

# **ESTIMAREA PARAMETRIILOR UNOR SISTEME NELINIARE PRIN STUDIUL MIȘCĂRIILOR VIBRATORII**

Teză destinată obținerii  
titlului științific de doctor inginer  
la  
Universitatea "Politehnica" din Timișoara  
în domeniul INGINERIE MECANICĂ  
de către

**ing. Dan Viorel STĂNESCU**

Conducător științific:	prof. univ. dr. ing. Liviu BERETEU
Referenți științifici:	prof. univ. dr. ing. Polidor BRĂTU
	prof. univ. dr. Gheorghe DRĂGĂNESCU
	conf. univ.dr. Aurel ERCUJĂ

Ziua susținerii tezei: 28.09.2011

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. Automatică                               | 8. Inginerie Industrială                   |
| 2. Chimie                                   | 9. Inginerie Mecanică                      |
| 3. Energetică                               | 10. Știința Calculatoarelor                |
| 4. Ingineria Chimică                        | 11. Știința și Ingineria Materialelor      |
| 5. Inginerie Civilă                         | 12. Ingineria sistemelor                   |
| 6. Inginerie Electrică                      | 13. Inginerie energetică                   |
| 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații | 14. Calculatoare și tehnologia informației |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2011

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,  
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221  
e-mail: editura@edipol.upt.ro

## Cuvânt înainte

Teza de doctorat a fost elaborată de-a lungul a trei ani, pe parcursul activității mele de doctorand bursier în cadrul Catedrei de mecanică și vibrații, Facultatea de Mecanică a Universității „Politehnica” din Timișoara.

În lucrare am prezentat principalele metode "rămase în cursă" pentru identificarea sistemelor mecanice. Am prezentat avantajele utilizării fiecărei metode pentru diferite cazuri luate în considerare. Prin exemple concrete am arătat avantajele fiecărei metode importante, astfel încât lucrarea, împreună cu bibliografia citată, să poată constitui un bun punct de plecare pentru cine dorește să aprofundeze una dintre metode.

Mulțumiri deosebite adresez conducătorului de doctorat prof. dr. ing. Liviu Bereteu pentru îndrumarea competentă și permanentă, pentru sfaturile și încurajările de pe parcursul celor trei ani de muncă și pentru modul în care a netezit drumul formării mele ca cercetător.

Mulțumesc pe această cale colegilor din cadrul Catedrei de Mecanică și Vibrații pentru susținerea morală și tot sprijinul acordat ori de câte ori a fost nevoie.

O mulțumire specială se cuvine prof. dr. Gheorghe Eugen Drăgănescu, pentru o perioadă șeful Catedrei susmenționate, fără a căruia contribuție această lucrare ar fi fost imposibil de realizat.

Teza de doctorat a fost realizată cu sprijin parțial din grantul strategic POSDRU/6/1.5/S/13, ID6998, cofinanțat din Fondul Social European "Investește în oameni", în cadrul Programului Operațional Sectorial Dezvoltare Resurse Umane 2007-2013.

Timișoara, Septembrie 2011

Dan Viorel Stănescu

Stănescu, Dan Viorel

**Estimarea parametrilor unor sisteme neliniare prin studiul mișcărilor vibratorii**

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 100, Editura Politehnica, 2011, 182 pagini, 39 figuri, 27 tabele.

ISSN:1842-4937

ISBN:978-606-554-346-1

Cuvinte cheie:

vibrații neliniare, identificare, transformata Hilbert, analiza wavelet, amortizare fracționară, serii Volterra

Rezumat:

Lucrarea prezintă cât mai structurat principalele metode utilizate în prezent pentru identificarea sistemelor cu comportare neliniară. Gruparea metodelor de identificare, împreună cu contribuțiile originale s-a făcut în trei mari categorii: metode de identificare în domeniul timp (transformata Hilbert, metoda parametrului mic, metoda iterației variaționale, metoda seriilor Prony, metoda estimării spectrale cu minimă varianță), metode bazate pe transformata wavelet (metoda seriilor de funcții wavelet și utilizarea transformatei wavelet continue), metode de identificare în domeniul frecvență (metoda balanței armonice și metoda seriilor Volterra).

În final s-a construit un montaj experimental care împreună cu una din metodele teoretice propuse în lucrare a permis determinarea caracteristicilor unor sisteme conținând spume poliuretanică, materiale cu un accentuat comportament neliniar.

# Cuprins

<b>1. Introducere</b>	<b>7</b>
1.1. Problema identificării sistemelor	7
1.2. Cazul modelelor liniare	8
1.3. Modele neliniare. Stadiul actual al cercetării în domeniu	9
<b>2. Metode de identificare în domeniul temporal</b>	<b>10</b>
2.1. Utilizarea transformatei Hilbert în identificarea sistemelor neliniare	11
2.2. Transformata Hilbert	11
2.3. Semnale analitice	14
2.4. Identificarea sistemelor neliniare cu un grad de libertate din vibrații libere cu ajutorul transformatei Hilbert	15
2.5. Generalizare	17
2.6. Identificarea sistemelor vibrante neliniare cu un grad de libertate din vibrații forțate cu ajutorul transformatei Hilbert	20
2.7. Identificarea sistemelor neliniare cu mai multe grade de libertate cu ajutorul transformatei Hilbert	22
2.8. Identificarea unui model reologic neliniar care descrie relaxarea facilitată de vibrații	24
2.8.1. Modele reologice neliniare ale relaxării facilitate de vibrații	24
2.9. Studiul experimental al unui pendul de torsiune	36
2.9.1. Identificarea modelelor neliniare cu metoda transformatei Hilbert	44
2.10. Studiul parametrilor unui sistem vibrant neliniar din răspunsul liber cu metoda transformatei Hilbert	46
2.11. Determinarea pulsațiilor proprii din răspunsul liber	53
2.12. Estimarea spectrală cu varianță minimă	55
<b>3. Utilizarea transformatei wavelet la identificarea sistemelor neliniare</b>	<b>59</b>
3.1. Baze ortogonale de funcții	59
3.2. Analiza wavelet multirezoluție	63
3.3. Utilizarea transformatei wavelet discrete la identificarea sistemelor liniare și neliniare	67
3.3.1. Cazul cu un grad de libertate	67
3.3.2. Cazul cu $n$ grade de libertate	71
3.4. Identificarea sistemelor descrise cu modele diferențiale de ordin fracționar	77
3.5. Identificarea unui sistem neliniar cu caracteristică polinomială	81
3.6. Transformata wavelet continuă	84
3.7. Identificarea sistemelor liniare	87
3.8. Identificarea sistemelor neliniare	90
3.9. Transformata wavelet continuă a unui sistem neliniar cu caracteristică polinomială	93
<b>4. Identificarea sistemelor neliniare în domeniu frecvență</b>	<b>98</b>
4.1. Identificarea sistemelor neliniare cu metoda balanței armonice	98
4.2. Identificarea unui sistem vibrant van der Pol modificat	104
4.3. Identificarea sistemelor neliniare cu metoda seriilor Volterra	116
4.4. Funcția de transfer a unui sistem liniar	117

4.5. Studiul sistemelor neliniare cu metoda seriilor Volterra	119
4.6. Răspunsul la excitație armonică de forma $\cos\omega_0 t$	122
4.7. Metoda forței neliniare	124
4.8. Aplicație. Determinarea funcției de transfer și a parametrilor unui sistem cu neliniaritate pătratică și cubică	128
4.9. Determinarea funcției de transfer neliniare de ordin superior	129
4.10. Identificarea unui sistem neliniar cu amortizare fracționară cu metoda seriilor Volterra	132
<b>5. Identificarea unui material cu caracteristică neliniară și amortizare fracționară</b>	<b>144</b>
5.1. Proprietățile mecanice ale spumelor poliuretanică	144
5.2. Configurația experimentală	145
<b>6. Contribuții personale. Concluzii</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografie</b>	<b>168</b>

# 1. INTRODUCERE

De o bună perioadă de timp se discută intens în lumea științifică despre multe aspecte ale estimării parametrilor sistemelor. Interesul pentru aceste subiect este evident, atât în publicații de specialitate (articole științifice, cărți), cât și la conferințe sau cursuri universitare și se datorează dorinței inginerilor de a dobândi o mai bună cunoaștere a funcționării instalațiilor și proceselor în vederea obținerii unui control mai bun și în cele din urmă a măririi eficienței economice.

Interesul pentru teoria estimării s-a multiplicat dramatic odată cu creșterea posibilităților oferite de tehnica de calcul, atât din punct de vedere hardware, cât și software.

În centrul științelor naturale și tehnice se află noțiunile de observație și măsurare. Pornind de la acestea, omul de știință construiește o imagine fizică a problemei pe care o studiază și de la care el formulează o teorie prin încercări succesive [35].

De o importanță egală cu experimentele și observațiile este construirea modelului. Modelul este o reprezentare a aspectelor esențiale ale unui sistem existent (sau care va fi construit), care prezintă cunoștințele asupra aceluși sistem sub o formă utilizabilă [35].

Modelele se găsesc în multe domenii de activitate umană : fizică, biologie, astronomie, tehnică, economie, sociologie, etc. În lucrarea de față ne vom limita la studiul modelelor din domeniul ingineriei mecanice.

## 1.1. Problematika identificării sistemelor

Investigația științifică are ca scop găsirea unor legități după care guvernează manifestarea sistemelor în natură.

Aceste legități pot fi exprimate în mai multe moduri, dependente de rigoarea cu care se poate face investigarea în domeniul respectiv de știință. Dependențele găsite se pot exprima în mai multe moduri :

- în mod intuitiv: A depinde de B sau A crește cu micșorarea lui B;
- sub forma unor grafice sau tabele de dependență;
- sub forma unor modele fizice și matematice, care exprimă cu o anumită rigoare anumite fenomene.

Modelele fizice exprimă structura fizică din care se compune un sistem, cărora le corespund anumite legi de interacțiune. Modelele matematice reprezintă funcțiile matematice și ecuațiile diferențiale care exprimă fenomenele studiate.

Odată cu evoluția științei are loc atât rafinarea modelelor matematice cât și a preciziei experimentelor, iar amendarea modelelor matematice trebuie să fie făcută cu ajutorul științei identificării sistemelor.

Identificarea sistemelor este o ramură a teoriei sistemelor care are ca obiectiv stabilirea unei metodologii de a estima cât mai bine modelele matematice care descriu sistemele experimentale pe baza studiului experimental al acestor modele. Din această cauză știința identificării sistemelor este importantă pentru toate ramurile științei care se bazează pe elaborarea de modele matematice ale fenomenelor cercetate.

În modelarea matematică a fenomenelor naturii, în primele etape este suficientă intuiția pentru găsirea unui model matematic, respectiv a unor legi care

să fie în cât mai bună concordanță cu fenomenele experimentale studiate. Odată cu rafinarea investigațiilor, fenomenele naturale și modelele devin tot mai complexe, neputând fi descrise simplu. Din această cauză s-a impus punerea la dispoziția investigatorului a unei științe bine puse la punct pentru a permite un studiu riguros și eficient.

În multe cazuri, studiul sistemului se face simplu, căutând experimental răspunsul  $y(t)$  al sistemului la o perturbație  $x(t)$ , ca în fig. 1.1.

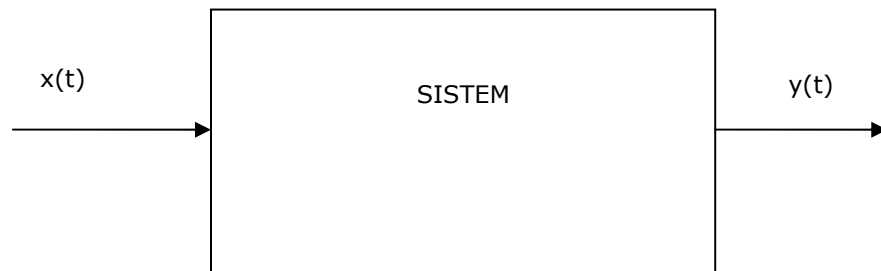


Figura 1.1

În general dintr-un experiment pe un sistem dat, se măsoară o serie de semnale de intrare  $x = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t)\}$  pentru care se stabilește răspunsul sistemului studiat  $y = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_M(t)\}$ , unde  $N$  reprezintă numărul de intrări, iar  $M$  numărul de ieșiri.

Există mai multe tipuri de identificare :

- a) identificare de tip cutie albă, la care se cunosc toate legile fizice care guvernează sistemul studiat;
- b) identificare de tip cutie gri, la care se cunosc doar o parte din legile fizice care guvernează sistemul studiat;
- c) identificare de tip cutie neagră, la care nu se cunosc legile care guvernează sistemul studiat.

Pentru fiecare tip particular de descriere, cerințele ce se pun la implementarea problemei de stimare constau în găsirea caracteristicilor procesului:

- cu precizie, neafectată de zgomot aditiv și de neliniarități și posibile nedorite în sistem;
- cu rapiditate, totuși cu condiția ca sistemul să rămână stabil;
- economic, folosind o instrumentație care este realizabilă și acceptabilă din punct de vedere al costului.

Schema de estimare este preferabil să satisfacă următoarele cerințe:

- să fie tratabilă matematic;
- să fie ușor de implementat;
- să fie în general aplicabilă;
- să ducă la o estimare optimă;
- să ofere o viteză de convergență acceptabilă.



## 1.2. Cazul modelelor liniare

Stimulată de teoria mecanicii clasice, o importantă metodă de interpretare a comportării proceselor a fost exprimată cu ajutorul ecuațiilor diferențiale, în funcție de mărimile de intrare și de ieșire  $u = u(t)$  și  $y = y(t)$ , respectiv :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_{n-1} \frac{du}{dt} + b_n u + c \quad (1.1)$$

În cazul **liniar**, coeficienții  $a_i$ ,  $b_j$  nu depind de  $u$  și  $y$  și de derivatele lor. Dacă, în plus, ei nu depind nici de timp, avem cazul cu coeficienți constanți, care este cel mai ușor de mânuit. Dacă, însă, coeficienții depind de timp, ecuația se numește **variliniară**. În cazul în care oricare din  $a_i$  sau  $b_j$  depind de  $u$  sau  $y$  sau de derivatele lor, procesul este **neliniar**.

Este foarte simplu de analizat un sistem presupus liniar. În acest caz este suficientă cunoașterea unei singure funcții de timp caracteristice a procesului (de exemplu răspunsul la impuls) pentru a determina ieșirea procesului pentru semnale de intrare arbitrare. Un astfel de procedeu are avantaje reale, pe care ne-am dori să le avem și pentru descrierea proceselor neliniare :

- există o relație explicită intrare-ieșire
- este facilitată analiza combinațiilor de sisteme
- se permite luare în considerație a intrărilor aleatoare.

## 1.3. Modele neliniare. Stadiul actual al cercetării în domeniu

În domeniul mecanicii este foarte răspândită utilizarea modelelor liniare, datorită simplității lor și a existenței unui număr imens de probleme inginerești rezolvate în timp. Totuși liniarizarea, ca orice formă de simplificare a problemei, induce o seamă de erori de modelare care uneori pot deveni importante.

De aceea, în actualul subiect de cercetare, ne vom ocupa de evaluarea și implementarea unor algoritmi populari în evaluarea și identificarea structurilor neliniare.

Pentru unele clase de sisteme neliniare cerințele enunțate la 1.2. sunt îndeplinite de reprezentările cu serii Volterra [150, 167].

Pentru procese neliniare este foarte mult de dorit să se construiască modelul pe baza cunoștințelor a priori disponibile. Aceasta implică o mare varietate de modele referitoare la anumite procese și scopuri specifice.

Înțelegerea gradului de libertate este o condiție pentru înțelegerea conceptului de analiză modală.

Adesea sistemele mecanice au o comportare neliniară, ca rezultat al neliniarităților din materialul constructiv al componentelor. În plus, componentele sunt interconectate prin legături neliniare (bolțuri, suduri). Aceste conexiuni conduc la o comportare neliniară a componentelor și interacțiuni neliniare în cadrul sistemului.

Caracterizarea sistemelor vibrante neliniare este un domeniu din ce în ce mai bine cercetat și documentat. Unele tehnici se bazează pe modulația de frecvență, cum ar fi deconvoluția frecvenței [127], transformata Hilbert [146] și transformatele wavelet [105]. Aceste tehnici utilizează pentru caracterizarea

neliniarității schimbările în frecvențele naturale ale sistemului cu schimbarea amplitudinii răspunsului. În plus, s-a utilizat corelarea funcțiilor în timp pentru a caracteriza neliniaritățile. O altă metodă constă în utilizarea răspunsului în frecvență de ordin înalt. În [114] se propune metoda forței de restaurare pentru anumite aplicații cu sisteme neliniare, metoda ce poate fi uneori folosită și în absența măsurărilor intrărilor externe.

În capitolul 2 al acestei teze se prezintă teoria necesară utilizării transformatei Hilbert pentru identificarea sistemelor neliniare cu un grad de libertate din vibrații libere, apoi din vibrații forțate. În continuare se prezintă și cazul identificării sistemelor cu mai multe grade de libertate.

Ca parte aplicativ-experimentală sunt prezentate identificarea unui model reologic neliniar care descrie relaxarea facilitată de vibrații, iar apoi se efectuează studiul unui pendul de torsiune cu comportare neliniară.

Capitolul 3 este dedicat metodelor de identificare bazate pe transformata wavelet. Se prezintă teoria necesară : bazele analizei wavelet, analiza wavelet multirezoluție, utilizarea transformatei wavelet la identificarea sistemelor liniare și neliniare cu unul, respectiv mai multe grade de libertate, o metodă de identificare a sistemelor descrise cu ecuații diferențiale de ordin fracționar, precum și utilizarea transformatei wavelet continue.

Capitolul 4 oferă descrierea unor soluții de identificare prin mai multe metode în domeniul frecvență.

Capitolul 5 cuprinde descrierea unui studiu experimental efectuat în laboratoarele universității asupra unor materiale cu comportare neliniară pronunțată.

## 2. METODE DE IDENTIFICARE ÎN DOMENIUL TEMPORAL

### 2.1. Utilizarea transformatei Hilbert în identificarea sistemelor neliniare

Transformata Hilbert a fost introdusă de David Hilbert în 1905, în studiul funcțiilor analitice, și aplicată apoi de la funcțiile de clasă  $L^2(R)$  la cele de clasă  $L^p(R)$ .

Importante aplicații în prelucrarea semnalelor au fost stabilite de Norden Huang, începând cu anii 1996, motiv pentru care mai poartă numele și de transformată Hilbert-Huang.

În acest moment au fost stabilite aplicații în prelucrarea datelor în domenii [74, 60] cum ar fi descompunerea empirică a modurilor, studiul undelor neliniare, dinamică moleculară, procese nestaționare, detectarea defecțiunilor mașinilor, studiul fenomenelor seismice, meteorologice, identificarea parametrilor sistemelor neliniare, analiză spectrală Hilbert și structurală [10, 146].

### 2.2. Transformata Hilbert

Pentru un semnal  $x(t)$ , unde  $t \in (-\infty, +\infty)$ , descris de o funcție reală sau complexă, cu  $t \in R$ , de pătrat integrabil (clasă  $L^2(R)$ ), transformata Hilbert se definește ca [74, 60, 10]:

$$\hat{x}(t) = H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} \quad (2.1)$$

unde cu  $P$  s-a notat valoarea principală a integralei în sens Cauchy. Explicit aceasta se scrie, pentru un  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} \quad (2.2)$$

Transformata se mai poate aplica și funcțiilor reale sau complexe de clasă  $L^p(R)$ , unde  $0 \leq p \leq \infty$ .

Operatorul de transformare Hilbert este liniar:

$$H\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 H\{x_1(t)\} + a_2 H\{x_2(t)\} \quad (2.3)$$

pentru orice  $a_1, a_2 \in C$  și  $x_1, x_2 \in L^p(R)$ .

Această transformare este inversabilă, transformata inversă  $H^{-1}$  fiind definită:

$$x(t) = H^{-1}\{\hat{x}(t)\} = \frac{-1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau) d\tau}{t - \tau} \quad (2.4)$$

Se poate observa ușor că transformata Hilbert directă și inversă au proprietățile:

$$H^{-1} = -H, \quad H^2 = -1 \quad (2.5)$$

adică aplicând de două ori transformata Hilbert asupra unei funcții oscilante, obținem o oscilație în opoziție de fază cu oscilația dată ( $H^2\{x(t)\} = -x(t)$ ).

Transformata Hilbert a unei funcții translate cu  $a \in R$  este:

$$H\{x(t+a)\} = \hat{x}(t+a) \quad (2.6)$$

iar la schimbare de scală cu  $a \in R$  este:

$$H\{x(at)\} = \text{sign}(a)\hat{x}(at) \quad (2.7)$$

Transformata Hilbert a derivatei de ordin  $n \in N$  a unei funcții  $x(t)$  este:

$$H\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = \frac{d^n \hat{x}(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} H\{x(t)\} \quad (2.8)$$

adică operația de derivare comută cu cea de transformare Hilbert (adică, pentru orice  $n \in N$ , comutatorul este  $[\frac{d^n x(t)}{dt^n}, H] = 0$ ).

Transformata Hilbert a produsului:

$$H\{t^n x(t)\} = t^n H\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\pi} \int_R \tau^{n-k+1} x(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

Transformata Hilbert a unei funcții impare este:

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x(\tau) d\tau}{t^2 - \tau^2} \quad (2.10)$$

iar a unei funcții pare:

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2tx(\tau)d\tau}{t^2 - \tau^2} \quad (2.11)$$

Transformata Hilbert a produsului de convoluție a două funcții  $x(t)$  și  $y(t)$ :

$$(x \otimes y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)y(\tau)d\tau$$

este:

$$H\{(x \otimes y)(t)\} = (H\{x\} \otimes y)(t) = (x \otimes H\{y\}) \quad (2.12)$$

sau, mai simplu:  $H\{(x \otimes y)(t)\} = \hat{x} \otimes y = x \otimes \hat{y}$ .

Vom nota cu  $F$  și  $F^{-1}$  transformata Fourier directă și inversă a unei funcții  $x(t)$ :

$$X(\omega) = F\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.13)$$

$$x(t) = F^{-1}\{X\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.14)$$

Cu aceasta se poate arăta că transformata Fourier a transformatei Hilbert a unei funcții  $x(t)$  este:

$$F\{H\{x(t)\}\} = -i \operatorname{sign}(\omega)X(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega)F\{x\}, \quad (2.15)$$

relație care sugerează o metodă de calcul a transformatei Hilbert a unui semnal  $x(t)$ , ca transformata Fourier inversă a produsului  $-i \operatorname{sign}(\omega)F\{x\}$ .

Prezentăm în tabelul de mai jos transformatele Hilbert ale câtorva funcții elementare uzuale. O listă cuprinzătoare se poate găsi în lucrările [25, 74].

Nr. crt.	Funcția	Transformata Hilbert
1	$\sin(\alpha t + \beta)$	$-i \operatorname{sign}(\alpha) \cos(\alpha t + \beta)$
2	$\cos(\alpha t + \beta)$	$i \operatorname{sign}(\alpha) \sin(\alpha t + \beta)$
3	$\exp(i\alpha t)$	$-i \operatorname{sign}(\alpha) \exp(i\alpha t)$
4	$1/\pi$	$\delta(t)$
5	$\delta(t)$	$\frac{-1}{\pi}$

6	$1/\pi^{n+1}$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$
7	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$	$\frac{1 - \cos \pi}{\pi}$
8	$u(t)t^n e^{-at},$ $n \in N, a > 0$	$t^n \pi \left[ e^{-at} Ei(at) - \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(at)^k} \right]$

Tabelul 2.1

În tabelul 2.1  $u(t)$  reprezintă funcția Heaviside, iar  $Ei(t)$  integrala exponențială.

În final dorim să mai spunem că în limbajul de calcul simbolic Maple este implementată transformata Hilbert directă și inversă în pachetul *inttrans*. Deasemenea, numeric, transformata Hilbert directă și inversă, a unui semnal eșantionat se poate calcula în Mathcad v.14 și în Matlab.

### 2.3. Semnale analitice

Semnalul analitic asociat unui semnal  $x(t)$  este definit ca suma dintre  $x(t)$  și transformata Hilbert a semnalului  $x(t)$  înmulțită cu unitatea imaginară  $i$ :

$$z(t) = x(t) + i\hat{x}(t) = x(t) + iH\{x(t)\}, \quad (2.16)$$

și reprezintă o funcție complexă dependentă de timp.

Introducerea semnalului analitic asociat a reprezentat un câștig important în prelucrarea semnalelor, deoarece apare posibilitatea definirii unor mărimi de mare importanță, și anume a unei înfășurătoare și a unei frecvențe instantanee.

Acest lucru este posibil, prin faptul că prin transformare Hilbert, componenta imaginară a semnalului analitic conține componente oscilatorii cu aceleași frecvențe și faze modificate, datorită schimbării componentelor sinusoidale ca cele cosinusoidale (vezi tab. 2.1).

Construit ca semnal complex semnalul analitic poate fi pus sub forma:

$$z(t) = A(t)\exp(i\varphi(t)) \quad (2.17)$$

unde  $A(t)$  reprezintă înfășurătoarea semnalului sau amplitudinea instantanee, iar  $\varphi(t)$  faza instantanee.

Amplitudinea instantanee  $A$  și faza instantanee  $\varphi$  se calculează:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad \varphi(t) = \arctan \left[ \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right] \quad (2.18)$$

Din (2.18) putem defini pulsația instantanee:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{x(t)\dot{\tilde{x}}(t) - \dot{x}(t)\tilde{x}(t)}{A^2(t)} = \text{Im} \left[ \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \right] \quad (2.19)$$

și derivata în raport cu timpul a amplitudinii:

$$\dot{A}(t) = \frac{x(t)\dot{x}(t) + \tilde{x}(t)\dot{\tilde{x}}(t)}{A^2(t)} = A(t) \text{Re} \left[ \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \right] \quad (2.20)$$

Trebuie să mai prezentăm o relație foarte importantă referitoare la transformata Hilbert a produselor de funcții, numită și teorema lui Bedrosian [6].

Vom considera două funcții  $x_l(t), x_h(t)$ , notând transformatele lor Fourier cu  $X_l(\omega) = Fx_l$  și  $X_h(\omega) = Fx_h$ .

Vom presupune că funcția  $x_l$  are componente de joasă frecvență, care nu depășesc pulsația limită  $\omega_0$ , (adică  $X_l(\omega) = 0$ , pentru  $|\omega| > \omega_0$ ), iar  $x_h$  cu spectru de frecvențe înalte și al căror componente spectrale sunt localizate peste limita  $\omega_0$ , (adică  $X_h(\omega) = 0$ , pentru  $|\omega| < \omega_0$ ), spectrele fiind disjuncte.

Teorema Bedrosian [6] a stabilit că dacă funcția  $x_l$  cu spectru de frecvențe joase, și funcția  $x_h(t)$  cu spectru de frecvențe înalte, au spectru disjunct:

$$X_l(\omega)X_h(\omega) = 0, \quad \omega \in R,$$

transformata Hilbert a produsului funcțiilor este:

$$H\{x_l(t)x_h(t)\} = x_l(t)(H\{x_h(t)\}) = x_l(t)\tilde{x}_h(t) \quad (2.21)$$

## 2.4. Identificarea sistemelor neliniare cu un grad de libertate din vibrații libere cu ajutorul transformatei Hilbert

Vom prezenta o metodă care a fost introdusă de Michael Feldman [41, 42]. Feldman a pus de asemenea la punct o metodă de determinare a neliniarităților din armonici superioare [39].

Metoda a fost extinsă și pentru sisteme ale căror neliniarități au variații nesimetrice [46] și a sistemelor de oscilatori slab cuplați.

Vom considera în acest caz un sistem vibrant cu un grad de libertate, care efectuează vibrații libere amortizate descrise de ecuația diferențială:

$$\ddot{x} + 2h_0(A)\dot{x} + \omega_0^2(A)x = 0, \quad (2.22)$$

unde  $h_0(A) = c(A)/2m$  este un factor de amortizare,  $c(A)$  este coeficientul de amortizare,  $m$  este masa sistemului,  $\omega_0^2(A) = k(A)/m$  reprezintă pulsația naturală,  $k(A)$  este constanta elastică. Ecuația (2.22) descrie un sistem neliniar datorită faptului că  $c$  și  $k$  sunt dependente de deplasarea maximă (amplitudinea instantanee) a vibrațiilor. Rezultă de asemenea că  $h(A)$  și  $\omega_0^2(A)$  au variații temporale lente în raport cu  $x(t)$ .

Vom considera că  $h_0(A)$ ,  $\omega_0^2(A)$ ,  $k(A)$ ,  $c(A)$  sunt funcții simetrice de  $A$ , și anume  $h_0(A)$  funcție impară de  $A$ , iar celelalte pare.

Dacă se aplică transformata Hilbert ecuației (2.22), datorită proprietății (2.21) obținem ecuația (2.22) scrisă în semnal analitic  $z = x + i\hat{x}$ :

$$\ddot{z} + 2h_0(A)\dot{z} + \omega_0^2(A)z = 0 \quad (2.23)$$

Utilizând (2.16) rezultă:

$$\dot{z}(t) = z(t)\left(\frac{\dot{A}}{A} + i\omega\right) \quad (2.24)$$

$$\ddot{z} = z(t)\left[\frac{\ddot{A}(t)}{A(t)} - \omega^2(t) + 2i\frac{\dot{A}(t)\omega(t)}{A(t)} + i\dot{\omega}(t)\right] \quad (2.25)$$

Înlocuind în (2.22), ecuația devine:

$$z\left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_0^2 + 2h_0\frac{\dot{A}}{A} + i\left(2\frac{\dot{A}}{A}\omega + \dot{\omega} + 2h_0\omega\right)\right] = 0 \quad (2.26)$$

Extrăgând partea reală și imaginară din (2.13), rezultă:

$$\omega_0^2(t) = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A}\dot{\omega}}{A\omega}, \quad h_0(t) = -\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} \quad (2.27)$$

Pentru sisteme cu amortizare structurală, descrise de ecuația

$$\ddot{x} + i\frac{\delta A}{\pi}x + \omega_0^2x = 0 \quad (2.28)$$

pentru semnalul analitic rezultă ecuația :



$$\ddot{z} + i\left(\omega_0^2 + \frac{\delta A}{\pi}\right)z = 0$$

iar după separare rezultă:

$$\omega_0^2(t) = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A}, \quad \delta(t) = -2\frac{\pi \dot{A} \omega A}{\omega_0^2} - \frac{\pi \dot{\omega}}{\omega_0^2} \quad (2.29)$$

$\omega_0$  fiind pulsația instantaneei naturale și  $\delta$  decrementul instantaneu logaritmic.

Este important de spus că în scopul identificării  $k$ ,  $c$  și  $\delta$  din date experimentale trebuie reprezentat  $k(t)$ ,  $c(t)$  ca funcție de  $y(t)$ . Este posibil să se exprime  $A(t)$  ca funcție de  $\nu = \omega(t)/2\pi$ .

## 2.5. Generalizare

O analiză conceptuală a metodei de identificare bazată pe transformata Hilbert este făcută în lucrarea [71].

Pe de altă parte rezultatele obținute de M. Feldman în lucrarea [39] pot fi aplicate și la un caz mai general la care coeficientul de amortizare, și coeficientul elastic sunt funcții de forma  $h(\dot{x})$  și  $k(x)$ .

Constanta elastică se poate dezvolta în serie Taylor în origine, sub forma:

$$k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{d^m k}{dx^m} \Big|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_m}{m!} x^m$$

Considerând că soluția poate fi aproximată sub forma produsului unei funcții de timp lent variabile  $A(t)$  și a uneia rapid variabile  $\varphi(t)$

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t)$$

și integrând  $k(x(t))$  pe o perioadă  $T$ , vor rămâne doar termenii care conțin puterile pare ale funcției  $\cos \varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle k(x(t)) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} k(x(t)) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n}(t) \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \kappa_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \kappa_{2n} A^{2n}(t) \end{aligned}$$

unde  $C_m^k$  reprezintă combinații din  $m$  luate câte  $k$ .

Semnalul analitic complex al vitezei  $\dot{x}$  se poate scrie:

$$\zeta(t) = \dot{x}(t) + i\hat{\dot{x}}(t) = V(t)\exp(i\psi(t)), \quad \tan\psi = \frac{\hat{\dot{x}}}{\dot{x}}$$

În mod similar se poate arăta că funcția de amortizare se poate dezvolta în serie:

$$h(\dot{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{d^m h}{d\dot{x}^m} \Big|_{\dot{x}=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_m}{m!} \dot{x}^m$$

Considerând viteza  $\dot{x}(t) = -\omega A \sin \varphi(t) = -V_{max}(t) \sin \varphi(t)$ , rezultă integrând în mod similar pe o perioadă:

$$\begin{aligned} \langle h(\dot{x}(t)) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} h(\dot{x}(t)) dt = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_m}{m!} (-1)^m V_{max}^m \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin^m \varphi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \mathcal{X}_{2n} V_{max}^{2n} \end{aligned}$$

rămânând doar termenii cu puteri pare ale lui  $V_{max}$ .

Rezultă în final că valorile medii ale coeficientului elastic și coeficientului de amortizare depind de amplitudinea vitezei și a deplasării:

$$\langle k(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{2n}}{2^{2n} (n!)^2} A^{2n}(t), \quad \langle h(\dot{x}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \mathcal{X}_{2n}}{2^{2n} (n!)^2} V_{max}^{2n}(t) \quad (2.30)$$

Din (2.30) am arătat că metoda lui Feldman este aplicabilă și în caz general, pentru sisteme neliniare cu neliniarități  $k = k(x)$  și  $h = h(\dot{x})$  oarecare, deoarece pe interval de o perioadă coeficienții elastici și de amortizare depinzând de puterile pare ale amplitudinii mișcării  $A(t)$  și ale amplitudinii vitezei  $V_{max}(t)$ .

Vom considera că un sistem vibrant a cărui mișcarea liberă amortizată este descrisă de ecuația neliniară:

$$\ddot{x} + h(\dot{x})\dot{x} + k(x)x = 0, \quad (2.31)$$

masa sistemului fiind unitară.

Vom considera că parametrii pot fi scriși sub forma sumei dintre doi termeni, unul constant și unul rapid variabil, depinzând de puterile lui  $x(t)$ , respectiv  $\dot{x}(t)$ , adică  $h(\dot{x}) = h_0 + h_1(\dot{x}(t))$  și  $k(x) = k_0 + k_1(x(t))$ .

Ecuția se mai scrie:

$$\ddot{x} + (h_0 + h_1(\dot{x}))\dot{x} + (k_0 + k_1(x))x = 0$$

Transformata Hilbert a ecuației, aplicând teorema lui Bedrosian, și considerând că  $h_1$  și  $k_1$  sunt cu frecvență mai mare decât  $\dot{x}$  și  $x$ :

$$\ddot{\hat{x}} + h_0\hat{x} + k_0\hat{x} + \hat{h}_1\dot{\hat{x}} + \hat{k}_1\hat{x} = 0$$

Adunând penultima ecuație cu ultima înmulțită cu  $i$ , rezultând pentru semnalul analitic  $X = x + i\hat{x}$ , ecuația de mișcare:

$$\ddot{X} + \lambda\dot{X} + \kappa X = 0, \quad (2.32)$$

în care:

$$\lambda = h_0 + \frac{h_1\dot{\hat{x}} + k_1x\hat{x} - \hat{h}_1x\dot{\hat{x}} - \hat{k}_1x^2}{\dot{\hat{x}} - \hat{x}x} \quad (2.33)$$

$$\kappa = k_0 + \frac{-h_1\dot{\hat{x}} - k_1x\hat{x} + \hat{h}_1(\dot{\hat{x}})^2 + \hat{k}_1x\dot{\hat{x}}}{\dot{\hat{x}} - \hat{x}x} \quad (2.34)$$

Rezultă că ecuația (2.31) este validă și pentru semnalul analitic, sub forma (2.32), cu relațiile de legătură (2.33) și (2.34). Rezultă că putem aplica metoda de identificare Feldman din secțiunea anterioară cu semnalul analitic  $X = x + i\hat{x} = A(t)\exp(i\psi(t))$ .

Se poate arăta de asemenea că forța elastică se poate determina din semnalul analitic cu relația:

$$F_{el}(t) = \text{sign}(x(t))A(t)\omega_0^2(t), \quad (2.35)$$

iar forța de amortizare cu relația:

$$F_r(t) = \text{sign}(\dot{x}(t))h_0(t)V(t). \quad (2.36)$$

În final mai trebuie să spunem că măsurând experimental răspunsul liber al unui sistem neliniar amortizat putem identifica forța elastică  $F_{el}(t)$  ca funcție de  $A(t)$ , iar forța de amortizare  $F_{am}(t)$  ca funcție de  $V(t)$ .

Se poate reprezenta de asemenea curba schelet (sau coloană vertebrală) reprezentând amplitudinea  $A(t)$  ca funcție de frecvență  $\nu(t) = \sqrt{\omega_0^2}/(2\pi)$ . Din

(2.30) se poate vedea că această curbă, în cazul sistemelor liniare este o linie verticală.

## 2.6. Identificarea sistemelor vibrante neliniare cu un grad de libertate din vibrații forțate cu ajutorul transformatei Hilbert

În acest caz ecuația neliniară de mișcare unidimensională, care exprimă vibrațiile forțate cu amortizare vâscoasă are forma [42]:

$$\ddot{x} + 2h_0(A)\dot{x} + \omega_0^2(A)x = F(t)/m \quad (2.37)$$

unde  $F(t)$  este forța perturbatoare.

Ecuția poate fi scrisă și pentru semnalul analitic

$$\ddot{z} + 2h_0(A)\dot{z} + \omega_0^2(A)z = \frac{F(t) + i\tilde{F}(t)}{m} \quad (2.38)$$

și exprimând  $z$  conform (2.21), rezultă după calcule:

$$z \left[ \frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_0^2 + 2h_0 \frac{\dot{A}}{A} + i \left( 2 \frac{\dot{A}}{A} \omega + \dot{\omega} + 2h_0 \omega \right) \right] = \frac{F(t) + i\tilde{F}(t)}{m} \quad (2.39)$$

După separarea părții reale și imaginare a relației (2.39), rezultă:

$$\omega_0^2(t) = \omega^2 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta \dot{A}}{A \omega m} - \frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A} \dot{\omega}}{A \omega} \quad (2.40)$$

$$h_0(t) = \frac{\beta A}{2 \omega m} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} \quad (2.41)$$

unde:

$$\alpha = \operatorname{Re} \frac{F(t) + i\tilde{F}(t)}{z(t)}$$

$$\beta = \operatorname{Im} \frac{F(t) + i\tilde{F}(t)}{X(t)}$$

iar  $\tilde{F}$  este transformata Hilbert a forței de excitație.

2.6. Identificarea sistemelor vibrante neliniare cu un grad de libertate din vibrații forțate 21

Rezultă de asemenea că:

$$\begin{aligned} \frac{F(t) + i\tilde{F}(t)}{X(t)} &= \alpha(t) + i\beta(t) = \\ &= \frac{x(t)F(t) + \tilde{x}(t)\tilde{F}(t)}{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} + i \frac{\tilde{x}(t)F(t) - x(t)\tilde{F}(t)}{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

În ecuațiile (2.37)-(2.42) a fost presupus că masa este cunoscută. Masa poate fi însă stabilită din (2.41):

$$m = \frac{\Delta(\alpha - \beta\dot{A}A\omega)_{\Delta t}}{\Delta\left(-\omega^2 + \frac{\ddot{A}}{A} - 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\dot{A}\dot{\omega}}{A\omega}\right)_{\Delta t}} \quad (2.43)$$

unde  $\Delta(\dots)_{\Delta t}$  reprezintă variația (...) în intervalul de timp  $\Delta t$ .

Se preferă să se lucreze cu variația în locul derivatelor, datorită faptului că derivatele de ordin trei ale datelor experimentale generează erori, datorită împărțirii de trei ori.

Pentru sisteme neliniare cu amortizare structurală, în cazul vibrațiilor forțate, ecuația de mișcare este:

$$\ddot{z} + i(\omega_0^2 + \frac{\delta A}{\pi})z = \frac{F(t)}{m} \quad (2.44)$$

unde  $\delta(t)$  reprezintă decrementul logaritmic. În mod similar cu cazul (2.37) rezultă pulsația naturală și decrementul logaritmic:

$$\begin{aligned} \omega_0^2(t) &= \omega^2 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta\dot{A}}{A\omega m} - \frac{\ddot{A}}{A} \\ \delta(t) &= \frac{\pi}{\omega_0^2} \left[ \frac{\beta}{\omega m} - 2\frac{\dot{A}\omega}{A} - \dot{\omega} \right] \end{aligned}$$

precum și masa:

$$m = \frac{\Delta(\alpha)_{\Delta t}}{\Delta(-\omega^2 + \ddot{A}A)_{\Delta t}}$$

Trebuie subliniat că  $A(t)$ ,  $x(t)$ ,  $v(t) = \dot{x}(t)$ ,  $h(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\omega_0(t)$ , și forța elastică  $F(x) = \omega_0^2 x$  sunt cantități dependente de timp.

Interdependențele unei serii de mărimi fizice stabilite aici pot fi exprimate într-o formă independentă de timp. De exemplu se poate reprezenta forța elastică  $F$  ca funcție de deplasarea  $x$ , sau de viteza  $v$ ,  $A$  ca funcție de  $\omega$ , sau coeficientul de amortizare  $h$  ca funcție de amplitudinea  $A$ .

Practic, pentru un sistem vibrant dat cu comportare neliniară, poziția instantanee  $x(t)$  și forța perturbatoare  $F(t)$  (în cazul vibrațiilor forțate) pot fi investigate experimental, măsurate cu ajutorul senzorilor, introduse în computer cu ajutorul unei interfețe de achiziție, iar apoi prelucrate pe computer.

Sistemele neliniare cu un grad de libertate pot fi identificate ca în cazul sistemelor liniare, din răspunsul liber utilizând modelul neliniar (2.10) sau (2.28). Sistemele pot fi identificate de asemenea din răspunsul forțat utilizând modelele (2.37) sau (2.44).

Metodele bazate pe transformata Hilbert au fost utilizate și la sisteme cu neliniaritate histeretică [118], la vibrațiile induse de vânt [159].

O analiză de finețe a metodelor de identificare bazate pe transformata Hilbert este făcută în lucrările [71, 47].

Metodele bazate pe transformata Hilbert au fost utilizate și la sisteme cu modulație de amplitudine și frecvență [113]. O metodă care combină metoda cu cea a rețelelor neuronale este dată în [156].

Studiul defecțiunilor mașinilor, bazat pe transformata Hilbert este făcut în lucrarea [162], iar a unei structuri de beton armat pretensionat în [49].

Analiza unui sistem variabil în timp este făcută în lucrarea [44], iar răspunsul unui sistem cu un grad de libertate pentru diferite amplitudini ale excitației este dată în [166].

## 2.7. Identificarea sistemelor neliniare cu mai multe grade de libertate cu ajutorul transformatei Hilbert

Metoda de identificare introdusă de Feldman pentru sisteme cu un grad de libertate, din păcate nu poate fi extinsă și pentru sisteme cu mai multe grade de libertate, astfel încât să permită stabilirea în mod analog a forțelor elastice, a forțelor de amortizare și a celor de cuplaj.

M. Feldman face astfel de tentative de abordare a sistemelor cuplate [40]. Se obțin curbe schelet care se modifică cu modificarea cuplajului între oscilatori, care sunt ca valoare doar interesante.

Pentru sisteme cu mai multe grade de libertate a fost elaborată însă o metodă neparametrică de către Norden E. Huang, numită *metoda descompunerii empirice a modurilor* [61], care a fost combinată cu transformata Hilbert, care se mai numește și transformată Hilbert-Huang. Aplicații ale metodei au fost făcute și în lucrările [43, 157].

Trebuie să observăm că frecvența instantanee  $\nu(t)$  introdusă la semnalul analitic nu are o interpretare fizică validă, din punct de vedere al analizei Fourier.

În continuare vom prezenta pe scurt această metodă.

Metoda are la bază descompunerea unui semnal nestaționar cu ajutorul unor funcții numite *funcții modale intrinseci*.

## 2.7. Identificarea sistemelor neliniare cu mai multe grade de libertate cu ajutorul transformatei Hilbert 23

Determinarea acestor funcții se face după un algoritm iterativ plecând de la un semnal experimental  $x(t)$  eșantionat și achiziționat în calculator ca un șir discret  $x(i\Delta t) = x(i)$ , unde  $i = 1, \dots, N$ . Acest semnal are o comportare oscilatorie care poate fi complicată.

Metoda furnizează modalitatea de stabilire a unui număr  $M$  de funcții modale intrinseci notate (conform [61])  $IMF_m(i)$ , unde  $m = 1, \dots, M$ .

Determinarea funcțiilor modale intrinseci se face după următorul algoritm:

- 1) Se pleacă de la primul mod, punând  $m = 1$ .
- 2) Din șirul eșantionat al semnalului  $x(i)$  se extrag valorile maxime și se interpolează aceste puncte cu o curbă spline cubică aceste valori construind o înfășurătoare superioară  $e_{max}(i)$  (unde  $i = 1 \dots N$ ). În mod similar se extrag valorile minime și se interpolează cu o curbă spline cubică aceste valori construind o înfășurătoare inferioară  $e_{min}(i)$  (unde  $i = 1 \dots N$ ).
- 3) Din cele două înfășurătoare se poate obține o curbă a valorilor medii instantanee:

$$med_m(i) = \frac{e_{max}(i) - e_{min}(i)}{2}, \quad i = 1, \dots, N$$

și funcția modală intrinsecă aferentă:

$$IMF_m(i) = x(i) - med_m(i), \quad i = 1, \dots, N$$

Se extrage din semnal funcția modală rămânând semnalul modificat sau o funcție reziduală:

$$x(i) = x(i) - IMF_m(i) = r_m(i), \quad i = 1, \dots, N,$$

Dacă valorile funcției reziduale  $r_m(i)$  nu au scăzut sub o anumită limită impusă  $\varepsilon$ , se trece la determinarea funcției modale următoare, punând  $m = m + 1$ , și se reia calculul de la 2).

Când  $|r_m(i)| < \varepsilon$  se oprește calculul rezultând un număr de  $M$  funcții modale intrinseci.

Transformata Hilbert-Huang a unui semnal  $x(t)$  se realizează în următorul mod: în primul rând se aplică transformata Hilbert asupra funcțiilor modale intrinseci, după care semnalul analitic asociat semnalului dat  $x(t)$  poate fi exprimat cu ajutorul funcțiilor modale intrinseci:

$$z(t) = \sum_{m=1}^M [IMF_m(t) + iH\{IMF_m\}(t)] = \sum_{m=1}^M A_m(t) \exp(i\varphi_m(t)),$$

unde  $A_m(t)$  este amplitudinea instantanee, respectiv  $\varphi_m(t)$  a modului  $m$ . Frecvența instantanee a modului  $m$  este:

$$\omega_m(t) = \frac{d\varphi_m(t)}{dt}.$$

Semnalul  $x(t)$  se poate scrie:

$$x(t) = \text{Re}\left\{\sum_{m=1}^M A_m(t) \exp(i \int \omega_m(t) dt)\right\},$$

Dacă reprezentăm amplitudinile  $A_m(t)$  în planul timp frecvență  $(t, \omega_m(t))$ , se obține spectrul Hilbert-Huang al semnalului:

$$S(t, \omega) = \sum_{m=1}^M A_m(t, \omega_m(t)) = \sum_{m=1}^M A_m(t),$$

reprezentare care poate fi făcută fie ca o reprezentare 3D, fie ca o hartă plană de intensitate luminoasă sau culoare în dependență biunivocă cu amplitudinea.

Rezultate semnificative privind aplicarea analizei Hilbert-Huang la sisteme cu mai multe grade de libertate sunt obținute de J.N. Yang et al în lucrările [160, 161].

O comparare a metodei transformatei Hilbert-Huang cu metoda analizei wavelet se găsește în [45].

