teză.

În varianta care pornește de la un polinom algebric se obține legea de oscilație în prima cvasi-semiperioadă sub următoarea formă :

$$z = z_0 + \sqrt{-2z_0 z_x} \frac{t-t_0}{T_x} - \frac{1}{6} \sqrt{-2z_0 z_x} \left(\frac{t-t_0}{T_x} \right)^3 + \left(\frac{t-t_0}{T_x} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{t-t_0}{T_x} \right)^k \quad (13)$$

Si această expresie a fost prelucrată pentru a permite determinarea rapidă a nivelului apei la momente reprezentînd zecimi de cvasi-semiperioadă. Notînd cu z_{1j} nivelul apei corespunzător zecimii j din prima cvasi-semiperioadă se obține formula :

$$z_{1j} = z_0 + j \frac{T_1}{10} \sqrt{-2z_0 z_x} - \frac{1}{6} \left(j \frac{T_1}{10} \right)^3 \sqrt{-2z_0 z_x} + \left(\frac{j}{10} \right)^5 \sum_{k=0}^3 A_k \left(\frac{j}{10} \right)^k \quad (14)$$

În expresia de mai sus coeficienții A_k se calculează cu formulele

$$\begin{aligned} A_0 &= 56(z_i - z_0) - 3T_1^2 z_i - 35T_1 \sqrt{-2z_0 z_x} + \frac{5}{3} T_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} \\ A_1 &= -140(z_i - z_0) + 85T_1^2 z_i + 84T_1 \sqrt{-2z_0 z_x} - \frac{10}{3} T_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} \\ A_2 &= 120(z_i - z_0) - 8T_1^2 z_i - 70T_1 \sqrt{-2z_0 z_x} + 25T_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} \\ A_3 &= -35(z_i - z_0) + 25T_1^2 z_i + 20T_1 \sqrt{-2z_0 z_x} - \frac{2}{3} T_1^3 \sqrt{-2z_0 z_x} \end{aligned} \quad (15)$$

Tot în varianta care pornește de la un polinom algebric s-a stabilit și o formulă care să permită calculul nivelului apei în momente reprezentând secimi de cvasi-semiperioadă. Este interesant de menționat că se obține o formulă avînd o structură identică cu cea obținută în varianta care pornește de la un polinom trigonometric :

$$Z_{kj} = C_j Z_k + D_j Z_{k+1} \quad (16)$$

unde coeficienții C_j , D_j sînt de asemenea invarianți atît cu caracteristicile amenajării cît și cu numărul cvasi-semiperioadei și în consecință au putut fi ^{înscrise} în tabel. Cele două variante, polinom trigonometric și polinom algebric, nu conduc la coeficienți identici de aceea și rezultatele sînt puțin diferite.

Astfel în prima cvasi-semiperioadă varianta polinomului trigonometric conduce la erori relative maxime de 18 % față de valorile de referință Escande, mărimea de referință fiind suma modulelor nivelelor extreme $|Z_0| + |Z_1|$. În varianta polinomului algebric se obține o concordanță excepțională, eroarea maximă relativă față de aceleași valori de referință fiind de 0,6 %, mărimea de referință fiind aceeași.

În cea de a doua cvasi-semiperioadă, eroarea maximă relativă în metoda polinomului trigonometric scade pînă la 9,24 %, iar în metoda polinomului algebric eroarea relativă maximă crește pînă la 5 %, mărimea de referință fiind suma modulelor extreme $|Z_1| + |Z_2|$.

În cea de a treia cvasi-semiperioadă, eroarea maximă relativă în metoda polinomului trigonometric scade pînă la 5 %, iar în metoda poligonului algebric pînă la 4,6 %.

Concluzia, care se desprinde în final și în urma altor verificări este că cu cît $|S|$ este mai mare cu atît în primele

Con. 19

două cvasi-semiperioade, Varianta polinomului algebric conduce la rezultate mai bune decât cea a polinomului trigonometric, din a treia cvasi-semiperioadă erorile celor două variante sînt de același ordin de mărime.

Această comparare a metodelor este însă parțială, elementul care ar trebui să indice superioritatea uneia sau a alteia din variante ar trebui să fie distanța de la punctul respectiv la graficul legii de oscilație. Din reprezentările grafice, considerînd și pe cele din partea F se constată că superioritatea variantei polinom algebric în primele două cvasi-semiperioade nu mai este atât de categorică, punctele celor două metode fiind la distanțe sensibil egale de graficul legii de oscilație.

B. Deschiderea totală bruscă și stabilitatea.

6. Modelul matematic.*)

S-a obținut modelul matematic al fenomenului cvasi-oscilațiilor în masă ale apei utilizînd atât ecuația lui Bernoulli (calea clasică, prezentată în toate tratatele de specialitate) cît și metoda variațională.

Si în acest caz ca și în cazul închiderii totale, cele două metode conduc la același model matematic, făcîndu-se în plus și o verificare printr-o a treia metodă, abstractă de analiză funcțională.

Se utilizează același sistem al mărimilor de referință ca și în cazul închiderii totale, rezultînd în final că există, ca și în cazul închiderii totale un singur parametru adimensional caracteristic, notat inițial cu α și definit prin relația :

*) Utilizarea metodei variaționale de obținere a modelului matematic a fost expusă într-un articol publicat în "Studii și cercetări de mecanică aplicată" Nr. 4, 1973, tom. 32.

Con. 2o

$$\alpha = \frac{KN}{2SgFH_{br}} \sqrt{\frac{f}{gLF}} = \frac{NT_*}{2SgFH_{br}Z_*} = -v_* \frac{T_*}{Z_*} \quad (17)$$

Acestui parametru i s-au dat și următoarele două interpretări fizice :

- a) din relația (17) rezultă că α reprezintă viteza inițială de mișcare a apei în castelul de echilibru (evident adimensionalizată) luată cu semn schimbat.
- b) $\alpha \cong \sqrt{-2S_\infty}$, în care S_∞ este nivelul corespunzător regimului permanent, în jurul căruia se produc oscilațiile nivelului de apă în castelul de echilibru și care corespunde poziției de echilibru a sistemului.

În modelarea hidraulică parametrul α are rolul criteriumului determinat de similitudine, rolul lui fiind similar cu al parametrului S_∞ din cazul închiderii totale rapide. Se menționează că relațiile la care conduce criteriul $\alpha = \text{idem}$ sînt identice cu acelea la care conduce criteriul $S_\infty = \text{idem}$, astfel încît un model care a fost realizat pentru închiderea totală poate fi utilizat și pentru deschiderea totală bruscă.

Cu unele ipoteze simplificatoare, modelul matematic sub formă diferențială este, în intervalul de timp de la deschiderea bruscă și pînă la atingerea nivelului minim :

$$\frac{d^2 S}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dS}{d\tau} \right)^2 + \alpha \frac{dS}{d\tau} + S + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \quad (18)$$

cu condițiile inițiale de tip Cauchy :

$$\tau = \tau_0 \implies S = 0$$

$$\frac{dS}{d\tau} = -\alpha$$

Se menționează că modelul matematic la deschiderea totală este mai complex decît modelul matematic la închiderea totală.

Ceea ce este deosebit de important este faptul că acest model nu mai permite a se face substituțiile din cazul închiderii totale datorită cărera în acel caz a fost posibilă o primă integrare de aceea dezvoltări matematice ulterioare analoge cu cele de la închiderea bruscă sînt imposibile.

7. Saltul minim. *)

Se justifică în cadrul tezei printr-o analiză critică a formulelor existente necesitatea elaborării unei noi formule de calcul a saltului minim. În esență, este vorba de faptul că formulele recomandate de literatura de specialitate ca fiind cele mai bune, formulele Calame - Gaden și Axness, au un domeniu redus de valabilitate.

Pentru obținerea unei noi formule s-a utilizat mai întîi metoda de integrare Krilov - Bogoliubov. Parametrii numerici astfel obținuți au fost corecțați utilizînd în acest scop condiții funcționale cît și calcule numerice de ajustare. S-a ajuns în final la următoarea formă finală a formulei pentru calculul saltului minim :

$$S_{\min} = S_{\infty} - \frac{\sqrt{-2S_{\infty}}}{1 + 0,35\sqrt{-2S_{\infty}} - S_{\infty}} \quad (20)$$

Formula de mai sus permite o discuție interesantă, în același timp originală, legată de diferența între S_{\min} , correspondentul adimensional al cotei nivelului minim și S_{∞} , correspondentul adimensional al cotei nivelului de regim permanent.

Se constată că $S_{\infty} \rightarrow 0$ și $S_{\infty} \rightarrow \infty$ face ca valoarea fracției din expresia de mai sus a saltului minim să tindă la zero. Rezultă atunci că există o anumită valoare a lui S_{∞} , respectiv a lui Z_{∞} , astfel încît valoarea fracției să fie maximă, sau, echivalent,

*) Conținutul acestui punct a fost publicat într-un articol din revista "Hidrotehnica" Nr. 7, 1973.

modulul diferenței dintre S_{\min} și S_{∞} , să fie maxim. Se demonstrează că această valoare a lui S_{∞} care realizează această condiție este tocmai valoarea $S_{\infty} = -1$, sau $|Z_{\infty}| = Z^*$.

Apare aici un fenomen similar rezonanței, diferența maximă obținându-se tocmai atunci când parametrul $|Z_{\infty}|$ caracteristic pentru pierderile de energie în regim permanent este egal cu parametrul Z^* , care caracterizează amenajarea în mod complex. Este interesant de semnalat că deși nici Axness și nici Calame - Gaden nu au sesizat această proprietate a saltului minim totuși, formulele lor dau valori identice numai pentru această valoare specială $S_{\infty} = -1$, (evident pe lângă valoarea $S_{\infty} = 0$ pentru care ambele formule dau $S_{\min} = 0$, acesta fiind cazul care, din punct de vedere fizic semnifică lipsa unei manevre de deschidere bruscă).

În cadrul paragrafului respectiv formula a fost testată prin comparație cu formula Axness pentru douăzeci de valori ale lui S_{∞} ; de asemenea s-a făcut comparația cu exemple de calcul date de Escande, Calame - Gaden și M. Popescu.

În toate cazurile, formula propusă în teză a condus la rezultate foarte apropiate de ale celorlalți cercetători.

8. Stabilitatea la mici oscilații.*)

Din punct de vedere matematic stabilitatea la mici oscilații revine la studiul stabilității în primă aproximație. În esență aceasta se face prin liniarizarea modelului matematic, liniarizare ce se realizează prin dezvoltarea în serie McLaurin a termenilor neliniari cu reținerea doar a primilor termeni, lucru permis având în vedere faptul că oscilațiile sînt mici.

*) Utilizarea metodei funcției lui Liapunov și concluziile respective au fost comunicate în cadrul "Seminarelui Național de Hidraulică aplicată", 1-3 noiembrie, 1973 Timișoara și publicate în rezumat în volumul respectiv.

Utilizând substituția clasică $\psi = \mathcal{E} - \mathcal{E}_\infty$ se obține ecuația mișcării perturbate, a cărei stabilitate se studiază utilizând metoda uzuală a rădăcinilor caracteristice.

Corectitudinea calculelor efectuate folosind modelul adimensional uzual în cadrul tezei rezultă din aceea că se obțin în final cele două criterii cunoscute :

a) $-\mathcal{Z}_\infty < \frac{1}{3} H_{br}$, condiție totdeauna realizată în amenajările hidroenergetice din motive economice

$$b) F > F_{Th} = \frac{df}{\lambda_e (H_{br} + \mathcal{Z}_\infty)} , \text{ condiția Thema.} \quad (21)$$

Pînă la acest punct teza nu conține contribuții originale în problema stabilității demne de a fi menționate, această parte a fost inclusă pentru a dovedi corectitudinea modelului matematic adimensional utilizat și faptul că prin utilizarea acestui model se pot obține rezultate corecte din punctul de vedere al stabilității.

Stabilitatea la mici oscilații a fost studiată și printr-o altă metodă matematică, metoda funcției Liapunov pe care autorul nu a întâlnit-o încă aplicată în studiul stabilității castelelor de echilibru. S-a încercat să se dea și o interpretare fizică funcției lui Liapunov. Anume, avînd în vedere că suma energiilor cinetică și potențială a sistemului oscilant este o funcție pozitiv definită, care descrește în mod monoton, s-a căutat funcția Liapunov astfel ca derivata acestei funcții în virtutea sistemului de ecuații diferențiale să fie egală cu această sumă luată cu semn schimbat.

$$\frac{dv}{d\tau} = \mathcal{E} = \psi^2 + v^2 \quad (22)$$

S-a găsit în final următoarea expresie a funcției Liapunov :

$$v = \frac{(1-a^2b)(2-a^2b)\psi^2 + [a(1-b)\psi + v]^2 + (1-a^2b)v^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \quad (23)$$

in care a și b sînt parametrii constanți, adimensionali, depinzînd de caracteristicile principale ale instalației, ψ reprezintă corespondentul adimensional al cotei nivelului apei în castel, iar γ corespondentul adimensional al vitezei de mișcare a apei în castel. Se obțin pe această cale următoarele două condiții de stabilitate :

$$\begin{aligned} a(1-b) &> 0 \\ 1 - a^2b &> 0 \end{aligned} \tag{24}$$

care prelucrate în mod adecvat, se pot aduce la forma condițiilor anterior determinate, date în relațiile (21).

Metoda funcției Liapunov s-a dovedit utilă pentru stabilirea unor rezultate noi, concretizate atît în cîteva inegalități energetice noi cît și în posibilitatea determinării unui interval în care se găsește coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor.

Notînd cu \mathcal{E} , energia mișcării oscilatorie (adimensional) în momentul \mathcal{Z}_1 (adimensional) în care nivelul apei în castel atinge nivelul maxim se obține următoarea evaluare a variației în timp a energiei mișcării cvasi-oscilatorii :

$$\frac{k^2}{\lambda_2} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_1}{\lambda_1}} \leq \mathcal{E} \leq \frac{k^2}{\lambda_1} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_1}{\lambda_2}} \tag{25}$$

în care λ_1, λ_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice iar k o constantă determinată. Se poate face o evaluare în timp a evoluției nivelurilor extreme :

$$\frac{k}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-\frac{\mathcal{Z}_j-\mathcal{Z}_1}{2\lambda_1}} \leq \left| \frac{\psi_j}{\psi_1} \right| \leq \frac{k}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\frac{\mathcal{Z}_j-\mathcal{Z}_1}{2\lambda_2}} \tag{26}$$

Introducînd decrementul logaritmic ca logaritmul natural al raportului a două niveluri extreme succesive de același sens și ținînd cont și de faptul că $\mathcal{Z}_{j+2}-\mathcal{Z} \cong 2\pi$ se obține evaluarea :

$$\begin{aligned} \delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max} \quad ; \quad \delta &= \ln \frac{\psi_j}{\psi_{j+2}} \\ \delta_{min} \cong \frac{\pi}{\lambda_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{k^2} \quad ; \quad \delta_{max} &= \frac{\pi}{\lambda_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{k^2} \end{aligned} \tag{27}$$

Considerînd că în cazul amortizării neliniare nivelele maxime respectiv minime se găsesc pe curbe înfăgurătoare de ecuație $\pm A e^{-\alpha \frac{(t-t_0)}{T_*}} [1 - J]$, / 7 -B/ ca și în cazul amortizării liniare și utilizînd relația care există în acest ultim caz între factorul de amortizare α și decrementul logaritmic se ajunge la:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}; \quad \alpha = \frac{\delta}{t_{j+2} - t_j} \quad (25)$$

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2T_*} \left[\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{T_{j+2} - T_j} \ln \frac{\lambda_1}{k^2} \right]; \quad \alpha_{\max} = \frac{1}{2T_*} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{T_{j+2} - T_j} \ln \frac{\lambda_2}{k^2} \right]$$

În fine o ultimă inegalitate s-a stabilit cu privire la coeficientul de siguranță la stabilitate, notat „n” și definit cu raportul între secțiunea transversală adoptată pentru castelul de echilibru și secțiunea transversală minimă a acestui castel, dată de condiția Thoma.