## 2.8. Identificarea unui model reologic neliniar care descrie relaxarea facilitată de vibrații

### 2.8.1. Modele reologice neliniare ale relaxării facilitate de vibrații

Se știe că în structurile sudate sau nituite apar tensiuni reziduale care în urma proceselor de relaxare naturală, duc la modificarea formei acestor piese. Acest proces natural este lent, fiind necesar să se lase un timp lung să se stabilizeze dimensional.

Este binecunoscut că detensionarea acestor tensiuni reziduale se poate accelera aplicând piesei șocuri sau vibrații.

Procesul de relaxare facilitată de vibrații nu poate fi explicat pe baza unor modele reologice liniare, deoarece în cazul modelelor reologice liniare la două defomații aplicate independent unui material, materialul dă un răspuns independent pentru fiecare din aceste defomații.



Pentru descrierea relaxării facilitată de vibrații vom utiliza două modele reologice neliniare plecând de la modelul standard de solid anelastic liniar. Unul din aceste modele a fost introdus de Drăgănescu în lucrările [30, 31, 32].

Vom considera modelul standard de solid anelastic liniar (Figura 2.1), constând din două elemente elastice cu moduli de elasticitate longitudinali  $E_r$  și  $\delta E$ , și un element amortizor ideal cu vâscozitate  $\eta = \delta E / \tau$ , unde  $\tau$  este constanta de relaxare. Vom nota cu  $E_u = E_r + \delta E$ , modulul de elasticitate nerelaxat. Vom considera că asupra elementului se aplică a tensiune  $\sigma(t)$ , iar deformația specifică longitudinală este de răspuns  $\varepsilon(t)$ .

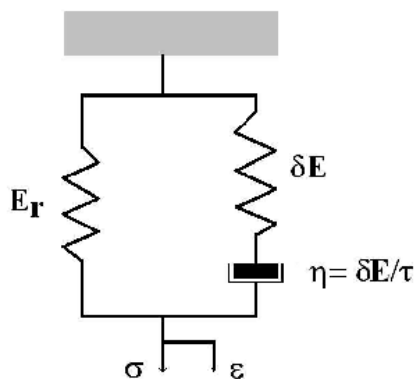


Figura 2.1

Rezultă ecuația constitutivă care exprimă dependența temporală între tensiune și deformație:

$$\frac{d}{dt}(\sigma - E_r \varepsilon) + \frac{1}{\tau}(\sigma - E_r \varepsilon) = \delta E \dot{\varepsilon} \quad (2.45)$$

Se observă din (2.45) că acest model este liniar.

La solidele policristaline (cum este oțelul) s-a constatat experimental o comportare neliniară datorită dependenței vitezei de relaxare de tensiunea aplicată la limita grăunților cristalini [109, 30].

Vom nota cu:

$$x = x(t) = \sigma - E_r \varepsilon \quad (2.46)$$

partea din tensiune nerelaxată din material.

Vom construi modelele neliniare considerând că viteza de relaxare este o funcție liniară de  $\sigma$ :

$$\nu \sim \frac{1}{\tau}(\sigma) = \frac{\alpha\sigma + \beta}{\tau_0}$$

unde  $\tau_0$  este o constantă de relaxare,  $\alpha$  un parametru ales  $0 < \alpha < 1$ , iar  $\beta$  un parametru apropiat de unitate ( $\beta \approx 1$ ).

Putem construi două ecuații neliniare, una considerând că  $\frac{1}{\tau}$  este funcție de  $x$ , rezultând din (2.45) ecuația neliniară:

$$\frac{d}{dt}(\sigma - E_r \varepsilon) + \frac{1}{\tau_0}(\alpha\sigma + \beta)(\sigma - E_r \varepsilon) = \delta E \dot{\varepsilon} \quad (2.47)$$

ecuație care urmează a fi studiată în acest capitol.

O altă ecuație neliniară se poate stabili dacă în (2.45) introducem dependența lui  $1/\tau = (\alpha(\sigma - E_r \varepsilon) + \beta)/\tau_0$ , rezultând ecuația constitutivă neliniară:

$$\frac{d}{dt}(\sigma - E_r \varepsilon) + \frac{\alpha}{\tau_0}(\sigma - E_r \varepsilon)^2 + \frac{\beta}{\tau_0}(\sigma - E_r \varepsilon) = \delta E \dot{\varepsilon} \quad (2.48)$$

Vom utiliza ecuațiile constitutive (2.47) și (2.48) pentru investigarea fenomenelor de relaxare facilitată de vibrații.

Trebuie să mai notăm faptul că prima ecuație (2.47) este mai adecvată descrierii procesului de relaxare pe baza fenomenelor de lunecare la limita grăunților cristalini, deoarece în aceasta viteza de relaxare depinde liniar de tensiunea la limita grăunților cristalini însă practic mai greu de rezolvat, iar în ecuația (2.48) viteza de relaxare depinde liniar de diferența  $\sigma - E_r \varepsilon$  la limita grăunților cristalini, iar tehnic, mai ușor de rezolvat.

În ambele cazuri vom utiliza condiția inițială  $t = 0$ :

$$\sigma_0 = (E_r + \delta E)\varepsilon_0, \quad (2.49)$$

care corespunde răspunsului instantaneu la deformația specifică  $\varepsilon_0$ .

În caz în care se pune  $\beta = 1$  și  $\alpha = 0$  ecuațiile constitutive se transformă în ecuația constitutivă a modelului anelastic liniar standard.

Dacă considerăm că în (2.47) și (2.48)  $\beta = 1$ , iar  $\alpha$  este un parametru mic ( $0 < \alpha < 1$ ), obținem două modele de solid anelastic cu neliniarități slabe.

Procesul de relaxare naturală (fără vibrați) corespunde funcțiilor de excitație:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varepsilon_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

unde  $\varepsilon_0$  este o deformație specifică normală reziduală indusă în solid.

Pentru a descrie procesele de relaxare facilitate de vibrații aplicate din exterior, vom considera excitația reprezentată de deformație specifică normală  $\varepsilon(t)$  este:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varepsilon_0 + A \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

unde  $\varepsilon_0$  este tensiunea inițială reziduală, iar  $A$  și  $\omega$  sunt amplitudinea, respectiv pulsația deformației specifice normale.

Vom introduce o nouă variabilă și condiția inițială corespunzătoare:

$$x = \sigma - E_r \varepsilon, \quad x(0) = \delta E \varepsilon_0.$$

Cu această notație ecuația constitutivă (2.48) capătă forma:

$$\dot{x} + \frac{\beta}{\tau_0} x + \frac{\alpha}{\tau_0} x^2 = \delta E \dot{\varepsilon} \quad (2.52)$$

Deoarece am considerat că  $\alpha$  ia valori mici, ecuația (2.52) poate fi rezolvată cu ajutorul metodei parametrului mic.

Pentru  $\alpha = 0$  și condiția inițială  $x_0(0) = \delta E \varepsilon_0$ , ecuația neperturbată devine:

$$\dot{x}_0 + \frac{\beta}{\tau_0} x_0 = \delta E \omega A \cos \omega t,$$

cu soluția:

$$\begin{aligned} x_0(t) = & \delta E \left( \varepsilon_0 - \frac{A \omega \beta / \tau_0}{\omega^2 + (\beta / \tau_0)^2} \right) e^{-\beta t / \tau_0} + \\ & + \frac{A \delta E \omega}{\omega^2 + (\beta / \tau_0)^2} \left[ \omega \sin \omega t + \frac{\beta}{\tau_0} \cos \omega t \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$= ae^{-\frac{\beta}{\tau_0}t} + b \sin \omega t + c \cos \omega t$$

în care s-au introdus notațiile:

$$a = \delta E \left( \varepsilon_0 - \frac{A \omega \beta / \tau_0}{\omega^2 + (\beta / \tau_0)^2} \right)$$

$$b = \frac{A \delta E \omega^2}{\omega^2 + (\beta / \tau_0)^2} \quad c = \frac{A \delta E \omega \frac{\beta}{\tau_0}}{\omega^2 + (\beta / \tau_0)^2} \quad (2.54)$$

Se observă că în cazul procesului liniar de relaxare, care conține componenta  $a \exp[-\frac{\beta}{\tau_0}t]$  în soluția (2.53), corespunde unei constante de timp de relaxare echivalente egale cu  $\tau_{ech0} = \tau_0 / \beta$ .

Deoarece  $\alpha$  este un parametru mic, ecuația (2.52) poate fi rezolvată punând soluția  $x(t)$  sub forma unei serii de puteri în  $\alpha$ :

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \alpha^3 x_3(t) + \dots + \alpha^k x_k(t)$$

unde  $x_k(t)$  reprezintă aproximația de ordinul  $k$  a soluției  $x(t)$ .

Introducând soluția în (2.52), prin separarea termenilor de diferite puteri  $k > 0$  în  $\alpha$ , rezultă:

$$\dot{x}_1 + \frac{\beta}{\tau_0} x_1 = -\frac{1}{\tau_0} x_0^2(t) \quad (2.55)$$

$$\dot{x}_2 + \frac{\beta}{\tau_0} x_2 = -\frac{1}{\tau_0} 2x_1(t)x_0(t) \quad (2.56)$$

$$\dot{x}_3 + \frac{\beta}{\tau_0} x_3 = -\frac{1}{\tau_0} [2x_2(t)x_0(t) + x_1^2(t)] \quad (2.57)$$

...

cu condițiile inițiale:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dots = 0.$$

Soluția aproximativă de ordinul întâi este:

$$\begin{aligned}
 x_1 = & \frac{\delta E}{\beta} \left( \varepsilon_0 - \frac{A\omega\beta/\tau_0}{\omega^2 + (\beta/\tau_0)^2} \right)^2 \left( e^{-\frac{2\beta}{\tau_0}t} - e^{-\frac{\beta}{\tau_0}t} \right) + \\
 & + ke^{-\frac{\beta}{\tau_0}t} - \frac{1}{2\beta}(b^2 + c^2) - \frac{2a}{\tau_0\omega} [c \sin \omega t + b \cos \omega t] e^{-\frac{\beta}{\tau_0}t} + \\
 & + \frac{1}{\beta(4\omega^2 + \beta^2/\tau_0^2)} \left[ \frac{\beta^2}{2\tau_0^2}(b^2 - c^2) + \frac{2\beta\omega}{\tau_0}bc \right] \cos 2\omega t + \\
 & + \frac{1}{\beta(4\omega^2 + \beta^2/\tau_0^2)} \left[ \frac{\beta\omega}{\tau_0}(b^2 - c^2) - \frac{\beta^2}{\tau_0^2}bc \right] \sin 2\omega t \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

unde  $k$  este o constantă de integrare dată de:

$$k = \frac{1}{2\beta}(b^2 + c^2) + \frac{2ab}{\tau_0\omega} - \frac{1}{\beta(4\omega^2 + \beta^2/\tau_0^2)} \left[ \frac{\beta^2}{2\tau_0^2}(b^2 - c^2) + \frac{2\beta\omega}{\tau_0}bc \right]$$

Rezultă, că soluția ecuației (2.47) se poate scrie:

$$\sigma(t) = E_r(\varepsilon_0 + A \sin \omega t) + x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots \quad (2.59)$$

Din primul termen al soluției  $x_1$  (2.58) rezultă că neliniaritatea va produce componente de relaxare conținând funcții exponențiale  $\exp[-\frac{2\beta}{\tau_0}t] - \exp[-\frac{\beta}{\tau_0}t]$  care descreșc mai rapid, cu o constantă de relaxare  $\tau_{ech1} = \tau_0/2\beta$ . Din factorul acestui termen rezultă că contribuția acestui termen crește cu frecvența, pentru  $\omega > \beta/\tau_0$ .

Acest termen crește cu puterea a doua a amplitudinii deformației specifice aplicate.

Pentru ordinul următor de aproximație rezultă similar că  $x_2$  are termeni de relaxare conținând  $\exp[-\frac{3\beta}{\tau_0}t]$ ,  $x_3$  are un termen care conține  $\exp[-\frac{4\beta}{\tau_0}t]$  și așa mai departe.

Prin urmare neliniaritatea contribuie cu termeni de răspuns ai căror constante de relaxare echivalente sunt  $\tau_{ech2} = \tau_0/3\beta$ ,  $\tau_{ech3} = \tau_0/4\beta$ , etc.

Rezultă de aici că acest model este valid deoarece arată că vibrațiile exterioare facilitează relaxarea, reducând timpul de relaxare. Trebuie să notăm ca fenomenul este dependent de frecvența vibrațiilor exterioare aplicate.

Pentru a ilustra fenomenul de relaxare facilitată, ecuația s-a rezolvat și numeric cu metoda Runge-Kutta.

Parametrii modelului au fost aleși astfel încât să illustreze în mod expresiv fenomenul investigat. Rezolvarea efectivă a problemei s-a făcut în MathCAD.

S-a ales astfel:  $E_r = 2000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\delta E = 1000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_0 = 10 \text{ s}$ ,  $\varepsilon_0 = 0.2$ ,  $\beta = 1$ . Intervalul de timp pe care s-a căutat soluția a fost  $f \in [0, T]$ , cu  $T = 20 \text{ s}$ , soluția fiind eșantionată în  $n = 301$  puncte cu o perioadă de eșantionare  $\Delta t = T/(n-1)$ .

S-au studiat următoarele cazuri:

I. Cazul modelului liniar cu  $\alpha = 0$ , situația a) a răspunsului liber, fără vibrații  $A = 0$  și b) a răspunsului facilitat de vibrații cu  $A = \varepsilon_0/20$ , și frecvență  $\nu = 19 \text{ Hz}$ . Graficul  $\sigma(t)$  este reprezentat în Figura 2.2 cu negru pentru  $A = 0$  și cu roșu pentru  $A = \varepsilon_0/20$ .

II. Cazul modelului neliniar cu  $\alpha = 0.03$ , situația a) a răspunsului liber, fără vibrații  $A = 0$  și b) a răspunsului facilitat de vibrații cu  $A = \varepsilon_0/20$ , și frecvență  $\nu = 19 \text{ Hz}$ . Graficul  $\sigma(t)$  este reprezentat în Figura 2.3 cu negru pentru  $A = 0$  și

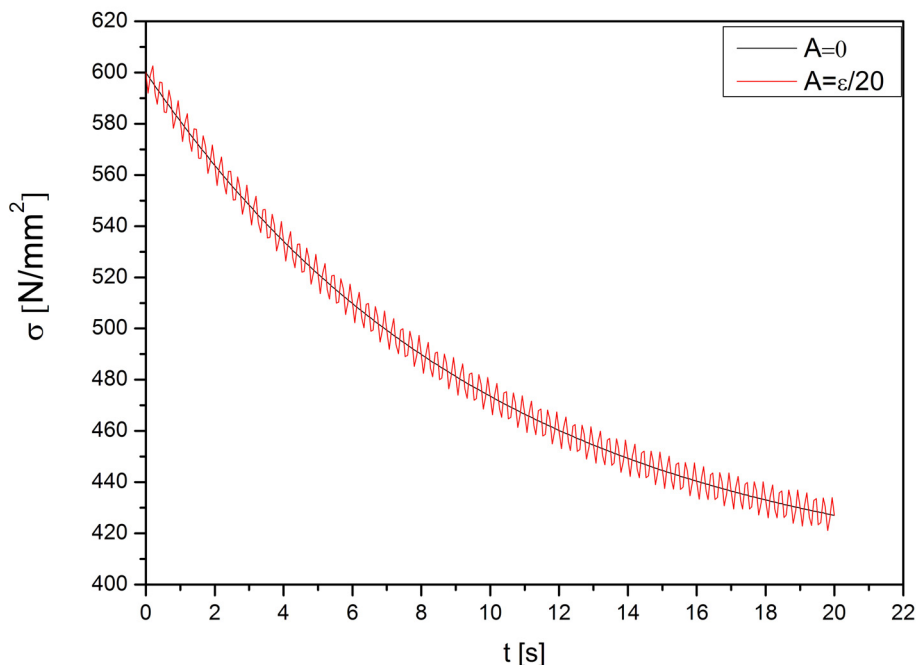
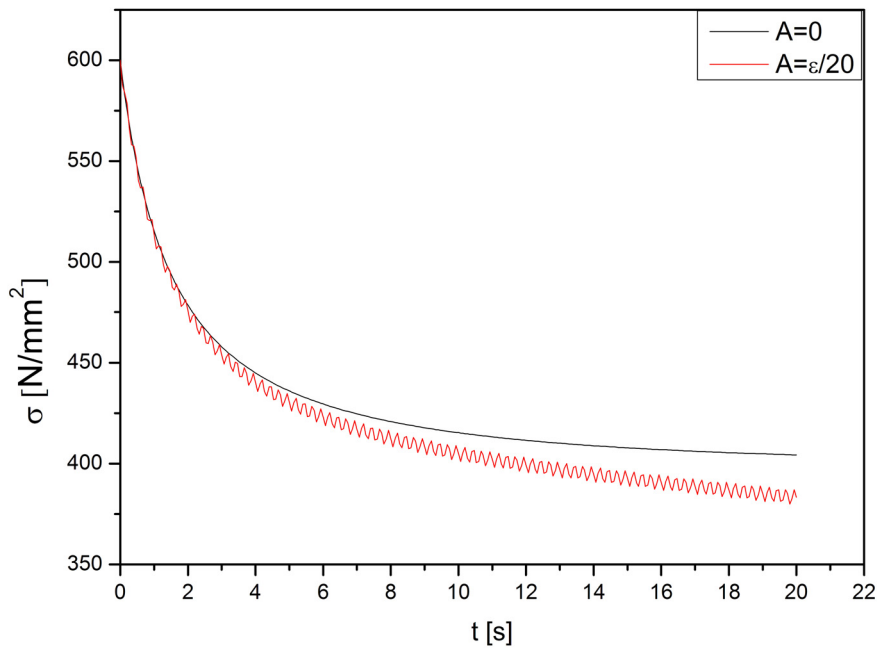


Figura 2.2

Din figura 2.2 se observă că în cazul modelului liniar procesul de relaxare în prezența vibrațiilor se suprapune perfect peste cel liber. Rezultă astfel că aplicarea vibrațiilor nu grăbește procesul de relaxare.

Din figura 2.3 se observă că în cazul modelului neliniar procesul de relaxare în prezența vibrațiilor nu se mai suprapune cu cel liber, componenta neoscilantă a acestei curbe scăzând mai repede decât răspunsul liber.



**Figura 2.3**

Rezultă astfel că aplicarea vibrațiilor nu grăbește procesul de relaxare în cazul modelului liniar.

În cele ce urmează vom studia modelul descris de ecuația (2.47). Utilizând funcția  $x = \sigma - E_r \varepsilon$ , această ecuație mai poate fi pusă sub forma:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{\tau_0}(x^2 + E_r \varepsilon) + \frac{\beta}{\tau_0}x = (E_r + \delta E)\dot{\varepsilon}, \quad (2.60)$$

Și în acest caz, pentru a descrie procesele de relaxare facilitate de vibrații aplicate din exterior, vom considera excitația reprezentată de deformație specifică normală  $\varepsilon(t)$  dată de funcția (2.51).

Condiția inițială este și în acest caz:

$$x(0) = \delta E \varepsilon_0.$$

Rezolvarea acestui tip de ecuații neliniare este mai dificilă. Pentru aceasta vom utiliza o metodă de iterație variațională [55, 56, 57].

Metoda se poate aplica unor ecuații de forma:

$$Lx(t) + Nx(t) = g(t), \quad (2.61)$$

unde  $L$  reprezintă un operator liniar,  $N$  reprezintă un operator neliniar, iar  $g(t)$  o funcție dată cunoscută.

Metoda iterației variaționale este o metodă bazată pe multiplicatori Lagrange, care dă posibilitatea de a scrie soluția cu ajutorul unei funcționale de corecție de forma:

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(Lx_n(\tau) + N\bar{x}_n(\tau) - g(\tau))d\tau, \quad (2.62)$$

unde  $x_n(t)$  este o aproximație inițială în care pot apare necunoscute, iar  $\lambda(t)$  este un multiplicator Lagrange, iar  $\bar{x}_n$  este conținut într-un termen căruia i se impune o variație restrânsă  $\delta\bar{x}_n(t) = 0$ . Multiplicatorul Lagrange poate fi determinat din condiția de staționaritate a funcționalei de corecție:

$$\delta x_{n+1}(t) = 0.$$

Pentru rezolvarea ecuației (2.60) vom pune:

$$Lx = \frac{dx}{dt} + \frac{\beta}{\tau_0}x, \quad Nx = \frac{\alpha}{\tau_0}(x^2 + E_r \varepsilon), \quad g = (E_r + \delta E)\dot{\varepsilon}$$

și vom utiliza notațiile:

$$\alpha_\tau = \frac{\alpha}{\tau_0}, \quad \beta_\tau = \frac{\beta}{\tau_0}$$

Impunând condiția de minimizare a funcționalei de corecție rezultă:

$$\dot{\lambda}(\tau) - \beta_\tau \lambda(\tau) = 0,$$

$$[1 + \lambda(\tau)]|_{\tau=0} = 0.$$

Din aceste condiții se poate stabili multiplicatorul Lagrange:

$$\lambda(\tau) = -\exp[\beta(\tau - t)]$$

Vom folosi ca primă aproximație a soluției:



$$x_0(t) = c_0 e^{-\beta_\tau t} + \frac{\delta E \omega A (-\omega \cos(\omega t) + \beta_\tau \sin(\omega t))}{\beta_\tau^2 + \omega^2}, \quad (2.63)$$

care reprezintă soluția părții liniare a ecuației, unde  $c_0$  este constantă de integrare.

Trebuie să subliniem că metoda are o convergență extrem de puternică. După calcule vom obține astfel prima iterație a soluției:

$$\begin{aligned} x_1(t) = & c_0 e^{-\beta_\tau t} + \frac{\delta E \omega A (-\omega \cos(\omega t) + \beta_\tau \sin(\omega t))}{\beta_\tau^2 + \omega^2} + \\ & + \frac{\alpha_\tau}{2(\beta_\tau^4 + 2\beta_\tau^2 \omega^2 + \omega^4) (\beta_\tau^2 + 4\omega^2) \beta_\tau \omega} \\ & \times \left\{ \left[ 8c_0^2 \omega^7 + 2c_0^2 \beta_\tau^6 \omega + 12c_0^2 \beta_\tau^4 \omega^3 + 18c_0^2 \beta_\tau^2 \omega^5 \right] e^{-2\beta_\tau t} \right. \\ & \left[ -16c_0 \omega^5 \delta E A \beta_\tau^2 + 6A^2 E_r \delta E \omega^6 \beta_\tau + 6\beta_\tau^3 A^2 E_r \delta E \omega^4 - 18\beta_\tau^3 E_r A c_0 \omega^4 \right. \\ & - 8A E_r c_0 \omega^6 \beta_\tau - 12\beta_\tau^5 A E_r c_0 \omega^2 - 4c_0 \beta_\tau^6 \delta E A \omega - 20c_0 \beta_\tau^4 \delta E A \omega^3 - 2c_0^2 \beta_\tau^6 \omega \\ & - 12c_0^2 \beta_\tau^4 \omega^3 - 18c_0^2 \beta_\tau^2 \omega^5 - 8c_0^2 \omega^7 + 4\delta E^2 \omega^7 A^2 - 2\beta_\tau^7 A E_r c_0 + 10\delta E^2 \omega^5 A^2 \beta_\tau^2 \\ & + 2\beta_\tau^7 A E_r c_0 \cos(\omega t) + 12\beta_\tau^5 A E_r c_0 \cos(\omega t) \omega^2 + 20c_0 \beta_\tau^4 \delta E A \cos(\omega t) \omega^3 \\ & + 4c_0 \beta_\tau^5 \delta E \omega^2 A \sin(\omega t) + 20c_0 \beta_\tau^3 \delta E \omega^4 A \sin(\omega t) + 18\beta_\tau^3 E_r A c_0 \omega^4 \cos(\omega t) \\ & + 16c_0 \omega^5 \delta E A \beta_\tau^2 \cos(\omega t) + 16c_0 \omega^6 \delta E A \sin(\omega t) \beta_\tau + 8A E_r c_0 \omega^6 \cos(\omega t) \beta_\tau \\ & \left. + 4c_0 \beta_\tau^6 \delta E A \cos(\omega t) \omega \right] e^{-\beta_\tau t} \\ & - \beta_\tau^3 E_r A^2 \delta E \omega^4 \cos(2\omega t) + \beta_\tau^5 A^2 E_r \delta E \omega^2 \cos(2\omega t) + 3\beta_\tau^4 A^2 E_r \delta E \omega^3 \sin(2\omega t) \\ & + 3\beta_\tau^2 A^2 E_r \delta E \omega^5 \sin(2\omega t) - 2A^2 E_r \delta E \omega^6 \beta_\tau \cos(2\omega t) - \beta_\tau^5 A^2 E_r \delta E \omega^2 \\ & \left. - 5\beta_\tau^3 A^2 E_r \delta E \omega^4 + \delta E^2 \omega^3 A^2 \beta_\tau^4 \cos(2\omega t) + 4\delta E^2 \omega^4 A^2 \beta_\tau^3 \sin(2\omega t) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -4A^2 E_r \delta E \omega^6 \beta_r - 5\delta E^2 \omega^5 A^2 \beta_r^2 \cos(2\omega t) - 2\delta E^2 \omega^6 A^2 \beta_r \sin(2\omega t) \\ & - \delta E^2 \omega^3 A^2 \beta_r^4 - 5\delta E^2 \omega^5 A^2 \beta_r^2 - 4\delta E^2 \omega^7 A^2 \} \end{aligned} \quad (2.64)$$

În fapt, calculele corespunzătoare pentru stabilirea primei iterații s-au făcut în Maple.

Din această primă iterație se observă că soluția conține pe lângă componente de relaxare exponențiale de forma  $\exp(-\beta_r t) = \exp(-\frac{\beta}{\tau_0} t)$  și

componente de forma  $\exp(-2\beta_r t) = \exp(-\frac{2\beta}{\tau_0} t)$ .

Se mai poate observa că apar termeni armonici și armonici amortizați cu pulsație  $\omega$  și  $2\omega$ .

Pentru iterația următoare s-au făcut de asemenea calculele, însă expresia pentru  $x_2(t)$  este extrem de complicată și nu va fi prezentată aici. Vom spune doar că în ea apar componente de relaxare exponențiale de forma

$$\exp(-3\beta_r t) = \exp(-\frac{3\beta}{\tau_0} t).$$

Rezultă de aici că și acest model este în concordanță cu realitatea arătând că prin aplicarea vibrațiilor exterioare procesul de relaxare este grăbit.

Vom studia de asemenea modelul descris de ecuația (2.47) obținând soluția numerică pe baza metodei Runge-Kutta.

Și în acest caz, pentru a descrie procesele de relaxare facilitate de vibrațiile aplicate din exterior, vom considera excitația reprezentată de deformație specifică normală  $\varepsilon(t)$  dată de funcția (2.51). Și de această dată vom folosi condiția inițială:

$$x(0) = \delta E \varepsilon_0.$$

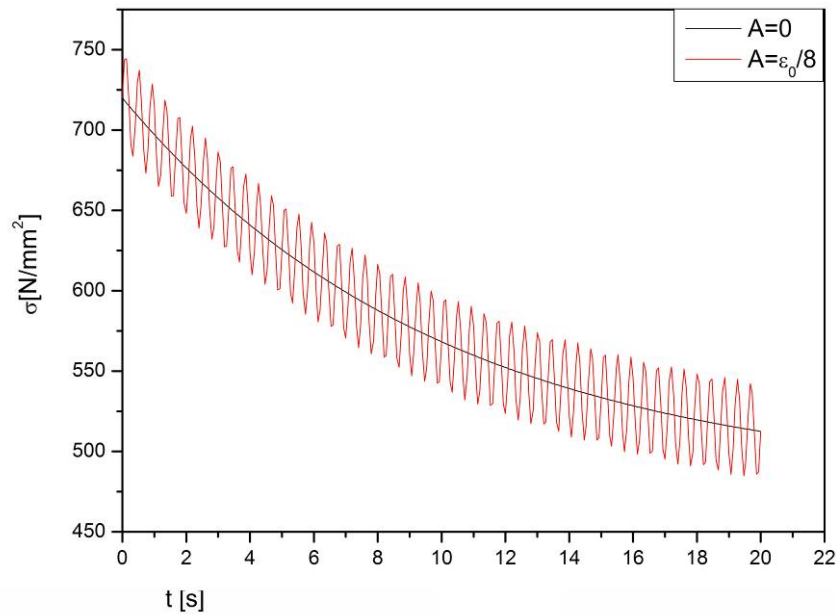
Vom utiliza următoarele valori ale parametrilor:

$$E_r = 2000 \text{ N/mm}^2, \quad \delta E = 2000 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_0 = 10 \text{ s}, \quad \varepsilon_0 = 0.02, \quad \beta = 1.$$

Rezolvarea efectivă a problemei s-a făcut în MathCAD.

Intervalul de timp pe care s-a căutat soluția a fost  $f \in [0, T]$ , cu  $T = 20 \text{ s}$ , soluția fiind eșantionată în  $n = 301$  puncte cu o perioadă de eșantionare  $\Delta t = T/(n-1)$ .



**Figura 2.4**

S-au studiat următoarele cazuri:

I. Cazul modelului liniar cu  $\alpha = 0$ , situația a) a răspunsului liber, fără vibrații  $A = 0$  și b) a răspunsului facilitat de vibrații cu  $A = \varepsilon_0/8$ , și frecvență  $\nu = 2.4\text{Hz}$ . Graficul  $\sigma(t)$  este reprezentat în Figura 2.4 cu negru pentru  $A = 0$  și cu roșu pentru  $A = \varepsilon_0/8$ .

II. Cazul modelului neliniar cu  $\alpha = 0.03$ , situația a) a răspunsului liber, fără vibrații  $A = 0$  și b) a răspunsului facilitat de vibrații cu  $A = \varepsilon_0/8$ , și frecvență  $\nu = 2.4\text{Hz}$ . Graficul  $\sigma(t)$  este reprezentat în Figura 2.5 cu negru pentru  $A = 0$  și cu roșu pentru  $A = \varepsilon_0/8$ .

Din figura 2.4 se observă că în cazul modelului liniar procesul de relaxare în prezența vibrațiilor se suprapune perfect peste cel liber. Rezultă astfel că aplicarea vibrațiilor nu grăbește procesul de relaxare.

Din figura 2.5 se observă că în cazul modelului neliniar procesul de relaxare în prezența vibrațiilor nu se mai suprapune cu cel liber, componenta neoscilantă a acestei curbe scăzând mai repede decât răspunsul liber.

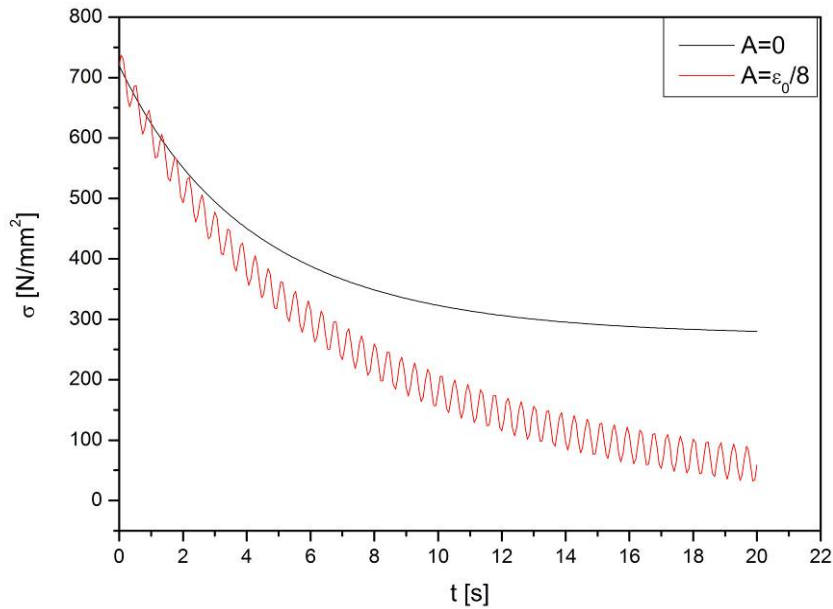


Figura 2.5

Rezultă astfel că aplicarea vibrațiilor nu grăbește procesul de relaxare în cazul modelului liniar.

## 2.9. Studiul experimental al unui pendul de torsiune

Sunt și alte procese de relaxare neliniară la care ecuația constitutivă are forma (2.47) sau (2.48), cum este cazul proceselor de relaxare care au la bază fenomene de natură magnetică.

Pentru astfel de sisteme s-au făcut experimente bazate pe vibrații de torsiune.

În cazul vibrațiilor de torsiune ecuația constitutivă (2.48) poate fi rescrisă sub forma:

$$(\dot{\tau} - G_r \dot{\gamma}) + \frac{\alpha}{t_0} (\tau - G_r \gamma)^2 + \frac{\beta}{t_0} (\tau - G_r \gamma) = \delta G \dot{\gamma}, \quad (2.65)$$

unde  $\tau = \tau(t)$  este tensiunea tangențială,  $\gamma = \gamma(t)$  este deformația specifică tangențială,  $G_r$  modulul de elasticitate tangențial relaxat,  $G_u = G_r + \delta G$  modulul de elasticitate tangențial nerelaxat (cu  $\delta G > 0$ ),  $t_0$  constanta de relaxare,  $\alpha$  parametru mic pozitiv,  $\beta$  parametru cu valoare egal sau apropiat de unitate.

Ecuția de mișcare a unui pendul de torsiune poate fi scrisă:

$$J\ddot{\varphi} + M_t = 0, \quad (2.66)$$

unde  $\varphi$  este unghiul de torsiune,  $J$  este momentul axial de inerție, iar  $M_t$  este momentul cuplurilor de torsiune.

Elementul elastic al pendulului de torsiune constă dintr-un fir de cupru cu raza  $R$ , acoperit cu un strat de  $Ni$  având grosimea  $\delta$ .

Dacă stratul de  $Ni$  al suspensiei are proprietăți anelastice corespunzătoare ecuației (2.65), parametrii  $t_0$ ,  $G_r$ ,  $\delta G_r$  și  $\alpha$  pot fi identificați din experiment. Vom considera că  $\beta = 1$ .

Studiul experimental presupune că la amortizarea oscilațiilor libere contribuie numai procesele anelastice de amortizare. Vor fi neglijate alte procese de amortizare, cum ar fi transportul de energie prin suportul pendulului sau disiparea în legături.

Am stabilit că coeficientul de amortizare este dependent de amplitudă (Figura 2.7).

Momentul de torsiune  $M_t$  poate fi scris:

$$M_t = \frac{G_{Cu} I_p}{l} \varphi + \frac{I'_p}{R} \tau,$$

unde  $G_{Cu}$  este modulul de torsiune ale firului interior. Putem considera că în stratul exterior de nichel tensiunea tangențială  $\tau$  este constantă.  $I_p$  este momentul de inerție geometric polar al firului interior,  $I'_p$  este momentul de inerție geometric polar al stratului extern.

Dacă considerăm că ecuația (2.65) se aplică pentru tensiunea specifică maximă și deformația specifică, vom putea scrie:

$$\gamma = \frac{R}{l} \varphi. \quad (2.67)$$

În cazul experimentului nostru ( $\beta = 1$ ):

$$J = 6.6910^{-3} \text{ kgm}^2, \quad l = 0.12 \text{ m}, \quad R = 0.510^{-3} \text{ m},$$

$$G_{Cu} = 4.410^{10} \text{ N/m}^2 \quad \delta = 10^{-4} \text{ m}, \quad k = 3.5910^{-2} \text{ Nm}.$$

Rezultă că ecuația (2.66) devine:

$$J\ddot{\gamma} + k\gamma + \frac{I'_p}{l}\tau = 0, \quad (2.68)$$

și utilizând relațiile (2.68), (2.67) și (2.65) rezultă pentru tensiunea maximă din ecuația diferențială de mișcare:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_u I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right) - \\ & - \frac{\alpha}{t_0} \frac{Jl}{I'_p} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_u I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right)^2 + \frac{\beta}{t_0} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_r I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

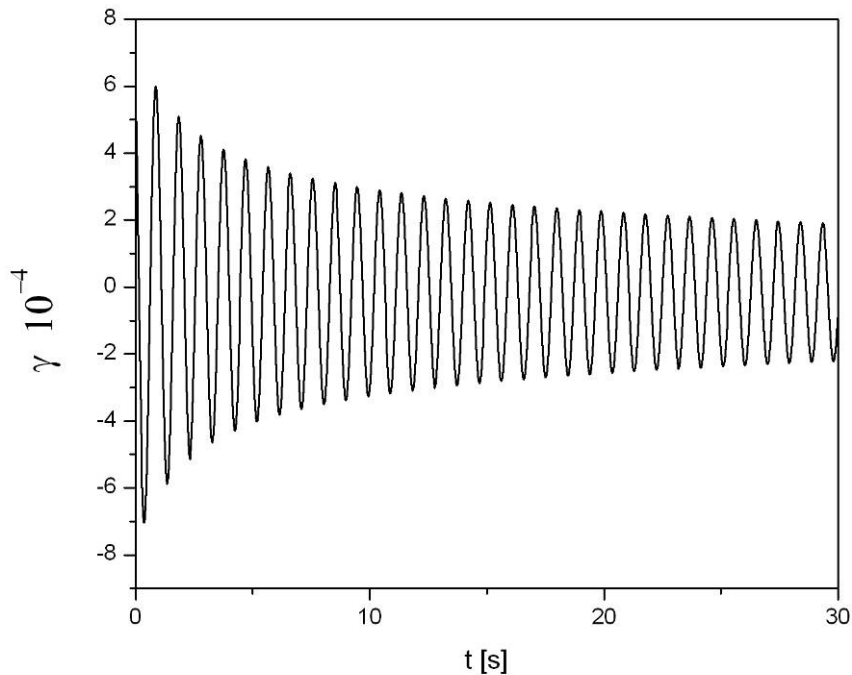
Parametrul  $\alpha$  reprezintă un parametru mic. Rezultă că ecuația diferențială neperturbată corespunzătoare lui  $\alpha = 0$ , poate fi scrisă:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_u I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right) + \frac{\beta}{t_0} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_r I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right) = 0 \quad (2.70)$$

Soluția generală pentru (2.69) are forma:

$$\gamma(t) = Ce^{-ht} + Ae^{-\lambda t} e^{i(\omega t + \psi)} \quad (2.71)$$

Sunt însă mai dificil de stabilit parametrii  $h$ ,  $p$  și  $\lambda$  precum și parametrii ecuației (2.65), din spectrul răspunsului experimental liber.



**Figura 2.6**

Vom utiliza răspunsul liber reprezentat în Figura 2.6. Semnalul  $x(t) = \varphi(t)$  a fost înregistrat în acord cu teorema de eșantionare cu o perioadă de eșantionare:

$$\Delta t = 2.7310^{-2} s$$

adică  $\nu_e = 36.6 Hz$ , semnalul fiind înregistrat în  $N = 1650$  puncte.

Eșantioanele vor fi notate cu  $x(i\Delta t) = x(i)$ , unde  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Ecuția caracteristică asociată ecuației (2.70) este:

$$z^3 + \frac{\beta}{t_0} z^2 + \left( \frac{G_u I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) z + \frac{\beta}{t_0} \left( \frac{G_r I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) = 0 \quad (2.72)$$

Putem scrie relația dintre soluțiile  $(z_1, z_2, z_3) = (-\lambda + i\omega, -\lambda - i\omega, -h)$  (unde  $h < 0$ ) a ecuației (2.72) și coeficienți:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2\lambda - h = -\frac{\beta}{t_0}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \lambda^2 + \omega^2 + 2\lambda h = \left( \frac{G_u I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right)$$

$$z_1z_2z_3 = -(\lambda^2 + \omega^2)h = -\left( \frac{G_r I'_p}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \frac{\beta}{t_0}$$

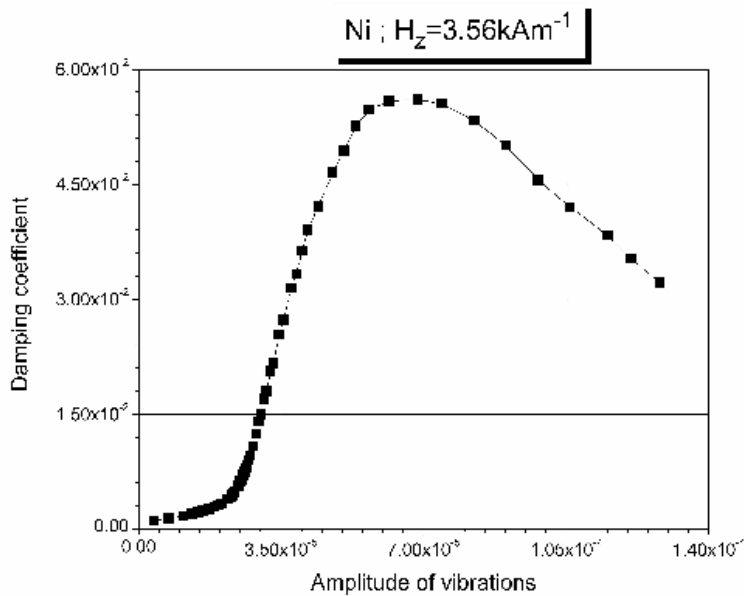
unde  $\beta = 1$ .

Constantele elastice ale modelului reologic  $G_u$ ,  $G_r$ ,  $1/t_0$ , pot fi identificate din paramaterii răspunsului liber  $\lambda$ ,  $h$  și din  $\omega_k$  pseudopulsatie:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2\lambda + h} \\ G_u &= \frac{lJ(\lambda^2 + \omega^2 + 2\lambda h) - kl}{I'_p} \\ G_r &= -\frac{t_0 Jlh(\lambda^2 + \omega^2) - kl}{I'_p} \end{aligned} \quad (2.73)$$

unde parametrii  $\lambda$ ,  $\omega$  pot fi estimați din date experimentale pentru mici oscilații.



**Figura 2.7**

Vom nota cu  $x_{\max}(i)$  și  $x_{\max}(i+1)$  (unde  $i = 0, 1, 2, \dots$ ) două valori maxime succesive ale lui  $x$  în cazul oscilațiilor amortizate. Din decrementul logaritmic al oscilațiilor amortizate  $\delta = \ln(x_{\max}(i)/x_{\max}(i+1))$ , vom putea stabili factorul de amortizare:

$$\lambda = \delta/\Delta t = 6.6810^{-2}/\Delta t$$

Putem de asemenea să extragem din răspunsul liber măsurat componenta  $x_e = Ce^{-ht}$  și factorul de amortizare  $h$ , vom calcula valoare medie a semnalului pe o pseudoperioadă.

Pentru a  $k$ -a perioadă,  $x_e(kT)$  reprezintă exact componenta:

$$x_e(kT) = \frac{\int_0^T x(t) dt}{T}$$

Estimarea cu metoda celor mai mici pătrate a  $x_e(kT)$  cu funcția

$$x_e = x_0 + Ae^{-ht},$$

duce la următoarele valori ale parametrilor:

$$h = 1/(13.6\Delta t)$$

Variațiile temporale la momentele  $t_k = k\Delta t$  ale pseudopulsației  $\omega_k$  și ale factorului de amortizare  $\lambda_k$ , s-au estimat pe baza interpolării cu polinoame de ordinul 2<sup>nd</sup>.

Rezultă:

$$\omega_k = (a_0 + a_1(k\Delta t) + a_2(k\Delta t)^2)/\Delta t$$

$$a_0 = 1.70, \quad a_1 = 8.4110^{-5}, \quad a_2 = -1.0310^{-6},$$

$$\lambda_k = (a_0 + a_1(k\Delta t) + a_2(k\Delta t)^2)/\Delta t$$

$$a_0 = 7.3510^{-2}, \quad a_1 = -2.0510^{-3}, \quad a_2 = 6.9910^{-5}.$$

apoi:

$$h = 2.73s^{-1} \quad \lambda = 2.44s^{-1} \quad \omega = 6.27rad/s$$

și în final:

$$t_0 = 0.126s$$

$$G_u = 12.410^{10} N/m^2 \quad G_r = 8.0910^{10} N/m^2$$

Din această dependență de timp a lui  $\omega_k$  și  $\lambda_k$  rezultă că în soluția:

$$\gamma = Ce^{-ht} + Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \psi)$$

constantele  $C$ ,  $A$  și  $\psi$  pot fi considerate dependente de timp, datorită proprietăților neliniare ale sistemului. Parametrul  $\alpha$  al modelului reologic poate fi estimat din date experimentale prin metoda variației constantelor. Vom considera  $C$ ,  $A$  și  $\psi$  lent variabile. După derivare în raport cu timpul a  $\gamma$ , putem impune în  $\dot{\gamma}$  condiția:

$$\dot{C}e^{(-ht)} + \dot{A}e^{(-\lambda t)} \sin(\omega t + \psi) + \dot{\psi}Ae^{(-\lambda t)} \cos(\omega t + \psi) = 0 \quad (2.74)$$

În derivata a doua a lui  $\gamma$  impunem:

$$\begin{aligned} & -h\dot{C}e^{(-ht)} + \dot{A}e^{(-\lambda t)}(-\lambda \sin(\omega t + \psi) + \omega \cos(\omega t + \psi)) \\ & + \dot{\psi}Ae^{(-\lambda t)}(-\lambda \cos(\omega t + \psi) - \omega \sin(\omega t + \psi)) = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Introducând  $\gamma$  în ecuația (2.69) se obține:

$$\begin{aligned} & h^2\dot{C}e^{(-ht)} + \dot{A}e^{(-\lambda t)}((\lambda^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \psi) - 2\omega\lambda \cos(\omega t + \psi)) \\ & + \dot{\psi}Ae^{(-\lambda t)}((\lambda^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \psi) + 2\lambda\omega \sin(\omega t + \psi)) = H \end{aligned} \quad (2.76)$$

unde:

$$H = -\frac{\alpha}{t_0} \frac{Jl}{I_p'} \left( \dot{\gamma} + \left( \frac{G_u I_p'}{Jl} + \frac{k}{J} \right) \gamma \right)^2.$$

Soluțiile ecuațiilor (2.74) - (2.76) sunt:

$$\dot{A} = \frac{(h - \lambda) \cos(\omega t + \psi) - \omega \sin(\omega t + \psi)}{\omega(h^2 + \lambda^2 + \omega^2 - 2\lambda h)} e^{\lambda t} H \quad (2.77)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{(h - \lambda) \sin(\omega t + \psi) + \omega \cos(\omega t + \psi)}{\omega(h^2 + \lambda^2 + \omega^2 - 2\lambda h) A} e^{\lambda t} H \quad (2.78)$$

$$\dot{C} = \frac{1}{h^2 + \lambda^2 + \omega^2 - 2\lambda h} e^{ht} H \quad (2.79)$$

Procesul de relaxare exponențial  $Ce^{-ht} = x_0 e^{-t/t_0}$  este mic și poate fi neglijat.

Parameterul  $\alpha$  poate fi estimat cu ajutorul ecuației (2.77) dacă considerăm că în jurul momentului inițial putem aproxima  $\cos(\alpha + \psi) = 1$  și  $\sin(\alpha + \psi) = 0$ :

$$\alpha = \frac{I_p' t_0}{Jl} \frac{\omega((h - \lambda)^2 + \omega^2)}{(h - \lambda)e^{\lambda t}} \frac{\dot{A}}{\left( \dot{\gamma} + (G_u I_p' Jl + kJ)\gamma \right)^2}$$

unde  $\dot{A}$  și  $\dot{\gamma}$  pot fi exprimate cu diferențe finite sub forma:

$$\dot{A} = \frac{A_2 - A_1}{T_1} \quad \ddot{y} = \frac{\gamma(2\Delta t) - 2\gamma(\Delta t) + \gamma(0\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Rezultă în final:

$$\alpha = 84.7 m^2/N.$$

### 2.9.1. Identificarea modelelor neliniare cu metoda transformatei Hilbert

Pentru analiza experimentală a proprietăților reologice ale materialelor policristaline se poate realiza un sistem vibrant, format dintr-o bară de lungime  $l$  și secțiune  $S$ , de care se atașează o masă  $m$ . Vom considera că masa se mișcă după  $x$ . Sistemul se poate excita cu o forță perturbatoare  $F(t)$ .