Introducînd parametrul β_{Th} prin relația :

$$\beta_{Th} = \frac{-Z_0}{\omega_0 \sqrt{\frac{L f}{g F_{Th}}}} \quad (\text{notat de Jäger cu } p_{01}) \quad (29)$$

se obțin următoarele inegalități pentru decrementul logaritmic :

$$\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$$

$$\delta_{\min} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \frac{(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th}}{2 + (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th}} - \frac{1}{4} (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th} \quad (30)$$

$$\delta_{\max} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \frac{(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th}}{2 - (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th}} + \frac{1}{4} (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \beta_{Th}$$

Comparînd cele de mai sus cu expresia Jäger :

$$\delta_J = 2\pi p_{01} (\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \frac{1}{\sqrt{1 - p_{01}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \quad (31)$$

se găsește că expresia δ_J de mai sus este necorespunzătoare deoarece $\delta_J > \delta_{\max}$, Aceasta explică și faptul că după cum arată însuși autorul respectivei lucrări / 1 - J / , măsurătorile efectuate în natură și pe modele au condus la concluzia că relația (31) nu

este acoperitoare (fără însă a se cita și rezultate numerice).

9. Stabilitatea la mari oscilații.

Studiul stabilității la mari oscilații necesită utilizarea modelului matematic neliniarizat, fiind în consecință mai dificil. Concluziile din literatura de specialitate menționează faptul că în acest caz asigurarea stabilității necesită condiții mai restrictive față de cea a lui Thomas. Această concluzie a condus pe unii cercetători la recomandarea unor valori exagerat de mari pentru coeficientul de siguranță la stabilitate n .

Pe baza studiului întreprins în teză se ajunge la concluzia că dacă se modifică expresia Thoma în sensul înlocuirii termenului Z_{∞} , reprezentând nivelul de regim cu termenul Z_{\min} , reprezentând saltul minim se asigură și stabilitatea la mari oscilații. Se propune în consecință respectarea condiției

$$F > F_A = \frac{df}{\lambda_e (H + Z_{\min})} \quad (32)$$

Pe baza formulei proprii stabilită pentru calculul lui Z_{\min} se poate ajunge la următoarea condiție pentru coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor :

$$n = \frac{F}{F_{Th}} > \frac{F_A}{F_{Th}} = \frac{1}{1 - 0,565 \frac{Z^*}{H + Z_{\infty}}} \approx 1 + 0,6 \frac{Z^*}{H + Z_{\infty}} \quad (33)$$

Expresia la care s-a ajuns nu este departe de expresia recomandată de Jaeger :

$$n = \frac{F}{F_{Th}} > \frac{F_T}{F_{Th}} = 1 + 0,482 \frac{Z^*}{H + Z_{\infty}} \quad (34)$$

rezultând că un coeficient de siguranță mai mare decât 1,6 este suficient pentru a asigura stabilitatea la mari oscilații.

În fine s-a cercetat problema stabilirii unei granițe precise care să permită să se precizeze când avem de-a face cu

cazul micilor oscilațiuni și cînd este necesar a se considera cazul marilor oscilațiuni.

S-a ajuns la concluzia că în cazul în care denivelarea corespunzătoare regimului permanent reprezintă pînă la 5 % din căderea centralei oscilațiile pot fi cu certitudine considerate ca fiind oscilații mici iar în cazul că această condiție nu este satisfăcută nu se poate preciza cu certitudine dacă oscilațiile se consideră mici sau mari.

C. Manevre parțiale unice și succesive.

1e. Manevra parțială unică (închidere bruscă, deschidere bruscă. *)

S-a stabilit modelul matematic al fenomenului cvasi-oscilaționar care ia naștere ca urmare a unei manevre parțiale, atât prin metoda clasică bazată pe utilizarea ecuației lui Bernoulli cît și prin metoda variațională, metodă originală, ajungîndu-se la aceleași expresii adimensionale.

Se utilizează metoda Krilov - Bogoliutov cu anumite prelucrări suplimentare în scopul obținerii unor formule, utilizabile în proiectare.

În cazul închiderii bruște dacă se trece de la puterea N la puterea δN s-a obținut următoarea formulă pentru saltul maxim parțial :

$$S_{1p} = \delta^2 S_0 + \frac{(1-\delta) \left[1 + \frac{3}{4} (1+\delta)^2 (\sqrt{-2S_0})^2 \right] \sqrt{-2S_0}}{1 + \frac{2(1-\delta) \left[1 + \frac{3}{8} (1+\delta)^2 (\sqrt{-2S_0})^2 \right] \sqrt{-2S_0}}{3}} \quad (35)$$

În cazul particularizării pentru cazul manevrei de închidere totală $\delta = 0$ se obține următoarea nouă formulă pentru calculul saltului maxim :

*) Obținerea modelului matematic prin utilizarea metodei variaționale a fost publicată în revista "Studii și cercetări de mecanică aplicată", Nr.4, 1973.

$$S_1 = \frac{(1 - \frac{2}{3} S_0) \sqrt{-2 S_0}}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{-2 S_0} - \frac{3}{2} S_0 \sqrt{-2 S_0}} \quad (36)$$

Fără de rezultatele exacte, întabelate în cadrul unui alt capitol al tezei, formula dă erori relative ce nu depășesc 3 % în cazurile uzuale

Pentru cealaltă valoare extremă a parametrului $\delta = 1$ (manevra nulă) se obține valoarea exactă $S_{1p} = S_0$, ceea ce constituie o verificare parțială. Având în vedere și modul în care a fost obținută formula este permis să se postuleze valabilitatea formulei și pentru valori intermediare ale parametrului δ .

În cazul deschiderii parțiale bruște, dacă se trece de la puterea nulă la puterea δN s-a obținut următoarea formulă pentru saltul minim parțial :

$$S_{1p} = \delta^2 S_\infty - \frac{\delta \sqrt{-2 S_\infty}}{1 + 0,35 \delta \sqrt{-2 S_\infty} - \delta^2 S_\infty} \quad (37)$$

În cazul particularizării pentru cazul manevrei de deschidere totală, $\delta = 1$ se obține chiar formula respectivă prezentată la punctul respectiv. Pentru cealaltă valoare extremă a parametrului $\delta = 0$, (manevra nulă) se obține valoarea exactă $S_{1p} = 0$.

Aceste rezultate la limitele intervalului de variație ale parametrului δ permit, având în vedere și modul în care a fost obținută formula, să se postuleze valabilitatea formulei și pentru valori intermediare ale parametrului .

11. Două manevre succesive.

S-a studiat în cadrul tezei și cazul a două manevre succesive, considerând că :

- în cazul închiderii succesive periculoasă considerată de două manevre succesive se compune dintr-o manevră de închidere parțială în urma căreia nivelul apei crește în castelul de echilibru.

În momentul în care nivelul apei în castelul de echilibru atinge nivelul maxim în urma acestei manevre parțiale se produce o a doua manevră de închidere totală în urma căreia nivelul apei suferă o nouă creștere în castelul de echilibru.

- În cazul deschiderii succesiunea periculoasă considerată de două manevre succesive se compune dintr-o manevră de deschidere parțială în urma căreia nivelul apei scade în castelul de echilibru.

În momentul în care nivelul apei scade în castelul de echilibru atinge nivelul minim în urma acestei manevre parțiale se produce o a doua manevră de deschidere totală în urma căreia nivelul apei coboară din nou în castelul de echilibru.

Rezultă ca o primă concluzie generală faptul că în cazul manevrei de închidere totală, fragmentarea prin cele două manevre considerate conduce la salturi maxime mai mici decât saltul maxim la închiderea totală unică. O a doua concluzie generală se referă la faptul că variația saltului maxim cu parametrul ζ este o variație lentă, ceea ce poate explica întrucâtva faptul că existența unui timp de închidere diferit de zero, nu are o influență importantă asupra valorii saltului maxim, acest fapt fiind confirmat de rezultatele obținute de Nagel (natură), Escande (laborator), Calame - Gaden (închidere liniară - calcul). În fine o altă concluzie se referă la faptul că scăderea cea mai mare a saltului maxim se obține pentru valoarea $\zeta = 0,5$, cu alte cuvinte pentru situația în care se execută două manevre care reduc în mod egal puterea.