Vom considera că la un moment dat în toate punctele barei există aceeași tensiune  $\sigma(t)$  și deformație specifică  $\varepsilon$ , adică în bară nu apar unde elastice. Rezultă de asemenea că putem nota deformația instantanee cu  $x(t) = l\varepsilon$ . Vom nota cu  $\Phi(t)$  forța rezultantă care acționează asupra masei  $m$ , aceasta fiind forța compusă din forța elastică  $S\sigma$  produsă de deformația elastică a barei, greutatea  $mg$  atașată și forța de perturbație exterioară  $F(t)$ :

$$\Phi(t) = -S\sigma + F(t) + mg.$$

Putem scrie legea lui Newton:

$$m\ddot{x} = \Phi(t) = -S\sigma(t) + F(t) + mg.$$

Ținând cont de faptul că  $a = l\ddot{\varepsilon}$  rezultă înlocuind  $\sigma$  din (2.45) în legea lui Newton:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{1}{\tau} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{E_u S}{ml} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \frac{E_r S}{ml} x = \frac{1}{\tau} \frac{1}{m} F + \frac{1}{m} \dot{F} \quad (2.80)$$

Putem aplica (2.80) sistemelor neliniare considerând că constanta de relaxare este dependentă de  $A$ , ca în [41] și [42], adică  $1/\tau = \frac{1}{\tau}(A)$ .

Ecuția (2.80) poate fi scrisă pentru semnalul analitic:

$$\frac{d^3z}{dt^3} + \frac{1}{\tau} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{E_u S}{ml} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \frac{E_r S}{ml} z = \frac{1}{\tau} \frac{1}{m} F + \frac{1}{m} \dot{F} \quad (2.81)$$

Putem calcula derivata de ordinul trei:

$$\frac{d^3 z(t)}{dt^3} = z(t) \times \left[ \frac{d^3 A}{dt^3} - 3 \frac{\omega^2 \dot{A}}{A} - 3\omega\dot{\omega} + i \left( 3 \frac{\dot{\omega} \dot{A}}{A} + 3 \frac{\omega \ddot{A}}{A} - \ddot{\omega} - \omega^3 \right) \right] \quad (2.82)$$

Introducând (2.24), (2.25) și (2.82), în (2.81), după separarea părții reale și imaginare în cazul vibrațiilor libere ( $F(t) = 0$ ), rezultă:

$$\frac{d^3 A}{dt^3} - 3 \frac{\omega^2 \dot{A}}{A} - 3\omega\dot{\omega} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) + \frac{E_u S}{ml} \frac{\dot{A}}{A} + \frac{1}{\tau} \frac{E_r S}{ml} = 0 \quad (2.83)$$

$$3 \frac{\dot{\omega} \dot{A}}{A} + 3 \frac{\omega \ddot{A}}{A} - \ddot{\omega} - \omega^3 + 2 \frac{\omega \dot{A}}{A} + \dot{\omega} + \frac{E_u S}{ml} \omega = 0 \quad (2.84)$$

Rezultă că se poate identifica  $E_r$  :

$$E_u = - \frac{3 \frac{\dot{\omega} \dot{A}}{A} + 3 \frac{\omega \ddot{A}}{A} - \ddot{\omega} - \omega^3 + 2 \frac{\omega \dot{A}}{A} + \dot{\omega}}{\frac{S\omega}{ml}} \quad (2.85)$$

și  $\frac{1}{\tau}$  :

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{\frac{d^3 A}{dt^3} - 3 \frac{\omega^2 \dot{A}}{A} - 3\omega\dot{\omega} + \frac{E_u S}{ml} \frac{\dot{A}}{A}}{\frac{E_r S}{ml} + \left( \frac{\ddot{A}}{A} \omega - \omega^2 \right)} \quad (2.86)$$

care conțin  $E_u$  identificat anterior.

Parametrii  $E_u$  și  $\frac{1}{\tau}$  sunt însă dependenți de timp. De aici rezultă că se poate studia dependența lui  $\frac{1}{\tau}$  de  $\sigma$  dacă reprezentăm  $\frac{1}{\tau}$  ca funcție de  $\sigma(t) = -m\ddot{x}/S$ .

Putem vedea că în (2.86) apare derivata de ordin trei a amplitudinii  $A$ . În scopul evitării erorilor numerice care apar în calculul derivatei de ordin trei din semnale măsurate experimental, această derivată trebuie calculată utilizând diferențele finite ca în (2.43), sau utilizând proprietățile transformatei Fourier. Vom nota cu  $A(\omega)$  transformata Fourier a lui  $A(t)$ . Derivata de ordin trei va fi:

$$F\left(\frac{d^3 A(t)}{dt^3}\right) = (i\omega)^3 A(\omega)$$

Rezultă că  $d^3 A(t)dt^3$  poate fi calculat:

$$\frac{d^3 A(t)}{dt^3} = F^{-1}[(i\omega)^3 A(\omega)],$$

unde  $F^{-1}$  este transformata Fourier inversă (2.4) a cantității  $(i\omega)^3 A$ .

Practic, având răspunsul  $x(t)$  în formă numerică eșantionată  $x(t_i)$  (unde  $t_i = 0, T, 2T, \dots, NT$ ),  $v_e = 1/T$  fiind frecvența de eșantionare a sistemului de achiziție. Transformatele Fourier directă și inversă pot fi calculate numeric cu orice program de calcul științific.

## 2.10 Studiul parametrilor unui sistem vibrant neliniar din răspunsul liber cu metoda transformatei Hilbert

Vom arăta cum se pot identifica cu metoda transformatei Hilbert parametrii unui sistem vibrant neliniar.

Pentru a stabili validitatea metodei vom simula numeric răspunsul liber al sistemului vibrant neliniar:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + c_2\dot{x}^2 + kx + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$$

unde  $m$  este masa sistemului vibrant,  $c$  constanta de amortizare,  $c_2$  parametrul componentei neliniare a amortizării, iar parametrii forței elastice neliniare sunt  $k, a_2, a_3, a_4$ .

Răspunsul liber al sistemului a fost găsit pe cale numerică cu metoda Runge-Kutta în MathCAD.

Soluția a fost obținută în  $N = 10000$  puncte. S-a utilizat frecvența de eșantionare  $\nu_e = 5000$  Hz, integrarea efectuându-se pentru  $t \in [0, 2] = [0, T]$ .

Au fost folosite constantele elastice:

$$k = 600, \text{ N/mm}, a_2 = 35 \text{ N/mm}^2, a_3 = 25 \text{ N/mm}^3, a_4 = 0.15 \text{ N/mm}^4.$$

Au fost folosite constantele de amortizare:

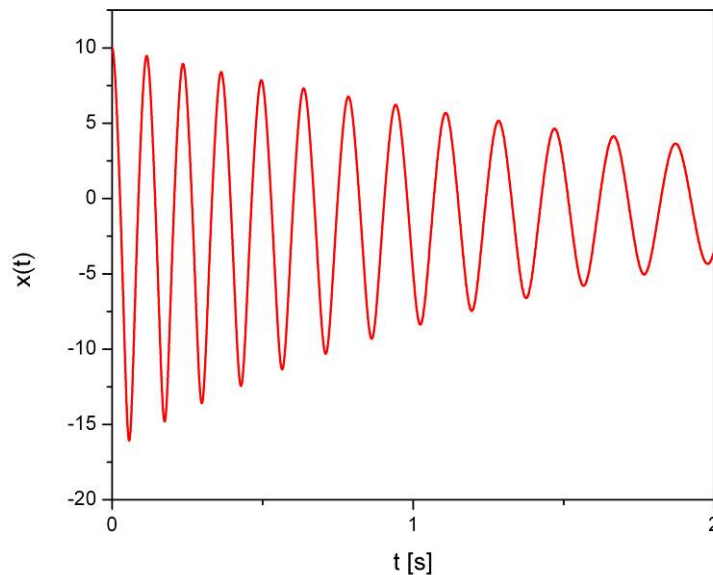
$$c = 1.5 \text{ N s/mm} \text{ și } c_2 = 0.03 \text{ N s}^2/\text{m}^2.$$

În Figura 2.8 este prezentată diagrama coordonatei punctului  $x(t)$ , în Figura 2.9 este prezentată diagrama vitezei punctului  $v(t)$ , iar în Figura 2.10 este prezentată diagrama accelerației punctului  $a(t)$ .

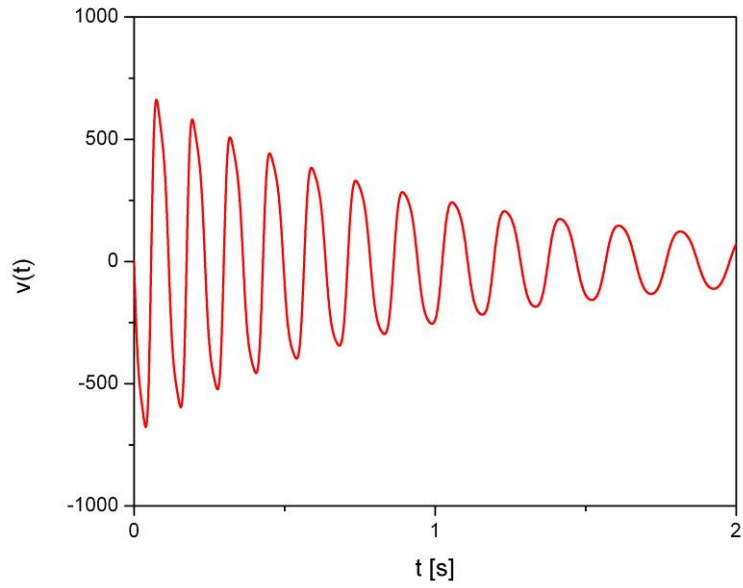
Calculul transformatelor Hilbert pentru  $x(t)$ ,  $v(t)$  și  $a(t)$  s-a făcut în Matlab, acestea fiind notate cu  $xh(t)$ ,  $vh(t)$  și  $ah(t)$ . Anvelopa coordonatei analitice  $x(t) + ixh(t)$  și a vitezei analitice  $v(t) + ivh(t)$  sunt:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + xh^2(t)}, \quad Av(t) = \sqrt{v^2(t) + vh^2(t)}.$$

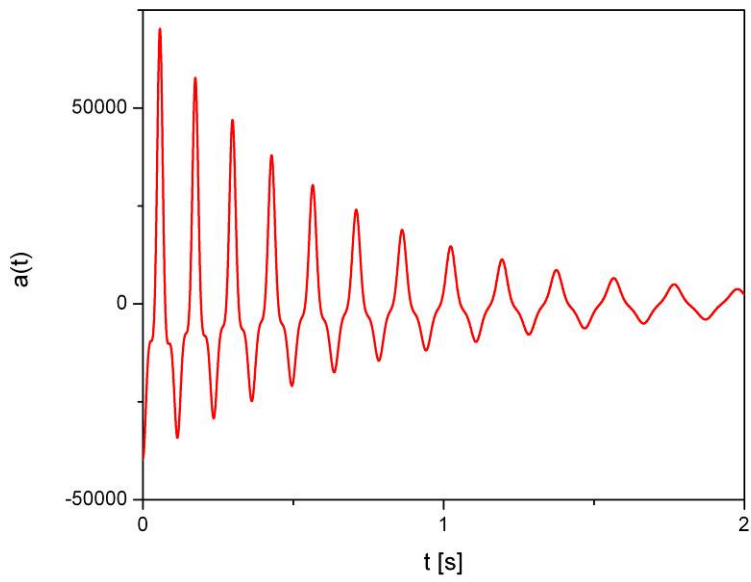
Diagramele  $xh(t)$ ,  $A(t)$ ,  $ah(t)$  și  $Av(t)$  sunt prezentate în figurile 2.11, 2.12, 2.13 și 2.14.



**Figura 2.8. Diagrama  $x(t)$**

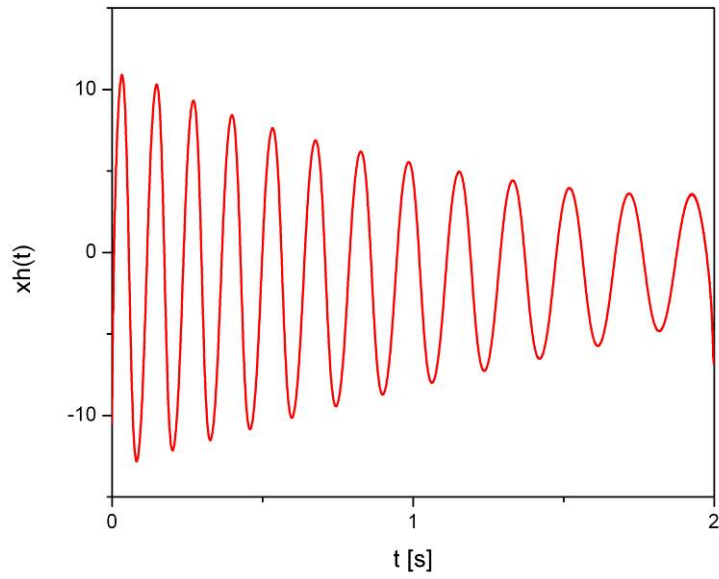


**Figura 2.9** Diagrama  $v(t)$

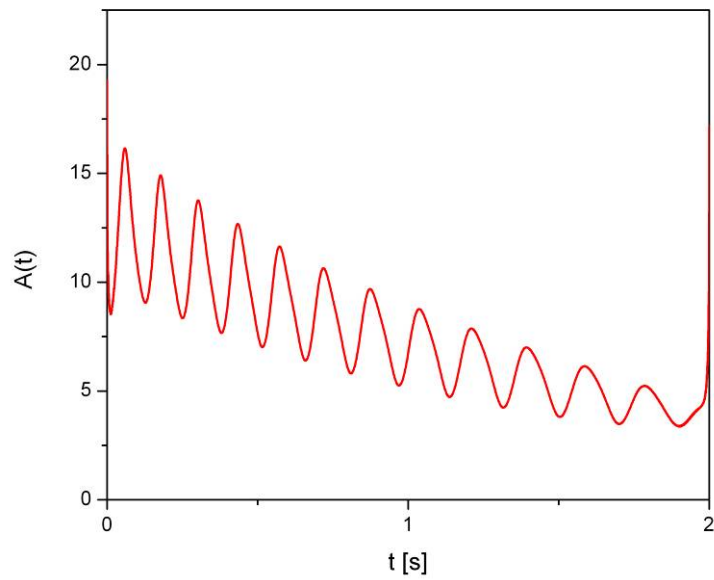


**Figura 2.10** Diagrama  $a(t)$

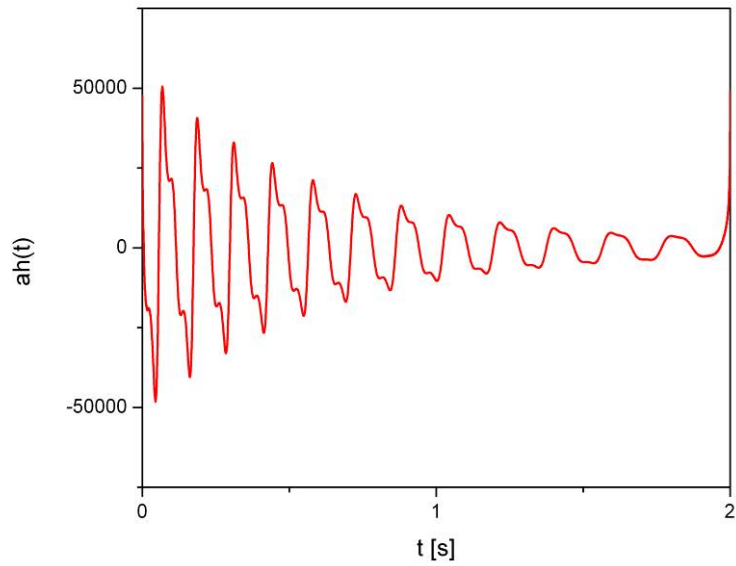




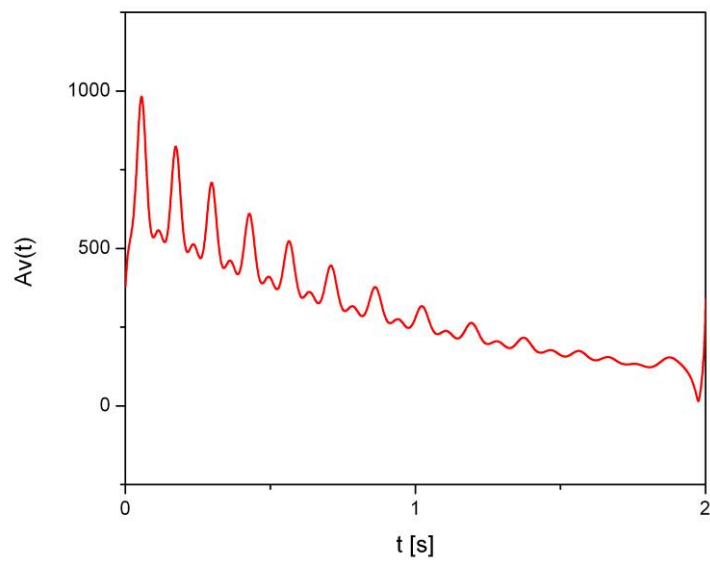
**Figura 2.11. Diagrama  $x_h(t)$**



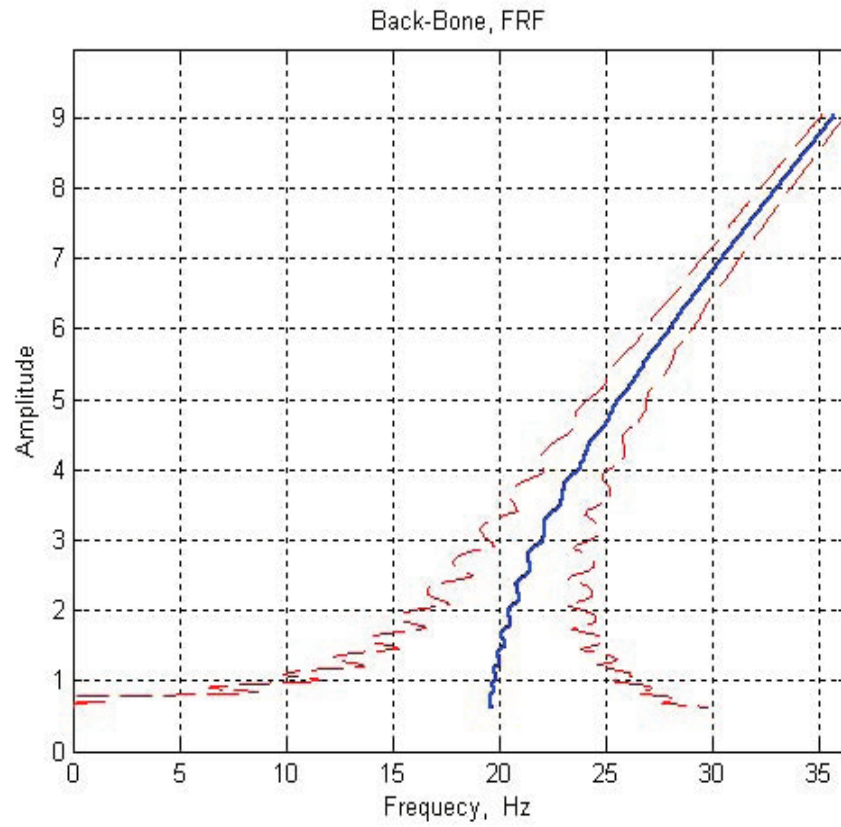
**Figura 2.12 Diagrama  $A(t)$**



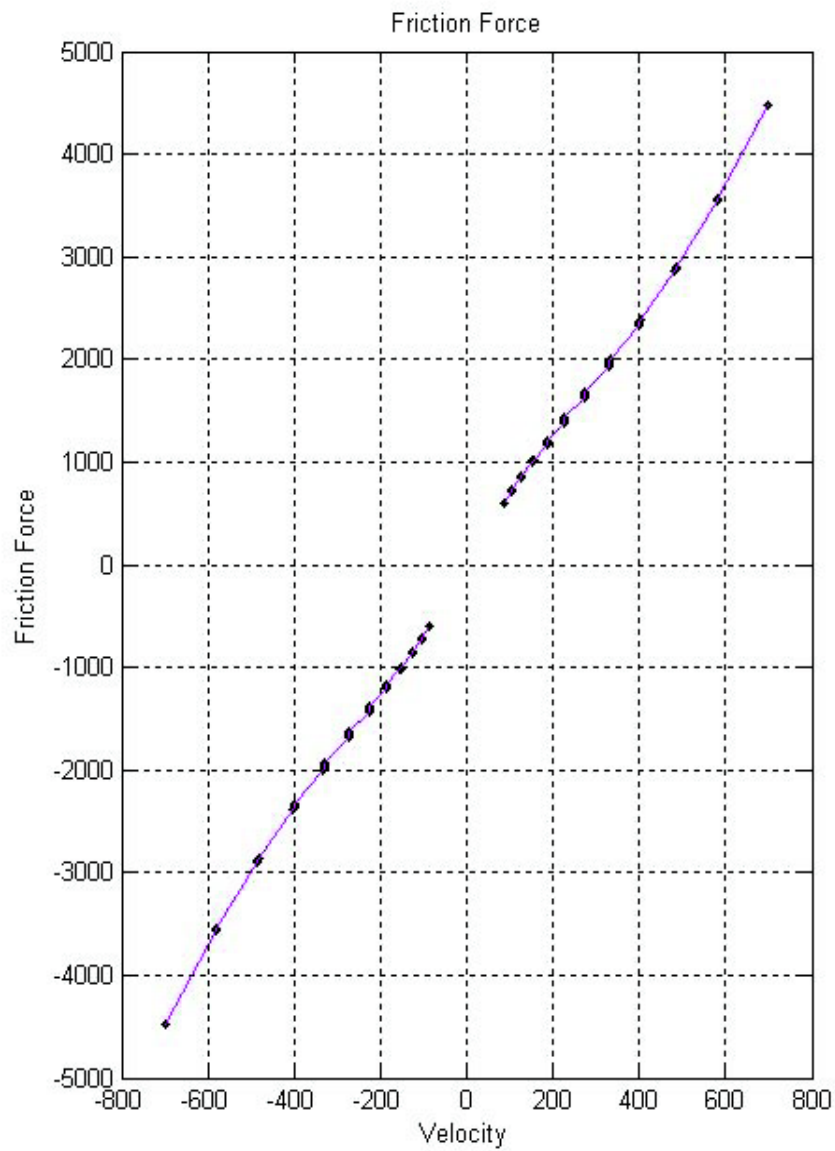
**Figura 2.13** Diagrama  $ah(t)$



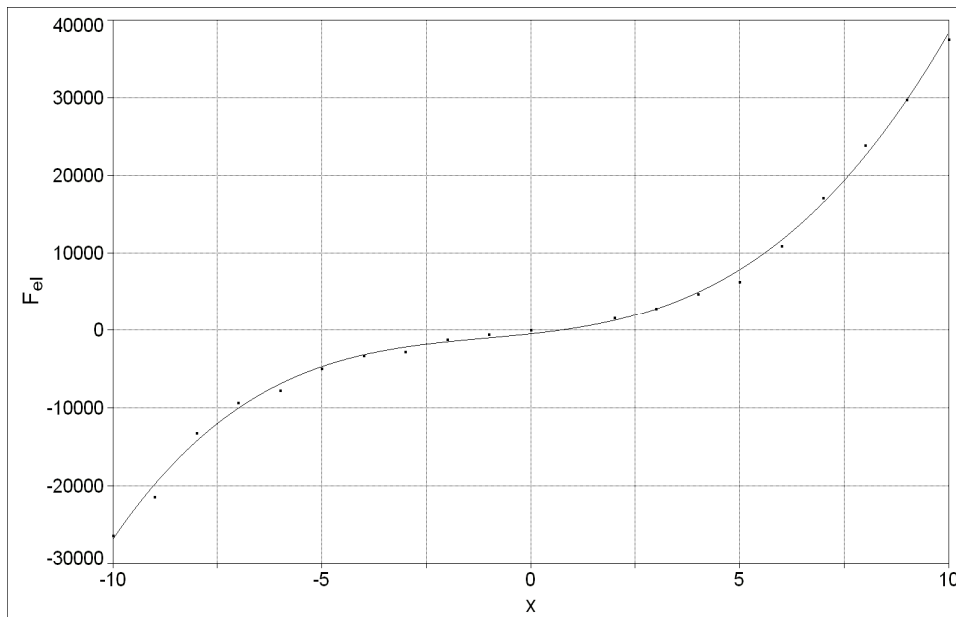
**Figura 2.14** Diagrama  $Av(t)$



**Figura 2.15** Curba vertebrală  $(v, A)$ .



**Figura 2.16** Forța de rezistență ca funcție de  $v$



**Figura 2.17** Forța elastică ca funcție de  $x$

În figura 2.15 este reprezentată curba  $(v, A)$  numită și coloană vertebrală. În figura 2.15 este reprezentată forța de amortizare ca funcție de viteză. Forma curbată a coloanei vertebrale este un indicator al neliniarității sistemului. Pe această curbă se localizează maximum diagraamei de rezonanță.

În figura 2.17 s-a reprezentat forța elastică ca funcție de  $x$ . Ultima curbă s-a reprezentat cu softul TC2, datorită acestui program de a face și o estimare a parametrilor sistemului prin "fitare".

S-au găsit astfel:

$$k = 645.7731 \text{ N/mm},$$

$$a_2 = 35.625 \text{ N/mm}^2,$$

$$a_3 = 27.4326 \text{ N/mm}^3,$$

$$a_4 = 0.1208 \text{ N/mm}^4,$$

și un termen liber  $a = -0.001$ ,

adică bun acord cu datele de intrare.

Meritul metodei constă în aceea că stabilindu-se curbele  $(F_{el}, x)$  și  $(F_{rez}, v)$  se pot identifica și sisteme la care neliniaritatea e mai generală de formă polinomială. Prin programe bazate pe metode de "fitare" se pot determina și parametrii acestor curbe.

### 2.11 Determinarea pulsațiilor proprii din răspunsul liber

Această metodă de identificare este destinată să se aplice la sisteme liniare. Totuși, poate fi utilă într-o primă investigare a răspunsului sistemului, în cazul vibrațiilor mici, când comportamentul sistemului este liniar.

Vom considera un sistem vibrant cu amortizare vâscoasă, cu  $n$  grade de libertate.

Vom considera că acestuia i se aplică un impuls scurt, și se înregistrează răspunsul acestuia  $x_i$ , la momente discrete de timp  $t_k = k\Delta t$ , unde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Înregistrarea se poate face cu un accelerometru, semnalul fiind amplificat, integrat de două ori și introdus în calculator. În acest caz  $\nu_e = 1/\Delta t$  reprezintă frecvența de eșantionare.

Vom nota valorile experimentale ale răspunsului măsurat cu  $x_k$ , corespunzătoare momentelor de timp  $t_k$ , unde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Deoarece am considerat că sistemul investigat reprezintă un sistem vibrant cu amortizare vâscoasă, având  $n$  grade de libertate, răspunsul liber se poate scrie în funcție de parametrii sistemului, sub forma:

$$x_k = \sum_{j=1}^{2n} A_j e^{\lambda_j k \Delta t} \quad (2.87)$$

unde  $\lambda_j$  sunt cantități complex conjugate, care apar în perechi, partea reală reprezentând coeficientul de amortizare, iar partea imaginară reprezentând pseudopulsația.

Se demonstrează [29] că parametrii  $\lambda_j$  se obțin rezolvând întâi sistemul liniar de ecuații:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{2n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{2n} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n-1} & x_{2n} & x_{2n+1} & \dots & x_{4n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{2n} \\ s_{2n-1} \\ s_{2n-2} \\ \dots \\ s_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_{2n} \\ -x_{2n+1} \\ -x_{2n+2} \\ \dots \\ -x_{4n+1} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Rezolvând sistemul obținem  $\{s_1, s_2, \dots, s_{2n}\}$ , cu care formăm apoi ecuația algebrică de gradul  $2n$ :

$$z^{2n} + s_1 z^{2n-1} + s_2 z^{2n-2} + \dots + s_{2n} = 0 \quad (2.89)$$

ale cărei soluții vor fi  $z_i = e_i = \exp(\lambda_i \Delta t)$  (unde  $i = 1, 2, \dots, 2n$ ). Pentru mișcările vibratorii, sunt de interes numai soluțiile complexe ale ecuației.

Din acestea se obține imediat  $\lambda_k$ , luând logaritmul în complex:

$$\lambda_k = \operatorname{Re} \lambda_k + i \operatorname{Im} \lambda_k = c_k + ip_k = \frac{1}{\Delta t} \ln z_k$$

unde  $p_k$  respectiv  $c_k$  reprezintă pseudopulsațiile, respectiv factorii de amortizare. Trebuie să observăm că pseudopulsațiile vor apare în perechi de semn contrar.

## 2.12 Estimarea spectrală cu varianță minimă

Pentru cazul semnalelor complexe, zgomotoase există metode din care face parte metoda pe care o vom prezenta aici.

Metodele de estimare spectrală permit să se estimeze conținutul în frecvență al semnalelor complexe. Aceste metode pot fi parametrice și neparametrice. Metodele parametrice investighează procesele staționare care pot fi descrise cu un număr redus de parametri, dând estimări ai acestor parametri. Din această categorie fac parte metodele auto-regresive și cele auto-regresive cu medie mobilă.

Metodele neparametrice permit să se calculeze conținutul spectral al unui semnal fără nici o cunoaștere inițială a conținutului semnalului și a parametrilor componentelor acestuia.

Metoda de estimare spectrală cu varianță minimă (ESVM) este o metodă neparametrică utilă pentru investigarea semnalelor cu conținut zgomotos sau aleator, sau a semnalelor cu forme neregulate [18, 19, 90, 138]. Această metodă se mai numește metoda Capon.

În această metodă se presupune doar că semnalul este compus dintr-un număr finit de semnale sinusoidale suprapuse peste zgomot.

Pentru a prezenta metoda vom nota cu  $y = x(t)$  un semnal complex în reprezentare temporală. Pentru prelucrarea pe computer semnalul va fi convertit într-o secvență discretă  $x(t_k) = x(k\Delta t) = x(k)$  (unde  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) corespunzător momentelor discrete de timp, unde  $N$  reprezintă numărul de eșantioane, iar  $\Delta t$  perioada de eșantionare.

Vom nota cu  $\{\dots\}$  vectorii coloană și cu  $[\dots]$  matricile. Vom nota cu  $(\dots)^t$  the transpusa unei matrici sau vector, cu  $(\dots)^*$  complex conjugata unei matrici sau vector.

Conjugata hermitică este definită ca:

$$(\dots)^\dagger = ((\dots)^t)^* \quad (2.90)$$

Șirul discret de eșantioane ale semnalului de mai sus poate fi scris ca un vector  $\{x\}$  de forma:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

Semnalele pot fi exprimate de asemenea în domeniul frecvență  $\nu = \omega/2\pi$ , cu ajutorul transformatei Fourier, care se scrie în cazul discret:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-iak\delta t} \quad (2.92)$$

unde  $i\sqrt{-1}$   $\omega = \omega_m = m\omega_0$ ,  $m = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$ , și cu  $\omega_0 = 2\pi/\delta t$ ,  $\delta t$  fiind perioada de eșantionare.

Densitatea spectrală de putere a semnalului poate fi scrisă ca:

$$S(\omega) = y^*(\omega)y(\omega)$$

Metoda de estimare spectrală cu varianță minimă presupune că semnalul investigat este o suprapunere de  $M$  semnale armonice cu pulsații  $\omega_m$  și amplitudine complexă  $A_m$ :

$$x(t) = \sum_{m=1}^M A_m e^{i\omega_m t} + z(t)$$

unde  $z(t)$  este un zgomot a cărui valoare medie se presupune egală cu zero.

Metoda de estimare spectrală cu varianță minimă de ordinul  $M$  stabilește  $M$  funcții de transfer  $h_m(t)$ , unde  $m = 1, \dots, M$  reprezintă răspunsul a  $M$  filtre care minimizează varianța semnalului de ieșire. Aceste filtre dau cea mai bună estimare a densității spectrale de putere a acestor componente armonice.

În variabilă discretă, semnalul de ieșire  $y(t)$  a filtrului  $m$  poate fi scris în reprezentare temporală [18, 90]:

$$y_m(j) = \sum_{k=0}^L x(j-k)h_i(k) = x^t h_i \quad (2.93)$$

unde  $L+1$  este un întreg  $L < N$ , reprezentând numărul de puncte de integrare (sumare).



Transformata Fourier a funcției de transfer  $h_m$  poate fi scrisă ca:

$$\hat{h}_m(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_m(k) e^{-i\omega k \delta t}$$

Pe de altă parte, funcția de autocorelație a unui semnal  $x(t)$  poate fi scrisă ca:

$$r(m) = r_m = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L x(k+m)x(k) \quad (2.94)$$

iar matricea de covarianță:

$$[R] = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(L) \\ r(1) & r(2) & r(3) & \dots & r(L+1) \\ r(2) & r(3) & r(4) & \dots & r(L+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(L) & r(L+1) & r(L+2) & \dots & r(2L) \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Varianța semnalului de ieșire este:

$$\rho_m = h_m^\dagger R h_m \quad (2.96)$$

În scopul minimizării varianței, se introduce funcționala de cost:

$$J_m = h_m^\dagger R h_m - \lambda (h_m^\dagger e_m - 1) \quad (2.97)$$

unde  $\lambda$  este un multiplicator Lagrange iar  $e_m$  este vectorul:

$$\{e\}_m = \{1 \quad \exp(-i\omega_m) \quad \exp(i2\omega_m) \quad \dots \quad \exp(iL\omega_m)\}^t \quad (2.98)$$

Prin minimizare rezultă  $\lambda$  și  $h_m$  [18, 90]:

$$\lambda = \frac{1}{e_m^\dagger R^{-1} e_m}$$

precum și densitatea spectrală de putere optimă [18, 90] a componentei  $\omega_m$ :

$$S(\omega_m) = \frac{L+1}{e_m^\dagger R^{-1} e_m} \quad (2.99)$$

Cea mai bună estimare a densității spectrale de putere a componentelor  $\omega_m$  este:

$$S(\omega_m) = \frac{e_m^\dagger R^{-1} e_m}{e_m^\dagger R^{-2} e_m} \quad (2.100)$$

$$E_\theta = \sum_{v_j=0}^{v_{max}} S_\theta(v_j) \quad (2.101)$$

Acest parametru reprezintă un parametru de normare, necesar pentru normarea tuturor spectrelor obținute prin minimizare.

### 3. UTILIZAREA TRANSFORMATEI WAVELET ÎN IDENTIFICAREA SISTEMELOR NELINIARE

Primele idei în domeniul analizei wavelet au apărut începând cu anul 1909 prin lucrările lui Haar, apoi după 1930 prin lucrările lui Littlewood și Paley, iar după 1960 prin lucrările lui Weiss și Coifman. Rezultatele au fost dezvoltate apoi de către Grossman, Morlet, Daubechies, Mallat și alții. Aplicațiile multiple ale analizei wavelet au fost găsite odată cu dezvoltarea și perfecționarea calculatoarelor [147, 100, 3].

Traducerea termenului "wavelet" în limba română se face prin cuvântul "undină". Deoarece termenul în limba română are o răspândire redusă, majoritatea covârșitoare a literaturii de specialitate conținând forma în limba engleză, în prezenta lucrare vom utiliza, pentru evitarea confuziilor, numai termenul wavelet.

#### 3.1. Baze ortogonale de funcții

Vom considera că semnalele  $x(t)$  sunt funcții de pătrat sumabil, adică integrala care definește produsul scalar:

$$\langle x(t) | y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt \quad (3.1)$$

unde  $x^*(t)$  reprezintă conjugata complexă a lui  $x(t)$ , norma funcției fiind definită din produsul scalar  $\|x\| = \langle x(t) | x(t) \rangle^{1/2}$ . Funcțiile  $x$  vor fi de pătrat sumabil dacă:

$$\langle x(t) | x(t) \rangle = M < \infty$$

Observație: în produsul scalar definit cu  $\langle x(t) | y(t) \rangle$ , se consideră că funcția care intră pe poziția  $\langle x(t) |$  reprezintă complex conjugata funcției  $x(t)$ , iar cea care este pe poziția  $| y(t) \rangle$ , este  $y(t)$ .

Pentru astfel de funcții, considerăm că am găsit o bază de funcții  $e_1(x)$ ,  $e_2(x)$ ,  $e_3(x)$ , ...,  $e_n(x)$ , ..., unde  $n \in N$  natural, cu proprietatea de ortogonalitate  $\langle e_i(t) | e_j(t) \rangle = \delta_{i,j}$ , cu  $i, j \in N$ , iar  $\delta_{i,j}$  reprezintă simbolul Kronecker. Cu ajutorul acestei baze funcțiile  $x(t)$  se pot dezvolta în serie:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n(t) | x(t) \rangle e_n(t) \quad (3.2)$$

adică coeficienții  $a_n$  se calculează cu ajutorul funcțiilor bazei:

$$\alpha_n = \langle e_n(t) | x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e_n^*(t)x(t)dt \quad (3.3)$$

Mai exact, atât  $x(t)$  cât și funcțiile bazei  $e_k(t)$  (unde  $t \in R$  și  $n \in N$ ), aparțin spațiului Hilbert  $L_2(R)$  [147, 100, 105, 88].

Există multe baze ortonormale pentru analiza semnalelor. Se poate face de exemplu analiza cu ajutorul unei baze construite cu polinoame Hermite  $H_n$  [105, 2]:

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(t),$$

Astfel, pentru semnalele periodice, cu perioada  $T$  este posibil să se construiască baze de forma  $e_n = \exp(in\omega t)$ , unde  $\omega = 2\pi/T$ , pentru  $n \in Z$  (întreg), sau prin dezvoltare, baze echivalente de forma  $\cos(n\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$ . Aceste funcții sunt definite pe un interval de timp finit  $t \in [0, T)$ , astfel ca integrarea se face pe intervalul:

$$\alpha_n = \langle e_n(t) | x(t) \rangle = \int_0^T e_n^*(t)x(t)dt \quad (3.4)$$

Un alt tip de analiză este cel cu transformata Fourier, a unei funcții de timp  $x(t)$ , definită:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \\ &= X_R(\omega) + iX_I(\omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

funcțiile bazei sunt dilatări  $\omega t$  ale unor funcții sinus și cosinus (acoperind total domeniul timpului  $t \in R$ ), iar  $\omega = 2\pi v = 2\pi/T$ ,  $v$  reprezentând frecvența. Transformata Fourier dă reprezentări în frecvență  $X(v)$  ale semnalelor. S-au notat aici cu  $X_R$  și  $X_I$  transformatele în cosinus și sinus.

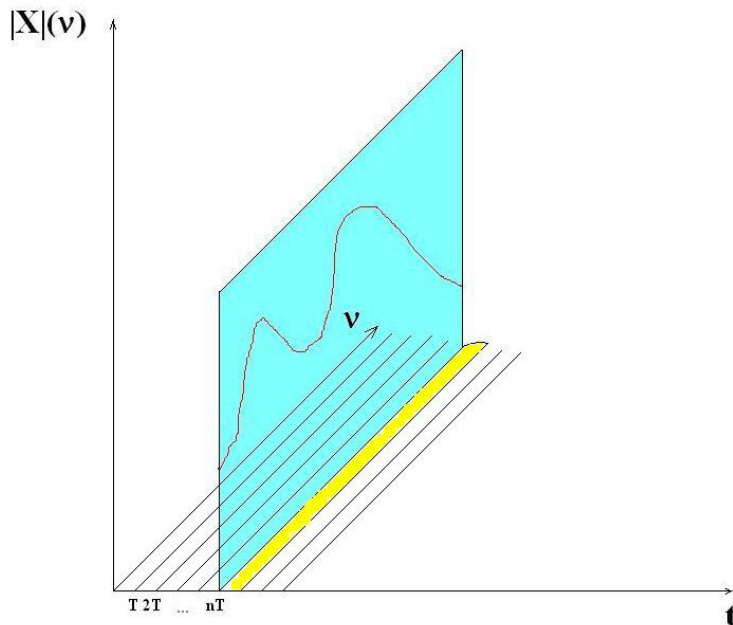


Figura 3.1

La transformata Fourier scurtă, se produce de asemenea o dilatare în, însă domeniul timpului se obține prin celulare pe intervale de timp finite, datorită integrării pe un interval de timp limitat:

$$\begin{aligned}
 X(T, \omega) &= \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) \exp(-i\omega t) dt \\
 &= \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= X_R(T, \omega) + iX_I(T, \omega)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

unde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , ca în fig. 3.1.

În acest caz, forma celulelor de acoperire a planului  $(t, \nu)$  este prezentată în Figura 3.2.a.

O altă formă de celulare a planului  $(t, \nu)$ , pentru transformarea Fourier scurtă, dacă luăm  $T = 1$  și celulăm spațiul după frecvență cu celule unitare, este prezentată în Figura 3.2.b.

La acest tip de celulare se poate considera că funcțiile bazei sunt definite pe un interval finit și compact:

$$e_n = \begin{cases} \exp(i2\pi\nu t), & t \in [0, 1), \\ 0, & t \notin [0, 1), \end{cases}$$

sau o bază formată din două mulțimi de funcții sinus și cosinus:

$$e_{n,1} = \begin{cases} \cos(2\pi vt), & t \in [0,1), \\ 0, & t \notin [0,1) \end{cases}$$

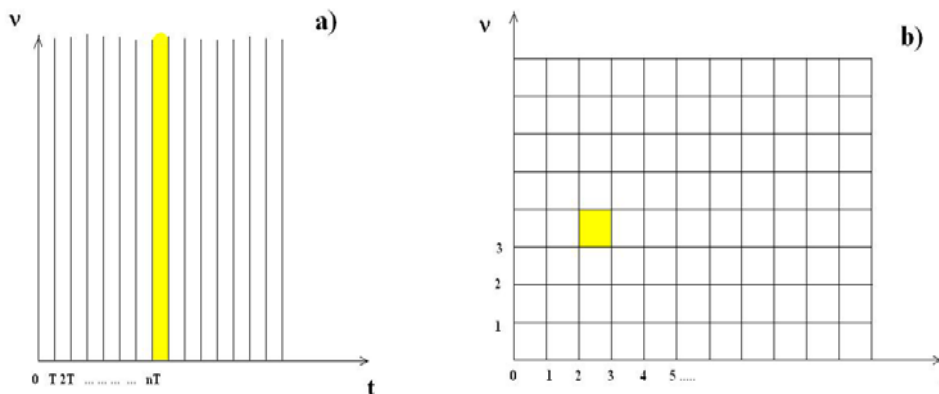
respectiv:

$$e_{n,2} = \begin{cases} \sin(2\pi vt), & t \in [0,1), \\ 0, & t \notin [0,1), \end{cases}$$

având proprietatea de ortogonalitate:

$$\langle e_{m,i}(t) | e_{n,j}(t) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{m,n},$$

unde  $i, j = 1, 2$  respectiv  $m, n \in Z$ .



**Figura 3.2**

Pentru transformata wavelet se folosesc diferite translații temporale și dilatări ale unei funcții  $\Psi(t)$  numită **wavelet mamă** împreună cu o funcție de scalare. Dilatările ambelor mulțimi de funcții de bază sunt posibile datorită localizării lor în frecvență, permițându-ne astfel să obținem informații în frecvență, despre semnalul analizat. Acest lucru conduce la cea mai mare diferență între cele două mulțimi ale funcțiilor de bază, localizate de timp. La transformata wavelet funcțiile de bază sunt compacte, pe un interval de timp finit, în timp ce la transformatele Fourier în sinus și cosinus nu sunt. Această caracteristică permite transformatei wavelet să obțină despre un semnal informații în plus în timp și în frecvență.

Forma translatată în timp cu  $\tau$  și scalată cu  $v$  se poate scrie:

$$\Psi = \Psi(vt - \tau)$$

având dimensiune de frecvență, ca în cazul transformatei Fourier scurte, dar de timp.

În figura 3.3 este prezentat cazul în care scalarea pe axa frecvenței se face prin dublarea intervalului, adică după puterile lui 2.

Trebuie să mai notăm faptul că, similar transformării Fourier scurte, celularea se va face aici după întregii  $2n$  și  $l$ , primul având sens de frecvență sau scală, iar cel de-al doilea de întârziere după timp.

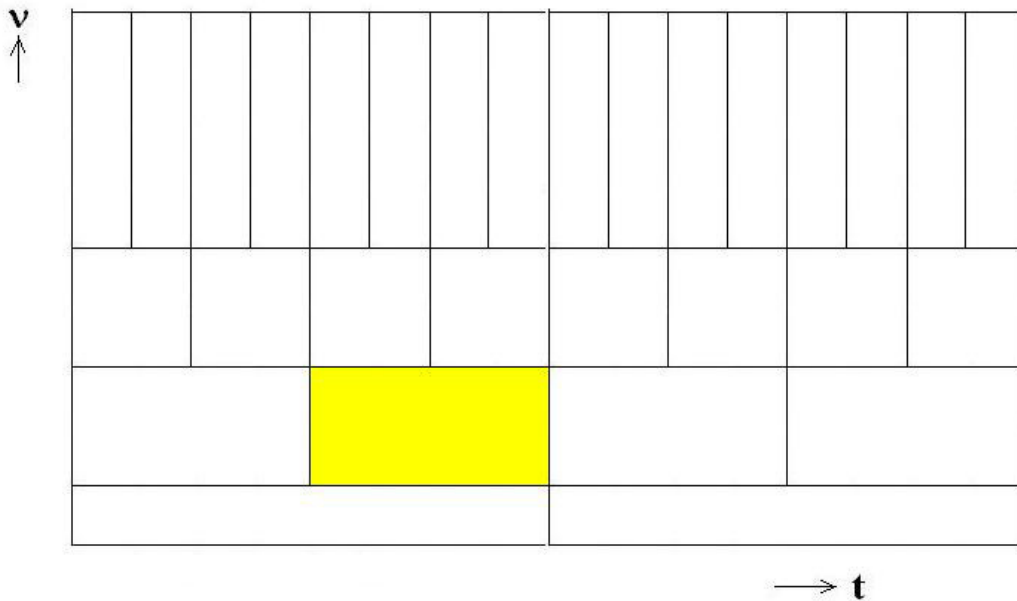


Figura 3.3

### 3.2 Analiza wavelet multirezoluție

În cele ce urmează vom studia rezultatele obținute în analiza wavelet multirezoluție [3, 24, 88, 96], introdusă de Mallat și Meyer [105, 2, 88, 96].

Aplicații ale acestei metode în identificarea sistemelor liniare și neliniare au fost făcute într-o serie de lucrări [34, 62, 37, 52, 141, 142].

S-a arătat că wavelet mamă translate în timp și scalate în domeniul frecvență:

$$e_{nl} = \Psi(2^n t - l) \quad (3.7)$$

formează o bază ortonormată:

$$\langle \Psi(2^n t - l) | \Psi(2^{n'} t - l') \rangle = \delta_{nn'} \delta_{ll'}$$

$\delta$  fiind simbolul lui Kronecker.

Astfel, rezultă că un semnal  $x(t)$ , reprezentând o funcție de pătrat sumabil ( $x \in L_2(\mathbb{R})$ ), se poate dezvolta în serie după baza formată de funcțiile wavelet de forma  $e_{nl} = \Psi(2^n t - l) \in L_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x(t) | \Psi(2^n t - l) \rangle \Psi(2^n t - l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{nl} \Psi(2^n t - l) \end{aligned} \quad (3.8)$$

unde coeficienții dezvoltării în serie se calculează:

$$\alpha_{nl} = \langle x(t) | \Psi(2^n t - l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \Psi(2^n t - l) dt. \quad (3.9)$$

Dezvoltarea în serie (3.8) este însă rezultatul unei analize mai complexe numită analiza wavelet multirezoluție [24, 88, 96] de care ne vom ocupa pe scurt în cele ce urmează.