În cazul deschiderii totale se ajunge la concluzia că situația cea mai defavorabilă corespunde manevrei unice totale, însă în acest caz influența parametrului ζ asupra saltului ^{minim} ~~minim~~ _{mare} este mai mare. Acesta conduce la interpretarea că în cazul deschiderii, timpul de manevră al vanei are o importanță mai mare decât în cazul închiderii totale. În fine și în acest caz scăderea cea mai mare a saltu-

lui minim se obține pentru valoarea $\delta = 0,5$, scăderea mergând pînă la 35 %.

D. Castele de echilibru perfect pneumatice.

12. Inchiderea totală bruscă - niveluri extreme.

Castelele de echilibru perfect pneumatice au fost denumite acele castele la care partea superioară cu aer este închisă etanș. In cazul acestui tip de castele la amortizarea oscilațiilor contribuie atât disiparea de energie în lichid cît și în aer.

Modelul matematic al mișcării, în aceleași coordonate adimensionale constituie o generalizare a celui de la castelele simple

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| \frac{d\xi}{d\tau} + \xi + \frac{\mu(\xi - \xi_0)}{\delta - \xi} \quad (38)$$

cu condițiile inițiale :

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \xi = \xi_0$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{-2\xi_0}$$

Obținerea acestui model s-a făcut atât pe calea clasică utilizînd ecuația Bernoulli cît și prin metoda variațională.

Apar la acest castel de echilibru un număr de doi parametri adimensionali suplimentari :

- un parametru care indică importanța relativă a presiunii atmosferice pentru sistemul oscilant :

$$\mu = \frac{p_{at}}{\gamma Z_*} \quad (39)$$

- un parametru care indică importanța relativă a volumului de aer

$$\delta = \frac{k F}{Z_*} \quad (40)$$

Nivelul ξ_0 (adimensional) în jurul căruia se desfășoară procesul oscilatoriu și care reprezintă poziția finală a acestui nivel se calculează din ecuația (38) în care se face $\frac{d\xi}{d\tau} = 0$, $\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0$

$$\mathcal{S}_\infty + \frac{M(\mathcal{S}_\infty - \mathcal{S}_0)}{\delta - \mathcal{S}_\infty} = 0, \quad \mathcal{S}_\infty < 0 \quad (41)$$

Făcînd substituția $\psi = \mathcal{S} - \mathcal{S}_\infty$, care mută originea axei Oz în dreptul acestui nivel asimptotic se demonstrează în teză că nivelul maxim ψ_1 satisface o ecuație formal identică cu cea din cazul castelelor simple cu deosebire că în locul necunoscutei \mathcal{S}_1 apare necunoscuta ψ_1 iar în locul parametrului \mathcal{S}_0 apare parametrul \mathcal{C}_0 :

$$\psi_1 + \ln(1 - \psi_1) = \mathcal{C}_0$$

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_\infty + \ln \left\{ 1 - \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\infty + \frac{\mathcal{S}_0}{1 + \frac{M(\delta - \mathcal{S}_0)}{(\delta - \mathcal{S}_\infty)^2} \left[1 - \frac{2}{\delta - \mathcal{S}_\infty} + \frac{6}{(\delta - \mathcal{S}_\infty)^2} \right]} \right\} \quad (42)$$

Rezultă atunci că tabelele, formulele aproximative stabilite pentru soluționarea acestei ecuații la castelele de echilibru simple se pot transpune direct în cazul castelelor de echilibru perfect pneumatice.^{x)}

Se demonstrează în teză că această transpunere se poate realiza și pentru toate celelalte niveluri extreme succesive.

E. Castele parțial pneumatice și exponențiale.

13. Castele parțial pneumatice - saltul maxim.

În cazul castelelor parțial pneumatice, adică al castelelor la care camera superioară cu aer este prevăzută cu mici orificii sau ajutaje în contact cu aerul atmosferic s-a indicat metoda de rezolvare teoretică, fără însă a se compara rezultatele teoretice cu cele experimentale.

După utilizarea cîtorva ipoteze simplificatoare se ajunge la o ecuație similară cu cea din cazul castelelor perfect pneumatice, valabilă în prima cvasi-semiperioadă :

$$\frac{d^2 \mathcal{S}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{S}}{d\tau} \right)^2 + \mathcal{S} + M' \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_0}{\delta - \mathcal{S}} = 0 \quad (43)$$

^{x)} Aceste castele au fost prezentate de autor într-o comunicare susținută în cadrul subsecției B „Lucrări hidraulice și instalații” a sesiunii de Comunicări Științifice organizată de Institutul de Construcții București, în aprilie 1973.

cu condițiile inițiale :

$$\zeta = \zeta_0 \Rightarrow S = S_0$$

$$\frac{dS}{d\zeta} = \sqrt{-2S_0}$$

Se observă că în acst caz problema este, ca și în cazul castelelor perfect pneumatice funcție tot de doi parametri suplimentari, dar M' este de această dată un parametru mai complicat care ține cont de viteza medie de ridicare a nivelului apei în castel și de debitul mediu gravimetric al aerului care iese din castel în prima cvasi-semiperioadă.

Determinarea apriorică a acestor valori medii nu este clarificată în cadrul tezei, rezolvarea problemei necesitând studii ulterioare.

Cercetările experimentale personale prezentate au pus în evidență avantajele deosebite ale acestui tip de castele în ceea ce privește amplitudinea oscilațiilor de nivel și durata totală de amortizare. Datorită prezenței orificiilor mișcarea capătă un pronunțat caracter aperiodic, pe model după două-trei oscilații mișcarea și-a pierdut caracterul oscilatoriu. După cum este cunoscut această evoluție a cvasi-oscilațiilor este caracteristică în general sistemelor oscilante cu amortizare puternică. Din acest punct de vedere, al duratei totale, castelele de echilibru parțial pneumatice sînt superioare castelelor de echilibru perfect pneumatice și castelelor de echilibru simple. Tot în cercetările experimentale s-a constatat că în acest caz cvasi-semiperioadele ^{relativ} cresc în loc să scadă, ca în cazul castelelor simple.

Deși efectul curgerii aerului prin orificii (ajutaje) este analog efectului rezistențelor suplimentare sau al diafragmei montate la baza castelului, în punctul de racordare cu galeria de aducțiune există două avantaje evidente în favoarea orificiilor cu aer :

1) aceste orificii intră în funcțiune treptat, debitul lor

fiind maxim atunci cînd nivelul apei se apropie de nivelul maxim pe cînd diafragma sau rezistențele suplimentare intră în funcție brusc, atunci cînd nivelul apei începe să crească să înregistrează aici debitul maxim. Aceasta face ca să nu se înrăutățească condițiile de preluare a loviturii de berbec de către castelele cu orificii cu aer, în schimb rezistențele suplimentare sau diafragma permit pătrunderea în galerie a unor suprapresiuni din lovitura de berbec.

2) debitul maxim al aerului este limitat la debitul critic și aici nu apar probleme de cavitație sau de vibrații cum apar în cazul utilizării rezistențelor suplimentare sau al diaframelor.

În ceea ce privește castelele de echilibru parțial pneumatice contribuția adusă în cadrul tezei se referă nu atât la aspectul teoretic, analitic al problemei ci la sesizarea avantajelor deosebite pe care le prezintă acest tip de castele și la demonstrarea acestor avantaje prin cercetări experimentale.*)

13. Castele cu secțiune exponențial variabilă - saltul maxim.

Castelele de echilibru exponențial cu secțiune exponențial stabile sînt un tip special de castele de echilibru la care se poate determina saltul maxim și în continuare și celelalte elemente hidraulice, pe baza aceleiași metode utilizate în cazul castelilor de echilibru simple. Mai mult, ele sînt singurele castele cu secțiune variabilă la care se poate aplica direct această metodă. În lucrările / T-B /, / 13- C /, / 1 - P / s-au studiat castele tronconice, s-au dat algoritme pentru castele cu secțiune variabilă după o lege oarecare dar nu s-au dat relații analitice sau diagrame care să permită direct determinarea saltului maxim în funcție de denivelarea inițială a nivelului apei în castel.

Intrucît denumirea dată acestor castele aparține autorului

*) Aceste castele au fost prezentate de autor într-o comunicare susținută în cadrul „Seminariului național de hidraulică aplicată” Timișoara, 4-3 noiembrie 1973, organizat de Institutul Politehnic „Traian Vuia”, catedra construcții hidrotehnice și Îmbunătățiri funciare.

se menționează că aria acestor castele variază după legea :

$$\varphi = \frac{F_0}{F} = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) e^{\alpha(\xi_0 - \xi)} + \frac{1}{2\alpha} \quad (44)$$

în care α este un parametru dimensional.

Modelul matematic al cvasi-oscilațiilor ce iau naștere la închiderea totală bruscă este :

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \varphi \xi = 0; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \quad (45)$$

cu condițiile inițiale :

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \xi = \xi_0$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{-2\xi}$$

Trasând efectiv câteva astfel de castele se constată că ele nu diferă substanțial de castelele tronconice.

La aceste castele, ca și la castelele de secțiune constantă simple este posibil de a se efectua o primă integrare a ecuației diferențiale de ordinul doi și în urma acestei integrări se obține ecuația transcendentă care permite determinarea saltului maxim :

$$(1 - 2\alpha\xi_1) e^{2\alpha(\xi_1 - \xi_0)} + 4(2\alpha - 1)(1 - \alpha\xi_1) e^{\alpha(\xi_1 - \xi_0)} = 8\alpha - 3 + 2\alpha\xi_0 (2\alpha - 1)^2 \quad (46)$$

S-a rezolvat prin încercări ecuația de mai sus pentru următoarele valori ale parametrului α :

$\alpha = \frac{1}{2}$ (castele simple), $\alpha = 1$; $\alpha = 2$; $\alpha = 5$; $\alpha \rightarrow \infty$ și s-au dat tabelele și reprezentările grafice respective. Pentru valori intermediare ale parametrului α se poate interpola liniar. Se observă că în problema studiată apar doi parametri de bază (ξ, α), în ordinea complexității acesta fiind cazul care ar urma castelelor

de echilibru simple în care apare un parametru (ξ_0) și abea la sfârșit ar urma castelele perfect și parțial pneumatice la care intervin trei parametri de bază (ξ_0, μ, δ).

F. Verificări ale rezultatelor teoretice stabilite în cadrul tezei.

14. Verificări bazate pe rezultatele altor cercetări.

În cadrul tezei, pînă în prezent s-au utilizat unele rezultate stabilite de alți cercetători Escande, Calame - Gaden, Axnes. Deși verificările respective au fost concludente am considerat necesară efectuarea unor verificări detaliate, sistematice a rezultatelor teoretice obținute în cadrul tezei, deoarece acolo unele rezultate au fost utilizate chiar la definitivarea formulelor. S-au ales rezultate obținute într-un mod cât mai variat. Astfel s-au utilizat :

- rezultate puse la dispoziția autorului prin amabilitatea colectivului de specialitate din cadrul ISCIF (dr.ing.M.Popescu, ing. Gh. Constantinescu) obținute prin programare la calculator după algoritmul respectivului colectiv.

- rezultate publicate în teza de doctorat a prof.dr.ing. M. Bălă care au fost obținute în cercetările de laborator.

- rezultate publicate de G. Naber care au fost obținute în cercetări la scară naturală.

Toate verificările efectuate, se referă la cazul închiderii bruște și ele conduc la concluzia generală că rezultatele teoretice ale tezei sînt bine verificate atît în ceea ce privește nivelurile extreme, cvasi-semiperioadele, legea de oscilație, curbele înfășurătoare etc.

Erorile relative cele mai mari s-au obținut pentru cazul cercetărilor în laborator, totuși și în acest caz ele se situează în general între 3 - 5 % și în cazuri izolate ajung și pînă la 10%

15. Verificări utilizând cercetări experimentale proprii.

Cercetările experimentale proprii au fost efectuate în laboratorul catedrei în vara anilor 1970, 71 și 72 și s-au desfășurat în cadrul a trei programe experimentale referitoare respectiv la castele de echilibru simple, la castele de echilibru perfect pneumatice și la castele de echilibru parțial pneumatice.

S-a utilizat pentru închiderea bruscă o vană de tip sertar manevrată manual construită special în cadrul catedrei și utilizată și în cercetările efectuate în cadrul tezei de doctorat de către prof.M.Bălă.

În cazul castelelor simple s-au obținut următorii indica-tivi sintetici :

Niveluri extreme :

- diferența absolută maximă între teorie și experiență: 0,041 m
- diferența absolută medie între teorie și experiență: 0,016 m
- diferența relativă maximă între teorie și experiență: 3,08 %
- diferența relativă medie între teorie și experiență: 1,15 %

Cvasi - semiperioade :

- diferența absolută maximă : 1,5 s.
- diferența absolută medie : 1,05 s.
- diferența relativă maximă : 4,63 %
- diferența relativă medie : 3,39 %

Se constată că indicatorii sînt mai buni în cazul nivelurilor extreme și ceva mai slabi în cazul cvasi-semiperioadelor. Acest lucru se explică prin evoluția fenomenului studiat și prin metoda experimentală care a permis determinarea cu mai mare precizie a nivelurilor extreme și cu mai mică precizie a cvasi-semiperioadelor. Aceasta, deoarece atunci cînd nivelul apei se apropie de un nivel extrem viteza de mișcare a nivelului apei scade lent pînă la zero (nivelul extrem) și apoi crește lent fiind dificil a sta-

Con. 37

bili cu precizie momentul în care ea a avut valoarea zero.

În cazul castelelor perfect pneumatice s-au stabilit indicatori numai referitori la niveluri, deoarece nu s-au întreprins cercetări teoretice referitoare la cvasi-semiperioade în acest caz

- diferența absolută maximă între teorie și experiență: 0,085 m
- diferența absolută medie : 0,024 m
- diferența relativă maximă : 6,38 %
- diferența relativă medie : 2,54 %

Diferențele mai mari în acest caz între rezultatele teoretice și cele experimentale se explică în principal prin următoarele două considerații :

- modelul matematic este mai complex și a comportat ipoteze simplificatoare suplimentare referitoare la comportarea aerului ;
- mișcarea nivelului apei în castel este mai rapidă, cu amplitudini mai mici ceea ce îngreunează, comparativ cu castelele simple, determinarea poziției extreme a nivelurilor.

În cazul castelelor de echilibru parțial pneumatice nu sînt rezultate teoretice duse pînă la faza încît să permită o comparație rapidă cu rezultatele experimentale. Cercetarea experimentală a pus în evidență avantajele acestor castele între care durată scurtă de amortizare este printre cele mai importante.

BIBLIOGRAFIE TEZA DE DOCTORAT

Castele de echilibru

- 1-A - Aronovici G, Kertvelişvili N, Liubimţev K - "Ghidravliceskii udar i uravnitelnie rezervuarf" Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1968 - (~~Biblioteca personală~~)
- 2-A - Arsenie Dumitru - "O formă raţională a ecuaţiei nivelului de apă în castele de echilibru simple şi unele consecinţe care rezultă din aceasta" - Revista "Hidrotehnica" Nr.11 (vol.16) noiembrie 1971
- 3-A - Arsenie Dumitru - "Studiul oscilaţiilor în masă în sistemul galerie de aducţiune-castel de echilibru folosind principiul lui Hamilton" - Buletinul ştiinţific şi tehnic al EPT, Seria construcţiei, 1/1971, tom.16(30)
- 4-A - Arsenie Maria, Arsenie Dumitru - "Consideraţii variaţionale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secţiune circulară" In "Studii şi cercetări de Mecanică Aplicată", tom.27, nr.3, 1968
- 5-A - Arsenie Dumitru - "O metodică variaţională de rezolvare a problemei curgerii laminare a lichidelor newtoniene în regim staţionar, prin tuburi cilindrice de secţiune oarecare" - Buletin ştiinţific şi tehnic al IPT
- 6-A - Arsenie Dumitru - "O propunere privind lungimea de amestec din teoria lui L.Prandtl pentru cazul curgerii turbulente în canale şi conducte, avînd la bază un principiu variaţional" - Studii şi cercetări de Mecanică Aplicată, tom.28, nr.3, 1969
- 7-A - Arsenie Dumitru - "Contribuţii la calculul castelilor de echilibru la închidere bruscă" - Lucrare susţinută la sesiunea I.C.Bucureşti