Pentru funcțiile din spațiul Hilbert  $L_2$  se poate construi o structură multirezoluție de subspații închise de funcții  $V_n \subset L_2(\mathbb{R})$ , (unde  $n$  este un indice întreg  $n \in \mathbb{Z}$ ), cu proprietățile:

1) Incluziune, de forma:

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \dots$$

2) Completitudine (separabil și dens):

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(\mathbb{R})$$

3) Scalare, adică pentru orice funcție  $f(t)$  din spațiul Hilbert există proprietatea de scalare, adică pentru orice funcție  $f(t) \in V_n$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$  rezultă:

$$f(2t) \in V_{n+1},$$

4) Existență a bazei. Aceasta înseamnă că există o funcție  $\Phi(t) \in V_0$ , mulțimea de funcții:



$$\Phi_{nl}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \Phi(2^{-n}t - l)$$

unde  $l \in Z$ , cu proprietatea de ortonormare:

$$\langle \Phi_{nl}(t) | \Phi_{n'l'}(t) \rangle = \delta_{ll'}.$$

O proprietate importantă a funcțiilor de scalare este aceea că dacă avem în  $V_0$  o funcție de scalare  $\Psi(t)$ , în  $V_1$  vom avea o bază  $\Phi(2t - k)$ , unde  $k \in Z$ , în care putem dezvolta

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \Phi(2t - k)$$

această ecuație numindu-se ecuație de scalare (dilatare). Coeficienții  $\gamma_k$  se calculează din produsul scalar  $\gamma_k = \langle \Phi(t) | \Phi(2t - k) \rangle$ .

Ultima relație mai arată că funcția  $\Phi(2t - k) \in V_1$  formează o bază în  $V_0$ .

Din (3.8) și (3.9) rezultă că dezvoltarea în serie de funcții wavelet este greu de manipulat deoarece sumarea se face după o dublă sumă infinită, adică după  $n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots + \infty$  și  $l = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots + \infty$ . Pe baza analizei multirezoluție [105, 24, 88, 96] dezvoltarea (3.8) poate fi restrânsă sub o formă mai simplă, comprimând un mare număr de termeni în termenul care conține  $\Phi(t)$ .

Relația (3.8) se mai poate scrie sub forma:

$$x(t) = \beta_0 \Phi(t) + \sum_{l=0}^{2^n} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2^n+l} \Psi(2^n t - l) \quad (3.10)$$

unde  $\Phi(t)$  este funcția de scară, iar coeficienții dezvoltării sunt legați de cei din (3.9) sub forma:  $\beta_{2^n+l} = \alpha_{nl}$ .

Dezvoltarea (3.10) se poate aranja ca o serie de produse de vectori (matrice linie):

$$x(t) = \beta_0 \Phi(t) + \beta_1 \Psi(t) + [\beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} \Psi(2t) \\ \Psi(2t-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + [\beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7] \begin{bmatrix} \Psi(4t) \\ \Psi(4t-1) \\ \Psi(4t-2) \\ \Psi(4t-3) \end{bmatrix} \\
& + \dots \\
& + [\beta_{2^k}, \beta_{2^k+1}, \dots, \beta_{2^{k+1}-1}] \begin{bmatrix} \Psi(2^k t) \\ \Psi(2^k t-1) \\ \dots \\ \Psi(2^k t-2^k+1) \end{bmatrix} \\
& \dots + \beta_{2^n+l} \Psi(2^n t-l) + \dots, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

sau sub forma unei serii

$$x(t) = \beta_0 \Phi_0 + \beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2 + \dots + \beta_n \Psi_n + \dots, \tag{3.12}$$

Coeficienții dezvoltării (3.12) se calculează cu relațiile:

$$\beta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Phi(t) dt, \quad \beta_{2^n+l} = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi(2^n t-l) dt, \tag{3.13}$$

ultima relație fiind valabilă pentru  $2^n + l \neq 0$ .

Vom mai nota faptul că funcția de scalare  $\Phi$  se mai numește și funcție wavelet tată.

Vom mai nota în final că la rândul ei, funcția de scalare se poate dezvolta în serie:

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n \Phi(2t-n)$$

La rândul său funcția wavelet tată se poate dezvolta în serie de funcții wavelet mamă, sub forma:

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \gamma_n \Phi(2t+n-N+1) \tag{3.14}$$

unde coeficienții  $\gamma_n$  reprezintă niște coeficienți care exprimă dezvoltarea în serie a funcției de transfer a unui filtru. Aici  $N$  se numește *ordinul filtrului*.

Funcția  $\Phi$  trebuie să îndeplinească condiția de admisibilitate:

$$\int_R \Phi(t) dt = 1 \quad (3.15)$$

Funcțiile wavelet mamă cele mai frecvent folosite sunt cele Haar, Daubechies, Coiflet și Simlet.

Astfel, pentru funcția Haar avem:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1/2) \\ -1 & t \in [1/2, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases}$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases}$$

### 3.3. Utilizarea transformatei wavelet discrete la identificarea sistemelor liniare și neliniare

#### 3.3.1. Cazul cu un grad de libertate

Transformata wavelet discretă poate fi utilizată cu foarte bune rezultate la identificarea sistemelor liniare și neliniare [38, 165, 132].

Vom considera un sistem vibrant neliniar care descrie oscilații forțate, cu un grad de libertate de forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + N(x, \dot{x}) = F(t) \quad (3.16)$$

unde  $m$  este masa,  $c$  reprezintă constanta de amortizare,  $k$  reprezintă constanta elastică,  $F(t)$  reprezintă o forță perturbatoare de formă cunoscută, iar  $N(x, \dot{x})$  este o funcție neliniară de poziția  $x$  și viteza  $\dot{x}$ .

Funcția neliniară poate fi dezvoltată în serie de puteri după poziția  $x$  și viteza instantanee  $\dot{x}$ . Dezvoltarea aceasta poate fi făcută de exemplu prin dezvoltare în serie Taylor în jurul originii:

$$N(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^i \dot{x}^j j! \left( \frac{d^i N}{dx^i} \right)_{x=0, \dot{x}=0} \left( \frac{d^j N}{d\dot{x}^j} \right)_{x=0, \dot{x}=0} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \dot{x}^m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n+m} x^n(t) \dot{x}^m(t) \quad (3.17)$$

Ecuția de mișcare (3.16) poate fi scrisă în formă dezvoltată, după relația (3.17). Suplimentar vom mai înlocui:

$$k + \alpha_1 \rightarrow k, \quad c + \beta_1 \rightarrow c, \quad F - \alpha_0 - \beta_0 \rightarrow F, \quad (3.18)$$

Astfel din (3.16), (3.17) și (3.18) rezultă forma dezvoltată după puteri ale lui  $x$  și  $\dot{x}$  a ecuației de mișcare:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n(t) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m \dot{x}^m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n+m} x^n(t) \dot{x}^m(t) = F(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

În cele mai multe cazuri dezvoltările în serie din (3.19) se pot limita la un număr redus de termeni. Sunt de asemenea multe cazuri de oscilatori la care apar câțiva termeni conținând puterile lui  $x$  și  $\dot{x}$ , cum ar fi în cazul binecunoscut al ecuațiilor Duffing sau van der Pol.

Problema care o punem în această secțiune este identificarea parametrilor unui model descris de ecuația de forma generală (3.19). Această problemă revine la stabilirea din date experimentale, prin măsurarea lui  $x(t)$ , a celor mai potriviți parametri  $m, c, k, \alpha_n, \beta_m$  și  $\gamma_k$  din ecuația (3.19), astfel încât ecuația (3.19) să descrie cel mai bine sistemul experimental care are ca răspuns  $x(t)$ .

Pentru aceasta vom utiliza dezvoltarea wavelet discretă dezvoltată în serie de funcții a tuturor termenilor ecuației (3.16), de forma (3.17) sau (3.19). Astfel vom putea dezvolta fiecare termen în parte sub forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \ddot{x} \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{x}_n \Psi_n, \\ \dot{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \dot{x} \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n \Psi_n, \\ x &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Psi_n, \\ x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^2 \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \Psi_n, \\ x^k &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^k \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k \Psi_n, \end{aligned} \quad (3.20)$$

...

$$\dot{x}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \dot{x}^2 \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n^2 \Psi_n,$$

...

$$\dot{x}^m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \dot{x}^m \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n^m \Psi_n,$$

...

$$x\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\dot{x} \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x\dot{x})_n \Psi_n,$$

...

$$x^k \dot{x}^m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^k \dot{x}^m \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x^k \dot{x}^m)_n \Psi_n,$$

...

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Psi_n.$$

În relațiile (3.19) s-a notat cu  $\langle F \rangle_n$ , sau cu  $F_n$  coeficientul dezvoltării în serie după  $\Psi_n$  a funcției  $F(t)$ .

Rezultă că ecuația (3.20) poate fi pusă sub forma matricială:

$$\begin{bmatrix}
 \ddot{x}_1 & \dot{x}_1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & \dot{x}_1^2 & \dot{x}_1^3 & \dots & (x\dot{x})_1 & \dots \\
 \ddot{x}_2 & \dot{x}_2 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & \dot{x}_2^2 & \dot{x}_2^3 & \dots & (x\dot{x})_2 & \dots \\
 \ddot{x}_3 & \dot{x}_3 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & \dot{x}_3^2 & \dot{x}_3^3 & \dots & (x\dot{x})_3 & \dots \\
 \ddot{x}_4 & \dot{x}_4 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & \dots & \dot{x}_4^2 & \dot{x}_4^3 & \dots & (x\dot{x})_4 & \dots \\
 \ddot{x}_5 & \dot{x}_5 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & \dots & \dot{x}_5^2 & \dot{x}_5^3 & \dots & (x\dot{x})_5 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \ddot{x}_n & \dot{x}_n & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & \dot{x}_n^2 & \dot{x}_n^3 & \dots & (x\dot{x})_n & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \ddot{x}_k & \dot{x}_k & x_k & x_k^2 & x_k^3 & \dots & \dot{x}_k^2 & \dot{x}_k^3 & \dots & (x\dot{x})_k & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 m \\
 c \\
 k \\
 \alpha_2 \\
 \alpha_3 \\
 \dots \\
 \beta_2 \\
 \beta_3 \\
 \dots \\
 \gamma_2 \\
 \dots
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 \\
 F_4 \\
 F_5 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 F_n \\
 \dots \\
 \dots
 \end{pmatrix}
 \quad (3.21)$$

care mai poate fi scrisă formal sub forma:

$$[X]\{q\} = \{F\} \quad (3.22)$$

unde  $[X]$  este o matrice pătrată infinită,  $\{q\}$  este un vector coloană, reprezentând parametrii modelului, iar  $\{F\}$  este un vector coloană, reprezentând coeficienții dezvoltării forței perturbatoare.

Trebuie să mai subliniem că de fapt, riguros, ecuația (3.18) se poate scrie ca o serie de ecuații matriciale de forma (3.22), sistemul de ecuații fiind supradeterminat.

În plus, trebuie să mai subliniem că deși dimensiunea matricii este infinită, în cazurile practice dezvoltarea în serie a termenului neliniar  $N(x, \dot{x})$  se reduce la un număr limitat de termeni, făcând ca matricile să fie finite, matricea  $[X]$  fiind pătrată.

Sistemul (3.21) fiind supradeterminat, soluțiile  $\{q\}$  pot fi determinate cu metoda celor mai mici pătrate. Aplicând această metodă rezultă:

$$\{q\} = ([X]^t[X])^{-1}[X]^t\{F\} \quad (3.23)$$

unde cu  $[...]^{-1}$  s-a notat matricea inversă, iar cu  $[...]^t$  matricea transpusă.

Din punct de vedere experimental trebuie să măsurăm și să achiziționăm semnalul  $x(t)$  reprezentând parametrul de poziție instantanee a sistemului studiat precum și forța de excitație  $F(t)$ . Vom calcula derivatele  $\dot{x}(t)$  și  $\ddot{x}(t)$  ale semnalului achiziționat. Urmează apoi o etapă de dezvoltare în serie de wavelet a semnalului cu (3.20), rezultând coeficienții numerici  $x_k, \dot{x}_k, \dots$  ai matricii  $[X]$

precum și componentele  $F_n$  ai vectorului  $\{F\}$  din (3.21) sau (3.22). Parametrii estimați ai modelului  $\{q\}$  rezultă din ecuația matricială (3.23).

### 3.3.2. Cazul cu $n$ grade de libertate

Vom considera un sistem vibrant neliniar cu  $n$  grade de libertate. Vom nota cu  $\{x(t)\}$  vectorul  $n$ -dimensional al variabilelor de poziție, asupra căruia se aplică vectorul forțelor perturbatoare  $\{F(t)\}$ :

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Ecuația matricială de mișcare a vibrațiilor neliniare forțate cu amortizare vâscoasă se scrie sub forma:

$$[m]\{x\} + [c]\{x\} + [k]\{x\} + \{N\} = \{F(t)\} \quad (3.25)$$

unde  $[m]$  este matricea de inerție:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$[k]$  este matricea de rigiditate

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

iar  $[c]$  este matricea de amortizare:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

În aceste matrice  $x_k(t)$  este parametrul de poziție al corpului  $k$ ,  $m_k$  este masa sau momentul de inerție al corpului  $k$ ,  $k_{ij}$  reprezintă constantele elastice ale elementelor elastice care compun sistemul,  $c_{ij}$  reprezintă constantele de amortizare ale diferitelor elemente amortizoare.

Datorită principiului acțiunii și reacțiunii matricile  $[k]$  și  $[c]$  sunt simetrice, iar  $[m]$  este de obicei diagonală.

În cele ce urmează vom nota cu litere grecești componentele vectorilor  $\{x\}$  și  $\{\dot{x}\}$ , adică:

$$\{x\}^t = \{x_1, \dots, x_\mu, \dots, x_n\}, \quad \{\dot{x}\}^t = \{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_\nu, \dots, \dot{x}_n\}.$$

În (3.25) termenul  $\{N\}$  reprezintă un vector coloană  $n$ -dimensional, care depinde neliniar de vectorul pozițiilor instantanee ale corpurilor sistemului  $\{x\}$  și de vectorul vitezelor instantanee  $\{\dot{x}\}$ :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1(\{x\}, \{\dot{x}\}) \\ N_2(\{x\}, \{\dot{x}\}) \\ N_3(\{x\}, \{\dot{x}\}) \\ \dots \\ N_n(\{x\}, \{\dot{x}\}) \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

În acest caz, componenta  $N_l(\{x\}, \{\dot{x}\})$  a vectorului neliniar  $\{N\}$  poate fi dezvoltată în serie Taylor în jurul originii, după puterile vectorilor  $\{x\}$  și  $\{\dot{x}\}$  sub forma:

$$N_l(\{x\}, \{\dot{x}\}) = N_l(\{0\}, \{0\}) + \\ + \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_\nu^i}{i!} \frac{\partial^i N}{\partial x_\nu^i} \Big|_{\{x\}=\{0\}, \{\dot{x}\}=\{0\}} + \sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_\mu^j}{j!} \frac{\partial^j N}{\partial x_\mu^j} \Big|_{\{x\}=\{0\}, \{\dot{x}\}=\{0\}}$$



$$+ \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_v^i \dot{x}_\mu^j}{i! j!} \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_v^i \partial \dot{x}_\mu^j} N_l \right)_{\{x\}=\{0\}, \{\dot{x}\}=\{0\}} + \dots \quad (3.27)$$

pentru  $l = 1, 2, \dots, n$ , relație în care s-a notat cu  $\{0\}$  vectorul  $n$  dimensional cu toate componentele nule. Mai precizăm că următorii termeni ai dezvoltării conțin produse de trei factori de forma  $x_\rho^k x_\nu^i \dot{x}_\mu^j$  și  $x_\nu^i \dot{x}_\mu^j \dot{x}_\rho^k$  ș. a. m. d.

Relația (3.27) va putea fi scrisă în final pe componente ca o serie de puteri:

$$N_l(\{x\}, \{\dot{x}\}) = \sum_{v=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{vk}^l x_v^k(t) + \sum_{\mu=1}^n \sum_{m=2}^{\infty} \beta_{\mu m}^l \dot{x}_\mu^m(t) + \\ + \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{v\mu km}^l x_v^k(t) \dot{x}_\mu^m(t) + T_l^{sup} + T_l^{lin} \quad (3.28)$$

În ultima relație coeficienții  $\alpha_{vk}^l$ ,  $\beta_{\mu m}^l$  și  $\gamma_{v\mu km}^l$  reprezintă parametrii sistemului dinamic, care descriu proprietățile neliniare ale sistemului dinamic. În cazul cel mai general numărul acestor parametri este foarte mare deoarece indicii iau valorile  $l = 1, 2, \dots, n$ , respectiv  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$  și  $k, m = 2, 3, \dots, \infty$ .

Termenul  $T_l^{sup}$  reprezintă un termen de ordin superior celor în  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  obținut din alte produse de puteri ale lui  $x_\nu$  și  $\dot{x}_\mu$ , de forma

$$T_l^{sup} = \sum_{v_1=1}^n \dots \sum_{v_i=1}^n \sum_{\mu_1=1}^n \dots \sum_{\mu_j=1}^n \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i, m_1, m_2, \dots, m_j=1}^{\infty} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_j=1}^{\infty} \omega_{v_1 v_2 \dots v_i \mu_1 \mu_2 \dots \mu_j n_1 \dots n_i m_1 \dots m_j}^l \\ x_{v_1}^{n_1} x_{v_2}^{n_2} \dots x_{v_i}^{n_i} \dot{x}_{\mu_1}^{m_1}(t) \dot{x}_{\mu_2}^{m_2}(t) \dots \dot{x}_{\mu_j}^{m_j}(t),$$

unde  $i + j > 2$  iar  $n_1 + n_2 + \dots + n_i + m_1 + m_2 + \dots + m_j > 2$ . Pentru simplificare în cele ce urmează vom omite efectele termenului  $T_l^{sup}$ .

A fost separat în dezvoltarea (3.28) termenul  $T_l^{lin}$ , care conține termenul liber și termenii având puterea întâi după pozițiile instantanee  $x_\nu(t)$  și vitezele instantanee  $\dot{x}_\mu(t)$ :

$$T_l^{lin} = f_l + \sum_{v=1}^n \alpha_{v1}^l x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^n \beta_{\mu 1}^l \dot{x}_\mu(t) \quad (3.29)$$

Punând și în acest caz:

$$k_{l\nu} + \alpha_{\nu 1}^l \rightarrow k_{l\nu}, \quad c_{l\mu} + \beta_{\mu 1}^l \rightarrow c_{l\mu}, \quad F_l - f_l \rightarrow F_l, \quad (3.30)$$

linia  $l$  din ecuația matricială (3.25) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} m_l \ddot{x}_l + \sum_{\mu=1}^n c_{l\mu} \dot{x}_\mu + \sum_{\nu=1}^n k_{l\nu} x_\nu + \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{\nu k}^l x_\nu^k(t) + \sum_{\mu=1}^n \sum_{m=2}^{\infty} \beta_{\mu m}^l \dot{x}_\mu^m(t) \\ + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{\nu\mu km}^l x_\nu^k(t) \dot{x}_\mu^m(t) = F_l(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

unde  $l = 1, 2, \dots, n$ .

În continuare vom aborda problema identificării parametrilor sistemului neliniar cu  $n$  grade de libertate, descris de modelul (3.25), pus pentru aplicații sub forma (3.31).

Din punct de vedere experimental, putem măsura pozițiile instantanee  $x_\nu(t)$  (unde  $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) cu ajutorul unor senzori de poziție, sub forma unor semnale pe care le vom achiziționa. Din aceste semnale putem calcula vitezele și accelerațiile instantanee  $\dot{x}_\mu$  și  $\ddot{x}_\lambda$  (unde  $\mu, \lambda = 1, 2, \dots, n$ ).

Aceste semnale se pot dezvolta în serie de funcții wavelet. Vom nota astfel expresiile următoarelor semnale dezvoltate în serie:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\nu &= \sum_{N=1}^{\infty} \langle \ddot{x}_\nu \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (\ddot{x}_\nu)_N \Psi_N, \\ \dot{x}_\nu &= \sum_{N=1}^{\infty} \langle \dot{x}_\nu \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (\dot{x}_\nu)_N \Psi_N, \\ x_\nu &= \sum_{N=1}^{\infty} \langle x_\nu \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (x_\nu)_N \Psi_N, \\ x_\nu^2 &= \sum_{N=1}^{\infty} \langle x_\nu^2 \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (x_\nu^2)_N \Psi_N, \\ x_\nu^k &= \sum_{N=1}^{\infty} \langle x_\nu^k \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (x_\nu^k)_N \Psi_N, \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.3 - Utilizarea transformatei wavelet discrete la identificarea sistemelor liniare și neliniare 75

$$\dot{x}_v^2 = \sum_{N=1}^{\infty} \langle \dot{x}_v^2 \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (\dot{x}_v^2)_N \Psi_N,$$

$$\dot{x}_v^m = \sum_{N=1}^{\infty} \langle \dot{x}_v^m \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (\dot{x}_v^m)_N \Psi_N,$$

$$x_v \dot{x}_\mu = \sum_{N=1}^{\infty} \langle x_v \dot{x}_\mu \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (x_v \dot{x}_\mu)_N \Psi_N,$$

$$x_v^k \dot{x}_\mu^m = \sum_{N=1}^{\infty} \langle x_v^k \dot{x}_\mu^m \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (x_v^k \dot{x}_\mu^m)_N \Psi_N,$$

$$F_l(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \langle F_l \rangle_N \Psi_N = \sum_{N=1}^{\infty} (F_l)_N \Psi_N.$$

Introducând (3.32) în (3.33) putem separa ecuația (3.32) într-un sistem de ecuații liniare în parametri de determinat ai modelului. Ecuația corespunzătoare liniei  $l$  și termenului  $\Psi_N$  va fi:

$$\begin{aligned} m_l(\ddot{x}_l)_N + \sum_{\mu=1}^n c_{l\mu}(\dot{x}_\mu)_N + \sum_{v=1}^n k_{lv}(x_v)_N + \sum_{v=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{vk}^l (x_v^k)_N + \sum_{\mu=1}^n \sum_{m=2}^{\infty} \beta_{\mu m}^l (\dot{x}_\mu^m)_N \\ + \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{v\mu km}^l (x_v^k)_N (\dot{x}_\mu^m)_N = (F_l)_N, \end{aligned} \quad (3.33)$$

unde  $N = 1, 2, 3, \dots$

Astfel pentru linia  $l$  din sistemul de ecuații (3.25) sub formă (3.31) vom avea sistemul matricial:

$$[X_l] \{q_l\} = \{F_l\}, \quad (3.34)$$

unde

$$\{q_l\} = \left\{ \begin{array}{l} m_l \\ c_{l1} \\ c_{l2} \\ \dots \\ c_{ln} \\ k_{l1} \\ \dots \\ k_{ln} \\ \alpha_{12}^l \\ \dots \\ \alpha_{N2}^l \\ \alpha_{13}^l \\ \dots \\ \beta_{12}^l \\ \dots \\ \beta_{n2}^l \\ \beta_{13}^l \\ \dots \\ \gamma_{1111}^l \\ \dots \end{array} \right\} \quad \{F_l\} = \left\{ \begin{array}{l} (F_l)_1 \\ (F_l)_2 \\ (F_l)_3 \\ (F_l)_4 \\ (F_l)_5 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ (F_l)_n \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$[X_l] =$$

$$= \begin{bmatrix} (\ddot{x}_l)_1 & (\dot{x}_1)_{1\dots}(\dot{x}_n)_1 & (x_1)_{1\dots}(x_n)_1 & (x_1^2)_{1\dots}(x_n^2)_{1\dots}(\dot{x}_1^2)_{1\dots}(\dot{x}_n^2)_{1\dots}(x_1\dot{x}_1)_{1\dots} \\ (\ddot{x}_l)_2 & (\dot{x}_1)_{2\dots}(\dot{x}_n)_2 & (x_1)_{2\dots}(x_n)_2 & (x_1^2)_{2\dots}(x_n^2)_{2\dots}(\dot{x}_1^2)_{2\dots}(\dot{x}_n^2)_{2\dots}(x_1\dot{x}_1)_{2\dots} \\ (\ddot{x}_l)_3 & (\dot{x}_1)_{3\dots}(\dot{x}_n)_3 & (x_1)_{3\dots}(x_n)_3 & (x_1^2)_{3\dots}(x_n^2)_{3\dots}(\dot{x}_1^2)_{3\dots}(\dot{x}_n^2)_{3\dots}(x_1\dot{x}_1)_{3\dots} \\ (\ddot{x}_l)_4 & (\dot{x}_1)_{4\dots}(\dot{x}_n)_4 & (x_1)_{4\dots}(x_n)_4 & (x_1^2)_{4\dots}(x_n^2)_{4\dots}(\dot{x}_1^2)_{4\dots}(\dot{x}_n^2)_{4\dots}(x_1\dot{x}_1)_{4\dots} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\ddot{x}_l)_k & (\dot{x}_1)_{k\dots}(\dot{x}_n)_k & (x_1)_{k\dots}(x_n)_k & (x_1^2)_{k\dots}(x_n^2)_{k\dots}(\dot{x}_1^2)_{k\dots}(\dot{x}_n^2)_{k\dots}(x_1\dot{x}_1)_{k\dots} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\ddot{x}_l)_n & (\dot{x}_1)_{n\dots}(\dot{x}_n)_n & (x_1)_{n\dots}(x_n)_n & (x_1^2)_{n\dots}(x_n^2)_{n\dots}(\dot{x}_1^2)_{n\dots}(\dot{x}_n^2)_{n\dots}(x_1\dot{x}_1)_{n\dots} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Pentru cazurile concrete vectorul  $\{q_l\}$  va avea o dimensiune finită  $M$ , precum și vectorul  $\{F_l\}$ , matricea  $[X_l]$  fiind și ea de tip  $M \times M$ .

Rezultă astfel un sistem de  $n$  ecuații matriciale de tip (3.34). Rezolvarea acestuia se face similar cu cazul unidimensional.

Soluțiile acestora vor fi de forma:

$$\{q_l\} = ([X_l]^t[X_l])^{-1}[X_l]^t\{F_l\} \tag{3.35}$$

unde cu  $[...]^{-1}$  s-a notat matricea inversă, iar cu  $[...]^t$  matricea transpusă.

Din vectorii  $\{q_l\}$  (unde  $l=1,2,\dots,n$ ) rezultă parametrii modali  $[m]$ ,  $[c]$ ,  $[k]$  și  $\alpha_{vm}^l$ ,  $\beta_{\mu m}^l$ ,  $\gamma_{\nu\mu km}^l$ , etc.

### 3.4. Identificarea sistemelor descrise cu modele diferențiale de ordin fracționar

În ultimii ani în domeniul mecanicii au apărut o serie de modele matematice în care apar derivate de ordin fracționar, cum ar fi în domeniul modelelor reologice, al vibrațiilor, precum și al nanosistemelor [26, 27, 128].

În cele ce urmează vom introduce o nouă metodă de identificare a parametrilor sistemelor de ordin fracționar, inclusiv a ordinului derivatelor fracționare.

Vom căuta o metodă de identificare a unui sistem descris de o ecuație diferențială care reprezintă generalizarea ecuației (3.16) având un fracționar de forma:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + r \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t) + N(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) = F(t) \tag{3.36}$$

unde  $\alpha$  reprezintă un număr pozitiv ne-întreg, iar  $r$  este un parametru real. S-a constatat că există polimeri în care apare o amortizare descrisă de un termen fracționar de forma celui din ecuația (3.36). Trebuie să spunem că ecuația se poate extinde ușor la cazuri cu mai mulți termeni cu derivate de ordin fracționar.

Într-o scriere mai riguroasă ecuația (3.36) poate fi pusă sub forma:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + r {}_a D_t^\alpha x(t) + kx(t) + N(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) = F(t) \quad (3.37)$$

unde operatorul de derivare fracționară  ${}_a D_t^\alpha$  depinde de un parametru real  $a$ .

Trebuie să subliniem că operatorul de derivare fracționară  ${}_a D_t^\alpha$  este un operator liniar.

Putem scrie derivata fracționară, sub forma unei ecuații cu diferențe finite, pe un interval de timp finit  $\Delta t$ . Pentru aceasta vom folosi definiția Grünwald-Letnikov a derivatei de ordin fracționar:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^\alpha} {}_a \Delta_{\Delta t}^\alpha x(t) \quad (3.38)$$

unde operatorul de diferență finită  ${}_a \Delta_{\Delta t}^\alpha$  se scrie:

$${}_a \Delta_{\Delta t}^\alpha x(t) = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t - j\Delta t) \quad (3.39)$$

unde  $\nu$  reprezintă partea întregă din  $\nu = \left\lfloor \frac{t-a}{\Delta t} \right\rfloor$ , iar  $\binom{\alpha}{j}$  reprezintă coeficientul binomial generalizat, care poate fi scris cu funcția gamma a lui Euler [1, 33]:

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)}.$$

Parametrul  $\alpha$  exprimă originea timpului pe care se definește derivata fracționară. Există astfel sisteme fără memorie sau cu *memorie scurtă*, la care nu este importantă *istoria* procesului, ca în cazul proceselor histeretice. În cazul sistemelor cu memorie scurtă, limitată la un interval de timp  $T$ , derivata fracționară se va putea defini pe un domeniu limitat, care se mișcă o dată cu deplasarea momentului de timp  $t$ . Rezultă că în acest caz derivata fracționară se poate scrie aproximativ ca:

$${}_{t-T} D_t^\alpha x(t) \simeq \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t - j\Delta t) \quad (3.40)$$

în care  $\nu = [T/\Delta t]$ . Se poate alege  $T$  astfel încât derivata fracționară să se calculeze pentru un număr redus de puncte, de exemplu  $\nu = 2, 3, 4, 5$ .

Înlocuind (3.40) în (3.37) se obține:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j x(t - j\Delta t) + kx(t) + N(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) = F(t) \quad (3.41)$$

unde coeficienții  $\rho_j$  sunt:

$$\rho_j = \frac{r}{\Delta t^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j}$$

În tabelul următor sunt date valorile primilor coeficienți  $\rho_j$ :

$j$	$\rho_j$
0	$\frac{r}{\Delta t^\alpha}$
1	$-\frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha$
2	$\frac{1}{2} \frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha(\alpha-1)$
3	$-\frac{1}{6} \frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
4	$\frac{1}{24} \frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$
5	$-\frac{1}{120} \frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)$
6	$\frac{1}{720} \frac{r}{\Delta t^\alpha} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)$

**Tabelul 3.1**

Pentru identificarea parametrilor ecuației (3.41), termenul neliniar poate fi dezvoltat ca în (3.19), putând scrie:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j x(t - j\Delta t) + kx(t) + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n(t) + \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m \dot{x}^m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n+m} x^n(t) \dot{x}^m(t) = F(t) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Și în acest caz termenii ecuației pot fi dezvoltati în serie de funcții wavelet ca în relație (3.20). În plus funcțiile întârziate  $x(t - j\Delta t)$  (unde:  $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) vor putea fi dezvoltate sub forma

$$x(t - j\Delta t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle_j x \rangle_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Psi_n \quad (3.43)$$

Similar ecuației (3.19) vom obține ecuația matricială:

$$\begin{bmatrix}
 \ddot{x}_1 & \dot{x}_1 & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & \dot{x}_2^2 & \dot{x}_2^3 & \dots & (x\dot{x})_2 & \dots \\
 \ddot{x}_3 & \dot{x}_3 & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & \dot{x}_3^2 & \dot{x}_3^3 & \dots & (x\dot{x})_3 & \dots \\
 \ddot{x}_4 & \dot{x}_4 & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & \dots & \dot{x}_4^2 & \dot{x}_4^3 & \dots & (x\dot{x})_4 & \dots \\
 \ddot{x}_5 & \dot{x}_5 & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & \dots & \dot{x}_5^2 & \dot{x}_5^3 & \dots & (x\dot{x})_5 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \ddot{x}_n & \dot{x}_n & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & \dot{x}_n^2 & \dot{x}_n^3 & \dots & (x\dot{x})_n & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \ddot{x}_k & \dot{x}_k & {}_1x_1 & \dots & {}_{\nu}x_1 & x_k & x_k^2 & x_k^3 & \dots & \dot{x}_k^2 & \dot{x}_k^3 & \dots & (x\dot{x})_k & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix}$$



$$\times \begin{pmatrix} m \\ c \\ \rho_1 \\ \dots \\ \rho_v \\ k \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \gamma_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_n \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

și similar cazului (3.19) precedent mai poate fi scrisă formal sub forma:

$$[X]\{q\} = \{F\} \quad (3.45)$$

unde  $[X]$  este o matrice pătrată infinită,  $\{q\}$  este un vector coloană, reprezentând parametrii modelului, iar  $\{F\}$  este un vector coloană, reprezentând coeficienții dezvoltării forței perturbatoare.

Sistemul (3.44) fiind supradeterminat, soluțiile  $\{q\}$  pot fi determinate cu metoda celor mai mici pătrate. Aplicând această metodă rezultă:

$$\{q\} = ([X]^t[X])^{-1}[X]^t\{F\} \quad (3.46)$$

unde cu  $[...]^{-1}$  s-a notat matricea inversă, iar cu  $[...]^t$  matricea transpusă.

### 3.5. Identificarea unui sistem neliniar cu caracteristică polinomială

Identificarea sistemelor se poate face prin prelucrarea semnalelor înregistrate de la experimente cu ajutorul funcțiilor de transformare wavelet din Matlab, MathCAD sau Mathematica [154, 99].

Ne propunem să identificăm prin simulare paramerii modelului vibrant neliniar forțat, cu amortizare vâscosă, cu un grad de libertate, descris de ecuația:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + a_2x^2 + a_4x^4 = F_0 \sin \omega t \quad (3.47)$$

unde  $c$  este constanta de amortizare vâscoasă,  $m$  masa corpului, având o forță elastică neliniară de forma  $F_{el} = kx + a_2x^2 + a_4x^4$ , unde  $k$  este componenta liniară a constantei elastice,  $x$  este elongația mișcării vibratorii,  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare,  $\omega$  este pulsația acesteia.

Problema s-a rezolvat cu metoda Runge-Kutta în MathCAD, pentru constantele fizice:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad c = 0.5 \text{ N s/m}, \quad k = 6000 \text{ N/m},$$

$$a_2 = 28 \text{ N/m}^2, \quad a_4 = 2 \text{ N/m}^4,$$

iar pentru forța de excitare:

$$F_0 = 55 \text{ N}, \quad \nu = 20 \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

Soluțiile au fost obținute în  $M = 10001$  puncte, însă pentru aplicarea metodei s-au extras doar  $N = 1024$  puncte, extrase din partea de sfârșit a capturii. Acest lucru s-a făcut pentru a elimina variațiile mari ale soluției cauzate de răspunsul tranzitoriu.

S-a utilizat frecvența de eșantionare și un interval de integrare:

$$\nu_e = 5000 \text{ Hz} \quad t \in [0, 2 \text{ s}], \quad \Delta t = 1/\nu_e.$$

Programul MathCAD furnizează soluția pentru  $x_i$  și  $v_i$ , pentru  $i = 0, \dots, M - 1$ . Accelerația a fost calculată cu diferențe finite:

$$a_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t}$$

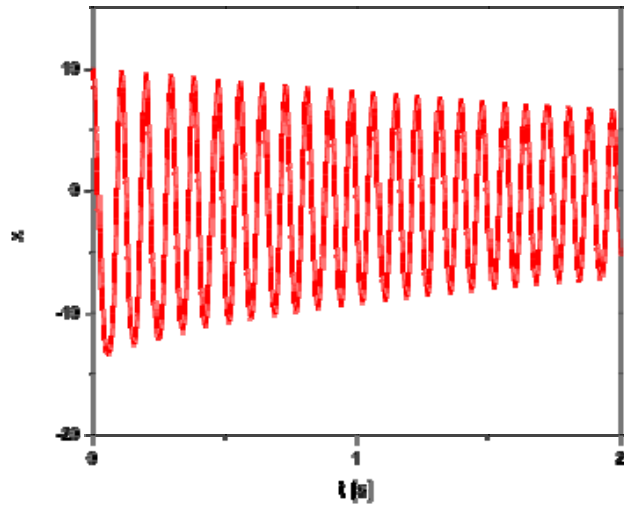


Figura 3.4 Diagrama  $x(t)$

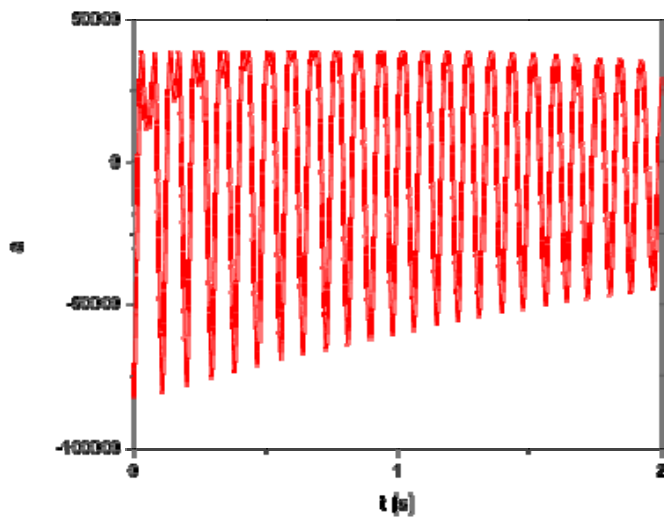


Figura 3.5 Diagrama  $a(t)$

S-a calculat de asemenea și șirul  $x_i^2$ ,  $x_i^4$  și  $F_i = F_0 \sin 2\pi\nu t_i$  pentru  $t_i = i\Delta t$  și  $i = 0, \dots, N-1$ . Cu aceste șiruri s-au construit matricile  $[X]$  și  $\{F\}$  din relația 3.21 ale căror linii sunt  $[X] = [a_i, \nu_i, x_i, x_i^2, x_i^4]$  și  $\{F\} = \{F_i\}$ .

S-au calculat coeficienții dezvoltării în serie Haar, de ordinul 2 rezultând matricile  $[X]_w$  și  $\{F\}_w$  transformate pe linii. Soluția problemei se poate scrie cu ecuația 3.23.

Rezultă după calcule :

$$\{q\} = \begin{cases} m = 1.0100000 \\ c = .5071721 \\ k = 5993.6742 \\ a_2 = 27.82035 \\ a_4 = 2.039390 \end{cases}$$

Se vede că rezultatele sunt în bun acord cu datele de intrare. Atragem atenția că precizia calculului poate fi mărită prin lucru în dublă precizie.

### 3.6. Transformata wavelet continuă

Transformata wavelet continuă, cu toate dificultățile de interpretare a semnificației sale s-a dovedit extrem de utilă în analiza semnalelor, deoarece forma funcției rezultate din transformarea unui semnal este extrem de sensibilă la slabele alterări ale acestuia. Utilizarea transformatei wavelet în prelucrarea semnalelor s-a făcut mai târziu, odată cu apariția calculatoarelor de mare viteză, datorită faptului că implică foarte multe calcule, fiind o reprezentare bidimensională a semnalelor unidimensionale. Și în acest caz vom considera că semnalul  $x(t)$  este de pătrat integrabil:

$$\langle x(t) | x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Transformata wavelet a unui semnal unidimensional  $x(t)$ , este o transformare continuă la o funcție de două variabile  $W(\nu, \tau)$ , variabilele notându-se uneori cu  $(\nu, \tau) = (a, b)$ , Variabila  $\nu$  reprezintă factorul de scală, iar  $\tau$  întârzierea. Transformata wavelet a semnalului  $x(t)$  este definită:

$$W(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi_{\nu, \tau}^* dt \quad (3.48)$$

unde: \* -simbolizează operația de conjugare complexă, iar  $\Psi_{\nu,\tau}(t)$  reprezintă funcția wavelet. Funcția wavelet se construiește dintr-o funcție de bază (sau wavelet mamă)  $\Psi(t)$ , de variabilă reală  $t \in \mathbb{R}$  cu valori complexe  $\Psi \in \mathbb{C}$  (sau reale), cu ajutorul relației:

$$\Psi_{\nu,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{\nu}\right) \quad (3.49)$$

Funcția  $\Psi(t)$  trebuie să satisfacă următoarele proprietăți:

1) Să fie de pătrat sumabil (de energie finită):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt = E < \infty, \quad (3.50)$$

2) Valoarea medie să fie nulă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0. \quad (3.51)$$

Dacă vom nota cu  $\tilde{\Psi}(\omega)$  transformata Fourier a funcției  $\Psi(t)$ :

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3.52)$$

proprietatea 2) revine la

$$\tilde{\Psi}(0) = 0,$$

adică la faptul că spectrul nu are componentă continuă.

Se poate arăta că transformarea wavelet este inversabilă, în sensul că:

$$x(t) = \frac{1}{c_{\Psi}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, \nu) \Psi_{\tau,\nu}(t) \frac{d\tau d\nu}{\nu^2}, \quad (3.53)$$

unde  $c_{\Psi}$  este o constantă de normare, trebuie să fie finită și definită:

$$c_{\Psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (3.54)$$

Condiția (3.54) se numește condiție de admisibilitate, iar  $c_{\Psi}$  se numește constantă de admisibilitate.

3) Pentru funcțiile wavelet de bază cu valori complexe, se mai impune o condiție suplimentară, ca atât partea reală cât și cea imaginară să fie nulă pentru frecvențe negative ( $\omega < 0 \rightarrow \tilde{\psi}(\omega) = 0 + 0i = 0$ ).

Trebuie să mai spunem că utilizarea funcțiilor de bază wavelet complexe prezintă avantajul de a putea separa la reprezentarea  $W$  a semnalului o parte de fază și una de amplitudine.

Funcția wavelet bază	Forma analitică a $\Psi(t), \tilde{\Psi}(\omega), c_\Psi$
Morlet	$\Psi = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} (\exp(i\omega_0 t) - \exp(-\frac{1}{2}\omega_0^2)) \exp(-\frac{t^2}{2})$ $\tilde{\Psi} = \pi^{-\frac{1}{4}} (\exp(-\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)^2) - \exp(-\frac{1}{2}\omega_0^2))$ $c_\Psi = (1 + \exp(-\frac{1}{2}\omega_0^2) - 2\exp(-\frac{3}{4}\omega_0^2))^{-\frac{1}{2}}$
Pălăria mexicană	$\Psi = (1 - t^2) \exp(-\frac{t^2}{2})$ $\tilde{\Psi} = 2\pi\omega^2 \exp(-\frac{1}{2}\omega^2)$ $c_\Psi = 4\pi^2$
Pălăria mexicană * complexă	$\Psi = \sqrt{\frac{4}{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \left( \sqrt{\pi} (1 - t^2) \exp(-\frac{t^2}{2}) (1 - \operatorname{erf} \frac{it}{\sqrt{\pi}}) - 2^{\frac{1}{2}} it \right)$ $\tilde{\Psi} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \omega^2 \exp(-\frac{1}{2}\omega^2) u(\omega)$ $c_\Psi = 1$
Paul * de ordinul $m$ $m > 0$	$\Psi_m = i^m (1 - it)^{-(m+1)}$ $\tilde{\Psi}_m = \frac{2\pi}{m!} \omega^m u(\omega) \exp(-\omega)$ $c_\Psi = (2\pi)^3 \frac{\Gamma(2m)}{2^{2m} (m!)^2}$
Gauss de ordinul $m$ $m > 0$	$\Psi_m = \frac{d^m}{dt^m} \exp(-\frac{t^2}{2})$ $\tilde{\Psi} = \sqrt{2\pi} (i\omega)^m \exp(-\frac{\omega^2}{2})$ $c_\Psi = (2\pi)^2 \Gamma(m)$

**Tabelul 3.2**

Există o serie de funcții de bază, o parte din ele fiind prezentate în tabelul 3.2.

În tabelul 3.2 \* -  $u(\omega)$  reprezintă funcția Heaviside (treaptă unitate), iar \*\* -  $H_m$  este funcția Hermite de ordinul  $m$ , iar  $sinc$  (sau sinus cardinalis) reprezintă funcția  $sinc(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$  [1, 33].

Dintre proprietățile cele mai importante ale transformatei wavelet amintim:  
PI. Partiția unității:

$$\frac{1}{c_\Psi} \int_R \frac{dv}{v^2} \int_R d\tau \langle x_1(t) | \Psi_{v,\tau}(t) \rangle \langle \Psi_{v,\tau} | x_2(t) \rangle = \langle x_1(t) | x_2(t) \rangle,$$

Mai precis identitatea integrală:

$$\frac{1}{c_\Psi} \int_R \frac{dv}{v^2} \int_R d\tau | \Psi_{v,\tau}(t) \rangle \langle \Psi_{v',\tau'} | = 1,$$

este valabilă numai pentru  $v = v'$  și  $\tau = \tau'$ , adică funcțiile bază wavelet reprezintă o bază supercompletă, adică are mai multe funcții decât ar fi necesar pentru reprezentare. Baza ar fi completă dacă în membrul drept al egalității am avea  $\delta(v-v')\delta(\tau-\tau')$ .

PII. Regularitatea: Funcțiile bază wavelet au în general proprietatea de a avea nule valorile medii până la ordinul  $n$ :

$$m_n = \int_R t^n \Psi_{v,\tau}(t) dt = 0$$

pentru  $n = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Transformata wavelet a unui semnal  $x(t)$  dezvoltat în serie Taylor în jurul originii este:

$$W(v,0) = \sqrt{v} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k v^k x^{(k)}(0)}{k!} \right]$$

și va avea termeni nenuli începând de la cel în  $m_{n+1}$ .

### 3.7. Identificarea sistemelor liniare

Datorită faptului că transformata wavelet continuă reflectă în mod sensibil modificările semnalelor, și datorită faptului că această transformare este bogată în informație, au fost făcute o serie de încercări de a o utiliza în identificarea parametrilor sistemelor liniare și neliniare [143, 129, 79, 48, 38, 123, 141, 142].

Pentru sistemele liniare, se poate face calculul analitic al transformatei wavelet continue al răspunsului sistemelor și compara cu transformata wavelet continuă a semnalului cules de la un sistem experimental. Din această comparație se pot extrage parametrii sistemelor [165, 132, 80, 107].

Vom calcula analitic transformata wavelet pentru răspunsul liber al unui sistem cu amortizare vâscoasă, având amplitudine  $A$ , pseudopulsăție  $\omega$  și factor de amortizare  $c$ :

$$x(t) = \begin{cases} A \exp(-ct) \exp(i\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

utilizând funcția de bază Morlet, definită mai sus. Rezultă după calcule:

$$\begin{aligned} W(\tau, \nu) &= \frac{\sqrt{\sqrt{\pi\nu}}}{\sqrt{2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2} + \omega_0\omega\nu - \pi + \frac{(c^2 - \omega^2)\nu^2}{2}\right) \exp[-i(c\omega\nu^2 - \tau\omega - c\omega_0\nu)] \\ &\times \left[ \operatorname{erf}\left(\left(\frac{c\nu}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{\sqrt{2\nu}}\right) - i\left(\frac{\omega\nu}{\sqrt{2}} - \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\right)\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

unde  $\operatorname{erf}(z)$  este funcția de eroare [1, 33].

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Pentru aplicații practice se utilizează modulul transformatei (3.56), adică:

$$\begin{aligned} |W(\tau, \nu)| &= \frac{\sqrt{\sqrt{\pi\nu}}}{\sqrt{2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2} + \omega_0\omega\nu - \pi + \frac{(c^2 - \omega^2)\nu^2}{2}\right) \sqrt{(R_e - 1)^2 + I_e^2}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

unde  $R_e$  și  $I_e$  reprezintă partea reală și imaginară a funcției de eroare:



$$R_e = \Re\{erf(x + iy)\} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{n!} {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (3.58)$$

$$I_e = \Im\{erf(x + iy)\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)n!} {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -x^2\right), \quad (3.59)$$

exprimate în serii conținând funcția hipergeometrică de tip  ${}_1F_1(a, b; z)$  în variabilă reală [1, 33]

Funcția de eroare are proprietățile:

$$erf(-z) = -erf(z), \quad erf(z^*) = (erf(z))^*,$$

$$\frac{d}{dz} erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2), \quad (3.60)$$

$$[erf(z)]^2 \approx 1 - \exp\left(-z^2 \frac{\frac{4}{\pi} + az^2}{1 + az^2}\right),$$

unde:  $erf(z) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right)$ .

Dacă se consideră că răspunsul liber are forma mai simplă

$$x(t) = A \exp(-ct) \exp(i\omega t)$$

atunci, transformata wavelet va avea forma:

$$W(\tau, \nu) = \sqrt{2\nu\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2} + \omega_0\omega\nu - \tau + \frac{(c^2 - \omega^2)\nu^2}{2}\right) \times \exp[-i(c\omega\nu^2 - \tau\omega - c\omega_0\nu)] \quad (3.61)$$

Modulul acesteia la pătrat este:

$$|W(\tau, \nu)|^2 = 2\nu\sqrt{\pi} \exp(-\omega_0^2 + 2\omega_0\omega\nu - 2c\tau + (c^2 - \omega^2)\nu^2) \quad (3.62)$$

Valoarea extremă  $d|W(\tau, \nu)|^2/d\nu = 0$ , este dată de:

$$2(\omega^2 - c^2)\nu^2 - 2\omega_0\omega\nu - 1 = 0,$$

având ca localizare frecvențele:

$$v_{\max 1,2} = \frac{\omega_0 \omega \pm \sqrt{\omega_0^2 \omega^2 + 2(\omega^2 - c^2)}}{2(\omega^2 - c^2)}$$

rezultând că în domeniul pozitiv ( $v > 0$ ) se situează doar o soluție.

Deoarece transformata wavelet în acest caz este complexă, putem calcula faza transformatei wavelet continue:

$$\Phi = \arctan \frac{\Im\{W\}}{\Re\{W\}} = c\omega v^2 - \tau\omega - c\omega_0 v,$$

de unde se poate obține coeficientul de amortizare.

Rezultă că în principiu se pot identifica parametrii oscilației amortizate ( $\omega, c$ ) din localizarea maximumului modulului transformatei wavelet. E simplu de determinat ( $\omega, c$ ) pentru două transformări realizate pentru două valori diferite ale parametrului  $\omega_0$ , pentru care vor rezulta două poziții diferite ale maximumului modulului:

$$v_{\max 1}, v_{\max 2} = \frac{\omega_{01,2} \omega \pm \sqrt{\omega_{01,2}^2 \omega^2 + 2(\omega^2 - c^2)}}{2(\omega^2 - c^2)} \quad (3.63)$$

ecuațiile (3.62) permițând determinarea completă a parametrilor ( $\omega, c$ ).

Pentru sisteme cu mai multe grade de libertate, datorită faptului că transformata wavelet este liniară, rezultă că urmare a transformării unui răspuns cu mai multe grade de libertate va rezulta o suprapunere de funcții  $2d$  de forma (3.56), pentru care se pot determina pulsațiile proprii și amortizările corespunzătoare.

Ar fi interesant de aplicat calculul pentru alte funcții de bază, din tabelul 3.2.

### 3.8. Identificarea sistemelor neliniare

Pentru multe sisteme neliniare cu un grad de libertate ecuația de mișcare se poate pune sub forma:

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) + \lambda f(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad (3.64)$$

unde  $\lambda$  este un parametru mic.

Soluția ecuației (3.64) poate fi aproximată, plecând de la soluția particulară, corespunzătoare cazului liniar ( $\lambda = 0$ ):

$$x_0(t) = A \cos(\omega_n t + \psi_0)$$

cu metoda variației constantelor, sub forma:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_n t + \psi_n(t)) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (3.65)$$

unde  $A(t)$ ,  $\psi_n(t)$  sau  $\varphi(t)$  sunt funcții care se pot determina înlocuind (3.65) în (3.64), de unde rezultă ecuațiile

$$\dot{A}(t) = \frac{\lambda}{\omega_n} \sin \varphi(t) f(A(t) \cos \varphi(t), -\omega_n A(t) \sin \varphi(t)), \quad (3.66)$$

$$\dot{\psi}_n(t) = \frac{\lambda}{\omega_n A(t)} \cos \varphi(t) f(A(t) \cos \varphi(t), -\omega_n A(t) \sin \varphi(t)), \quad (3.67)$$

care a fost determinată cu condiția ca:

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A(t) \sin \varphi(t)$$

Rezultă în final, cu o foarte bună aproximație:

$$\dot{A}(t) = \frac{\lambda}{2\pi\omega_n} \int_0^{2\pi} \sin \varphi(t) f(A(t) \cos \varphi(t), -\omega_n A(t) \sin \varphi(t)) d\varphi(t) \quad (3.68)$$

$$\dot{\psi}_n(t) = \frac{\lambda}{2\pi\omega_n A(t)} \int_0^{2\pi} \cos \varphi(t) f(A(t) \cos \varphi(t), -\omega_n A(t) \sin \varphi(t)) d\varphi(t) \quad (3.69)$$

de unde se poate obține  $A(t)$  și  $\varphi(t)$ , integrând încă o dată după timp.

Pe de altă parte, transformata wavelet a unei funcții de forma

$$x(t) = A(t) \exp(i\omega t) \quad (3.70)$$

poate fi scrisă prin dezvoltare în serie Taylor și eliminând termenii începând de la ordinul întâi:

$$W(v, \tau) = \frac{1}{2} v \int_R A(\tau) \exp(i\omega\tau) \psi^* \left( \frac{t-\tau}{v} \right) dt$$

unde  $\Psi(t)$  reprezintă o funcție mamă wavelet. De aici rezultă:

$$W(v, \tau) = \frac{\sqrt{v}}{2} A(\tau) \exp(i\omega\tau) \psi^*(v\omega) \quad (3.71)$$

Rezultă de aici că pentru un sistem al cărui răspuns liber va fi de forma (3.70), transformata wavelet a acelui răspuns (3.71) va conține informații despre  $\omega$  și  $A(t)$ , adică din  $\omega$  și  $A(t)$  vom putea identifica  $\omega$  și  $A(t)$ .

Pentru cazul mai general în care un semnal are forma generală:

$$x(t) = A(t) \exp(i\varphi(t)), \quad (3.72)$$

transformata wavelet va fi de forma:

$$W(v, \tau) = \frac{\sqrt{v}}{2} A(\tau) \exp(i\varphi(\tau)) \psi^*(v\dot{\varphi}(\tau)). \quad (3.73)$$

De aici mai rezultă că pentru un sistem al cărui răspuns liber va fi de forma (3.72), transformata wavelet a acelui răspuns (3.73) va conține informații despre  $\varphi(t)$  și  $A(t)$ , adică din  $\varphi(t)$  și  $A(t)$  vom putea identifica  $\varphi(t)$  și  $A(t)$ .

De aici rezultă că putem folosi relația (3.73) pentru identificarea din răspunsul liber a sistemelor neliniare cu un grad de libertate descrise de ecuația diferențială (3.64) deoarece, soluția acestui sistem poate fi separată sub forma (3.72), după metoda variației constantelor descrisă mai sus, utilizând relațiile (3.68) și (3.69).

Trebuie să observăm că din (3.73) se pot extrage mai multe informații, deoarece  $W(v, \tau)$  este o funcție complexă de două variabile  $(v, \tau)$ , la care putem să separăm modulul și faza transformatei wavelet:

$$A(v, \tau) = |W|(v, \tau) = \frac{\sqrt{v}}{2} |A|(\tau) |\psi|(v\dot{\varphi}(\tau)).$$

$$\Phi(v, \tau) = \arctan \frac{\Im\{W\}}{\Re\{W\}}.$$

Mai precizăm că în cazul unei funcții mamă wavelet reale faza  $\Phi$  este tocmai:

$$\Phi(v, \tau) = \varphi(\tau).$$

Pentru cazul și mai general al unui sistem cu mai multe grade de libertate, în care răspunsul liber este un semnal care are forma generală:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \exp(i\varphi_k(t)), \quad (3.74)$$

transformata wavelet va fi de forma:

$$W(v, \tau) = \frac{\sqrt{v}}{2} \sum_{k=1}^n A_k(\tau) \exp(i\varphi_k(\tau)) \psi^*(v\dot{\varphi}_k(\tau)). \quad (3.75)$$

Și în acest caz se poate separa amplitudinea și faza transformatei wavelet.

### 3.9. Transformata wavelet continuă a unui sistem neliniar cu caracteristică polinomială

Utilizând metoda dezvoltată în secțiunea anterioară ne propunem să calculăm reprezentarea wavelet a unui model de sistem vibrant neliniar, cu amortizare vâscoasă, cu un grad de libertate, descris de ecuația:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_n^2 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 = 0, \quad (3.76)$$

unde  $\lambda$  este constanta de amortizare vâscoasă,  $\omega_n$  este pulsația sistemului în absența neliniarității. Sistemul are o forță elastică neliniară de puteri impare în  $x$ , de forma  $F_{el} = m(\omega_n^2 x + a_3 x^3 + a_5 x^5)$ , unde  $m$  este masa sistemului vibrant  $k = m\omega_n^2$  este componenta liniară a constantei elastice, iar componentele neliniare au constante  $ma_3, ma_5$ . Aici  $x$  este elongația mișcării vibratorii.

Vom stabili forma explicită a transformatei wavelet continue  $W(v, \tau)$  cu relația (3.73) a răspunsului sistemului (3.76). Pentru aceasta vom pune soluția sub forma  $x(t) = A(t) \exp(i\varphi(t))$  și vom determina  $A(t)$  și  $\varphi(t)$ .

Vom fixa condițiile inițiale:

$$x(0) = A_0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Vom rezolva ecuațiile (3.68) și (3.69) pentru sistemul nostru considerând  $c, a_3, a_5$  parametri mici.

Rezultă după o serie de calcule:

$$A(t) = A_0 - \frac{c}{2} t, \quad (3.77)$$

$$\dot{\psi}_n(t) = \frac{5}{16} \frac{ca_5}{\omega_n} A^4 + \frac{3}{8} \frac{ca_3}{\omega_n} A^2$$

$$\psi_n(t) = \varphi(t) - \omega_n t = -\frac{ca_5}{8\omega_n^2} \left(A_0 - \frac{c}{2}t\right)^4 - \frac{ca_3}{4\omega_n^2} \left(A_0 - \frac{c}{2}t\right)^2$$

Expresiile lui  $A, \dot{\psi}_n, \phi, \psi_n$  determinate în (3.77) se pot introduce în expresia lui  $W(v, \tau)$ , stabilită în secțiunea precedentă:

$$W(v, \tau) = \frac{\sqrt{v}}{2} A(\tau) \exp(i\phi(\tau)) \psi^*(v\dot{\phi}(\tau)).$$

rezultând:

$$\begin{aligned} W(v, \tau) &= \frac{\sqrt{v}}{2} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right) \\ &\times \exp\left(i\left[\omega_n \tau - \frac{ca_5}{8\omega_n^2} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^4 - \frac{ca_3}{4\omega_n^2} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^2\right]\right) \\ &\times \psi^*\left[v\left(\frac{5}{16} \frac{ca_5}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^4 + \frac{3}{8} \frac{ca_3}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Această funcție va avea o componentă de amplitudine de forma:

$$\begin{aligned} A(v, \tau) &= \frac{\sqrt{v}}{2} \left| \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right) \right| \\ &\times |\psi| \left[ v \left( \frac{5}{16} \frac{ca_5}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^4 + \frac{3}{8} \frac{ca_3}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

unde  $\psi$  este o funcție mamă wavelet aleasă în funcție de nevoile de analiză.

Dacă alegem  $\psi$  ca funcție mamă wavelet Gauss de ordinul întâi, vom avea:

$$\psi_{Gauss1}(z) = z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right).$$

Rezultă:

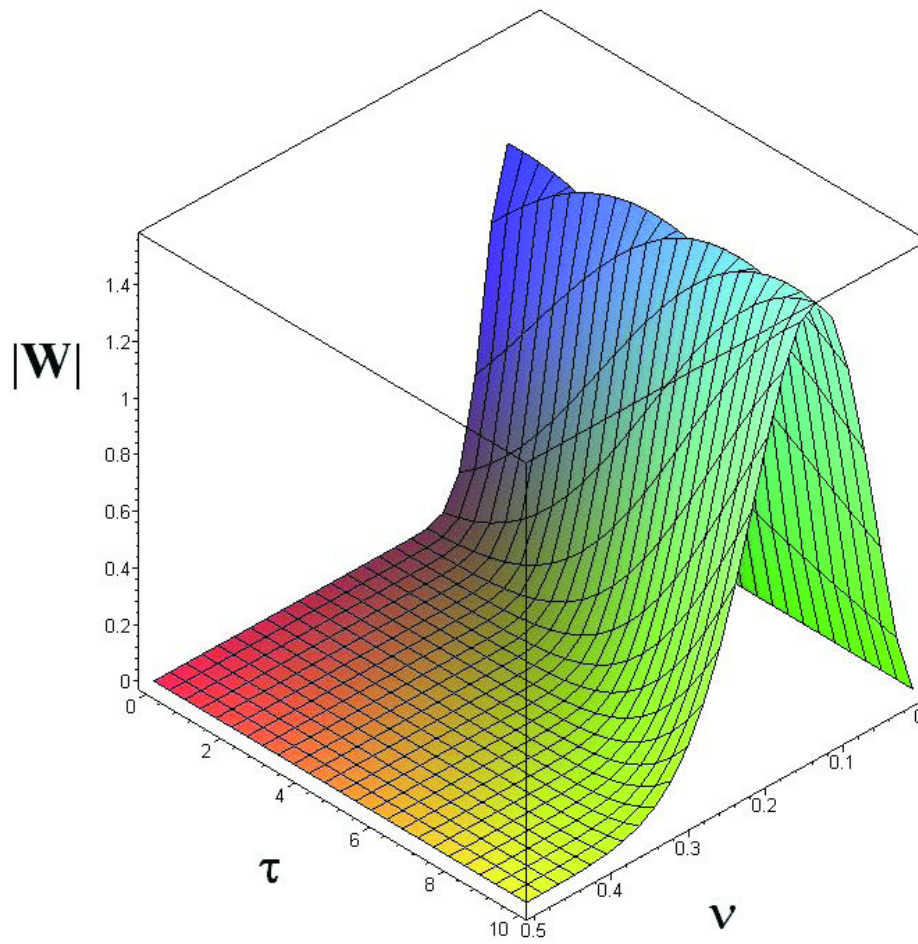
$$\begin{aligned} A(v, \tau) &= \frac{\sqrt{v}}{2} \left| \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right) \right| \\ &\left[ v \left( \frac{5}{16} \frac{ca_5}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^4 + \frac{3}{8} \frac{ca_3}{\omega_n} \left(A_0 - \frac{c}{2}\tau\right)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Vom prezenta în continuare forma modulului  $A(v, \tau)$  pentru următoarele valori ale parametrilor sistemului:

**Cazul I.**  $A_0 = 10$  m,  $c = 0.5$  N s/m,  $\omega_n = 40\pi$  rad/s,  $a_3 = 20$  N / m<sup>3</sup>,  $a_5 = 2$  N / m<sup>5</sup>. Conturul este reprezentat în figura 3.6.

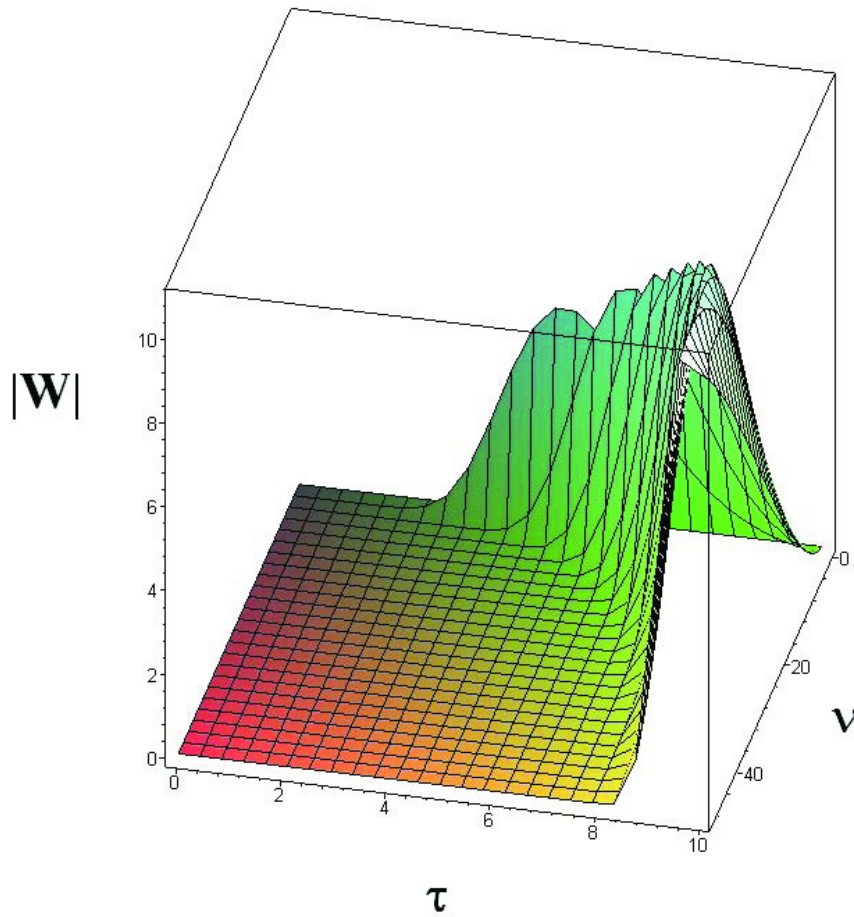
**Cazul II.** Pentru valorile  $A_0 = 10$  m,  $c = 0.5$  N s/m,  $\omega_n = 40\pi$  rad/s,  $a_3 = 0.2$  N / m<sup>3</sup>,  $a_5 = 0.2$  N / m<sup>5</sup>, conturul este reprezentat în figura 3.7.

Se observă din domeniul de reprezentare  $(v, \tau)$  că forma modulului se modifică sensibil cu variația parametrilor neliniari  $a_3, a_5$ .



**Figura 3.6** Profilul  $A(\nu, \tau)$ ; Cazul I





**Figura 3.7** Profilul  $A(\nu, \tau)$ ; Cazul II

Rezultă că transformata wavelet continuă este un instrument sensibil de investigare a parametrilor sistemelor neliniare, însă incomod pentru extragerea valorilor concrete ale parametrilor sistemelor neliniare.

## 4. IDENTIFICAREA SISTEMELOR NELINIARE ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

Metodele de identificare a sistemelor în domeniul frecvență au fost dezvoltate după punerea la punct a algorimilor de analiză Fourier (FFT) și de densitate spectrală de putere.

Aceste metode au fost aplicate pe larg la sistemele liniare [116] constând în esență în identificarea pe baza răspunsului sistemelor prin excitare armonică cu o serie de frecvențe. Astfel au fost puse la punct metode de analiză modală în domeniul frecvență [149].

Au fost dezvoltate de asemenea metode de identificare a sistemelor neliniare în domeniul frecvență. Au fost stabilite atât tehnici de identificare parametrică cât și neparametrică [116, 54].

În investigarea noastră ne vom referi numai la metodele parametrice.

Pentru sistemele neliniare problema identificării este mai dificilă [125].

S-au pus la punct astfel metode care au la bază stabilirea funcțiilor de răspuns a sistemelor în domeniul frecvență.

Stabilirea răspunsului în frecvență se poate face pentru semnale de intrare deterministe sau aleatoare [50, 59]. Analogul funcției de transfer a sistemelor liniare la sistemele neliniare sunt seriile Volterra.

Mai există metode eficiente cum ar fi cea de identificare în frecvență a sistemelor cu feedback sau prin liniarizare.

De asemenea au fost stabilite metode cum ar fi metoda balanței armonice și metode de analiză spectrală de ordin superior [108, 101].

O prezentare critică a metodelor de identificare în domeniul frecvență a sistemelor neliniare a fost elaborată de H. Zhang și S.A. Billings [169].

În cele ce urmează vom studia câteva metode parametrice de identificare pentru sistemele neliniare.

### 4.1 Identificarea sistemelor neliniare cu metoda balanței armonice

Metoda balanței armonice este o metodă bazată pe dezvoltarea semnalelor în serii Fourier și de stabilire a unor relații de legătură între acești coeficienți [76, 8, 65, 114].

Această metodă a permis punerea în evidență a fenomenelor de salt de amplitudine, specific fenomenelor neliniare, care apar atunci când frecvența de excitație a unui sistem vibrant neliniar se modifică.

Metoda dă rezultate bune și la identificarea unor sisteme cu neliniaritate complicată cum ar fi cele histeretice [92].

Metoda balanței armonice permite de asemenea stabilirea unor soluții periodice ale sistemelor neliniare.

Vom arăta cum se poate aplica această metodă la un sistem vibrant neliniar, amortizat, forțat, cu un grad de libertate.

Vom nota cu  $x = x(t)$  poziția instantanee a oscilatorului. Cu aceasta vom considera că ecuația de mișcare a acestui sistem vibrant este de forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \sum_{n=2}^N k_n x^n + \sum_{m=2}^M c_m x^m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L r_{kl} x^k \dot{x}^l = F_0 \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

unde  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare,  $\omega$  este pulsația forței perturbatoare,  $m, c, k, k_n, c_m$  și  $r_{kl}$  sunt parametri care se determină din date experimentale.

Vom considera că am stabilit un regim în care răspunsul sistemului este periodic cu o perioadă egală cu a excitației  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Semnalul periodic (răspunsul periodic) se poate descompune în serie Fourier sub forma:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} (D_j \cos j\omega t + E_j \sin j\omega t), \quad (4.2)$$

unde  $D_j$  și  $E_j$  reprezintă constante care se determină cu relațiile:

$$D_j = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos j\omega t dt \quad (4.3)$$

$$E_j = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin j\omega t dt \quad (4.4)$$

unde  $j$  este un întreg pozitiv ( $j \in \mathbb{N}$ ).

Rezultă că  $E_0 = 0$ , iar  $D_0$  reprezintă componenta de curent continuu a semnalului. Dacă  $D_0 = 0$ , semnalul se numește centrat.

Derivatele lui  $x(t)$  vor fi:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-j\omega D_j \sin j\omega t + j\omega E_j \cos j\omega t), \quad (4.5)$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -(j\omega)^2 D_j \cos j\omega t - (j\omega)^2 E_j \sin j\omega t \right), \quad (4.6)$$

Puterile lui  $x$  și  $\dot{x}$  vor fi de asemenea funcții periodice. În mod similar aceste puteri se pot dezvolta în serie Fourier, obținând:

$$(x(t))^n = \sum_{j=0}^{+\infty} (\alpha_j^n \cos j\omega t + \beta_j^n \sin j\omega t), \quad (4.7)$$

$$(\dot{x}(t))^m = \sum_{j=0}^{+\infty} (\gamma_j^m \cos j\omega t + \rho_j^m \sin j\omega t), \quad (4.8)$$

$$(x(t))^k (\dot{x}(t))^l = \sum_{j=0}^{+\infty} (\lambda_j^{kl} \cos j\omega t + \eta_j^{kl} \sin j\omega t), \quad (4.9)$$

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier  $\alpha_j^n, \beta_j^n, \gamma_j^n$  și  $\delta_j^n$  precum și  $\lambda_j^{kl}, \eta_j^{kl}$  se determină similar cu (4.3) și (4.).

Înlocuim (4.2) și (4.5) - (4.9) în (4.1). Vom separa termenii cu aceiași  $\sin j\omega$  și  $\cos j\omega$ .

Rezultă sistemul de ecuații pentru termenii în  $\sin j\omega$  și  $\cos j\omega$ :

$$\begin{aligned} & -j^2 \omega^2 E_j m - j\omega D_j c + E_j k \\ & + \sum_{n=2}^N \beta_j^n k_n + \sum_{m=2}^M \rho_j^m c_m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \eta_j^{kl} r_{kl} = F_0 \delta_{j1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & -j^2 \omega^2 D_j m - j\omega E_j c \\ & + D_j k + \sum_{n=2}^N \alpha_j^n k_n + \sum_{m=2}^M \gamma_j^m c_m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \lambda_j^{kl} r_{kl} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

În (4.10) s-a notat cu  $\delta_{ij}$  simbolul Kronecker, cu proprietatea

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Din punct de vedere experimental se măsoară experimental  $x(t)$  obținându-se sub formă eșantionată  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , în  $N$  puncte.

Vom nota cu  $T_e$  perioada de eșantionare a semnalului înregistrat. Această perioadă trebuie aleasă astfel încât să verifice teorema lui Shannon ( $\nu_e = 1/T_e \geq \nu_{max}$ ,  $\nu_{max}$  fiind frecvența maximă din spectru).

Se calculează  $\dot{x}$  cu diferențe finite, adică  $\dot{x}_i = (x_i - x_{i-1})/T_e$ . Se calculează sub formă discretă:  $y_i = x_i^n$   $z_i = \dot{x}_i^m$   $z_i = x_i^k \dot{x}_i^l$ .

Aplicând orice program care calculează transformatele Fourier ale acestor semnale (bazat pe FFT), se obțin pentru diferitele armonici, coeficienții  $D_j, E_j, \alpha_j^n, \beta_j^n, \gamma_j^n$  și  $\delta_j^n$  precum și  $\lambda_j^{kl}, \eta_j^{kl}$ , unde  $j = 0, 1, 2, \dots$  reprezintă ordinul armonicii.  $F_0$  și  $\omega$  se consideră cunoscute.

Numărul de armonici în care se aproximează semnalele trebuie ales astfel încât din (4.10) și (4.11) să se obțină un sistem de ecuații rezolvabil. Dacă masa  $m$  este cunoscută, putem defini matricile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_0^2 & \beta_0^3 & \dots & \beta_0^N & \rho_0^2 & \dots & \rho_0^M & \eta_0^{11} & \dots & \eta_0^{KL} \\ -\omega D_1 & E_1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 & \dots & \beta_1^N & \rho_1^2 & \dots & \rho_1^M & \eta_1^{11} & \dots & \eta_1^{KL} \\ -2\omega D_2 & E_2 & \beta_2^2 & \beta_2^3 & \dots & \beta_2^N & \rho_2^2 & \dots & \rho_2^M & \eta_2^{11} & \dots & \eta_2^{KL} \\ -3\omega D_3 & E_3 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & \dots & \beta_3^N & \rho_3^2 & \dots & \rho_3^M & \eta_3^{11} & \dots & \eta_3^{KL} \\ -4\omega D_4 & E_4 & \beta_4^2 & \beta_4^3 & \dots & \beta_4^N & \rho_4^2 & \dots & \rho_4^M & \eta_4^{11} & \dots & \eta_4^{KL} \\ -5\omega D_5 & E_5 & \beta_5^2 & \beta_5^3 & \dots & \beta_5^N & \rho_5^2 & \dots & \rho_5^M & \eta_5^{11} & \dots & \eta_5^{KL} \\ -6\omega D_6 & E_6 & \beta_6^2 & \beta_6^3 & \dots & \beta_6^N & \rho_6^2 & \dots & \rho_6^M & \eta_6^{11} & \dots & \eta_6^{KL} \\ -7\omega D_7 & E_7 & \beta_7^2 & \beta_7^3 & \dots & \beta_7^N & \rho_7^2 & \dots & \rho_7^M & \eta_7^{11} & \dots & \eta_7^{KL} \\ -8\omega D_8 & E_8 & \beta_8^2 & \beta_8^3 & \dots & \beta_8^N & \rho_8^2 & \dots & \rho_8^M & \eta_8^{11} & \dots & \eta_8^{KL} \\ -9\omega D_9 & E_9 & \beta_9^2 & \beta_9^3 & \dots & \beta_9^N & \rho_9^2 & \dots & \rho_9^M & \eta_9^{11} & \dots & \eta_9^{KL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -N\omega D_N & E_N & \beta_N^2 & \beta_N^3 & \dots & \beta_N^N & \rho_N^2 & \dots & \rho_N^M & \eta_N^{11} & \dots & \eta_N^{KL} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & D_0 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 & \dots & \alpha_0^N & \gamma_0^2 & \dots & \gamma_0^M & \lambda_0^{11} & \dots & \lambda_0^{KL} \\ -\omega E_1 & D_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^N & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^M & \lambda_1^{11} & \dots & \lambda_1^{KL} \\ -2\omega E_2 & D_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_2^N & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^M & \lambda_2^{11} & \dots & \lambda_2^{KL} \\ -3\omega E_3 & D_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & \dots & \alpha_3^N & \gamma_3^2 & \dots & \gamma_3^M & \lambda_3^{11} & \dots & \lambda_3^{KL} \\ -4\omega E_4 & D_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 & \dots & \alpha_4^N & \gamma_4^2 & \dots & \gamma_4^M & \lambda_4^{11} & \dots & \lambda_4^{KL} \\ -5\omega E_5 & D_5 & \alpha_5^2 & \alpha_5^3 & \dots & \alpha_5^N & \gamma_5^2 & \dots & \gamma_5^M & \lambda_5^{11} & \dots & \lambda_5^{KL} \\ -6\omega E_6 & D_6 & \alpha_6^2 & \alpha_6^3 & \dots & \alpha_6^N & \gamma_6^2 & \dots & \gamma_6^M & \lambda_6^{11} & \dots & \lambda_6^{KL} \\ -7\omega E_7 & D_7 & \alpha_7^2 & \alpha_7^3 & \dots & \alpha_7^N & \gamma_7^2 & \dots & \gamma_7^M & \lambda_7^{11} & \dots & \lambda_7^{KL} \\ -8\omega E_8 & D_8 & \alpha_8^2 & \alpha_8^3 & \dots & \alpha_8^N & \gamma_8^2 & \dots & \gamma_8^M & \lambda_8^{11} & \dots & \lambda_8^{KL} \\ -9\omega E_9 & D_9 & \alpha_9^2 & \alpha_9^3 & \dots & \alpha_9^N & \gamma_9^2 & \dots & \gamma_9^M & \lambda_9^{11} & \dots & \lambda_9^{KL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -N\omega E_N & D_N & \alpha_N^2 & \alpha_N^3 & \dots & \alpha_N^N & \gamma_N^2 & \dots & \gamma_N^M & \lambda_N^{11} & \dots & \lambda_N^{KL} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Vom introduce de asemenea vectorul coloană  $W$  al parametrilor necunoscuți de determinat, precum și  $F, G$  vectori coloană cunoscuți. Dacă avem de determinat  $N$  parametri necunoscuți, atunci matricile  $A, B$  trebuie să fie de tip  $N \times N$ , iar  $F, G$  și  $W$  să fie de tip  $N \times 1$ .

Aceștia sunt:

$$W = \begin{Bmatrix} c \\ k \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ k_N \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_M \\ r_{11} \\ \dots \\ r_{KL} \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 + \omega^2 E_1 \\ 2^2 \omega^2 E_2 \\ 3^2 \omega^2 E_3 \\ \dots \\ 4^2 \omega^2 E_4 \\ 5^2 \omega^2 E_5 \\ 6^2 \omega^2 E_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N^2 \omega^2 E_N \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega^2 D_1 \\ 2^2 \omega^2 D_2 \\ 3^2 \omega^2 D_3 \\ \dots \\ 4^2 \omega^2 D_4 \\ 5^2 \omega^2 D_5 \\ 6^2 \omega^2 D_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N^2 \omega^2 D_N \end{Bmatrix}, \quad (4.14)$$

Cu aceste notații ecuațiile (4.10) și (4.11) se scriu:

$$AW = F \quad BW = G \quad (4.15)$$

și permit identificarea parametrilor prin determinarea vectorului  $W$  al parametrilor. În cazul mai general în care forța perturbatoare este o funcție periodică cu perioada  $T = 2\pi\omega$ , adică

$$F(t) = F(t+T),$$

Aceasta se poate dezvolta la rândul ei în serie Fourier:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} (F_j^c \cos j\omega t + F_j^s \sin j\omega t), \quad (4.16)$$

unde  $F_j^c$  și  $F_j^s$  reprezintă coeficienții dezvoltării forței  $f(t)$  în sinus respectiv cosinus. Ecuația de mișcare se poate scrie în acest caz:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \sum_{n=2}^N k_n x^n + \sum_{m=2}^M c_m x^m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L r_{kl} x^k \dot{x}^l = F(t) \quad (4.17)$$

În mod similar cu cazul (4.1) vom separa termenii cu aceiași  $\sin j\omega$  și

$\cos j\omega$ . Rezultă sistemul de ecuații pentru termenii în  $\sin j\omega$  și  $\cos j\omega$ :

$$-j^2\omega^2 E_j m - j\omega D_j c + E_j k + \sum_{n=2}^N \beta_j^n k_n + \sum_{m=2}^M \rho_j^m c_m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \eta_j^{kl} r_{kl} = F_j^s, \quad (4.18)$$

$$-j^2\omega^2 D_j m - j\omega E_j c + D_j k + \sum_{n=2}^N \alpha_j^n k_n + \sum_{m=2}^M \gamma_j^m c_m + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \lambda_j^{kl} r_{kl} = F_j^c. \quad (4.19)$$

Și de această dată vom considera că masa  $m$  a sistemului vibrant este cunoscută.

În acest caz matricile  $F$  și  $G$  vor deveni:

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^s + \omega^2 E_1 \\ F_2^s + 2^2 \omega^2 E_2 \\ F_3^s + 3^2 \omega^2 E_3 \\ F_4^s + 4^2 \omega^2 E_4 \\ F_5^s + 5^2 \omega^2 E_5 \\ F_6^s + 6^2 \omega^2 E_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_N^s + N^2 \omega^2 E_N \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} F_0^c \\ F_1^c + \omega^2 D_1 \\ F_2^c + 2^2 \omega^2 D_2 \\ F_3^c + 3^2 \omega^2 D_3 \\ F_4^c + 4^2 \omega^2 D_4 \\ F_5^c + 5^2 \omega^2 D_5 \\ F_6^c + 6^2 \omega^2 D_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_N^c + N^2 \omega^2 D_N \end{Bmatrix}, \quad (4.20)$$

Și în acest caz identificarea parametrilor se face prin determinarea vectorului  $W$  al parametrilor, rezolvând sistemul de ecuații (4.15).

Vom aplica metoda la un sistem vibrant cu neliniaritate puternică.

## 4.2 Identificarea unui sistem vibrant de tip van der Pol modificat

Ne vom ocupa acum de identificarea cu metoda balanței armonice a unui sistem vibrant forțat de tip van der Pol modificat [9, 15], datorită comportamentului său puternic neliniar [89]. Acesta este descris de ecuația [89, 98]:

$$m\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + kx + \Delta \sin x = F_0 \sin \omega t, \quad (4.21)$$



unde  $\varepsilon$  și  $\Delta$  sunt parametri pozitivi,  $m$  este masa sistemului,  $k$  este constanta elastică  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare, iar  $\omega$  este pulsația acestei forțe perturbatoare, respectiv perioada  $T = 2\pi/\omega$ .

Vom introduce coeficienții Fourier ai dezvoltării unei soluții periodice și observăm că dezvoltarea în serie a  $\ddot{x}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt & k = 0, 1, 2, \dots, n \\
 b_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt & k = 1, 2, \dots, n \\
 c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t) - 1) \dot{x}(t) \cos(k\omega t) dt & k = 0, 1, 2, \dots, n \\
 d_k &= \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t) - 1) \dot{x}(t) \sin(k\omega t) dt & k = 1, 2, \dots, n \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

$$e_k = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(x(t)) \cos(k\omega t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f_k = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(x(t)) \sin(k\omega t) dt \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -k^2 \omega^2 a_k \cos(k\omega t) - k^2 \omega^2 b_k \sin(k\omega t) \right]$$

adică coeficienții dezvoltării  $\ddot{x}(t)$  vor fi  $-k^2 \omega^2 a_k$  și  $-k^2 \omega^2 b_k$ , iar termenul constant lipsește.

Dezvoltăm în serie Fourier toți termenii ecuației (4.21) și separăm ecuația pentru termeni de același ordin în  $\cos(k\omega t)$  și  $\sin(k\omega t)$ . Obținem astfel pentru termenul constant:

$$c_0 \varepsilon + a_0 k + e_0 \Delta = 0, \quad (4.23)$$

respectiv pentru  $k = 1$  relațiile pentru termenii în cosinus și sinus:

$$-\omega^2 a_1 m + c_1 \varepsilon + a_1 k + e_1 \Delta = 0 \quad (4.24)$$

$$-\omega^2 b_1 m + d_1 \varepsilon + b_1 k + f_1 \Delta = F_0, \quad (4.25)$$

Pentru  $k > 1$  relațiile pentru termenii în cosinus și sinus:

$$-k^2 \omega^2 a_k m + c_k \varepsilon + a_k k + e_k \Delta = 0 \quad (4.26)$$

$$-k^2 \omega^2 b_k m + d_k \varepsilon + b_k k + f_k \Delta = 0, \quad (4.27)$$

Putem forma un sistem de ecuații introducând matricile coloană coeficienților de identificat și matricea  $n \times 1$ :

$$X = \begin{Bmatrix} m \\ \varepsilon \\ k \\ \Delta \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.28)$$

precum și matricea  $n \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c_0 & a_0 & e_0 \\ -\omega^2 a_1 & c_1 & a_1 & e_1 \\ -\omega^2 b_1 & d_1 & b_1 & f_1 \\ -4\omega^2 a_2 & c_2 & a_2 & e_2 \\ -4\omega^2 b_2 & d_2 & b_2 & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k^2 \omega^2 a_n & c_n & a_n & e_n \\ -k^2 \omega^2 b_n & d_n & b_n & f_n \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

Ecuția de identificare este:

$$AX = F \quad (4.30)$$

dimensional fiind supradereminată.

Există două moduri de rezolvare a ecuației: sau construind o matrice  $A$  de tip  $4 \times 4$ , pentru liniile 1,2,3 și a unei linii la care componenta în spectru are mărime semnificativă.

Soluția în acest caz este  $X = A^{-1}F$ .

Ca sistem supradeterminat, în cazul în care mai multe componente armonice sunt semnificative, vom construi matricile cu aceste componente, soluția fiind în acest caz:

$$X = (A^t A)^{-1} (A^t F), \quad (4.31)$$

unde  $A^t$  este matricea transpusă a matricii  $A$ .

Pentru verificarea acestei metode, în locul răspunsului unui sistem van der Pol real, măsurat pe cale experimentală vom rezolva pe cale numerică ecuația (4.21), pentru valori date ale parametrilor  $m, \varepsilon, k, \Delta$  și pentru o perturbație cu amplitudinea forței  $F_0$  și pulsație cunoscută. Rezolvare s-a făcut în Mathcad utilizând metoda Runge-Kutta.

Am ales parametrii:

$$m = 1\text{kg}, \quad \varepsilon = 1\text{s/m}^3, \quad k = 40\text{N/m}, \quad \Delta = 5\text{N}$$

și de asemenea:

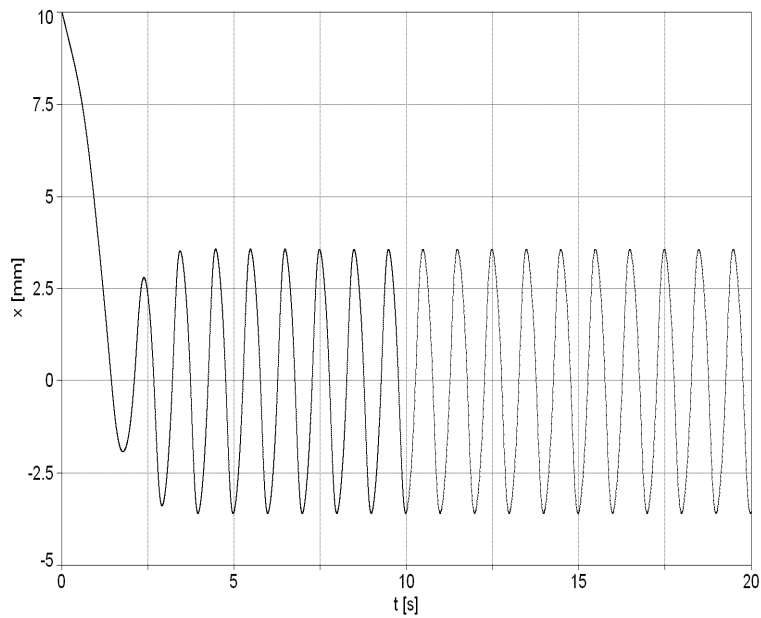
$$F_0 = 50\text{N} \quad \nu = 1\text{Hz}, \quad \omega = 6.283\text{s}^{-1}.$$

Soluția a fost stabilită în  $N$  puncte în intervalul de timp  $t \in [0, T]$ , cu o frecvență de eșantionare  $\nu_e$ , unde:

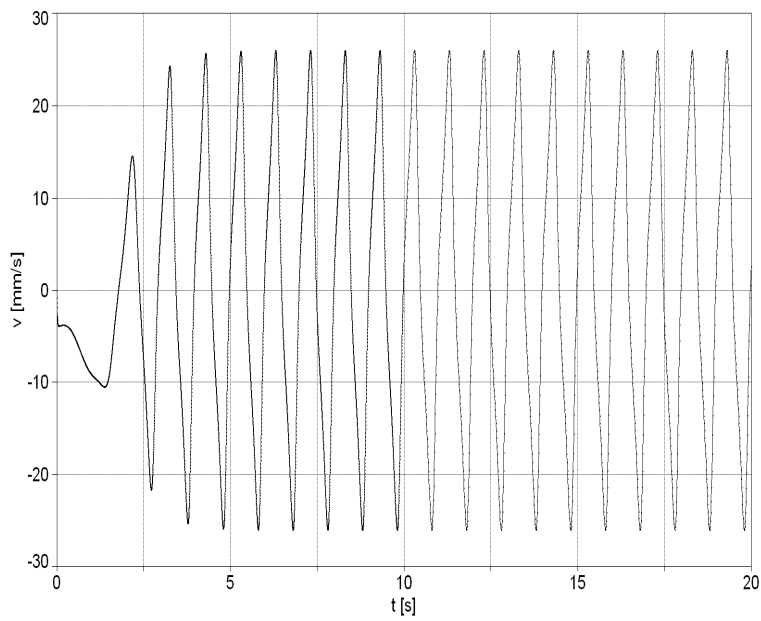
$$N = 10001 \quad t \in [0, T], \quad T = 100\text{s}, \quad \nu_e = \frac{N-1}{T} = 100\text{Hz}$$

Cu o astfel de alegere a frecvenței de eșantionare se pot surprinde componente armonice nedistorsionate până la 50 Hz.