- 2 -

- 8-A - Andronov A.A., Vitt A.A., Haikin S.E. - "Teoria kolebanii" ediția II, Fizmatgiz, Moskva, 1959
- 9-A - Arsenie Dumitru - "Determinarea analitică a nivelurilor extreme în castele de echilibru simple, în cazul închiderii rapide și totale a obturatorului" - Revista "Hidrotehnica" nr.8 , august 1972
- 10-A - Agroskin I.I., Dăitriev G.T., Picalov F.I. - "Hidraulica" vol.I,II - Traducere din limba rusă, Ed.Energetică de Stat 1953
- 11-A - Arfken George - "Mathematical methods for physicists" - Departament of physics Miami University, Oxford, Ohio Academic Press, New York and London - Traducere în limba rusă, Moskva, 1970 , Atomizdat
- 12-A - Arsenie Dumitru - "Problema timpului în mișcarea cvasi oscilatorie în masă care apare la închiderea bruscă a obturatorului unei aducțiuni cu castel de echilibru simplu"- Revista "Hidrotehnica" nr.5/1973
- 13-A - Arsenie Dumitru - "O formulă aproximativă pentru determinarea nivelului minim care este atins în castele de echilibru simple la deschiderea bruscă a obturatorului" - Revista "Hidrotehnica" nr.7/1973.
- 14-A - Arsenie Dumitru - "Considerații energetice asupra mișcării laminare a lichidelor newtoniene în regim staționar prin tuburi cilindrice de secțiune oarecare" - Volumul "Conferința Națională de mecanică aplicată", București, iunie 1969
- 15-A - Arsenie M., Arsenie D. - "Asupra legilor de curgere staționară a lichidelor newtoniene în regim turbulent prin tuburi cilindrice rectilinii de secțiune pătrată",hidraulic netede' In "Studii și cercetări de mecanică aplicată" nr.4,tom.32, 1973.

- 3 -

- 16-X - D.Arsenie - "Studiul oscilațiilor în masă ce apar în sistemul galerie de aducțiune-castel de echilibru la schimbarea bruscă a puterii centralei hidro-electrice, avînd la bază principiul lui Hamilton" - In "Studii și cercetări de mecanică aplicată", nr.4, tom.32,1973
- 17-A - M.G.Aronovici, N.I.Socolova - "Despre influența inerției apei din conductele sub presiune ale turbinelor asupra stabilității funcționării centralelor hidro-electrice cu castele de echilibru" - Izvestia vișș uceb.zavedenii, Radiofizica, tom.10, Nr.7,1968
- 18-A - H.F.Abbott, W.L.Gibson, I.W.Mc.Caig - "Measurements of Auto-oscillations in a Hydroelectric supply Tunnel and Peustock System. - Transactions of the ASME, series D, Journal of Basic Engineering vol.85, nr.4,1963
- 1-B - Bălă Mihai - "Construcții hidrotehnice și centrale hidro-electrice", vol.I, vol.II - Editura didactică și pedagogică, București, 1967 (~~Biblioteca personală~~)
- 2-B - Bergeron L. - "Du coup de foudre en electricite au coup de belier en hydraulique" - Ed.Dunod, Paris 1949
- 3-B - Bălă Mihai - "Contribuții la calculul oscilațiilor nivelului într-un castel de echilibru tronconic" - Buletin St. și T.al I.P.T.
- 4-B - Bouvard M., Molbert I. - "Methode grafique pour le calcul des cheminees d'equilibre" - In "La Huille Blanche" Nr.5/1950
- 5-B - Bourgeat R., Chauzac D., Deullin I. - "Incercările castelelor de echilibru pe modele reduse" - In "Revue generale d'Hydraulique" Nr.5/1935
- 6-B - Borel, L. - "Stabilite de reglage des installations hydro electriques" - Ed.Dunod, Lausanne-Paris,1960
- 7-B - Bălă Mihai - "Contribuții la studiul castelelor de echilibru

- 4 -

- de formă tronconică" - Teză de doctorat, Timișoara, 1969
- 8-B - E.A.Barbașin - "Vvedenie v teorii ustoicivasti"- Izdat. "Nauka", Moskva, 1967
- 9-B - Richard Bellman - "Introducere în analiza matriceală" - traducere din limba engleză - Editura tehnică, București, 1969
- 1-C - Calane J., Gaden D. - "Theorie des chambres d'équilibre" - Paris et Lausanne , 1926
- 2-C - Caseau P. - "Techniques mathematiques utilisees eu mecanique des fluides" - In "La Houille Blanche" Nr.8, 1963
- 3-C - Clement M. - "Stabilite des cheminees d'équilibre" - In "La Houille Blanche" Nr.6, 1958
- 4-C - Cerneatin, A - "Ustoicivost raboti GES i minimalnie rasmeri uravnitelnih rezervuarov"- In "Izvestiia gidrotehniki", Nr.72, 1963
- 5-C - Cioc D., Popescu M., Stamatiu D. - "Calculul automat al saltului în castelul de echilibru de secțiune variabilă" - ISCH, "Studii de hidraulică vol.XVII, București, 1968 (Biblioteca personală)
- 6-C - V.Cosoroabă, Th.Demetrescu, Gh.Georgescu - Azuga - "Acționări pneumatice" - Editura tehnică, București, 1971
- 7-C - Cioc D. - "Mecanica fluidelor" - Editura didactică și pedagogică, București, 1967
- 8-C - Certousov, M.D. - "Hidraulica (curs special)" (traducere din limba rusă) - Editura tehnică București, 1966
- 9-C - Conte J. - "Procede de calcul graphique des cheminees d'équilibre" - La Houille Blanche , Nr.13, 1957
- 10-C - Cristescu Romulus - "Analiza funcțională" - Editura didactică și pedagogică, București, 1965
- 11-C - D.Cioc, Al.Cristea, Al.Măruță - "Unele probleme referitoare

- 5 -

- la metoda grafică de calcul a mișcării nepermanente în conducte sub presiune" - Revista "Hidrotehnica" nr.7, 1963
- 12-C - M.Cuenod, A.Gardel - "Stabilisation des oscillation du plan d'eau des chambres d'équilibre par asservissement temporaire de la puissance électrique a la pression hydraulique" - BTSR (Bulletin Technique de la Suisse Romande),no.16,12 août, 1950
- 13-C - D.Cioc, M.Popescu, D.Stamatiu - "Calculul automat al saltului în castelul de echilibru de secțiune variabilă" - Studii de hidraulică, vol.XVII, ISCH, București, 1968
- 1-D - Dincă F.,Teodosiu C. - "Vibrații neliniare și aleatoare" - Editura Academiei RSR, București, 1969 (Biblioteca personală)
- 2-D - Dehousse N. - "Methode approximative de calcul des oscillations de l'eau dans les cheminees d'équilibre" - Memoires (Nouvelle serie), Universite de Liege, tome IX, 1957
- 3-D - Dincă G. - "Operatori monotoni în teoria plasticității" - Editura Academiei R.S.R.,București,1972
- 4-D - Dondoe Stefan, Guțu Octavian - "Studiul oscilațiilor în masă în sistemul lac de acumulare - galerie de aducțiune - castel de echilibru prin simulare pe calculator analogic" - Revista "Construcții hidrotehnice și hidraulică" Nr.2, 1973, editată pentru uz intern de Centrul de informare și documentare hidrotehnică.
- 5-D - Dorin Pavel - "Castelul de apă" - Buletinul Societății Politehnice, 1924
- 6-D - Dogonadze D.A.,Kartvelišvili N.A. - "Vlianie energheticescoi sistemî na ustoičuvosti slojnih napornih sistem G.E.S." - Izvestia VNIIG, tom.77, 1965
- 7-D - R.K.Duggins - "The stability of a simple surge tank" - Transactions ASME, series D, Journal of Basic engineering , vo-