În figura 4.1 este prezentată diagrama accelerației  $a(t)$ , în figura 4.2 diagrama vitezei  $\nu(t)$ , în figura 4.3 diagrama elongației  $x(t)$ , iar în figura 4.4 diagrama forței elastice  $\sin(x(t))$ , și în figura 4.5 diagrama componentei forței de amortizare  $(x^2(t) - 1)\nu(t)$ :



**Figura 4.1** Diagrama  $x(t)$



**Figura 4.2** Diagrama  $v(t)$

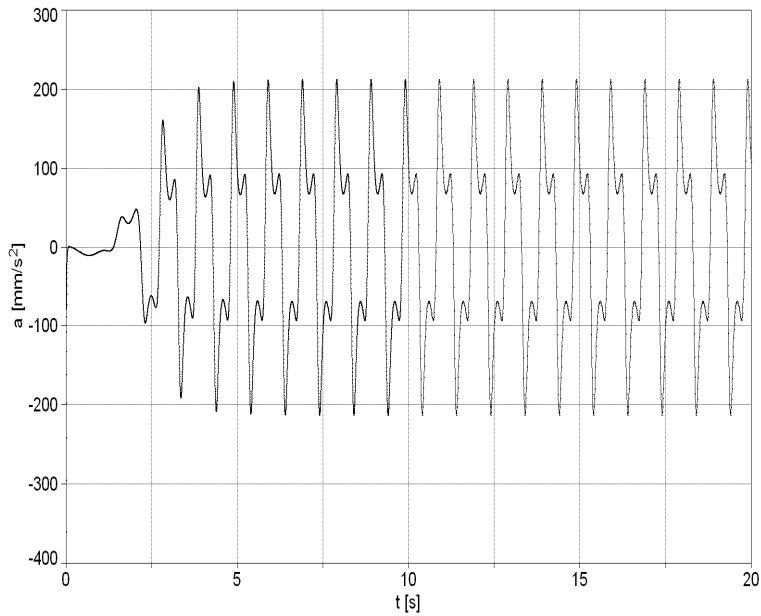


Figura 4.3 Diagrama  $a(t)$

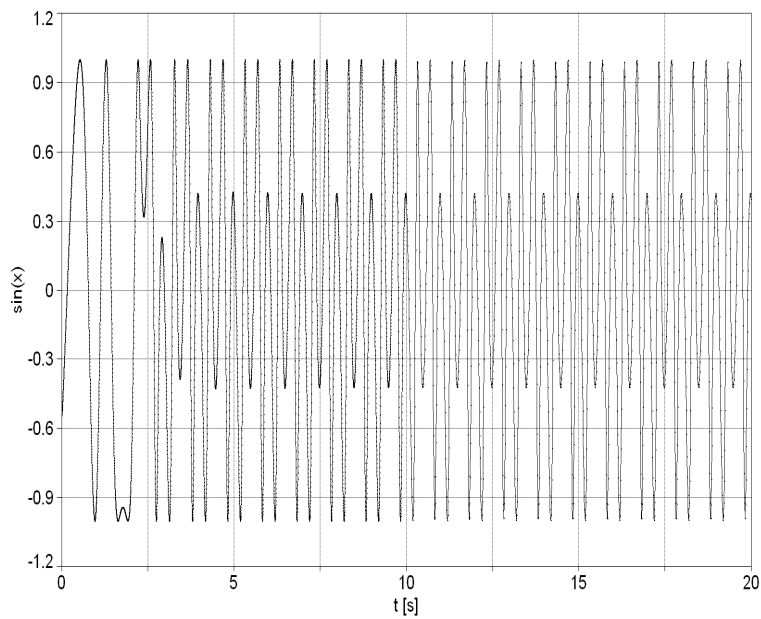
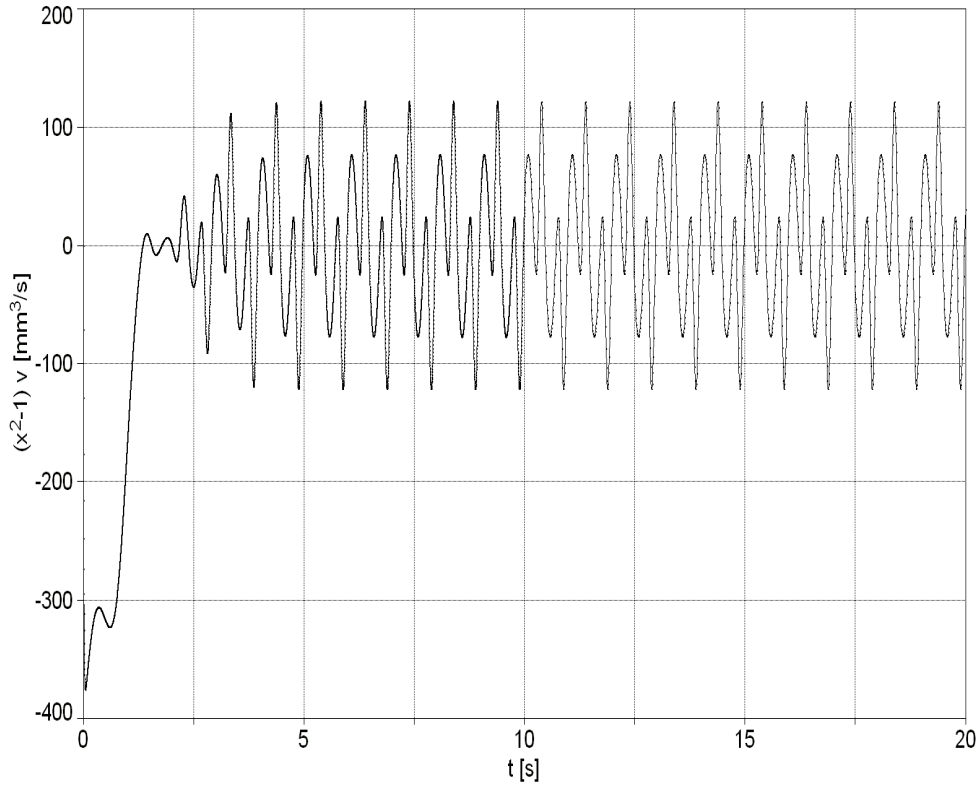
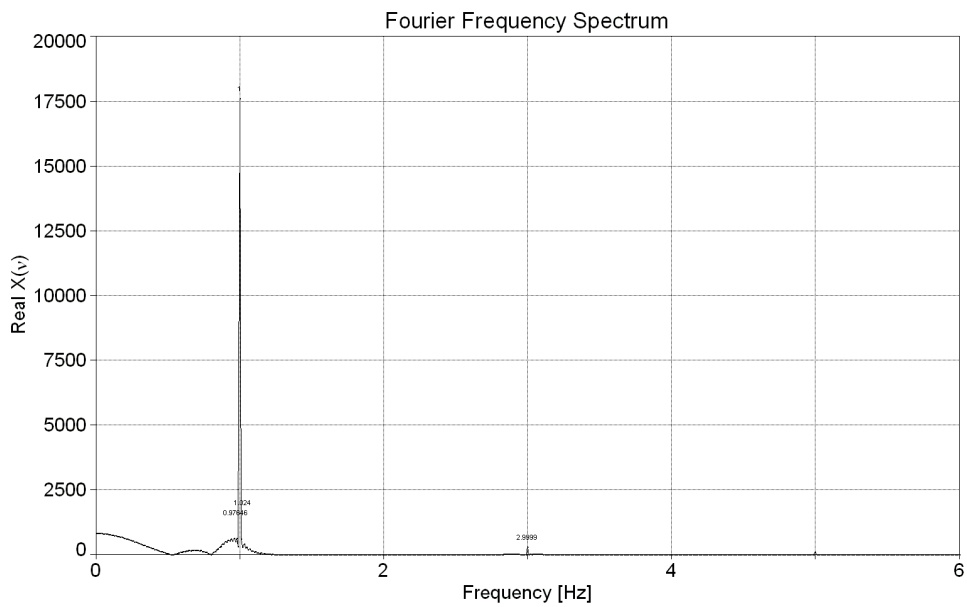


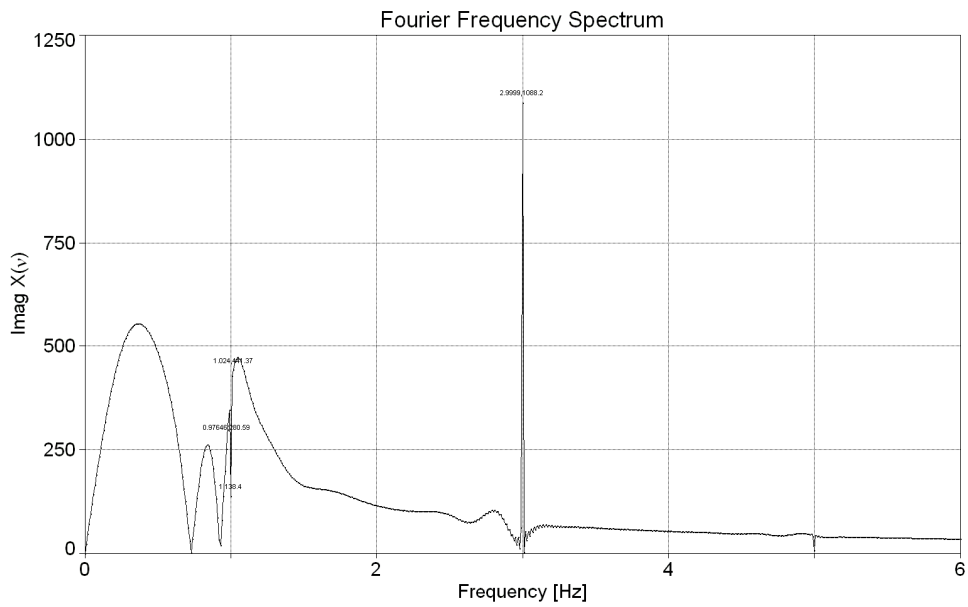
Figura 4.4 Diagrama  $\sin(x(t))$



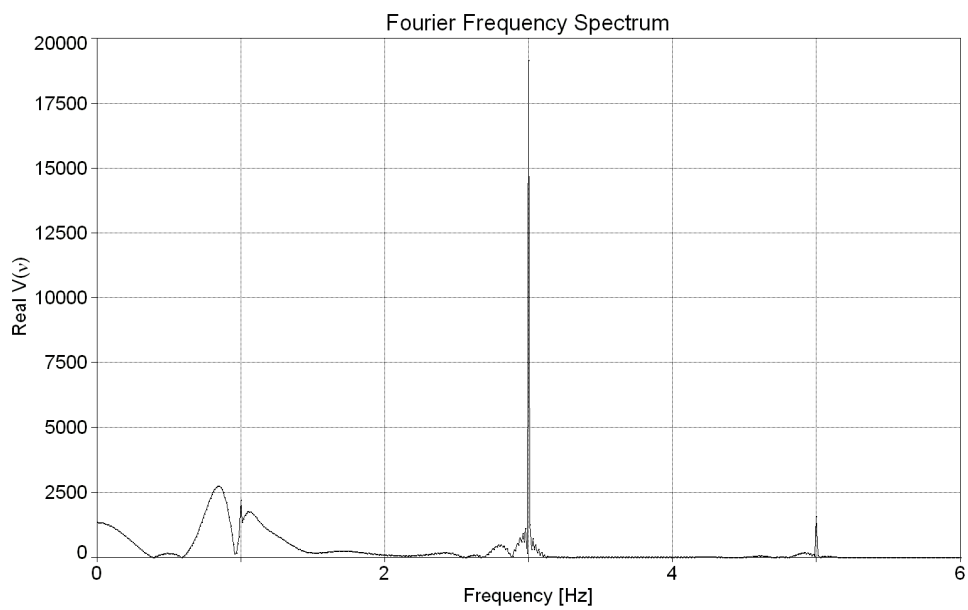
**Figura 4.5** Diagrama  $(x^2(t) - 1)v(t)$



**Figura 4.6** Partea reală a  $X(\nu)$



**Figura 4.7** Partea imaginară a  $X(\nu)$



**Figura 4.8** Partea reală a  $V(\nu)$

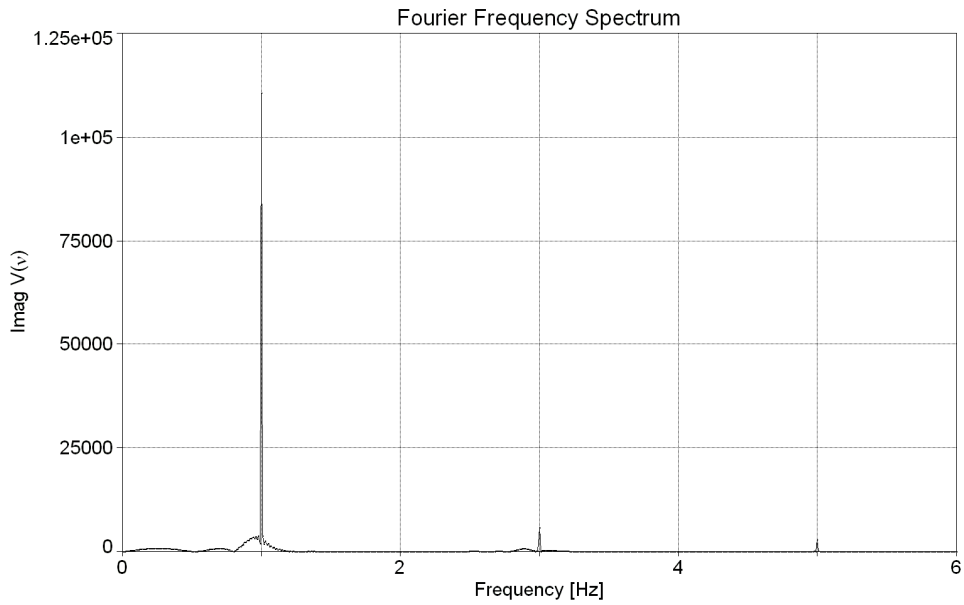


Figura 4.9 Partea imaginară a  $V(v)$

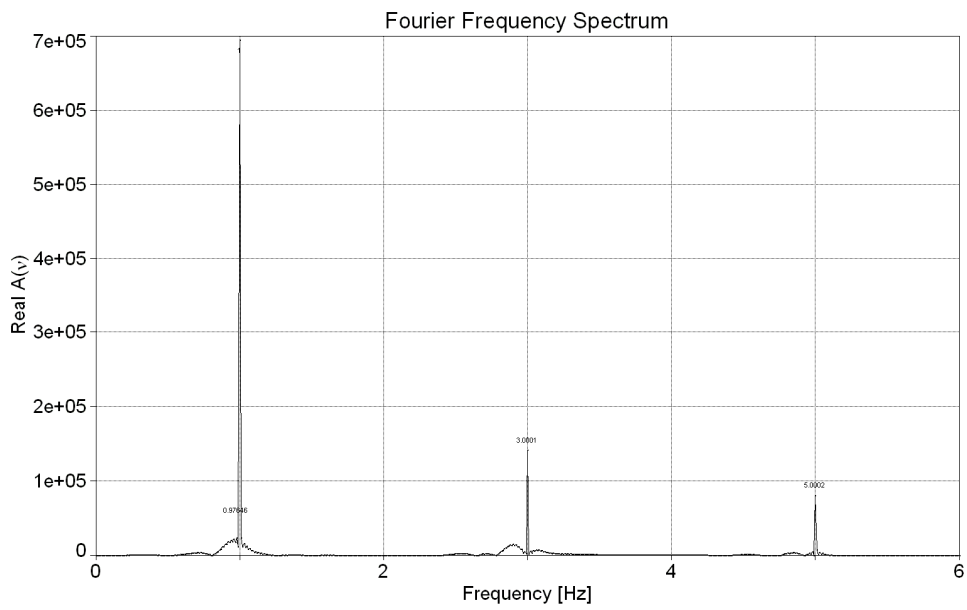
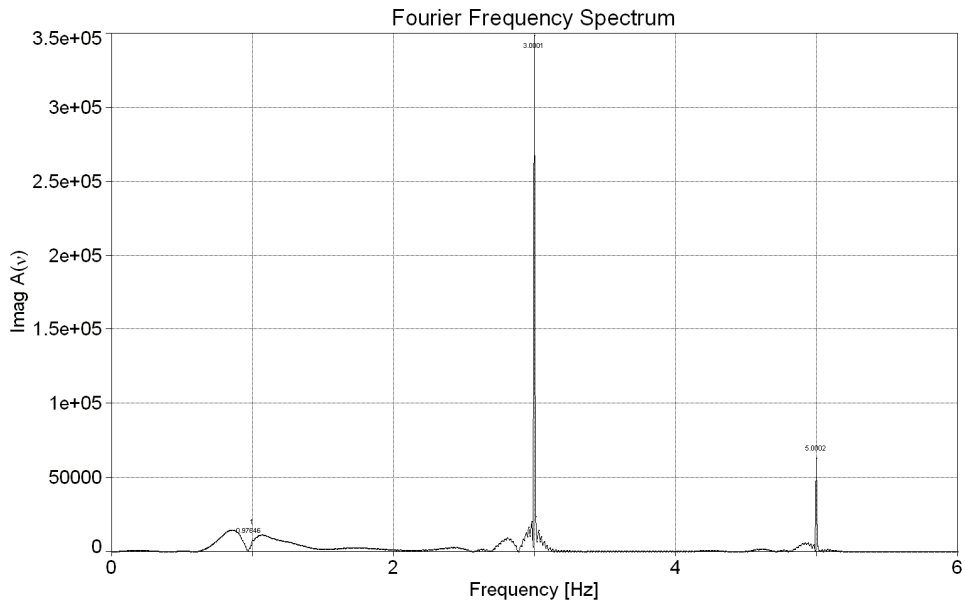
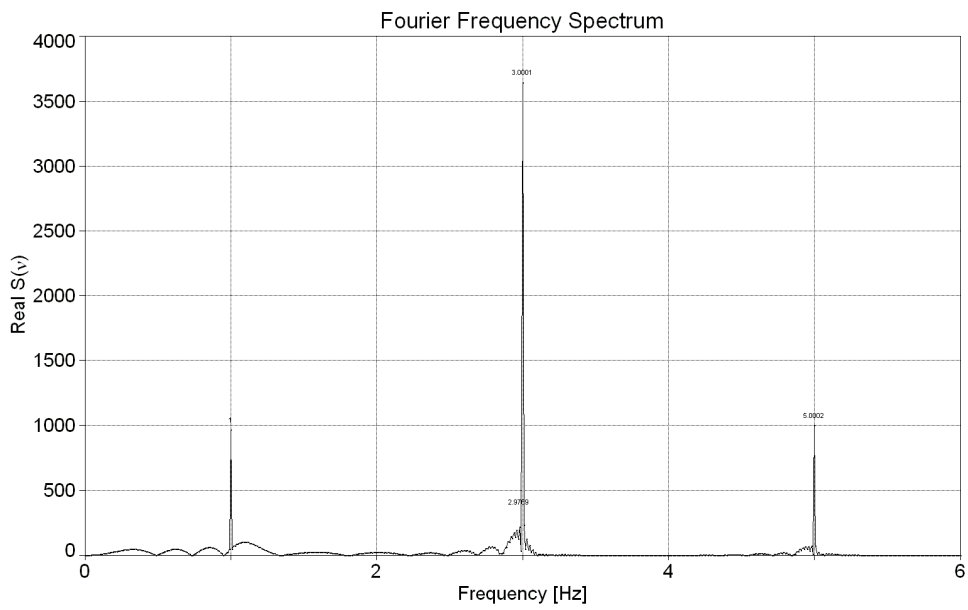


Figura 4.10 Partea reală a  $A(v)$

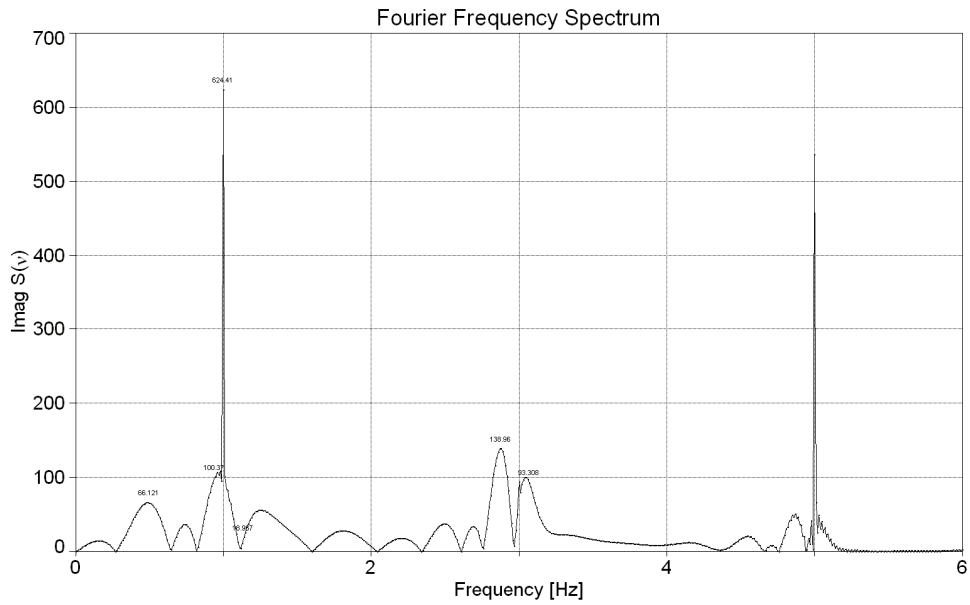




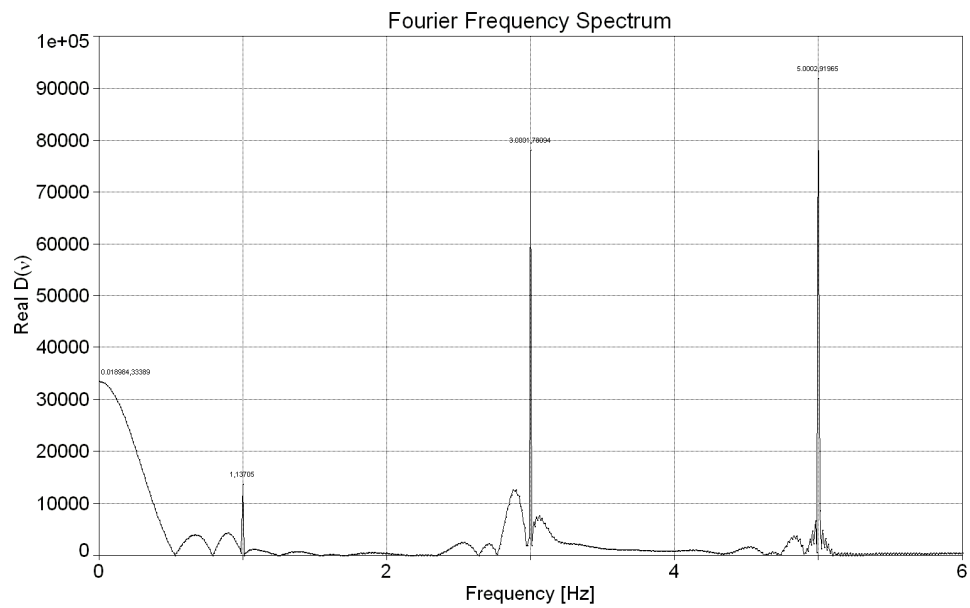
**Figura 4.11** Partea imaginară a  $A(v)$



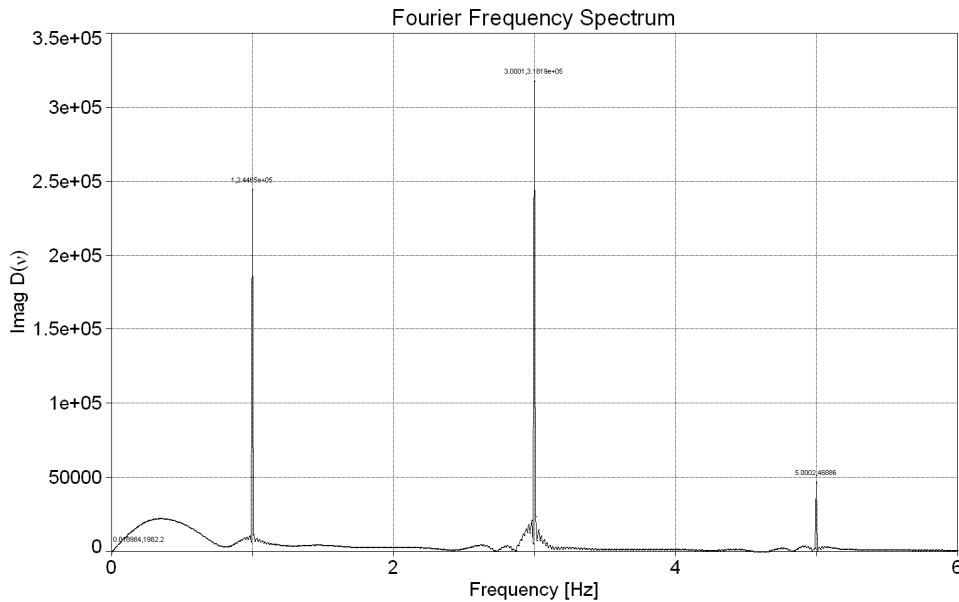
**Figura 4.12** Partea reală a  $S(v)$



**Figura 4.13** Partea imaginară a  $S(v)$



**Figura 4.14** Partea reală a  $D(v)$



**Figura 4.15** Partea imaginară a  $D(v)$

Vom nota transformatele Fourier ale următoarelor semnale:

$$X(v) = F\{x(t)\}, \quad V(v) = F\{v(t)\}, \quad A(v) = F\{a(t)\},$$

$$S(v) = F\{\sin x(t)\}, \quad D(v) = F\{(x^2(t)-1)v(t)\},$$

care sunt funcții complexe. În figura 4.6 și 4.7 sunt reprezentate partea reală și imaginară a  $X(v)$ , în figura 4.8 și 4.9 sunt reprezentate partea reală și imaginară a  $V(v)$ , în figura 4.10 și 4.11 sunt reprezentate partea reală și imaginară a  $A(v)$ , în figura 4.12 și 4.13 sunt reprezentate partea reală și imaginară a  $S(v)$ , iar în figura 4.14 și 4.15 sunt reprezentate partea reală și imaginară a  $D(v)$ .

Din spectre se observă că acestea conțin atât componente continue, corespunzătoare părții răspunsului liber a sistemului, cât și o serie de linii spectrale, corespunzătoare răspunsului armonic sau forțat. Mai notăm că forța de excitație a sistemului are frecvența de  $\nu = 1$  Hz, iar în spectre apar linii spectrale corespunzătoare armonicilor impare  $3\nu, 5\nu, \dots$

Deoarece spectrele conțin și componente continue pentru rezolvarea ecuației de indentificare (4.30) nu s-au luat aceste componente din spectre ci s-au calculat coeficienții Fourier cu relațiile (4.2) sub forma discretă utilizând din semnale ultimele perioade, în care lipsesc componentele neperiodice ale răspunsului liber. Acestea sunt prezentate în tabelul 4.1.

n	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$f_n$
0	-0.0003462	0	0.0031465	25.389328	3.814791e-5	0
1	-1.8093387	-0.05282246	1.4034119	0	-0.091243	-0.072367
3	0.0296120	0.10576129	7.5567196	33.357766	0.379099	-0.0027944
5	0.00929345	-0.0051819	9.6587449	-4.6354059	-0.10385	-0.0575653

**Tabelul 4.1**

Am restrâns sistemul de ecuații la forma:

$$A = \begin{bmatrix} -\omega^2 a_1 & c_1 & a_1 & e_1 \\ -\omega^2 b_1 & d_1 & b_1 & f_1 \\ -3^2 \omega^2 a_3 & c_3 & a_3 & e_3 \\ -3^2 \omega^2 b_3 & d_3 & b_3 & f_3 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$X = \begin{Bmatrix} m \\ \varepsilon \\ k \\ \Delta \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.33)$$

Ecuția de identificare este:

$$AX = F \quad (4.34)$$

dimensional fiind supradereminată.

Utilizând  $F_0 = 25$ , și valorile numerice din tabelul 4.1 rezultă:

$m$	$\varepsilon$	$k$	$\Delta$
0.9990379	0.9990576	39.9788731	4.89893907

**Tabelul 4.2**

rezultat foarte bun cu parametrii inițiali ai sistemului. Se observă că la primii trei parametri eroarea de estimare este de ordinul  $10^{-3} - 10^{-4} \%$ .

### 4.3 Identificarea sistemelor neliniare cu metoda seriilor Volterra

Seriile Volterra au fost introduse Vito Volterra (1860-1940), dar aplicarea acestora la studiul sistemelor neliniare s-a făcut mai târziu de către Norbert Wiener în 1942 într-o suită de cercetări militare [124, 15]. Pe acest motiv metoda de identificare se mai numește și Volterra-Wiener [121].

Un articol care conține lista lucrărilor publicate înainte de 1977 în domeniul identificării cu metoda seriilor Volterra este lucrarea lui Barret [5].

#### 4.4 Funcția de transfer a unui sistem liniar

În teoria sistemelor răspunsul la ieșirea unui sistem se exprimă în funcție de excitația la intrare și de caracteristicile interne ale sistemului (Fig. 4.16).

Un sistem se numește liniar, dacă pentru două semnale de intrare  $i_1$  și  $i_2$ , aplicate simultan sistemului, acesta răspunde la ieșire cu suma răspunsurilor  $e_1$  și  $e_2$ , corespunzătoare răspunsurilor individuale la semnalele  $i_1$  și  $i_2$ :

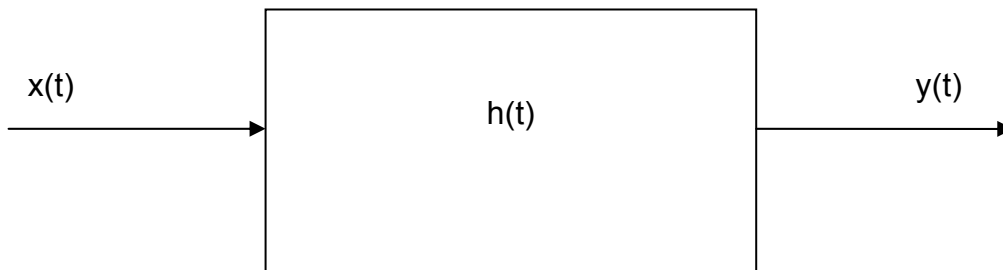
$$i_1 \rightarrow e_1, e_2 \rightarrow e_2 \Rightarrow i_1 + i_2 \rightarrow e_1 + e_2.$$

Această proprietate a sistemelor exprimă principiul superpoziției.

Proprietățile interne ale sistemului sunt conținute în *funcția de transfer* a sistemului. Se numește funcție de transfer a unui sistem liniar, răspunsul dat la ieșire, dacă la intrare se aplică un impuls infinit de scurt, de forma:

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

adică sub forma unui impuls (funcții) Dirac.



**Figura 4.16**

Răspunsul sistemului la ieșire va fi în acest caz  $h(t)$ . Fiind cunoscută funcția de transfer a sistemului, se poate exprima răspunsul la ieșire  $y(t)$ , în funcție de semnalul aplicat la intrare  $x(t)$  (Fig. 4.16):

$$y(t) = \int_R h(t - \tau)x(\tau)d\tau =$$

$$= \int_R h(\tau)x(t-\tau)d\tau = (h \otimes x)(t) \quad (4.36)$$

unde s-a notat cu  $\otimes$  *produsul de convoluție* al funcțiilor, exprimat prin integrala (4.36). Egalitatea celor două integrale se poate demonstra imediat.

Funcția de transfer a sistemelor fizice reale trebuie să verifice următoarele proprietăți:

**Principiul cauzalității:** Răspunsul sistemelor fizice reale nu poate să apară înaintea semnalului de intrare (efectul nu apare înaintea cauzei), care produce acest răspuns. Matematic această proprietate este îndeplinită dacă:

$$h(t) = 0 \quad \text{daca: } t < 0, \quad (4.37)$$

**Principiul stabilității:** Răspunsul sistemului trebuie să fie finit. Această condiție este asigurată dacă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty, \quad (4.38)$$

În continuare ne propunem să verificăm validitatea relației (4.36). Vom considera că la intrarea sistemului se aplică un semnal de intrare  $x(t)$ , definit pe intervalul  $t \in [0, \infty)$ , semnal presupus cunoscut analitic. Acest semnal se poate discretiza în intervale egale, de lățime mică  $\varepsilon = \Delta t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Pe aceste intervale putem considera că  $x_k$  este constant. Dacă  $\varepsilon \rightarrow 0$ , aceste trepte în care s-a aproximat  $x(t)$ , vor fi echivalente cu  $\delta(t_k) \otimes x(t_k)$ .

Prin urmare la fiecare din aceste trepte se vor genera răspunsurile (Fig. 4.17):

$$h(t), h(t - \Delta t), h(t - 2\Delta t), \dots$$

Deoarece semnalul de intrare este aproximat sub forma:

$$x(0)u_{\Delta t}(0)\Delta t, x(\Delta t)u_{\Delta t}(\Delta t)\Delta t, x(2\Delta t)u_{\Delta t}(2\Delta t)\Delta t, \dots,$$

la ieșirea sistemului se obțin în fapt răspunsurile:

$$h(t)x(0)\Delta t, h(t - \Delta t)x(\Delta t)\Delta t, h(t - 2\Delta t)x(2\Delta t)\Delta t, \dots,$$

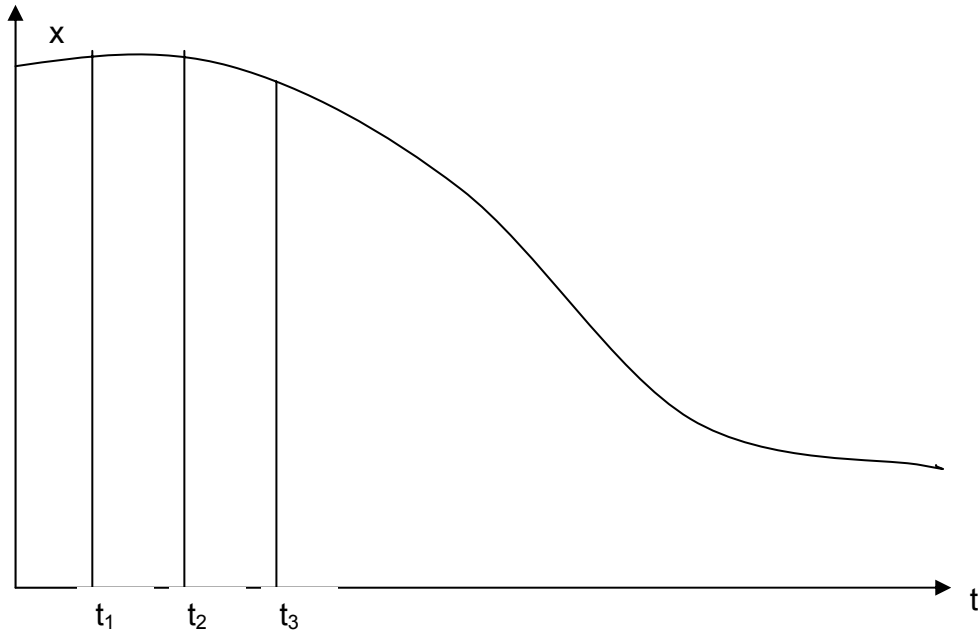


Figura 4.17

Principiul superpoziției afirmă că la un sistem liniar răspunsul sistemului va fi suma răspunsurilor la excitațiile individuale. Considerând că  $t \in R$  rezultă:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - k\Delta t)x(k\Delta t)\Delta t.$$

Rezultă că la limită ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), acest răspuns total va deveni:

$$y(t) = \int_R h(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (4.39)$$

Se poate arăta fără dificultate, că la sistemele la care relația între intrare și ieșire este descrisă de o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, atunci pentru acel sistem există și relația (4.36) între intrare și ieșire.

Integrala (4.36) se numește integrală Duhamel.

#### 4.5 Studiul sistemelor neliniare cu metoda seriilor Volterra

Vom considera un sistem dinamic neliniar cu un grad de libertate descris de ecuația:

$$L\{x(t)\} + N\{x(t)\} = F(t) \quad (4.40)$$

unde  $L\{x(t)\}$  este un operator liniar,  $N\{x(t)\}$  este un operator neliniar,  $F(t)$  este o perturbație externă (o forță perturbatoare), iar  $x(t)$  parametru dinamic necunoscut (variabila de poziție) reprezentând răspunsul sistemului la perturbația  $F(t)$ . Vom considera că se poate obține soluția  $x_0(t)$  a părții liniare (adică  $L\{x_0(t)\} = 0$ ).

Metoda seriilor Volterra are la bază stabilirea unei metode de a exprima răspunsul sistemului neliniar ca o serie de integrale care generalizează integrala de convoluție, depinzând de puterile perturbației  $F(t)$ :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) F(t - \tau_1) d\tau_1 \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) F(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) \dots F(t - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

unde  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  este o funcție formal echivalentă cu funcția de transfer Volterra de ordinul  $n$ , numită și *nucleu*.

Funcțiile  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  (unde  $n = 1, 2, \dots$ ) trebuie să îndeplinească condițiile:

**Principiul cauzalității:**

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = 0 \quad \text{pentru: } \tau_k < 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.42}$$

**Integrabilitate în  $L^1(R)$ :** Răspunsul sistemului trebuie să fie finit. Această condiție este asigurată dacă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)| d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n < +\infty, \tag{4.43}$$

**Condiția de regularitate:**

$$\lim_{\tau_k \rightarrow +\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = 0 \quad \text{pentru: } \forall k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.44}$$



Funcția  $h_1(t)$  reprezintă funcția de transfer corespunzătoare părții liniare a sistemului dinamic (4.40).

Transformata Fourier  $n$  – dimensională a funcției  $h_n$  este:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_R \dots \int_R h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \exp[-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_n\tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n, \quad (4.45)$$

unde  $R_+ = [0, \infty)$ .  $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .  $H_n$  se numește multispectru de ordinul  $n$ . Pe de altă parte  $h_n(t)$ , pentru  $n > 1$  depinde de perturbația de intrare  $F(t)$ , adică  $h_n(t)$  depinde de funcția de excitație.  $H_n$  reprezintă o cantitate complexă.

Prin transformată Fourier inversă  $n$  – dimensională se obține:

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \times \int_R \dots \int_R H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \exp[i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_n\tau_n)] d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n. \quad (4.46)$$

Termenul:

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(t - \tau_1) F(t - \tau_2) \dots F(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (4.47)$$

unde  $n = 1, 2, \dots$ , reprezintă răspunsul de ordinul  $n$  al sistemului neliniar.

Prin urmare soluția  $x(t)$  a ecuației de mișcare se poate scrie:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t). \quad (4.48)$$

Transformata Fourier unidimensională a  $x_n(t)$  este:

$$X_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \times F(\omega_1) F(\omega_2) \dots F(\omega_n) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_n) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n, \quad (4.49)$$

și este cunoscută ca spectrul de ordinul  $n$  a funcției de răspuns, iar  $F(\omega)$  este transformata Fourier a funcției de excitație  $F(t)$ .

Dacă considerăm că excitația este  $F(t) = Ae^{i\omega t}$ , înlocuind (4.41) în (4.40) putem calcula diferitele ordine ale funcției de transfer pentru excitație armonică de tip  $\exp(i\omega t)$ .

În acest caz răspunsul va fi de forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A^n H_n(\omega, \omega, \dots, \omega) \exp[in\omega t] = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t}, \quad (4.50)$$

reprezentând o suprapunere de armonici.

O formă mai generală a seriilor Volterra este:

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, \tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t, \tau_1, \tau_2) F(\tau_1) F(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) F(\tau_1) F(\tau_2) F(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(\tau_1) F(\tau_2) \dots F(\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

unde  $h_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  funcția de transfer Volterra de ordinul  $n$ .

Există diferite metode de determinare a funcțiilor  $h_n$ , de care ne vom ocupa în continuare.

#### 4.6 Răspunsul la excitație armonică de forma $\cos\omega_0 t$

Considerăm excitația de forma:

$$F(t) = A \cos(\omega_0 t) = \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

unde  $A$  este amplitudinea, iar  $\omega_0$  pulsația excitației.

Cantitatea  $F(t - \tau_1) \dots F(t - \tau_n)$  din relația (4.41) poate fi scrisă într-o formă de tip exponențial ca:

$$F(t - \tau_1) \dots F(t - \tau_n) = D_n \exp\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k u(t - \tau_k)\right) \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0} =$$

$$D_n \frac{1}{n!} \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k F(t - \tau_k) \right]^n \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}, \quad (4.52)$$

unde  $D_n$  reprezintă un operator diferențial:

$$D_n = \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_n}$$

Ultima relație din (4.52) rezultă dezvoltând exponențiala în serie Taylor. Răspunsul (4.51) va fi:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R d\tau_1 \dots \int_R d\tau_n \times \frac{1}{n!} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) D_n \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k F(t - \tau_k) \right]^n \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}, \quad (4.53)$$

Funcția de transfer  $H_n$  va fi:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_R d\tau_1 \dots \int_R d\tau_n \times \frac{1}{n!} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) D_n \left[ \prod_{r=1}^n A_n(\omega_r) \right] \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}, \quad (4.54)$$

unde:

$$A_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \exp(-i\omega\tau_k).$$

Rezultă de aici:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k F(t - \tau_k) &= \\ &= \frac{A}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k (e^{i\omega_0(t-\tau_k)} + e^{-i\omega_0(t-\tau_k)}) = \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} A_n(\omega_0) + e^{-i\omega_0 t} A_n(-\omega_0)) \end{aligned}$$

Obținem de asemenea, după dezvoltare binomială:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k F(t - \tau_k) \right]^n &= \left( \frac{A}{2} \right)^n \left[ e^{i\omega_0 t} A_n(\omega_0) + e^{-i\omega_0 t} A_n(-\omega_0) \right]^n = \\ &= \left( \frac{A}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left[ e^{i\omega_0 t} A_n(\omega_0) \right]^k \left[ e^{-i\omega_0 t} A_n(-\omega_0) \right]^{(n-k)}. \end{aligned}$$

Obținem în final răspunsul neliniar:

$$\begin{aligned} x(t) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A}{2} \right)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(n-k)!} D_n \left[ A_n^k(\omega_0) A_n^{n-k}(-\omega_0) e^{i(2k-n)\omega_0 t} \right]_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A}{2} \right)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(n-k)!} H_{n,n-k}(\omega_0) e^{i(2k-n)\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

unde  $H_{n,n-k}(\omega_0)$  reprezintă  $H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  în care  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = \omega_0$  și  $\omega_{k+1} = \omega_{k+2} = \dots = \omega_n = -\omega_0$ .

#### 4.7 Metoda forței neliniare

Metoda a fost introdusă în literatură de J.J. Bussgang și L. Ehrman [21], și a fost numită și *metoda curentului neliniar*. Noțiunea de curent nu se referă la curentul din circuite.

Metoda se aplică unor sisteme dinamice neliniare descrise de ecuația de mișcare la care neliniaritatea se poate exprima polinomial. Ecuația (4.40) devine în acest caz:

$$L\{x(t)\} + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots + a_n x^n(t) + \dots = F(t), \quad (4.56)$$

unde  $a_n$  (unde  $n \in \mathbb{N}$ ) sunt constante reale sau complexe. Vom deforma în (4.56) funcția de perturbație  $F(t)$ , introducând un parametru  $z$ :

$$F(t) \rightarrow zF(t) \quad z \in [0, 1].$$

astfel încât dacă  $z = 1$  sistemul revine la forma (4.56).

Și funcțiile de răspuns  $x_n(t)$  se vor deforma, devenind:

$$x_n(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) zF(t-\tau_1) \dots zF(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = z^n V_n(t), \quad (4.57)$$

unde, în final, integrala  $V_n \rightarrow x_n$ , dacă luăm  $z \rightarrow 1$ .

Cu aceasta soluția ecuației se poate scrie ca o serie:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n V_n(t) \quad (4.58)$$

Ecuația (4.56) perturbată se va scrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n L\{V_n(t)\} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \sum_{m=1}^{\infty} z^m V_m(t) \right)^n = zF(t), \quad (4.59)$$

Pentru calculul  $V_n(t)$ , în vederea separării termenilor de aceeași putere în  $z$  vom considera un număr finit  $N$  de termeni ai soluției (4.58) în (4.59):

$$\sum_{n=1}^N z^n L\{V_n(t)\} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \sum_{m=1}^N z^m V_m(t) \right)^n = zF(t), \quad (4.60)$$

unde  $N = 1, 2, 3, \dots$

Astfel  $V_1(t)$  este soluție a ecuației:

$$L\{V_1(t)\} = F(t), \quad (4.61)$$

Pentru  $N = 2$  ecuația (4.60) devine:

$$zL\{V_1(t)\} + z^2 L\{V_2(t)\} + a_2 (zV_1(t) + z^2 V_2(t))^2 = zF(t), \quad (4.62)$$

Derivăm de două ori ecuația în raport cu  $z$ , și apoi facem  $z = 0$ . Rezultă prin derivare:

$$2L\{V_2(t)\} + a_2(2V_1^2(t) + 12zV_1(t)V_2(t) + 12z^2V_2^2(t)) = 0$$

și făcând  $z = 0$  obținem ecuația:

$$L\{V_2(t)\} = -a_2 V_1^2(t), \quad (4.63)$$

Pentru  $N = 3$  ecuația (4.60) devine:

$$zL\{V_1(t)\} + z^2L\{V_2(t)\} + z^3L\{V_3(t)\} + a_2(zV_1(t) + z^2V_2(t))^2 + a_3(zV_1(t) + z^2V_2(t) + z^3V_3(t))^3 = zF(t),$$

Derivăm de două ori ecuația în raport cu  $z$ , și apoi facem  $z = 0$ . Rezultă prin derivare:

$$6L\{V_3(t)\} + 180a_3V_1^2z^2V_3 + 72a_3V_1^2zV_2 + 180a_3V_1z^2V_2^2 + 630a_3z^4V_2^2V_3 + 1008a_3z^5V_2V_3^2 + 720a_3V_1z^3V_2V_3 + 6a_3V_1^3 + 12a_2V_2V_1 + 24a_2V_2^2z + 504a_3z^6V_3^3 + 120a_3z^3V_2^3 + 630a_3V_1z^4V_3^2 = 0$$

și făcând  $z = 0$  obținem ecuația care furnizează  $V_3(t)$ :

$$L\{V_3(t)\} = -a_3V_1^3(t) - 2a_2V_2(t)V_1(t), \quad (4.64)$$

iar pentru  $V_4(t)$  rezultă o serie de calcule:

$$L\{V_4(t)\} = -2a_2V_1(t)V_3(t) - a_2V_2^2(t) - a_4V_1^4(t) - 3a_3V_1^2(t)V_2(t). \quad (4.65)$$

Pentru alte ordine, calculele sunt laborioase, însă se pot efectua cu ușurință în Maple sau Mathematica.

S-a stabilit că ecuația care conține termenul  $V_n(t)$  (unde  $n = 2, 3, 4, \dots$ ) se poate pune în forma generală

$$L\{V_n(t)\} = F_n(t), \quad (4.66)$$

unde *forța neliniară*  $F_n(t)$  este de forma:

$$F_n(t) = -\sum_{k=2}^n a_k \left[ \frac{d^n}{dz^n} \left( \sum_{m=1}^n z^m V_m(t) \right)^k \right]_{z=0}, \quad (4.67)$$

iar primul termen se obține din ecuația:  $L\{V_1(t)\} = F(t)$ .

Dăm în final un program Maple de stabilire a forței neliniare de ordinul  $n$  și am calculat aceste forțe până la  $n = 6$  bazat pe procedura  $\text{Force}(n)$ :

Program de calcul al forței neliniare de ordin  $n > 1$

```

> restart:
> a:=array(1..20):
> V:=array(1..20):

> Force :=proc(n::integer)::undefined:
    local k,z,S,T,R,H:
    description "Funcție care calculează forța neliniară de ordin n";
    S:=n->sum(z^k * V[k],k = 1..n):
    T:=n->-sum(a[k]*(S(n))^k,k = 2..n):
    R:=z->T(n):
    H:=diff(R(z),z n):
    H:=expand(H):
    subs(z=0,H)/n!:
end proc:

> F[1]:=F(t)
> F[2]:=Force(2);
> F[3]:=Force(3);
> F[4]:=Force(4);
> F[5]:=Force(5);
> F[6]:=Force(6);

```

$$F_1 := F(t)$$

$$F_2 := -a_2 V_1^2$$

$$F_3 := -a_3 V_1^3 - 2a_2 V_1 V_2$$

$$F_4 := -a_2 V_2^2 - a_4 V_1^4 - 2a_2 V_1 V_3 - 3a_3 V_1^2 V_2$$

$$F_5 := -2a_2 V_2 V_3 - 2a_2 V_1 V_4 - 3a_3 V_1^2 V_3 - 4a_4 V_1^3 V_2 - 3a_3 V_1 V_2^2 - a_5 V_1^5$$

$$F_6 := -6a_4 V_1^2 V_2^2 - 6a_3 V_1 V_3 V_2 - 5a_5 V_1^4 V_2 - 2a_2 V_1 V_5 - 3a_3 V_1^2 V_4 \\ - 4a_4 V_1^3 V_3 - 2a_2 V_2 V_4 - a_2 V_3^2 - a_3 V_2^3 - a_6 V_1^6$$

#### 4.8 Aplicație. Determinarea funcției de transfer și a parametrilor unui sistem cu neliniaritate pătratică și cubică

Vom considera un sistem vibrant neliniar neamortizat supus unei forțe perturbatoare de forma:

$$m\ddot{x} + kx + a_2x^2 + a_3x^3 = F_0 \cos \omega t$$

unde  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare,  $m$  este masa oscilatorului,  $k$  componenta liniară a constantei elastice,  $a_2, a_3 > 0$  reprezintă parametrii neliniari ai forței elastice.

Utilizând metoda forței neliniare dezvoltată în secțiunea precedentă se obțin după calcule:

$$V_1 = F_0 \frac{2\cos(\omega t)}{k - m\omega^2},$$

$$V_2 = \frac{-2a_2k \cos(2\omega t) - 2a_2k + 8m\omega^2 a_2}{k^4 - 6k^3 m\omega^2 + 9m^2 \omega^4 k^2 - 4k\omega^6 m^3} F_0^2,$$

$$V_3 = \frac{-2k(k - m\omega^2)(ka_3 - 4a_3 m\omega^2 - a_2^2)}{k(k - 4m\omega^2)(k - 9m\omega^2)(k - m\omega^2)^4} F_0^3 \cos(3\omega t)$$

$$- \frac{6(k - 9m\omega^2)(k^2 a_3 + (-4a_3 m\omega^2 - a_2^2)k + \frac{8m\omega^2 a_2^2}{3})}{k(k - 4m\omega^2)(k - 9m\omega^2)(k - m\omega^2)^4} F_0^3 \cos(\omega t),$$

$$V_4 = \frac{-16(k^2 - \frac{19}{2} km\omega^2 + \frac{27}{2} m^2 \omega^4) a_2^3}{k(k - m\omega^2)^5 (k - 9m\omega^2)(k - 4m\omega^2)^2} F_0^4 \cos(2\omega t)$$

$$- \frac{4(k - \frac{13m\omega^2}{2}) a_2^3}{(k - m\omega^2)^4 (k - 9m\omega^2)(k - 4m\omega^2)^2 (k - 16m\omega^2)} F_0^4 \cos(4\omega t)$$

$$- 12 \frac{(k^3 - \frac{13}{2} m\omega^2 k^2 + \frac{40}{3} m^2 \omega^4 k - \frac{16}{3} m^3 \omega^6) a_2^3}{k^3 (k - m\omega^2)^5 (k - 4m\omega^2)^2} F_0^4$$



Rezultă că răspunsul sistemului la perturbație va conține și componente de forma:

$$x_F = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + \dots$$

De aici rezultă că parametrul  $a_2$  va putea fi determinat din armonica  $\cos 2\omega t$  iar  $a_3$  va putea fi determinat apoi din din armonica  $\cos 3\omega t$ . Aceste componente se pot determina din componentele spectrale reale corespunzătoare pulsațiilor  $2\omega$  și  $3\omega$ .

Vom mai nota în final că determinarea componentelor  $V_1, \dots, V_2$  s-a făcut în Maple.

#### 4.9 Determinarea funcției de transfer neliniare de ordin superior

Vom prezenta în continuare metoda funcțiilor de transfer de ordin superior în frecvență (4.45) la un sistem dinamic neliniar descris de ecuația de mișcare la care neliniaritatea se poate exprima polinomial de forma (4.40):

$$L\{x(t)\} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n(t) = F(t), \quad (4.68)$$

unde  $a_n$  (unde  $n \in \mathbb{N}$ ) sunt constante reale sau complexe, iar  $L$  este un operator liniar.

În particular vom considera sistemul descris de operatorul liniar:

$$L\{x(t)\} = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t), \quad (4.69)$$

căruia îi corespunde un polinom caracteristic:

$$P(i\omega) = m(i\omega)^2 + c(i\omega) + k.$$

Pentru determinarea  $H_1(\omega_1)$  utilizăm  $F(t) = \exp(i\omega_1 t)$  și înlocuim  $x(t) = H_1(\omega_1) \exp(i\omega_1 t)$  în (4.69), de unde rezultă:

$$L\{H_1(\omega_1) \exp(i\omega_1 t)\} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n [H_1(\omega_1) \exp(i\omega_1 t)]^n = \exp(i\omega_1 t), \quad (4.70)$$

de unde rezultă separând termenii în  $\exp(i\omega_1 t)$ :

$$H_1(\omega_1) = \frac{1}{P(i\omega_1)}. \quad (4.71)$$

Pentru determinarea  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  utilizăm  $F(t) = \exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$  și înlocuim în (4.68):

$$x(t) = H_1(\omega_1)\exp(i\omega_1 t) + H_1(\omega_2)\exp(i\omega_2 t) + H_2(\omega_1, \omega_2)\exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t)$$

de unde rezultă separând termenii în  $\exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t)$ :

$$H_2(\omega_1, \omega_2)P(i\omega_1 + i\omega_2) + 2a_2 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2) = 0, \quad (4.72)$$

de unde rezultă :

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{-2a_2 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)}{P[i(\omega_1 + \omega_2)]}, \quad (4.73)$$

Pentru determinarea  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  utilizăm

$$F(t) = \exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t) + \exp(i\omega_3 t)$$

și înlocuim în (4.68):

$$x(t) = H_1(\omega_1)\exp(i\omega_1 t) + H_1(\omega_2)\exp(i\omega_2 t) + H_1(\omega_3)\exp(i\omega_3 t) + H_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$\times \exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t) + H_2(\omega_1, \omega_3)\exp(i\omega_1 t + i\omega_3 t) + H_2(\omega_2, \omega_3)\exp(i\omega_2 t + i\omega_3 t) +$$

de unde rezultă, separând termenii în  $\exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t + i\omega_3 t)$ :

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{-6a_3 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3) - 2a_2 H_{1,2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{P[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)]}, \quad (4.74)$$

unde:

$$H_{1,2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_1(\omega_1)H_2(\omega_2, \omega_3) + H_1(\omega_2)H_2(\omega_1, \omega_3) + H_1(\omega_3)H_2(\omega_1, \omega_2)$$

Pentru funcția de transfer de ordinul patru  $H_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  utilizăm

$$F(t) = \exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t) + \exp(i\omega_3 t) + \exp(i\omega_4 t)$$

și înlocuim în (4.68):

$$\begin{aligned} x(t) = & H_1(\omega_1) \exp(i\omega_1 t) + H_1(\omega_2) \exp(i\omega_2 t) + H_1(\omega_3) \exp(i\omega_3 t) + H_1(\omega_4) \exp(i\omega_4 t) \\ & + H_2(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t) + H_2(\omega_1, \omega_3) \exp(i\omega_1 t + i\omega_3 t) + H_2(\omega_1, \omega_4) \exp(i\omega_1 t + i\omega_4 t) \\ & + H_2(\omega_2, \omega_3) \exp(i\omega_2 t + i\omega_3 t) + H_2(\omega_2, \omega_4) \exp(i\omega_2 t + i\omega_4 t) + H_2(\omega_3, \omega_4) \exp(i\omega_3 t + i\omega_4 t) \\ & + H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t + i\omega_3 t) + H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_4) \exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t + i\omega_4 t) \\ & + H_3(\omega_1, \omega_3, \omega_4) \exp(i\omega_1 t + i\omega_3 t + i\omega_4 t) + H_3(\omega_2, \omega_3, \omega_4) \exp(i\omega_2 t + i\omega_3 t + i\omega_4 t) \\ & + H_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t + i\omega_3 t + i\omega_4 t) \end{aligned}$$

Separând termenii în  $\exp(i\omega_1 t + i\omega_2 t + i\omega_3 t)$  rezultă funcția de transfer de ordinul patru:

$$\begin{aligned} H_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = & \{-2a_2[H_1(\omega_1)H_3(\omega_2, \omega_3, \omega_4) + H_1(\omega_2)H_3(\omega_1, \omega_3, \omega_4) \\ & + H_1(\omega_3)H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_4) + H_1(\omega_4)H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + H_2(\omega_1, \omega_2)H_2(\omega_3, \omega_4) \\ & + H_2(\omega_1, \omega_3)H_2(\omega_2, \omega_4) + H_2(\omega_1, \omega_4)H_2(\omega_2, \omega_3)] - 6a_3[H_1(\omega_2)H_1(\omega_4)H_2(\omega_1, \omega_3) \\ & + H_1(\omega_1)H_1(\omega_3)H_2(\omega_2, \omega_4) + H_1(\omega_1)H_1(\omega_4)H_2(\omega_2, \omega_3) + H_1(\omega_3)H_1(\omega_4)H_2(\omega_1, \omega_2) \\ & + H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_2(\omega_1, \omega_4) + H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_2(\omega_3, \omega_4)] \\ & - 24a_4H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_4)\} / P[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)] \quad (4.75) \end{aligned}$$

Vom mai spune că efectuarea calculului s-a făcut în Maple. Pentru termenul de ordinul patru s-a folosit secvența:

```
> restart;
> f := H1o1*x + H1o2*y + H1o3*z + H1o4*t
+ H2o1o2*(x*y) + H2o1o3*(x*z) + H2o1o4*(x*t)
+ H2o2o3*(y*z) + H2o2o4*(y*t) + H2o3o4*(z*t)
+ H4o1o2o3o4*(x*y*z*t) + H3o1o2o3*(x*y*z) + H3o1o2o4*(x*y*t)
```

```

+ H3o1o3o4*(x*z*t) + H3o2o3o4*(y*z*t);
> EC := -a2*f^2 - a3*f^3 - a4*f^4;
> EC := expand(EC);
> H := diff(EC, x, y, z, t);
> subs({x = 0, y = 0, z = 0, t = 0}, H);

```

Aici s-a notat:

$$H_{k_1 k_2 \dots k_n} = H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Din punct de vedere experimental, pentru excitarea sistemului cu o perturbație armonică de pulsație  $\omega$ , din analiza componentei fundamentale din răspuns se pot determina parametrii părții liniare a sistemului  $m, c, k$ , din armonica  $2\omega$  se poate determina  $a_2$ , din armonica  $3\omega$  se poate determina  $a_3$ , ș.a.m.d.

#### 4.10 Identificarea unui sistem neliniar cu amortizare fracționară cu metoda seriilor Volterra

În această secțiune vom stabili funcțiile de transfer de ordin superior a unui sistem vibrant neliniar cu caracteristică pătratică cu un grad de libertate cu amortizare vâscoasă și a unuia cu amortizare fracționară.

Vom considera sistemul vibrant neliniar cu amortizare vâscoasă descris de ecuația de mișcare:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + a_2x^2 + a_4x^4 = F_0 \cos \omega t \quad (4.76)$$

unde  $m$  este masa sistemului,  $c$  este constanta de amortizare,  $k, a_2, a_4$  - constante elastice liniare și neliniare  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare,  $\nu$  frecvența forței perturbatoare,  $\omega = 2\pi\nu$ .

S-a căutat soluția numerică a sistemului pentru următoarele constante elastice:

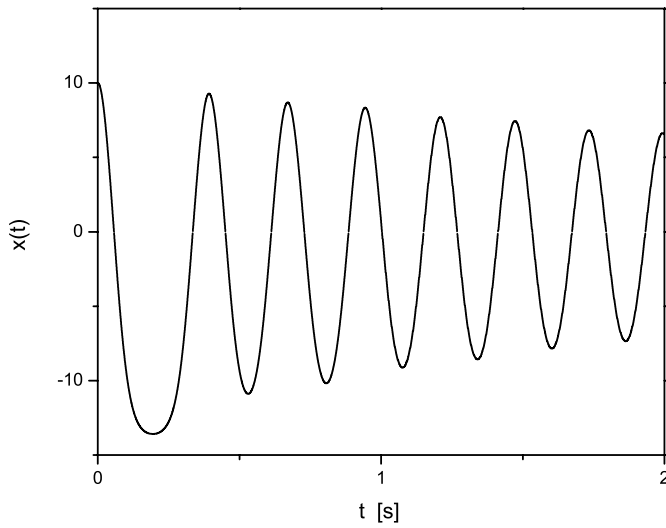
$$m = 1\text{kg}, \quad c = 0.5\text{Ns/m}, \quad k = 600\text{N/m}, \quad a_2 = 5\text{N/m}^2,$$

$$a_4 = 0.2\text{N/m}^4, \quad F_0 = 50\text{N}, \quad \nu = 2\text{Hz}.$$

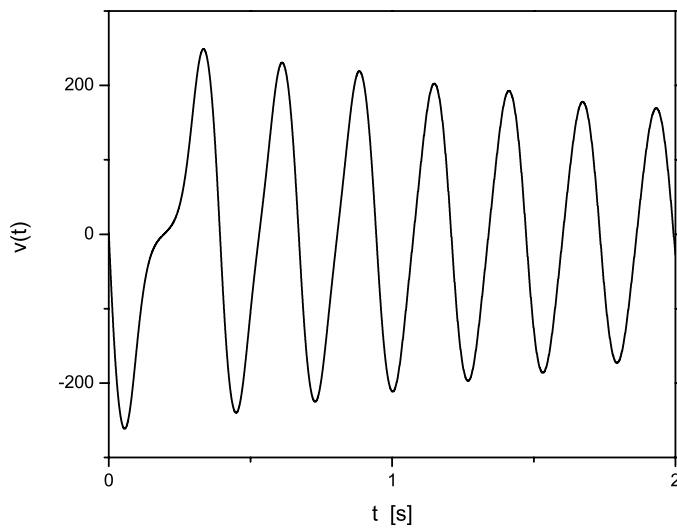
S-au utilizat condițiile inițiale  $x(0), v(0)$  și un număr de puncte  $N$ :

$$x(0) = 10\text{mm} \quad v(0) = 0, \quad N = 10000.$$

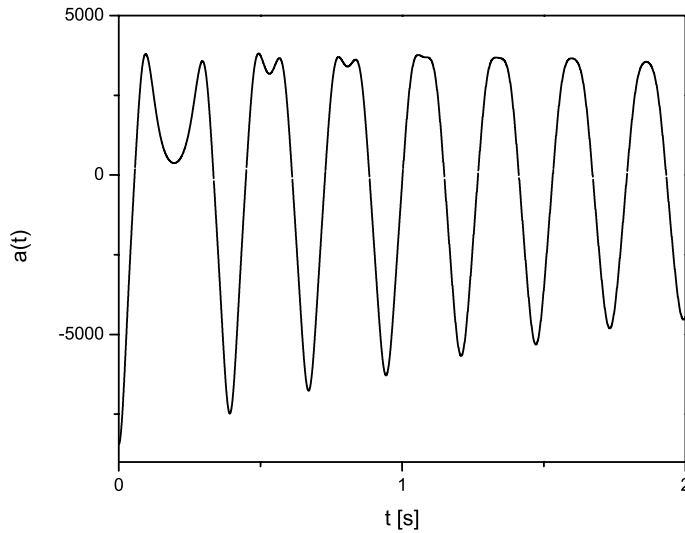
S-a utilizat metoda Runge-Kutta în MathCAD. În Fig. 4.18 este prezentată diagrama elongației  $x(t)$ , în Fig. 4.19 este prezentată diagrama vitezei  $v(t)$ , iar în Fig. 4.20 este prezentată diagrama accelerației.



**Figura 4.18** Diagrama  $x(t)$



**Figura 4.19** Diagrama  $v(t)$



**Figura 4.20** Diagrama  $a(t)$

Funcția de transfer de ordinul întâi (liniară) este:

$$H_1(\omega_1) = \frac{1}{k - m\omega_1^2 + c\omega_1 i}$$

Funcția de transfer de ordinul doi este:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(k - m\omega_1^2 + c\omega_1 i)(k - m\omega_2^2 + c\omega_2 i)} - \frac{2a_2}{k - m(\omega_1 + \omega_2)^2 + c(\omega_1 + \omega_2)i} \quad (4.77)$$

iar reprezentarea grafică a modulului acesteia este dată în Fig. 4.21.

Faza  $\varphi$  a funcției de transfer este dată de

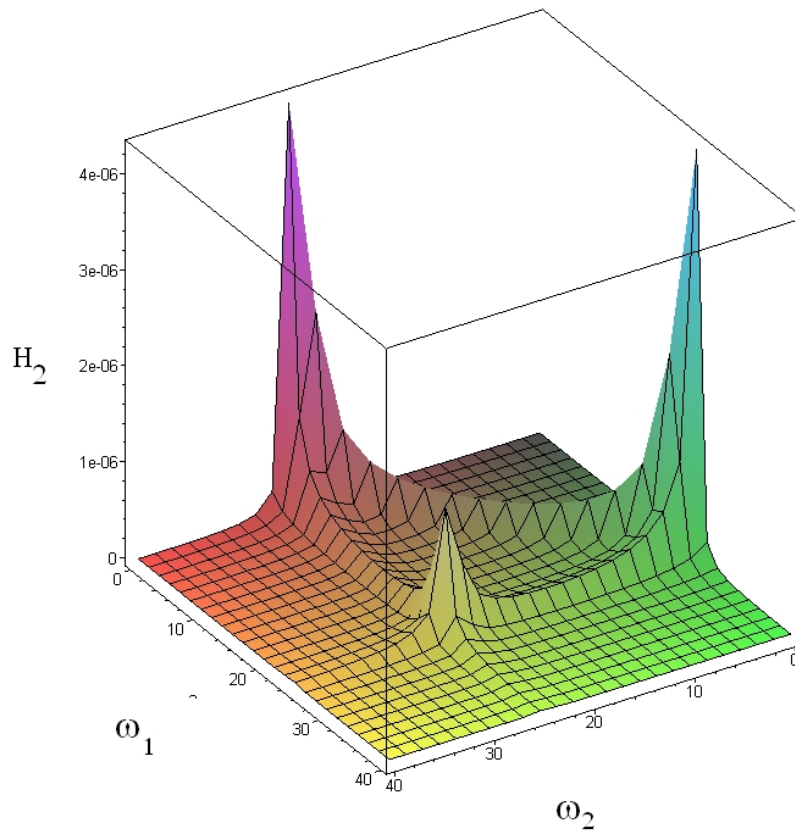
$\tan \varphi =$

$$\frac{(c\omega_1 q + pc\omega_2)(k - m(\omega_1 + \omega_2)^2) + (pq - c^2\omega_1\omega_2)(c\omega_1 + c\omega_2)}{(pq - c^2\omega_1\omega_2)(k - m(\omega_1 + \omega_2)^2) - (c\omega_1 q + pc\omega_2)(c\omega_1 + c\omega_2)} \quad (4.78)$$

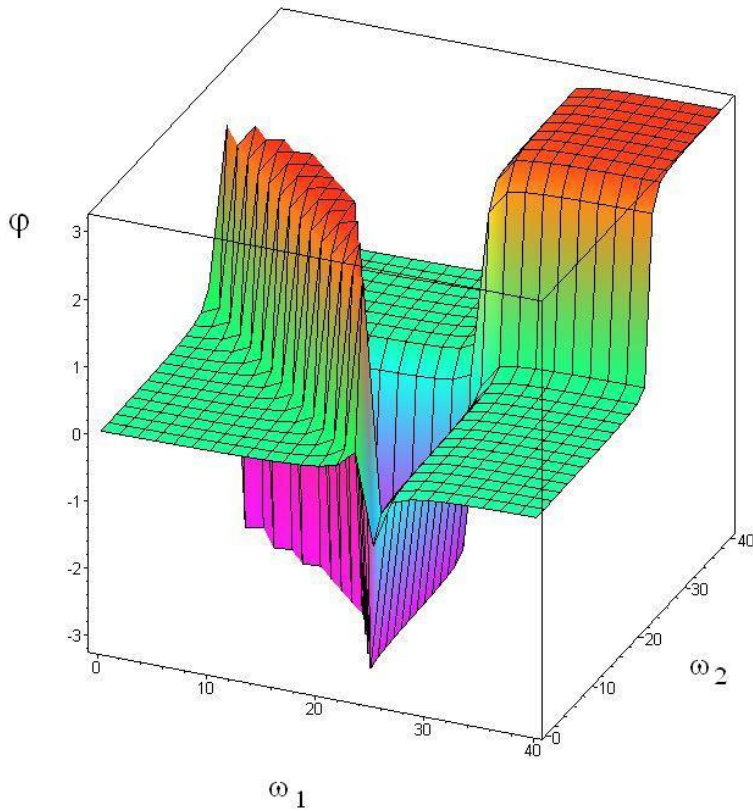
unde:

$$p = k - m\omega_1^2 \quad q = k - m\omega_2^2$$

Faza funcției de transfer de ordinul al doilea este reprezentată în Fig. 4.22. În fig. 4.23 este reprezentată forța elastică a sistemului, care are o caracteristică asimetrică puternică.



**Figura 4.21** Modulul funcției de transfer  $|H_2(\omega_1, \omega_2)|$  pentru sistemul vibrant (4.76)



**Figura 4.22 Faza funcției de transfer  $\tan \varphi = \Im(H_2)/\Re(H_1)$  ca funcție de  $(\omega_1, \omega_2)$  pentru sistemul vibrant (4.76)**

Funcția de transfer  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  este:

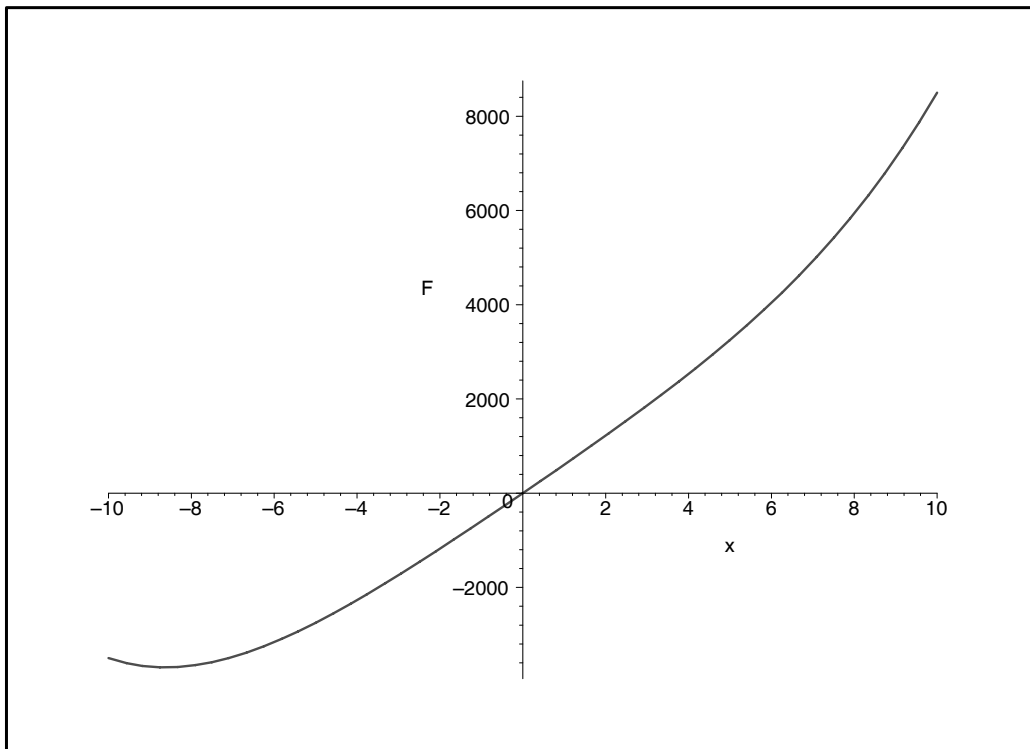
$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -2a_2 \times \frac{H_1(\omega_1)H_2(\omega_2, \omega_3) + H_1(\omega_2)H_2(\omega_1, \omega_3) + H_1(\omega_3)H_2(\omega_1, \omega_2)}{k - m(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 + c(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)i}, \quad (4.79)$$

Funcția de transfer de ordinul patru se poate scrie:

$$H_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \{-2a_2[H_1(\omega_1)H_3(\omega_2, \omega_3, \omega_4) + H_1(\omega_2)H_3(\omega_1, \omega_3, \omega_4)]\}$$



$$\begin{aligned}
& + H_1(\omega_3)H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_4) + H_1(\omega_4)H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + H_2(\omega_1, \omega_2)H_2(\omega_3, \omega_4) \\
& + H_2(\omega_1, \omega_3)H_2(\omega_2, \omega_4) + H_2(\omega_1, \omega_4)H_2(\omega_2, \omega_3)] - 24a_4H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_4)\} \\
& \times \frac{1}{k - m(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)^2 + i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)c}. \quad (4.80)
\end{aligned}$$



**Figura 4.23** Forța elastică  $F = kx + a + 2x^2 + a_4x^4$  pentru sistemul (4.76)

Forma explicită a funcției de transfer de ordinul 4 a fost calculată în Maple, însă, datorită formei complicate nu a fost prezentată aici.

Vom considera sistemul vibrant neliniar cu amortizare fracționară descris de ecuația de mișcare:

$$m\ddot{x} + cD_t^\mu x + kx + a_2x^2 + a_4x^4 = F_0 \cos \omega t \quad (4.81)$$

unde  $m$  este masa sistemului,  $c$  -este constanta de amortizare fracționară,  $k, a_2, a_4$  - constante elastice liniare și neliniare  $F_0$  este amplitudinea forței perturbatoare,  $\nu$  frecvența forței perturbatoare,  $\omega = 2\pi\nu$ . S-a notat  $D_t^\mu = {}_{-\infty}D_t^\mu$  operatorul de derivare fracționară de ordinul  $\mu$  unde este diferit de întreg ( $\mu \notin N$ ).

În acest caz funcția de transfer de ordinul întâi (liniară) este:

$$H_1(\omega_1) = \frac{1}{k - m\omega_1^2 + c\omega_1^\mu \cos \frac{\pi}{2} \mu + ic\omega_1^\mu \sin \frac{\pi}{2} \mu}.$$

Funcția de transfer de ordinul doi este:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) =$$

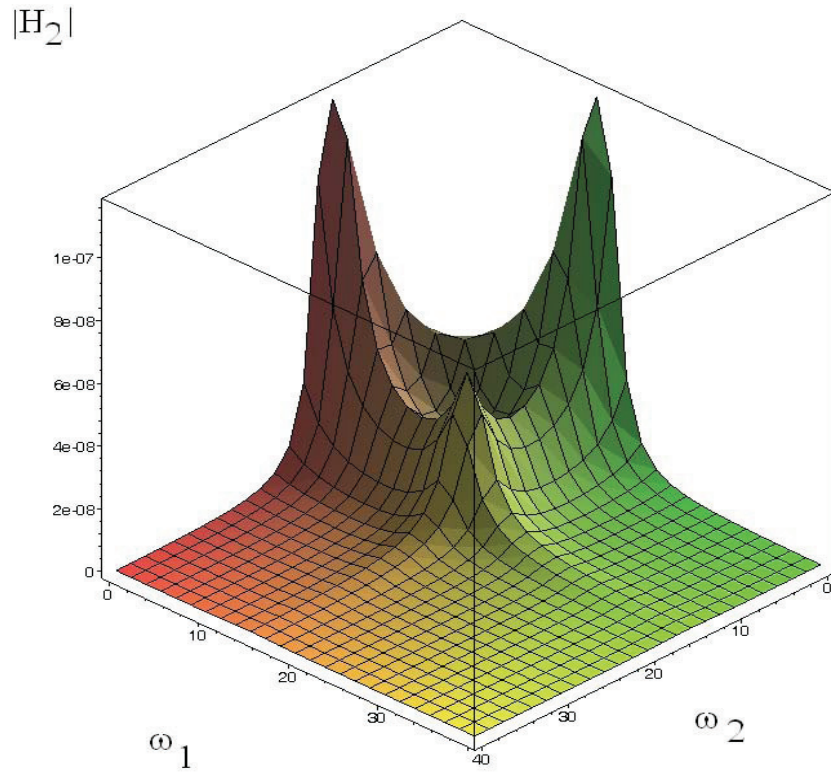
$$\frac{1}{(k - m\omega_1^2 + c\omega_1^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} + ic\omega_1^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2})(k - m\omega_2^2 + c\omega_2^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} + ic\omega_2^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2})} \\ \times \frac{-2a_2}{k - m(\omega_1 + \omega_2)^2 + c(\omega_1 + \omega_2)^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} + ic(\omega_1 + \omega_2)^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2}} \quad (4.83)$$

iar reprezentarea grafică a modului acesteia este dată în Fig. 4.24.

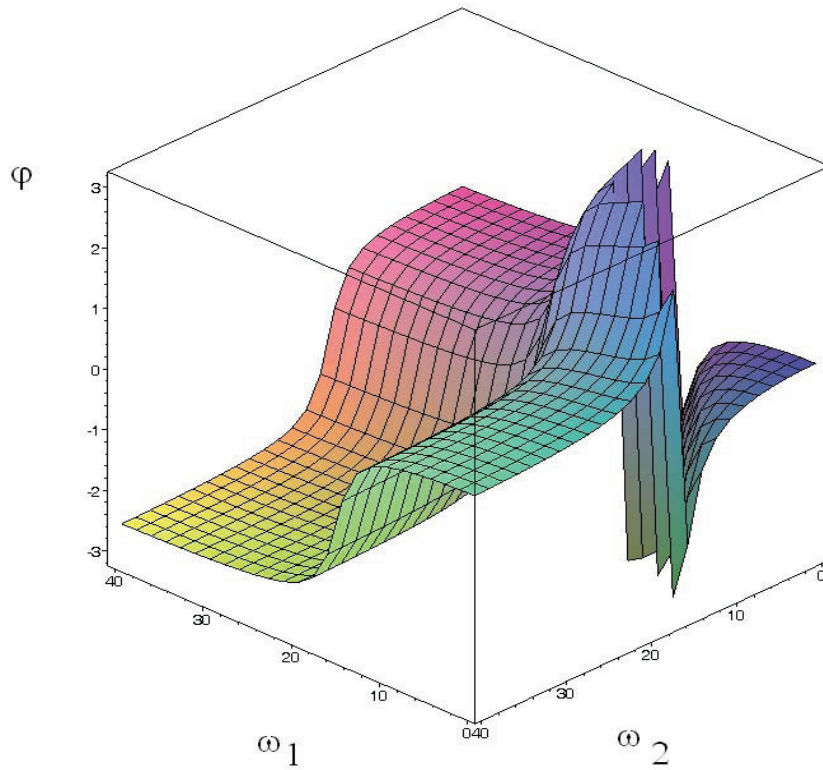
Faza  $\varphi$  a funcției de transfer este dată de

$$\tan \varphi = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2}}{(k - m(\omega_1 + \omega_2)^2 + c(\omega_1 + \omega_2)^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2})} \\ + \frac{[(k - m\omega_1^2 + c\omega_1^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2})\omega_2^\mu + (k - m\omega_2^2 + c\omega_2^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2})\omega_1^\mu]c \sin \frac{\pi\mu}{2}}{(k - m\omega_1^2 + c\omega_1^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2})(k - m\omega_2^2 + c\omega_2^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2})}. \quad (4.83)$$

În fig. 4.25 este reprezentată faza  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  corespunzătoare cazului (4.82).



**Figura 4.24** Modulul funcției de transfer  $|H_2(\omega_1, \omega_2)|$  pentru sistemul vibrant (4.83)



**Figura 4.25 Faza funcției de transfer  $\tan \varphi = \Im(H_2)/\Re(H_1)$  ca funcție de  $(\omega_1, \omega_2)$  pentru sistemul vibrant (4.83)**

Vom cauta soluții numerice pentru diferite valori ale parametrilor sistemului.

Pentru aceasta vom utiliza definiția Grünwald-Letnikov a derivatei de ordin fracționar:

$${}_a D_t^\mu x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^\mu} {}_a \Delta_t^\mu x(t), \quad (4.84)$$

unde:

$${}_a \Delta_t^\mu x(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{\Delta t} \rfloor} (-1)^j \binom{\mu}{j} x(t - j\Delta t) \quad (4.85)$$

unde apare coeficientul binomial generalizat:

$$\binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j+1)}$$

unde  $\Gamma$  este funcția Euler. S-a notat cu  $[x]$  - partea întregă a lui  $x$ .

Ecuția (4.81) se poate scrie cu diferențe finite. În acest sens vom considera pasul de integrare  $\Delta t$ . Vom lua:

$$a = 0, \quad \left[ \frac{t-a}{\Delta t} \right] = i, \quad t_i = i\Delta t,$$

unde  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , unde  $N$  reprezintă numărul total de puncte în care studiem mișcarea. Rezultă relația de recurență:

$$x_i = 2x_{i-1} - x_{i-2} + \Delta t^2 \left[ F_0 \cos \omega t_{i-1} - \frac{k}{m} x_{i-1} - \frac{a_2}{m} x_{i-1}^2 - \frac{a_4}{m} x_{i-1}^4 - \frac{c}{m} \frac{1}{\Delta t^\mu} \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j+1)} x(i-j-1) \right] \quad (4.86)$$

unde  $i = 2, 3, \dots, N$

Pentru rezolvarea problemei se aplică condițiile inițiale

$$x_0 = X_0 \quad v_0 = V_0$$

Pentru aplicarea relației de recurență (4.86) se calculează primul pas cu relațiile:

$$v_1 = v_0 + \Delta t \left[ F_0 \cos \omega t_0 - \frac{k}{m} x_0 - \frac{a_2}{m} x_0^2 - \frac{a_4}{m} x_0^4 \right]$$

$$x_1 = x_0 + v_1 \Delta t$$

Rezolvarea problemei s-a făcut în MathCAD. Prezintă o soluție obținută pentru următoarele valori ale constantelor:

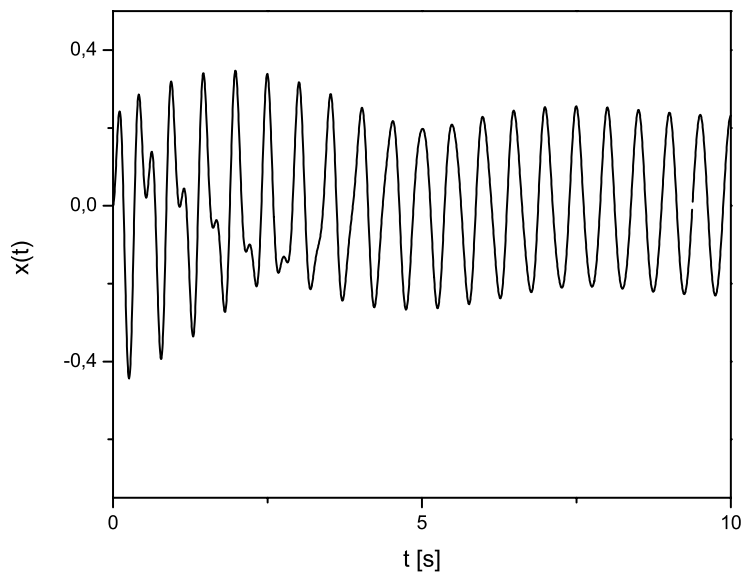
$$m = 1 \text{ kg}, \quad c = 0.15 \text{ Ns/m}, \quad k = 600 \text{ N/m}, \quad a_2 = 20 \text{ N/m}^2,$$

$$a_4 = 0.4 \text{ N/m}^4, \quad F_0 = 100 \text{ N}, \quad \nu = 2 \text{ Hz}.$$

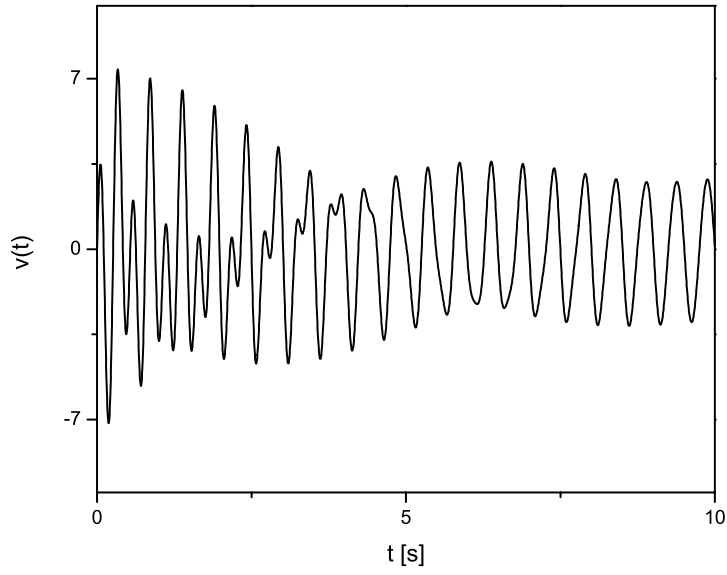
S-au utilizat condițiile inițiale  $x(0), v(0)$  și un număr de puncte  $N$  și o durată de integrare  $T$  :

$$x(0) = 0 \quad v(0) = 0, \quad N = 3000, \quad T = 10s.$$

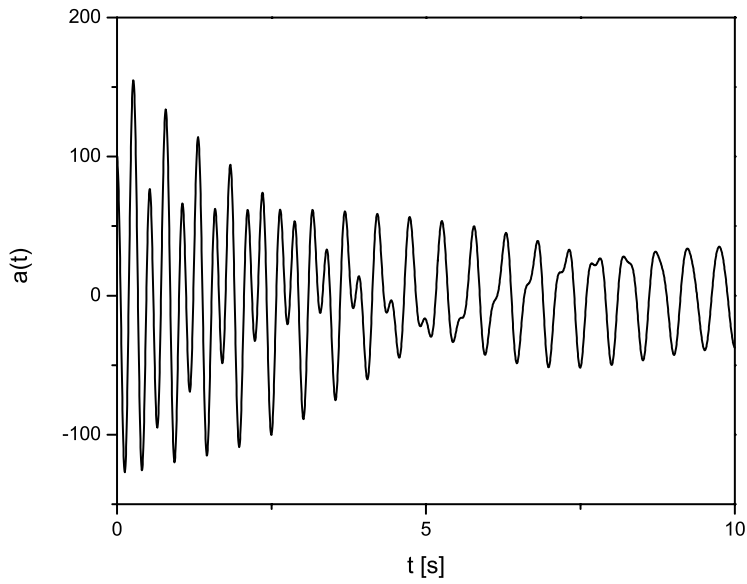
În figura 4.26 este reprezentată pentru acest caz diagrama elongației instantanee  $x(t)$ , în figura 4.27 diagrama vitezei  $v(t)$ , iar în figura 4.28 diagrama accelerației  $a(t)$ .



**Figura 4.26** Diagrama  $x(t)$



**Figura 4.27** Diagrama  $v(t)$



**Figura 4.28** Diagrama  $a(t)$

## 5. IDENTIFICAREA UNUI MATERIAL CU CARACTERISTICĂ NELINIARĂ ȘI AMORTIZARE FRAȚIONARĂ

### 5.1 Proprietățile mecanice ale spumelor poliuretanic

Spumele poliuretanic au numeroase aplicații datorită proprietăților lor izolatoare mecanice și termice [27]. Acest lucru se datorează unui comportament anelastic puternic neliniar.

Datorită modernizării proceselor de producție, aceste materiale deosebite își găsesc în ziua de astăzi o mulțime de întrebuințări, cum ar fi la scaunele de automobil [128].

Recent s-a constatat și prezența unor proprietăți de amortizare fracționară [26, 77, 85, 138, 120].

Datorită numeroaselor aplicații, este importantă investigarea proprietăților mecanice ale acestor materiale [119, 128].

Abordarea studiului unui sistem vibrant cu neliniarități și amortizare fracționară este mai dificilă și ne vom ocupa de el în continuare.

Ne vom ocupa în continuare de construirea unui model de sistem vibrant cu neliniarități și amortizare fracționară și de identificarea acestuia din date experimentale.

În cazul sistemelor fracționare fără neliniarități, identificarea parametrilor sistemului se face ușor în domeniul frecvență [102, 82].

Trebuie să mai spunem că proprietățile materialelor depind sensibil de temperatura și umiditatea la care sunt supuse.

În aceste materiale apar fenomene ca relaxarea tensiunilor, fluaj, precum și atenuarea și disiparea undelor elastice. Pentru ultima proprietate se pot utiliza cu rezultate foarte bune ca material fonoabsorbant.

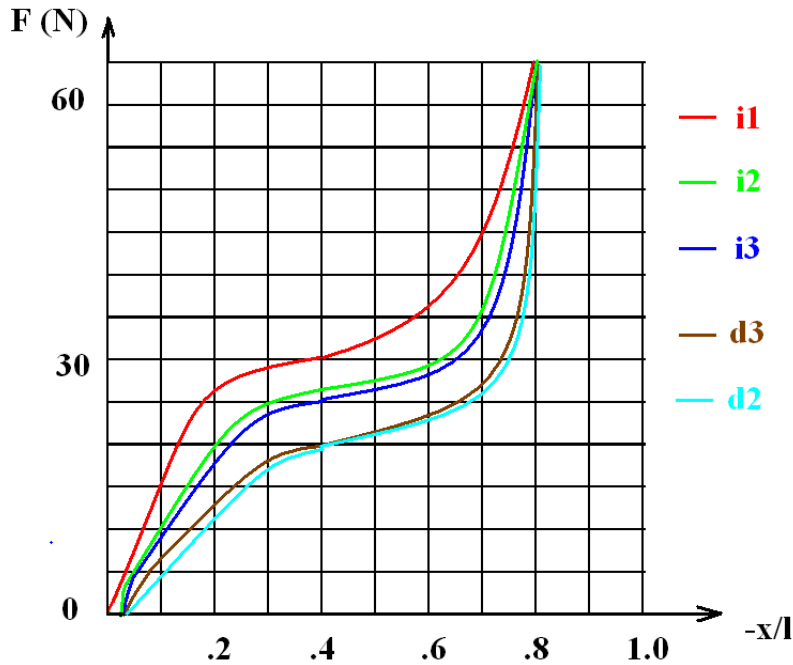
Este de asemenea de remarcat că spumele poliuretanic au un comportament cu o caracteristică histeretică la deformație.

La spumele poliuretanic a fost pus în evidență fenomenul de electrostricțiune, precum și de piezoelectricitate.

În figura 5.1 este prezentată dependența forței de încărcare la compresiune ( $F$ ) în funcție de comprimarea specifică ( $-x/l$ ). Curbele caracteristice la prima, a doua și a treia încărcare au fost notate cu  $i1, i2, i3$  iar la descărcare cu  $d2, d3$ .

Aceste curbe caracteristice corespund unor solicitări cuasistatice, la care se poate remarca și un comportament manifest neliniar.





**Figura 5.1**

La aceste materiale, în aproximația liniară, deformația specifică la o tensiune constantă se poate scrie ca o suprapunere de răspunsuri de solid anelastic ideal:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N a_i e^{-\alpha_i t}$$

unde  $a_i, \alpha_i$  sunt constante reale pozitive.

Rezultă de aici că răspunsul în tensiune  $\sigma(t)$  la o perturbare  $\varepsilon(t)$  se poate scrie:

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^N a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau], \quad (5.1)$$

$E$  fiind modulul de elasticitate longitudinal.

## 5.2 Configurația experimentală

Ne-am propus să studiem comportarea dinamică a spumei poliuratanice la întindere-compresiune.

## 146 Identificarea unui material cu caracteristică neliniară și amortizare fracționară - 5

Investigarea materialului s-a făcut după o schemă prezentată în figura 5.2. Materialul studiat, format de un paralelipiped de spumă poliuretanică (SP) este așezat pe o placă metalică pe piesa mobilă a unui vibrator electrodinamic. Am folosit un vibrator de 50 W, produs de RFT.

Pentru a evita deplasările laterale și solicitările compuse piesa de spumă poliuretanică a fost fixată pe piesa mobilă a vibratorului prin intermediul unei tije fixate cu filet pe platanul vibratorului care străbate proba printr-o gaură cu diametru egal cu al tije.

Deoarece excitarea sistemului se face cinematic, pentru măsurarea acesteia se folosește un accelerometru  $a_2$  de tip KD-35 (produs de MMF) fixat cu un suport magnetic, semnalul fiind amplificat cu un amplificator de sarcină 2836 produs de Bruel & Kjaer. Amplificatorul de sarcină fiind dotat cu circuite integratoare, se poate măsura atât accelerația, cât și viteza, sau poziția instantanee.

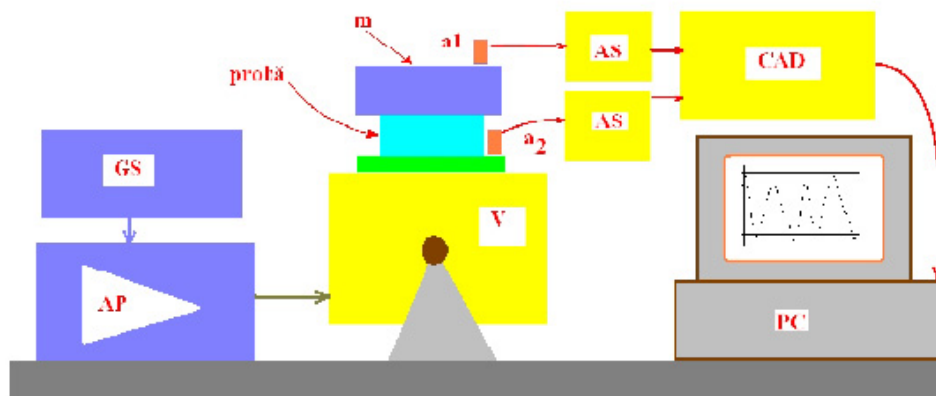


Figura 5.2

Excitarea vibratorului se face cu un amplificator de putere LV102 (produs de MMF) de 50 W (AP) căruia i se aplică un semnal de excitare de la un generator de semnal de precizie DVM20FGCN produs de Welleman (G).

Pe paralelipipedul de material se așează o masă  $m$ , care formează cu blocul de spumă un sistem vibrant amortizat. Pe figură s-a notat deplasarea, viteza și accelerația masei  $m$ .

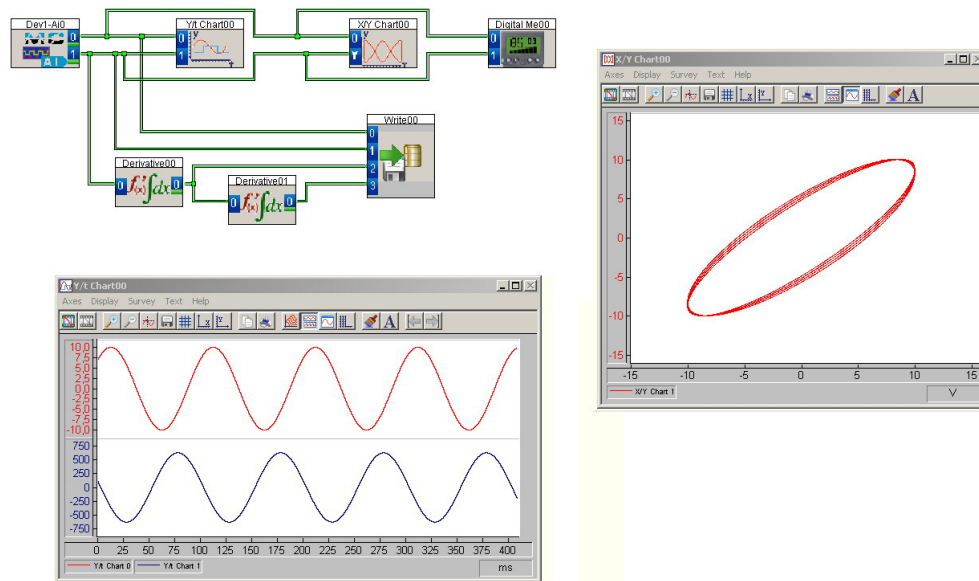
Accelerația masei se măsoară cu un accelerometru  $a_1$  de tip KD35 (MMF) fixat de masă cu un suport magnetic. Semnalul de la accelerometru a fost amplificat cu amplificatorul de sarcină de tip 2836 Bruel & Kjaer.

Pentru a se asigura ca mișcarea masei și deformarea piesei de studiat să fie unidimensională a fost prevăzută o tijă similară celei fixate de platanul vibratorului.

Semnalele de accelerație au fost introduse în calculator cu ajutorul sistemului de achiziție CAD de USB 1608 FS (Measurement Computing) cu opt canale de intrare și unul de ieșire. Precizia de cuantificare a acestui sistem este de 16 biți pe canal, și o frecvență de eșantionare reglabilă până la 250 kHz.

Pentru etalonarea accelerometrelor s-a folosit dispozitivul de etalonare RFT 11035.

Achiziția semnalului s-a făcut cu ajutorul programului de achiziție DasyLab. Schema de măsură este prezentată în figura 5.3.



**Figura 5.3**

S-au înregistrat într-un fișier de date atât accelerațiile măsurate de  $a_1, a_2$  precum și viteza și deplasarea masei  $m$  ca funcție de timp. Programul permite vizualizarea celor două accelerații precum și diagrama Lissajous formată de cele două accelerații deoarece poate da indicații intuitive precum modificarea amortizării prin schimbarea ariei delimitate de curbă.

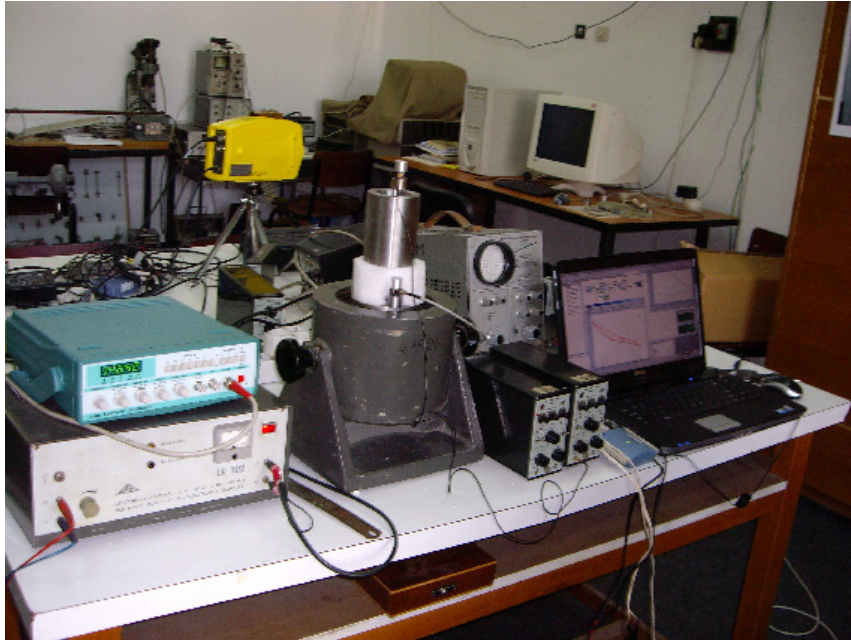
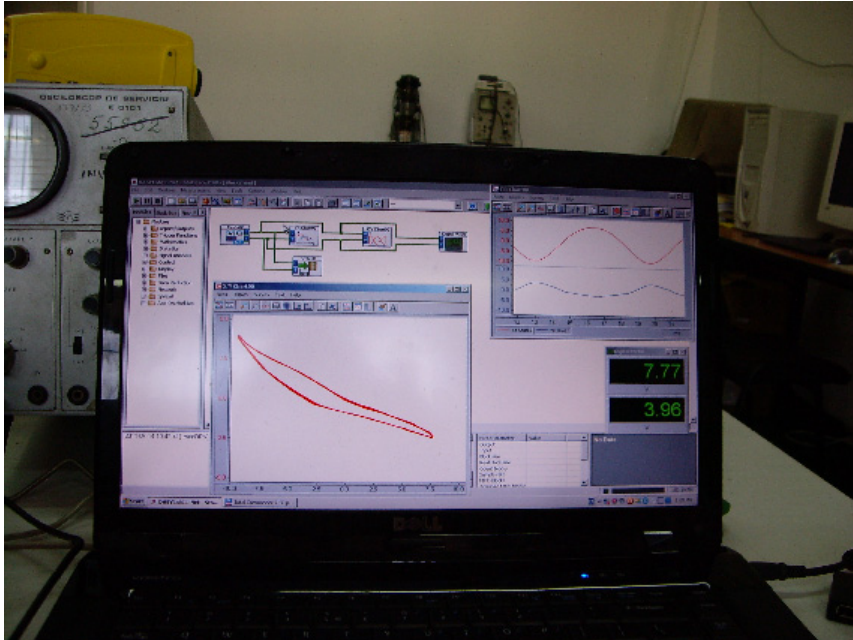


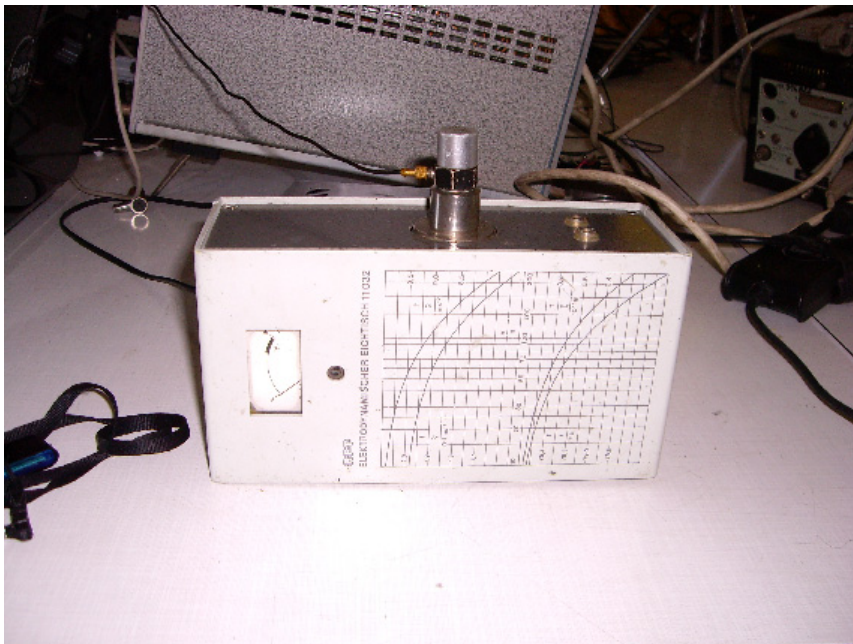
Figura 5.4



Figura 5.5



**Figura 5.6**



**Figura 5.7**

În figura 5.4 este prezentată imaginea standului experimental, iar în figura 5.5 este prezentată poziționarea accelerometrelor  $a_1, a_2$ .