- 6 -

lume 90, Nr.1 , 1968

- 1-E - Escande L.- "Methodes nouvelles pour le calcul de chambres d'equilibre" - Ed.Dunod,Paris,1950 (~~Biblioteca Institut Construcții București~~)
- 2-E - Escande L. - "Oscillations superposees dans les cheminées d'equilibre a section constante ordinaires ou a étranglement Revista "La Houille Blanche" Nr.special A/1955 - (~~Există extras în biblioteca ISCIH București~~)
- 3-E - Escande L., Claria J., Godines H. - "Descente maximale provoquée dans une chambre d'equilibre par une manoeuvre isoclee"- Laboratoires d'hydraulique et de mecanique des fluides - Travaux et publications , Toulouse, 1962
- 4-E - Escande L., Dat J., Goel T. - "Experiences sur les manoeuvres rythmiques dans les chambres d'equilibre ordinaires" - Laboratoires d'hydraulique et de mecanique des fluides - Travaux et publications, Toulouse, 1963 - 64.
- 5-E - Escande L., Thirriot C., Piquemal J. - "Consequences de la fermeture d'une vanne placee eu tete d'un tunnel d'amenee comportant une cheminee d'equilibre aval" - Laboratoires d'hydraulique et de mecanique des fluides - Travaux et publications, Toulouse 1963-64.
- 6-E - "Etude de la stabilite des chambres d'equilibre a étranglement" - Le Genie Civil, tome 88, 1951 - Comptes Rendus, tom.234, Nr.3, 1952
- 1-F - Kranke P.G. - "Oscillations in a surge-tank calculation and measurement IARRH Congress, London, 1963
- 2-F - Fotescu Cezara - Curs de fortran - partea a II-a - Multiplicat la Institutul Central de documentare tehnică, 1972
- 3-F - Fazlollah Reza - "Spații liniare" - traducere din limba engleză - Editura didactică și pedagogică, București, 1973

- 7 -

- 1-G - Gardel A. - "Chambres d'équilibre" - Lausanne , 1956 .
- 2-G - Gentilini Bruno - "Experiențe pe modele efectuate la laboratorul de hidraulică al școlii politehnice din Milano" - In "L'Energia Elettrica" Nr.12/1939
- 5-G - Gvazava G. - "Application of the electronic analog computer for calculation of unsteady flow in conduits and surge tanks of hydroelectric plants" - AIRH Congress, Dubrovnic, 1961
- 6-G - Gubin, F.F. - "Uzine hidroelectrice" vol. I, II - Traducere din limba rusă, Ed. Energetică de Stat 1954
- 7-G - Ghika Alexandru - "Analiză funcțională" - Editura Academiei R.S.R., 1967.
- 8-G - I. Grcic - "Probleme de oscilație și stabilitate la castele de echilibru cu pernă de aer" - In "die Bautechnik", Berlin, noembrie 1959
- 1-H - Haimovici A. - "Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional" - Edit. didactică și pedagogică, București 1966 (Biblioteca personală)
- 2-H - Halanay A. - "Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale" Ed. Academiei R.P.R., București, 1963
- 3-H - Hayashi C. - "Non-linear oscillations in physical systems" Ed. Mc.Graw Hill, New York - San Francisco - Toronto - London 1964
- 4-H - Hayashi K., Bark L.S. - "Mnogoznaciñie tabliti krugovih, ghiperboliceskih i drugih funcții" (în limba rusă) - Centrul de calcul al Academiei URSS, Moskva, 1965
- 5-H - Halanay A. - "Ecuații diferențiale" - Editura didactică și pedagogică, București, 1972
- 6-H - Haimovici A. - "Ecuații diferențiale și ecuații integrale" Editura didactică și pedagogică, București, 1965

- 8 -

- 7-H - Hartman Ph. - "Ordinary Differential Equations" - Ed. John Wiley, New York - London - Sydney , 1964 (tradus în limba rusă 1970)
- 1-I - Jaeger Charles - "Hydraulique technique" Ed. Dunod, Paris, 1954
(~~Biblioteca Inst. politehnic Timișoara~~)
- 2-I - Johnson R.D. - "The surge tank in water power plants" - Transaction ASME, New York , 1908
- 3-I - Infante F., Clark G. - "On the large oscillations of a simple surge tank" - In "L'Energia Elettrica" nr.12 , 1964
- 4-J - Jeffreys H., Swirles B. - "Methods of mathematical physics" vol. II, I, III - third edition, Cambridge University Press , 1966
- 5-I - Ionescu D.V. - "Ecuații diferențiale și integrale" - Editura didactică și pedagogică, București, Ed. II, 1972
- 6-I - Iasifescu M., Mihoc Gh., R. Theodorescu - "Teoria probabilităților și statistică matematică" - Editura tehnică, București, 1966
- 7-I - Andrei Iacob - "Metode topologice în mecanica clasică" - Editura Academiei RSR, București, 1973
- 8-I - Indri E. - "Cercetări experimentale pentru strangulările castelurilor de echilibru" - L'Energia Elettrica Nr.7, 1957
- 9-J - Cornel Jura - "Insemnătatea condiției de omocronie în relațiile de modelare a camerelor de echilibru" - "Hidrotehnica" nr.1 , 1963
- 10-I - F.F. Infante, L.G. Clark - "On the stability of the oscillation of a simple surge tank" - Transactions of the ASME, series E, Journal of applied mechanics , December , 1965
- 11-J - C. Jaeger - "A review of surge tank stability criteria" Transactions of the ASME, paper Nr. 59, A-270, 1959

- 9 -

- 12-J - C.Jaeger - "The theory of Resonance in Hydropower systems. Discussion of Incidents and Accidents occurring in pressure systems" - Transactions of the ASME, series D, Journal of Basic Engineering vol.85, nr.4, 1963
- 8-L - M.N.Krîlov, N.N.Bogoliubov - "Vvedenie v nelineinuiu mehaniku Kiev, Izdat AN SSR , 1937
- 9-K - K.Klotter - "Free oscilations of systems having quadratic damping and arbitrary restoring forces" - J.Appl.Mech.nr.22, p.493 (1955)
- 10-L - L.Levin - "Despre determinarea pierderilor de sarcină în strangularea castelelor de echilibru" - La "Houille Blanche" nr.5 , 1953
- 1-M - Mukhtar Hussain Khan - "Chambres d'equilibre" (Methodes de calcul detaillées a l'aide d'une calculatrice digitale) Ed.Dunod , 1966 (~~Biblioteca IDT București~~)
- 2-M - Mateescu Cristea - "Hidraulica" - Ed.didactică și pedagogică București, 1963 (~~Biblioteca personală~~)
- 3-M - Măruță Alexandru - "Modelarea fenomenelor hidraulice în sisteme de conducte prevăzute cu castele de echilibru" ISCH București , 1960 (~~Biblioteca personală~~)
- 4-M - Măruță Alexandru - "Similitudinea mișcărilor nepermanente în sistemele de conducte prevăzute cu castele de echilibru" Extras din "Hidraulica albiilor și a construcțiilor II, ISCH București, 1960 (~~Biblioteca personală~~)
- 5-M - Morozov A.A. - "Utilizarea energiei apelor" (traducere din limba rusă) - Editura tehnică, 1952 (~~Biblioteca personală~~)
- 6-M - Măruță Alexandru - "Asupra discuției ecuațiilor de modelare ale oscilațiilor în castele de echilibru" - In "Hidrotehnica" nr.12, 1960
- 7-M - Muzillo J. - "Application d'un ordinateur a un probleme de

- 10 -

- chambre d'equilibre" - Congres AIRH, Dubrovnik, 1961
- 8-M - Mitropolski I.A. - "Nonstationary processes" - Ak.Nauk SSSR, 1955
- 9-M - Malkin I.G. - "Nekotorie zadaci teorii nelineinih kolebani" Gostehizdat, Moskva, 1956
- 10-M - Miron Nicolescu - "Analiză matematică" vol.I, vol.II - Ed. Didactică și pedagogică, ed.II, București, 1971 (Biblioteca personală)
- 11-M - Mihlin S.G. - "Variationnye metodî v matematicheskoj fizike" Ed. de stat pentru literatură tehnică-teoretic, Moskva, 1957
- 13-M - Matveev, N.N. - "Diferențialnye uravnenia", Leningrad, 1965
- 14-M - Marinescu G. - "Tratat de analiză funcțională" vol.I - Editura Academiei RSR, 1970
- 15-M - "Manualul inginerului hidrotehnician" vol.I, vol.II - Editura tehnică, București, 1970
- 16-M - Mazilu P. și Sburlan S.F. - "Metode funcționale în rezolvarea ecuațiilor teoriei elasticității" - Editura Academiei R.S.R., București, 1973
- 17-M - Alexandru Măruță - "Surse de aproximație în calculul analitic și în studiile pe modele ale castelurilor de echilibru" In "Hidrologia, meteorologia și gospodărirea apelor" nr.2, 1960,
- 18-M - A.W.Marris - "Large water - level displacements in the simple surge tank" - Transactions ASME, series D, Journal of Basic Engineering, vol.81, 1959, pag.446
- 1-N - Neber Gerhard - "Mass oscillations in Surge Tanks" - In "Water Power Nr.6, 1964 (~~In biblioteca de la secția de cavitație a Academiei~~)

- 11 -

- 2-N - Niculescu Stelian - "Curs de fortran" - partea I - Multiplicat
la Institutul Central de Documentare Tehnică, 1972
- 1-0 - Onicescu O.- "Mecanica" - Ed.tehnică București,1969 (~~Bibliotecă personală~~)
- 2-0 - Oroveanu Teodor - "Mecanica fluidelor vîscoase" - Editura
Academiei București, 1967
- 3-0 - Orlov V.A. - "Uravnitelnie rezervuarî ghidroelectristanții"
Energia, Moskva 1968
- 1-P - Popescu Mihai - "Probleme actuale în domeniul hidraulicii
castelelor de echilibru" - ISCH, Studii de hidraulică vol.IX,
București,1969 (~~Bibliotecă personală~~)
- 2-P - Popescu Mihai - "Metode noi pentru calculul hidraulic al cas-
telelor de echilibru" - ISCIFGA, Studii de hidraulică vol.XXIII
București,1970
- 3-P - Plăcințeanu I. - "Mecanica vectorială și analitică" - Editura
tehnică București, 1958
- 4-P - Pistilli G., Savastano G. - "La risoluzione dei problemi di
oscillazione di massa con l'impiego delle calcolatrici
elettroniche" - In "L'Energia Elettrica" nr.11 și 12, 1960 și
nr.6 , 1962
- 5-P - Popescu M., Novotny P. - "Calculul numeric automat al oscila-
țiilor din castelul de echilibru de secțiune variabilă" - In
"Hidrotehnica" nr.7 , 1969
- 6-P - Popescu M., Novotny P. - "Contribuție la studiul stabilității
castelelor de echilibru" - In "Hidrotehnica" nr.6 , 1970
- 7-P - Plăcințeanu I. - "Teoria erorilor de măsurare și metoda celor
mai mici pătrate" - Ed.tehnică București, 1957
- 8-P - Popovici P., Constantin - "Calculatoare cu program și teoria
programării - Ed.științifică București, 1972

- 12 -

- 9-P - Pontriaguine L. - "Equations differentielles ordinaires"
(traduit du russe) - Ed. MIR, Moscou, 1969
- 10-P - Pavel Dorin - "Castelul de apă" - In "Buletinul Societății
Politehnice" , 1924
- 11-P - F.Prașil - Schweiz.Bauz.,nr.25,pag.334 (1908)
- 1-R - M.Rădoi, E.Deciu, D.Voiculescu - "Elemente de vibrații meca-
nice" - Ed-tehnică București , 1973
- 2-R - P.D.Richardson - "Free oscillations with damping proportional
to the square of the velocity" - Appl.Sci.Research,Sect.A,
11, p.397-400 , 1963
- 1-S - Stucky Alfred - "Chambres d'equilibres" - Lausanne, 1958
- 2-S - Streeter Victor, Wilie Benjamin - "Hydraulic transients"
Ed.Mc.Graw-Hill,USA,1967 (~~Biblioteca IDT B 799ee~~)
- 3-S - Serrin James - "Mathematical principles of classical fluid
mechanics" - Handbuch der physik,Berlin-Gotingen-Heidelberg
1959 (~~Biblioteca Universității Timișoara~~)
- 4-S - Silaș Gheorghe - "Vibrații mecanice" - Editura didactică și
pedagogică București 1968 (~~Biblioteca personală~~)
- 5-S - Sabac I.Gh. - "Matematici speciale" - vol.I,vol.II - Editura
didactică și pedagogică București 1967 (~~Biblioteca personală~~)
- 6-S - Sideriadis L. - "Methodes de topologie qualitative : applica-
tions a l'etude des cheminees d'equilibre" - In "La Houille
Blanche", nr.4, 1962
- 7-S - Smirnov V.I. - "Curs de matematici superioare" - Ed.tehnică,
București 1954
- 8-S - Stepanov V.V. - "Curs de ecuații diferențiale" - Editura
tehnică, 1955
- 9-S - G.Samsone, R.Conti - "Non linear differential equations" - Ed
Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris,1964
- 1-T - Teodorescu N.,Olaru V. - "Ecuațiile fizicii matematice "

Edit.didactică și pedagogică București,1970

- 2-T - Thirriot C.,Barthet H. - "Remarque sur l'etude simplifiée des Mouvements transitoires dans un système de galerie-cheminée" Laboratoires d'hydraulique et de mécanique des fluides Travaux et publications - Toulouse 1963-1964
- 3-T - Tiron M. - "Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate" - Editura tehnică București , 1972
- 1-V - Vilcovici,Bălan St.,Voinea R. - "Mecanica teoretică" - Ed. tehnică București , 1968
- 2-V - Vucetici Jelena - "Noul criteriu de stabilitate a castelelor de echilibru în regim inițial nepermanent" (Nouveau critere de stabilite des cheminées d'équilibre eu regime inițial nonpermanent) - In "Le Genie Civil" nr.6-7 , 1968
- 3-V - Wisner P. - "Cu privire la cercetarea pe modele hidraulice a castelelor de echilibru" - Energia, 1954
- 4-V - Vogt F. - "Berechnung und Konstruktion des Wasserschlosses" Stuttgart , 1923
- 5-V - Vainberg M.M. - "Variationie metodî issledovania nelineinîh operatorov" - Moskva, 1956
- 6-V - Van der Pol, B. - "Non-linear theory of electric oscillations" Proc.I.R.E.,nr.22,1934
- 7-V - V.A.Venikov - "Aplicarea teoriei similitudinii și dedelării în electroenergetică" - Editura tehnică București, 1972
- 8-V - Vainberg M.M. - "Variationîi metod u metod monotonnîh operatorov" , Moskva , 1972
- 9-V - P.Wisner, D.Bratosin - "Asupra dimensionării diafragmelor la castele de echilibru" - "Hidrotehnica" nr.6,iunie 1958.
- 10-V - Jelena Vucetici - "Nou criteriu de stabilitate a castelelor de echilibru în regim inițial nepermanent" - Le Genie Civil: tome 145, nr.6-7 , 1968

- 14 -

- 1-Z - Zicman I.B. - "Metode noi pentru calculul castelelor de echilibru" - In "La Houille Blanche" 5/1953
- 2-Y - G.U.Yule, M.C.Kendall - "Introducere în teoria statisticii"
Editura științifică București, 1969.
- 19 Completare
- 19-A - D.Arsenie - "Asupra legii cvasi-oscilațiilor în masă generate de manevra de închidere bruscă și totală a obținutului în cazul aducțiunilor sub presiune prevăzute cu castel de echilibru simplu" - Rev.Hidrotehnica nr.12/1973
- 20-A - D.Arsenie - "Operatori pozitivi în teoria operatorilor disipativi cu un grad de libertate avînd caracteristică elastică liniară" - Bul.științ.și tehn.al IPT, seria construcții nr.2/1972, tom.17(31)
- 8-H - S.Hâncu - "Regularizarea albiilor râurilor mici" - Editura "CERES", București, 1971
- 9-H - S.Hâncu - "Folosirea principiilor variaționale la studiul proceselor de albie" - Sesiunea științifică a Institutului de construcții București, 1971
- 10-H - S.Hâncu - "Modelarea hidraulică în curenți de aer sub presiune" , București, 1967
- 10-K - H.Kanderer - "Nichtlineare Mechanik" - Ed.Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
- 14-C - *Cerniatin J.A. Analiz i sopostavlenie rascetnah formul litndricescoi uravnitelnoi başni pri polnom mgnovennom zacrătii turbin, Izvestia VNNIG, t.28, 1940.*