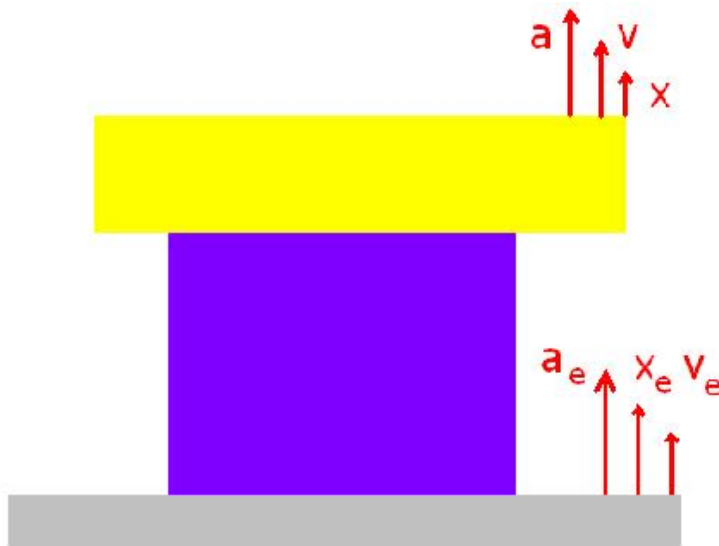
150 Identificarea unui material cu caracteristică neliniară și amortizare fracționară - 5

În figura 5.7 este prezentată imaginea calibratorului, iar în figura 5.6 este prezentat afișajul sistemului de achiziție de date.

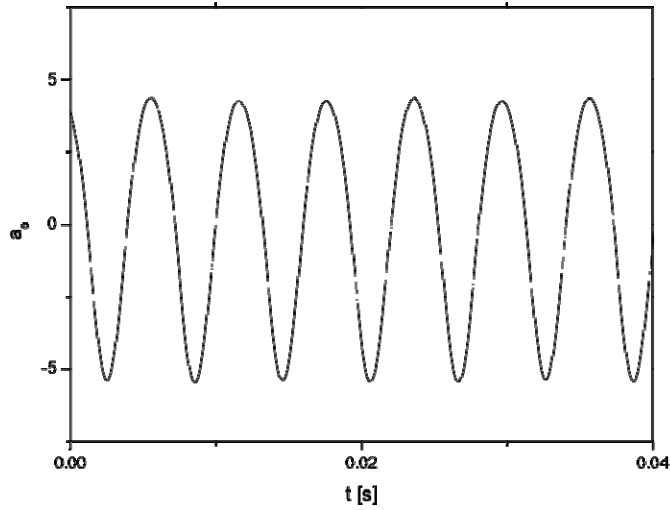
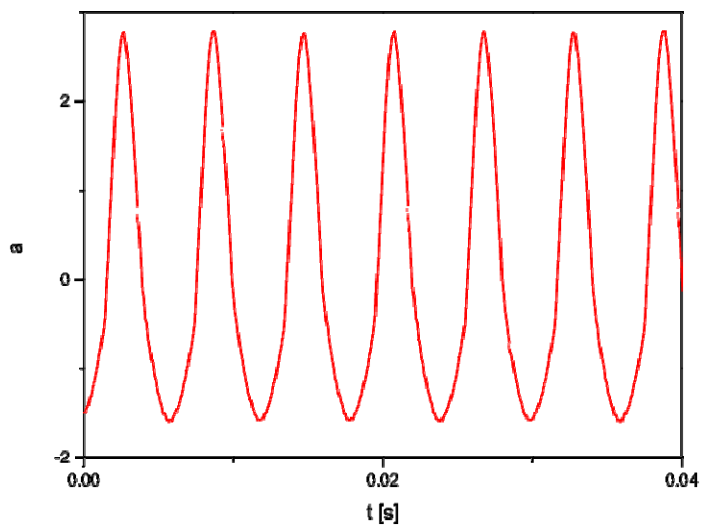
A fost folosită o masă  $m = 2.3$  kg. Frecvența de eșantionare a fost aleasă fie  $\nu_e = 5000$  Hz, sau  $\nu_e = 10000$  Hz pentru a putea reda un număr cât mai mare de armonici ale semnalului și a fost utilizat un număr foarte mare de puncte ( $N > 10^5$ ) pentru a obține spectre cu rezoluție cât mai bună.

Materialul a fost investigat în domeniul frecvențelor joase, domeniu în care neliniaritățile se manifestă vizibil.

Vom nota cu  $x, v, a$  respectiv  $x_o, v_o, a_o$  deplasarea, viteza și accelerația masei  $m$  din poziția de echilibru, respectiv a excitatorului (vezi figura 5.8).



**Figura 5.8**

**Figura 5.9****Figura 5.10**

În figura 5.9 este prezentată accelerația excitației  $a_e$  iar figura 5.10 este prezentată accelerația  $a$  a răspunsului pentru excitația cu frecvența de  $\nu = 165.7$  Hz.

152 Identificarea unui material cu caracteristică neliniară și amortizare fracționară - 5

Se observă că semnalul de răspuns are distorsiuni de liniaritate, alternanța pozitivă și negativă având curburi diferite.

În figura 5.11 este prezentat spectrul de amplitudine a accelerației  $a$ .

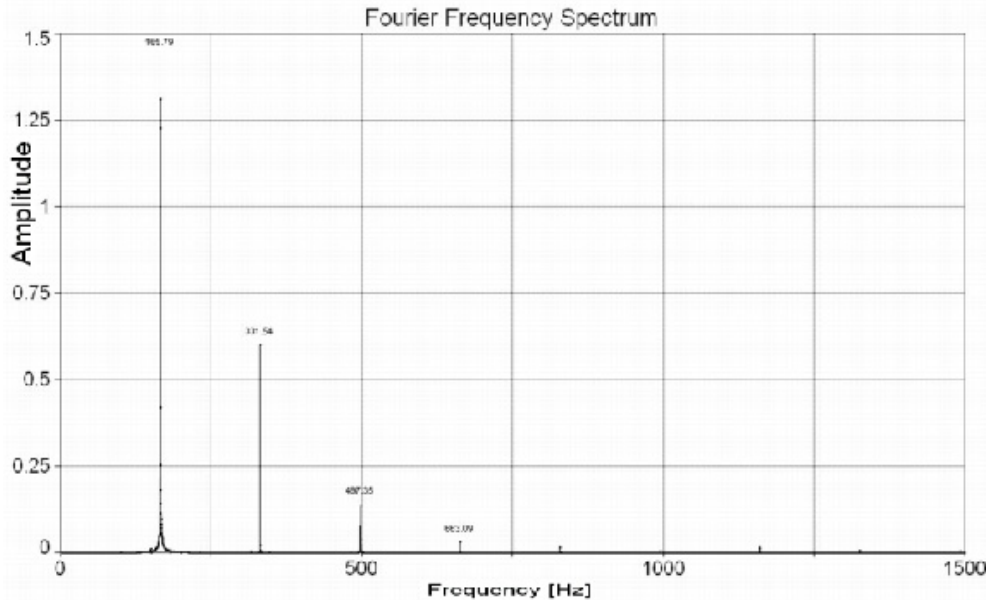


Figura 5.11

Dacă se ia în considerare caracteristica neliniară a materialului, și se consideră în plus că în material se produc și procese de amortizare fracționară, ecuația de mișcare a masei  $m$  este:

$$m\ddot{x} + \lambda_{\mu} D^{\mu} x + kx + k'x^3 + k''x^5 - \kappa \int_0^t \sum_{i=1}^N a_n e^{-\alpha_i(t-\tau)} x(\tau) d\tau = F(t), \quad (5.2)$$

unde  $m$  este masa sistemului vibrant,  $k, k', k''$  și  $\kappa$  sunt parametri de determinat, reprezentând constante elastice. De asemenea  $a_i$  și  $\alpha_i$  (unde  $i = 1, 2, \dots, N$ ) sunt parametri de determinat.

$F(t)$  reprezintă forțele de excitație exterioare aplicate masei  $m$ , iar  $D^{\mu}$  este operatorul de derivare fracționară de ordinul  $\mu$ , unde  $\mu > 0$  este un număr neîntreg.

La frecvența de excitație de  $\nu = 68.49$  Hz răspunsul în accelerație este dat în Figura 5.12, iar spectrul de amplitudine al accelerației  $a$  este prezentat în Figura 5.13.

În figura 5.13 amplitudinea armonicilor a fost notată pe figură. De asemenea trebuie să notăm și faptul că în acest caz amplitudinea componentei fundamentale din spectru este mai mică decât amplitudinea primei armonici.



La frecvența de excitație de  $\nu = 254.84$  Hz răspunsul în accelerație este dat în Figura 5.14, iar spectrul de amplitudine al accelerației  $a$  este prezentat în Figura 5.15.

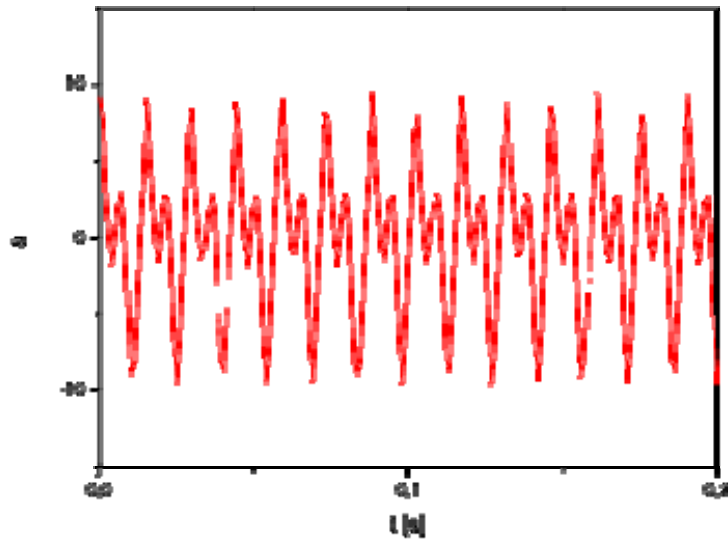


Figura 5.12

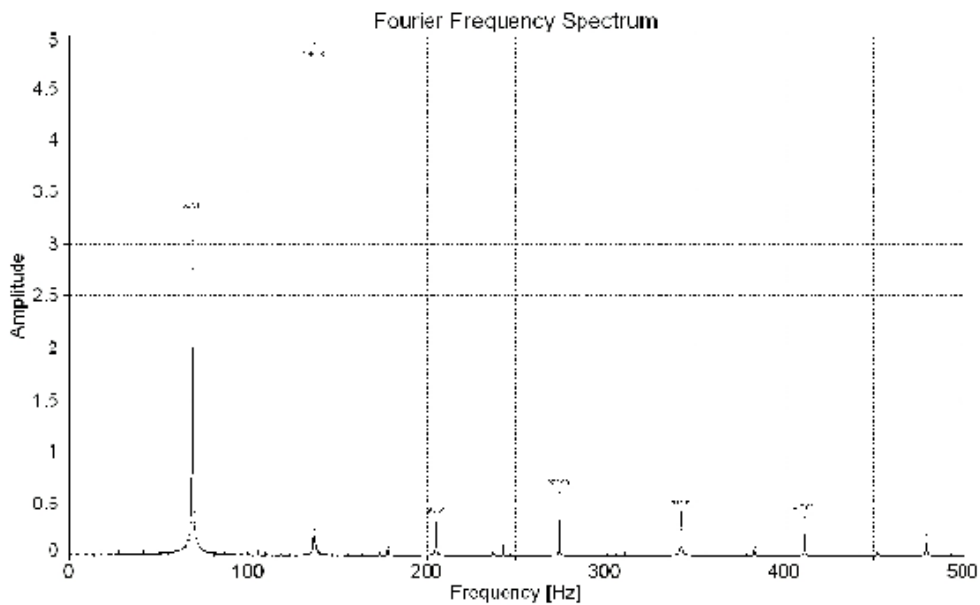


Figura 5.13

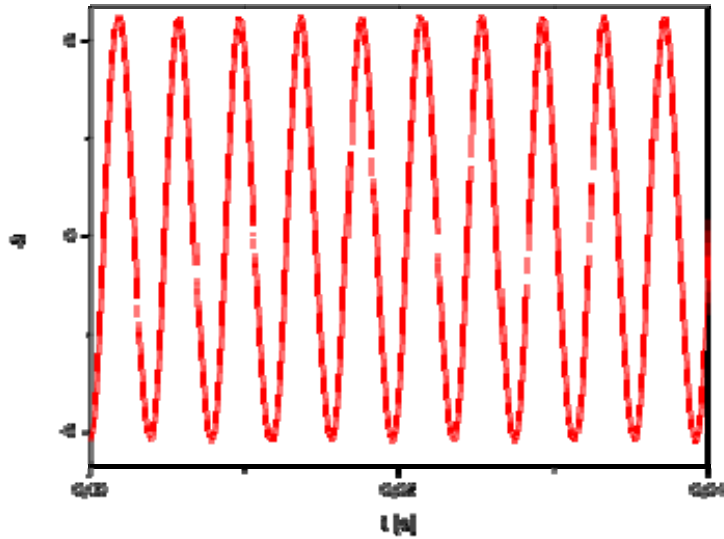


Figura 5.14

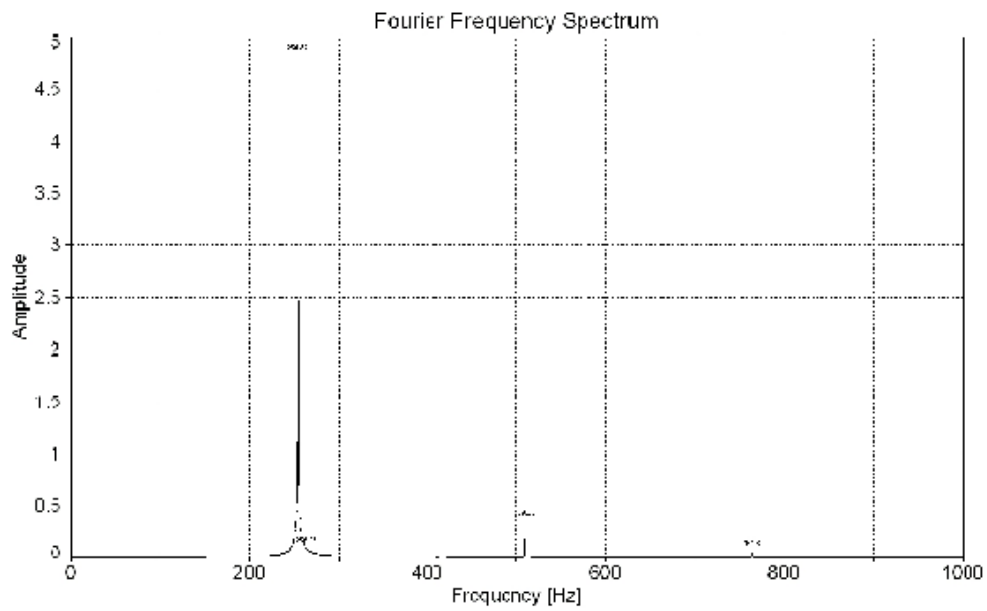


Figura 5.15

Din figura 5.14 și 5.15 se observă că distorsiunile de la neliniaritate ale accelerației sunt mici, lucru reflectat și în spectru, care conține doar o armonică cu amplitudine mică.

Trebuie să mai subliniem că înregistrările au fost facute cu mare acuratețe, deoarece la experimente de acest tip pot apărea și false neliniarități, cum ar fi cele legate de defecțiuni în cablurile de legătură ale senzorilor, datorită înclinării de la verticală a sistemului vibrant, când apar deplasări laterale ale bobinei mobile a vibratorului, care pot lovi bobina de sistemul magnetic, neliniarități produse de amplitudini mari ale bobinei mobile a vibratorului, în afara domeniului de liniaritate.

Pentru a face să se manifeste neliniaritățile materialului studiat, amplitudinea excitării trebuie aleasă suficient de mare ca să se depășească domeniul micilor deformații, iar pe de altă parte amplitudinea trebuie aleasă mai mică decât cea care produce fenomenele de neliniaritate externă discutate anterior. Trebuie să spunem că am schimbat mereu între ei cei doi accelerometri pentru a vedea dacă fenomenul măsurat este același. S-a avut grijă de asemenea ca să se asigure verticalitatea mișcării sistemului, și s-a asigurat rigiditatea fixării accelerometrilor de piese, precum și a mesei pe care s-a făcut experimentul.

Trebuie de asemenea să notăm că măsurătorile s-au făcut pe o plajă mare de frecvențe, până s-a stabilit domeniul de frecvențe și amplitudini în care neliniaritățile sunt manifeste.

În continuare vom prezenta o metodă de identificare a parametrilor modelului descris de ecuația de mișcare:

$$m\ddot{x} + \lambda D^\mu x + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_5 x^5 = F_s \sin \omega t + F_c \cos \omega t, \quad (5.3)$$

unde  $m$  este masa seismică a sistemului,  $\lambda$  constanta de amortizare fracționară,  $k_1, k_2, \dots$  sunt componentele forței elastice neliniare,  $\mu$  este ordinul derivatei fracționare, iar  $\omega = 2\pi\nu$  este pulsația excitației.

Trebuie de asemenea să notăm faptul că am ales forța de excitație cu componentă în  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  deoarece prin analiză Fourier declanșarea momentului măsurării nu se poate face riguros, apărând în spectrul semnalului de excitație atât o componentă reală (datorită cosinusului), precum și una imaginară (în sinus).

În cele ce urmează vom considera că derivarea fracționară se face în sensul Riemann-Liouville la care  $a = -\infty$  adică  $D^\mu = D_{t, -\infty}^\mu$ , la care sunt valabile:

$$D^\mu \sin(\omega t) = \omega^\mu \sin(\omega t + \pi\mu/2) \quad D^\mu \cos(\omega t) = \omega^\mu \cos(\omega t + \pi\mu/2).$$

Pentru identificare vom aplica metoda balanței armonice. Vom nota dezvoltările în serie Fourier ale componentelor din (5.3):

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^r \cos n\omega t + A_n^i \sin n\omega t) + A_0^r$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(n\omega)^2} (A_n^r \cos n\omega t + A_n^i \sin n\omega t) + A_0^r = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^r \cos n\omega t + X_n^i \sin n\omega t) + X_0^r$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^r \cos n\omega t + B_n^i \sin n\omega t) + A_0^r$$

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^r \cos n\omega t + C_n^i \sin n\omega t) + C_0^r$$

$$x^4 = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^r \cos n\omega t + D_n^i \sin n\omega t) + D_0^r$$

$$x^5 = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^r \cos n\omega t + E_n^i \sin n\omega t) + E_0^r$$

Vom dezvolta:

$$n^\mu \omega^\mu \sin(\omega t + \pi\mu/2) = n^\mu \omega^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos n\omega t + n^\mu \omega^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} \sin n\omega t$$

$$\omega^\mu \cos(\omega t + \pi\mu/2) = n^\mu \omega^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} \cos n\omega t - n^\mu \omega^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \sin n\omega t.$$

Înlocuind aceste dezvoltări în (5.3) și separând termenii de același ordin în  $\cos n\omega t$  și  $\sin n\omega t$ , rezultă:

$$\begin{aligned} m A_n^r - \lambda n^\mu \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_n^r - \lambda n^\mu \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_n^i \\ - k_1 \frac{1}{n^2 \omega^2} A_n^r + k_2 B_n^r + k_3 C_n^r + k_4 D_n^r + k_5 E_n^r = m a_0^r \delta_{n1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} m A_n^i - \lambda n^\mu \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_n^i + \lambda n^\mu \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_n^r \\ - k_1 \frac{1}{n^2 \omega^2} A_n^i + k_2 B_n^i + k_3 C_n^i + k_4 D_n^i + k_5 E_n^i = m a_0^i \delta_{n1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

relație valabilă pentru  $n = 1, 2, 3, \dots$ . S-a notat cu  $\delta_{nm}$  simbolul lui Kronecker (unde  $\delta_{11} = 1$  și  $\delta_{n1} = 0$  dacă  $n \neq 1$ ).

În ecuațiile (5.4) și (5.5) necunoscutele sunt  $\lambda, \mu, k_1, k_2, \dots, k_5$ . S-a văzut că  $m = 2.3$  kg, iar componentele spectrale  $A_n^{r,i}, B_n^{r,i}, \dots, a_0^{r,i}$  se determină din analiză Fourier.

Deoarece la frecvențe  $\nu > 200$  Hz, neliniaritățile sunt neglijabile, putem scrie, pentru  $n = 1$ :

$$-\lambda\omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_1^r - \lambda\omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_1^i - k_1 \omega^2 A_1^r = ma_0^r - mA_1^r \quad (5.6)$$

$$-\lambda\omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_1^i + \lambda\omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_1^r - k_1 \omega^2 A_1^i = ma_0^i - mA_1^i \quad (5.7)$$

Rezultă din cele două relații:

$$\frac{A_1^r \tan \pi\mu/2 + A_1^i}{\tan \pi\mu/2 A_1^i - A_1^r} = \frac{ma_0^r - mA_1^r + k_1 \omega^2 A_1^r}{ma_0^i - mA_1^i + k_1 \omega^2 A_1^i}$$

De unde rezultă:

$$k_1 = m\omega^2 \frac{(a_0^r - A_1^r)(yA_1^i - A_1^r) - (a_0^i - A_1^i)(yA_1^r + A_1^i)}{A_1^i(yA_1^r + A_1^i) - A_1^r(yA_1^i - A_1^r)} \quad (5.8)$$

În ultima relație am notat:

$$y = \tan \frac{\pi\mu}{2}$$

Dacă se aplică relația (5.8) pentru două frecvențe din domeniul la care sistemul răspunde armonic se poate determina  $x = \tan \frac{\pi\mu}{2}$ , iar apoi  $k_1$ .

Vom nota pentru cele două armonici:  $\omega, A_1^r = \alpha_r, A_1^i = \alpha_i, a_0^r = \varepsilon_r, a_0^i = \varepsilon_i$ , respectiv:  $\Omega, A_1^r = \beta_r, A_1^i = \beta_i, a_0^r = \rho_r, a_0^i = \rho_i$ . Rezultă ecuația în  $y$ :

$$\omega^2 \frac{(\varepsilon_r - \alpha_r)(y\alpha_i - \alpha_r) - (\varepsilon_i - \alpha_i)(y\alpha_r + \alpha_i)}{\alpha_i(y\alpha_r + \alpha_i) - \alpha_r(y\alpha_i - \alpha_r)} =$$

$$= \Omega^2 \frac{(\rho_r - \beta_r)(y\beta_i - \beta_r) - (\rho_i - \beta_i)(y\beta_r + \beta_i)}{\beta_i(y\beta_r + \beta_i) - \beta_r(y\beta_i - \beta_r)} \quad (5.9)$$

Validitatea ultimei relații se poate verifica din faptul că  $x$  nu depinde de constantele sistemului fizic studiat.

Rezultă soluția  $x(t)$ :

$$y = \frac{z(\beta_i^2 + \beta_r^2)(\varepsilon_r \alpha_r - \alpha_r^2 + \alpha_i \varepsilon_i - \alpha_i^2) - (\alpha_i^2 + \alpha_r^2)(\beta_r \rho_r - \beta_r^2 + \rho_i \beta_i - \beta_i^2)}{z(\beta_i^2 + \beta_r^2)(\alpha_i \varepsilon_r - \varepsilon_i \alpha_r) + (\alpha_i^2 + \alpha_r^2)(\rho_i \beta_r - \beta_i \rho_r)} \quad (5.10)$$

unde s-a notat:

$$z = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

Rezultă în final:

$$\mu = \frac{2}{\pi} \arctan y. \quad (5.11)$$

$$k_1 = m\omega^2 \frac{(\varepsilon_r - \alpha_r)(x\alpha_i - \alpha_r) - (\varepsilon_i - \alpha_i)(x\alpha_r + \alpha_i)}{\alpha_i(x\alpha_r + \alpha_i) - \alpha_r(x\alpha_i - \alpha_r)}, \quad (5.12)$$

$$\lambda = \frac{m\varepsilon_i - m\alpha_i + k_1 \omega^2 \alpha_i}{\omega^{(\mu-2)}(\cos \pi\mu 2\alpha_r - \sin \pi\mu 2\alpha_i)} \quad (5.13)$$

Vom aplica metoda pe măsurătorile experimentale făcute. Pentru determinarea lui  $\mu$  s-au măsurat accelerațiile  $a_0$  și  $a$  la două frecvențe  $V_{1,2}$ . S-a obținut prin analiză Fourier:

$V$	$a_0$	$\varphi$	$a$	$\theta$
343.350497	2.50066506	1.04811187	2.92698751	4.02522429
317.125822	3.52144957	2.43641878	3.08982945	5.39309991

**Tabelul 5.1**

Rezultă componentele reale și imaginare:

$\omega$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_i$	$\alpha_r$	$\alpha_i$
2157.334798	2.166781765	1.248351923	-2.262700941	-1.856728396
$\Omega$	$\rho_r$	$\rho_i$	$\beta_r$	$\beta_i$
1992.560306	2.282484741	-2.681579848	-2.401185240	1.944570768

**Tabelul 5.2**

Rezultă după calcule:

$$\mu = 1.67, \quad \lambda = 26 \text{ N s}^\mu/\text{m} \quad k_1 = 1375 \text{ N/m}$$

Trebuie să observăm că valorile obținute în literatură pentru  $\mu$  la spume poliuretanică sunt cuprinse între  $0.5 < \mu < 2$ . Valorile pentru  $k_i$  și  $\lambda$  sunt dependente de dimensiunile geometrice ale probei de material utilizat.

Pentru evaluarea celorlalte constante ( $k_2, k_3, \dots$ ) este necesar să utilizăm informațiile măsurate din armonicile răspunsului  $a$  în accelerație la diferite frecvențe pentru care se aplică relațiile (5.4) și (5.5).

Deoarece frecvența fundamentală și prima armonică au contribuție semnificativă, vom exprima sistemul de ecuații pentru determinarea  $k_2, k_3, k_4$  în funcție de aceste componente spectrale:

$$\begin{bmatrix} B_1^r & C_1^r & D_1^r & E_1^r \\ B_1^i & C_1^i & D_1^i & E_1^i \\ B_2^r & C_2^r & D_2^r & E_2^r \\ B_2^i & C_2^i & D_2^i & E_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} m(a_0^r - A_1^r) + \frac{k_1}{\omega^2} A_1^r + \lambda \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_1^r + \lambda \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_1^i \\ m(a_0^i - A_1^i) + \frac{k_1}{\omega^2} A_1^i + \lambda \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_1^i - \lambda \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_1^r \\ -mA_2^r + \frac{k_1}{4\omega^2} A_2^r + \lambda \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_2^r + \lambda \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_2^i \\ -mA_2^i + \frac{k_1}{4\omega^2} A_2^i + \lambda \omega^{(\mu-2)} \sin \frac{\pi\mu}{2} A_2^i - \lambda \omega^{(\mu-2)} \cos \frac{\pi\mu}{2} A_2^r \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

160 Identificarea unui material cu caracteristică neliniară și amortizare fracționară - 5

Vom aplica relațiile (5.14) pentru cazul frecvenței de excitație  $\nu = 68.49105$  Hz, pentru care răspunsul în accelerație  $a(t)$  și spectrul accelerației au fost prezentate în Fig. 5.12 și 5.13.

Pentru excitație vom avea componentele accelerației:

$\nu$	$a_0^r$	$a_0^i$
68.49105107	-1.998416960	-1.349909115

**Tabelul 5.3**

Rezultă pulsația de excitație:  $\omega = 430.3419657$  rad/s.

Prin integrare numerică dublă din răspunsul corespunzător în accelerație  $a(t)$  (Fig. 5.12), s-a obținut deplasarea  $x(t)$ .

Integrând de două ori  $a(t)$  exprimat ca serie Fourier cu  $M$  armonici se obține:

$$x_n = x(t_n) = \sum_{m=1}^M \left[ -\frac{1}{(m\omega)^2} A_m^r \cos m\omega t_n - \frac{1}{(m\omega)^2} A_m^i \sin m\omega t_n \right],$$

unde  $t_n = nt_1$ , iar  $n = 0, 1, 2, \dots$

Trebuie să subliniem că estimarea unor valori cât mai exacte ale componentelor spectrale s-a făcut cu metoda celor mai mici pătrate.

Diagrama  $x(t)$  și spectrul corespunzător sunt prezentate în Fig. 5.16 și 5.17. Din spectru se pot obține componentele reale și imaginare ale diferitelor armonici  $A_k^{r,i}$  (unde  $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Se pot calcula valorile instantanee ale  $x^2(t)$ ,  $x^3(t)$ ,  $x^4(t)$ ,  $x^5(t)$ , și prin transformare Fourier se pot obține componentele spectrale reale și imaginare ale diferitelor armonici  $B_k^{r,i}$ ,  $C_k^{r,i}$ ,  $D_k^{r,i}$  și  $E_k^{r,i}$  (unde  $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

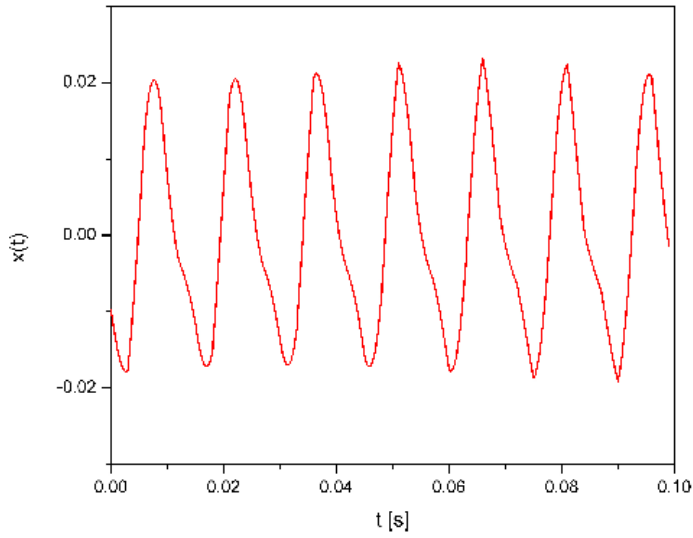
Pulsațiile armonicilor sunt  $\omega_m = m\omega = 430.3419657m$  rad/s, (unde  $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

Diagrama semnalului  $x^2(t)$  este prezentată în Fig. 5.18 iar spectrul corespunzător în Fig. 5.19.

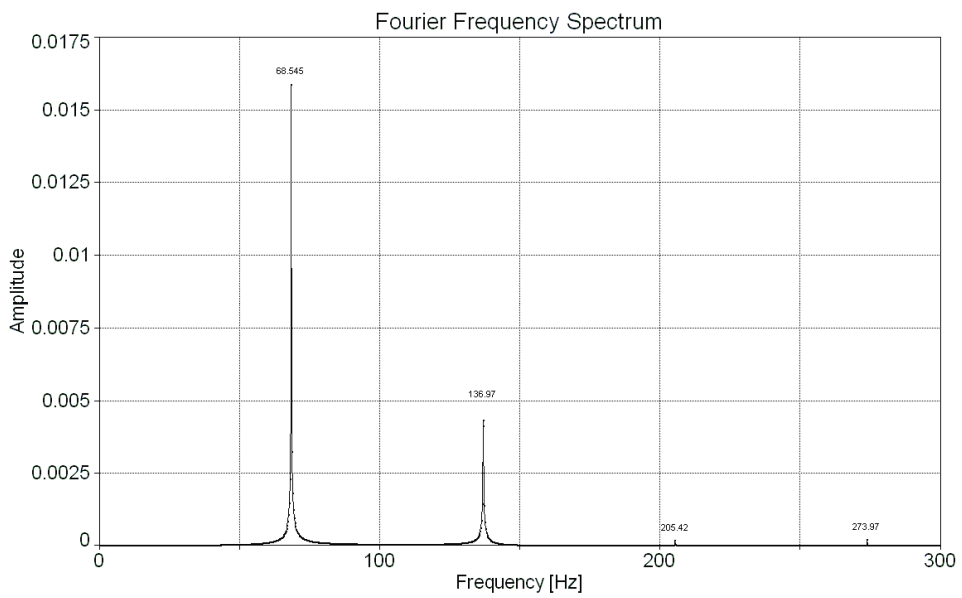
Diagrama semnalului  $x^3(t)$  este prezentată în Fig. 5.20 iar spectrul corespunzător în Fig. 5.21. Trebuie să precizăm că  $x$  este exprimat în mm.

Nu am mai reprezentat diagramele semnalelor  $x^4(t)$  și  $x^5(t)$  și nici spectrele corespunzătoare. Din analiză Fourier s-au găsit componentele spectrale  $A_n^{r,i}$ ,  $B_n^{r,i}$ , ...,  $a_0^{r,i}$ , pentru  $n = 1$ , și  $n = 2$ .





**Figura 5.16**



**Figura 5.17**

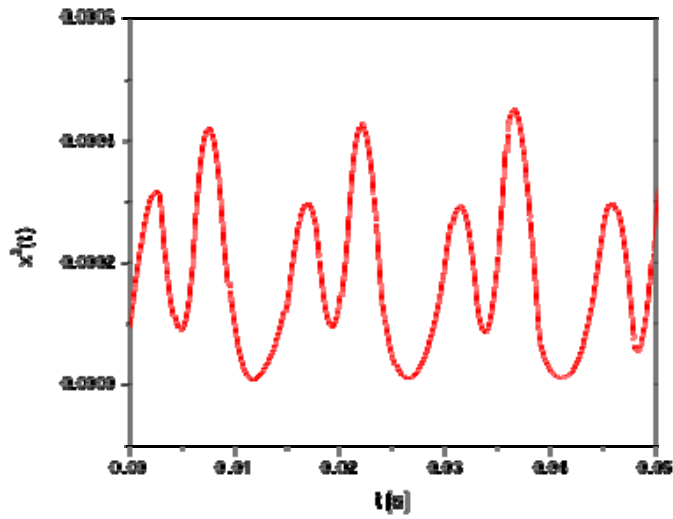


Figura 5.18

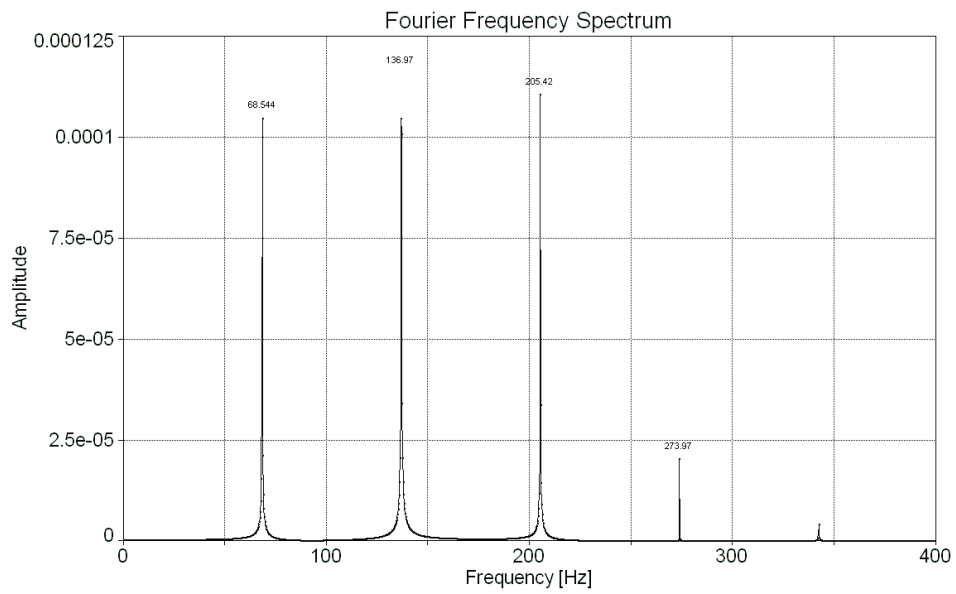


Figura 5.19

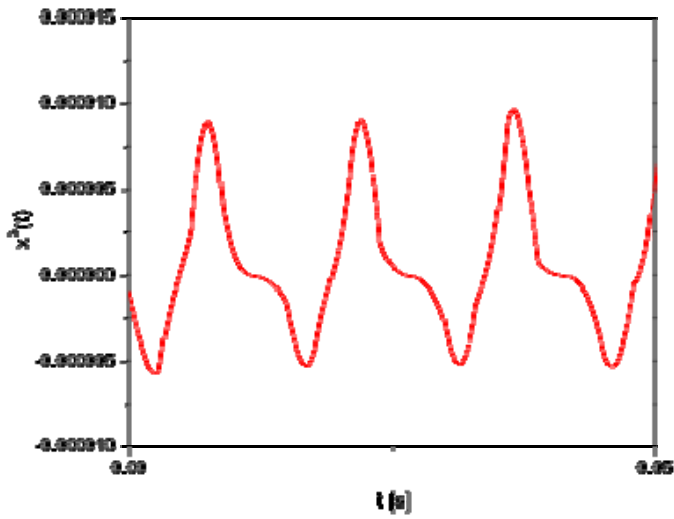


Figura 5.20

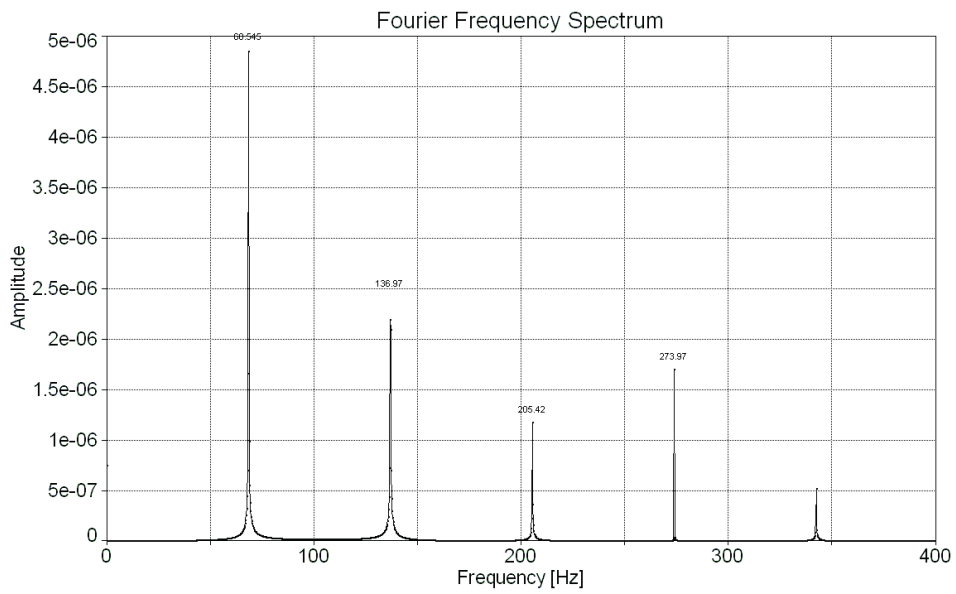


Figura 5.21

$V$	$m = 1, k = r$	$m = 1, k = i$	$m = 2, k = r$	$m = 2, k = i$
$A_m^k$	-0.004326	-0.01531	0.004328	-0.002029
$B_m^k$	-0.0001022	-2.371e-5	-5.678e-5	-0.000101
$C_m^k$	-1.32e-6	-4.687e-6	2.224e-6	-9.691e-7
$D_m^k$	-4.357e-8	-2.5e-008	-2.913e-8	-3.922e-8
$E_m^k$	-6.131e-10	-1.752e-9	1.048e-9	-3.023e-10

**Tabelul 5.4**

Rezultă în final  $k_2 = 0.00251 \text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = -4.42146 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^3$ ,  
 $k_4 = -84 \cdot 10^{-8} \text{ N/m}^4$ ,  $k_5 = 5.142 \cdot 10^{-11} \text{ N/m}^2$ .

Nu s-a făcut o estimare a erorilor de calcul. Datorită împărțirilor calculul numeric este afectat de erori.

Pentru a mări precizia calculului se pot face calcule suplimentare cu metode cum ar fi metoda celor mai mici pătrate.

Mai trebuie să observăm că valori pozitive pentru coeficienții  $k_i$  sunt necesare numai pentru  $k_1$ , aceasta fiind partea liniară a constantei elastice.

Modelul utilizat aici reprezintă o generalizare a modelului lui Singh Davies, și Bajaj [152] care conține numai neliniaritate a forței elastice și nu are amortizare fracționară.

Constantele elastice stabilite aici sunt dependente de secțiunea și lungimea probei de material poliuretanic utilizate în experiment.

## 6. CONTRIBUȚII PERSONALE. CONCLUZII

Lucrarea prezentă reprezintă o contribuție într-un domeniu care a intrat în dezvoltare abia în ultimii ani, datorită dificultăților de investigare de ordin matematic, făcând apel la un aparat matematic avansat, experimental, datorită faptului că punerea în evidență a fenomenelor neliniare necesită o temeinică formare a experimentatorului, pentru a putea discerne manifestările neliniare ale sistemelor de erorile de măsură care ar putea trece drept fenomene neliniare, precum și conceptuale, datorită faptului că în domeniul dinamicii sistemelor neliniare nu există metode generale de investigare, ci sunt necesare metode specifice unor clase de probleme.

Identificarea sistemelor neliniare are o deosebită importanță datorită faptului că furnizează metode prin care din date experimentale să se poată face modele matematice și mecanice corecte ale fenomenelor dinamice experimentale investigate. Metoda are o deosebită importanță și pentru experimentator, datorită faptului că îi dă posibilitatea să-și organizeze experimentul pentru a putea obține măsurători utilizabile.

Problemele investigate prezintă deosebită importanță practică, datorită faptului că s-a deschis perspectiva utilizării a tot mai multe materiale cu proprietăți mecanice neliniare și inteligente, precum și la izolatoarii de zgomote și vibrații, micro și nanosistemele de tip MEMS (micro-electro-mechanical systems) și NEMS (nano-EMS), cu aplicații la nanosenzori. Metodele identificării sistemelor neliniare se pot însă aplica în toate domeniile ingineriei și științei, la fenomene electrice, chimice, termice, optice, etc.

Și mai dificile sunt de investigat fenomenele neliniare atunci când apar fenomene de amortizare fracționară, cum apar de exemplu la atenuări de vibrații și zgomote la spumele poliuretanică.

Lucrarea prezentă a efectuat un studiu bibliografic al unor probleme încă incomplet studiate și valorificate, dar are și următoarele contribuții științifice:

- Capitolul 2 se este dedicat metodelor de identificare în domeniul timp. La început se face un studiu al metodei transformatei Hilbert și se construiesc programe de identificare în Matlab bazate pe transformata Hilbert.
- Am aplicat metoda transformatei Hilbert la un sistem vibrant cu caracteristică elastică neliniară polinomială de gradul 4 și cu amortizare de ordinul întâi și doi în viteză, pentru care am obținut soluții numerice în MathCAD, pentru diferiți parametri ai sistemului. Rezultatele sunt în bună concordanță cu vibrațiile simulate numeric.
- În teză am introdus două modele reologice neliniare care să descrie fenomenele de relaxare facilitată de vibrații. Am conceput aceste modele prin luarea în considerare a faptului că procesele de relaxare din oțel se datorează rearanjării grăunților cristalini, viteza de relaxare fiind proporțională cu tensiunea  $\sigma$  aplicată la limita grăunților.
- Am făcut un studiu al răspunsului modelelor bazat atât pe metode numerice dar și pe metode analitice și anume pe metoda parametrului mic și pe metoda iterației variaționale a lui Ji Huan He. Metodele analitice utilizate oferă soluții care arată analitic că constanta de timp de relaxare din cazul liniar se înlocuiește cu un parametru care depinde de tensiunile din materiale. Din studiul acestor modele se rezulta că tensiunile suplimentare aplicate grăbesc relaxarea.
- Am elaborat o metodă de identificare a caracteristicilor reologice anelastice neliniare din vibrații libere de torsiune bazat pe transformata Hilbert. Pentru identificarea proprietăților anelastice am folosit de asemenea o metodă bazată pe variația constantelor.

- Am utilizat de asemenea metoda seriilor Prony, care se aplică curent la sisteme liniare cu mai multe grade de libertate, pentru identificarea parțială a parametrilor sistemului în regim de semnal mic, când răspunsul este quasilinear.
- Am studiat de asemenea metoda estimării spectrale cu varianță minimă, care se poate aplica atât la sisteme liniare, cât și neliniare. Metoda este extrem de potrivită pentru semnale în prezența zgomotelor. Am aplicat metoda în analiza distorsiunilor de liniaritate ale sunetelor vorbirii, aplicată în stomatologie, publicată într-o revistă cotate ISI. Am introdus aici cativa parametri care exprimă sensibil abaterile de la liniaritate.
- Capitolul 3 este dedicat metodelor de identificare ale sistemelor neliniare bazate pe transformata wavelet (undină). Am pus la punct aici o nouă metodă de identificare a sistemelor neliniare cu amortizare fracționară bazată pe metoda seriilor de funcții wavelet.
- Am construit un program de identificare în Matlab, bazat pe dezvoltarea în serii Haar, pentru identificarea sistemelor neliniare aplicabil pentru unul sau mai multe grade de libertate.
- Am generat numeric în Mathcad răspunsul forțat al unui sistem vibrant cu caracteristică neliniară cu termeni în  $x^2$  și  $x^4$  și am identificat parametrii sistemului din răspunsul simulat al acestuia cu metoda seriilor de funcții wavelet. Am constatat o foarte bună precizie a metodei.
- Am prezentat de asemenea cum se poate face identificarea sistemelor neliniare prin transformare wavelet continuă. Am efectuat aici calculul analitic al formei transformatei wavelet ca funcție de parametrii sistemului vibrant și am exprimat grafic aceste forme.
- În Capitolul 4 am prezentat două metode de identificare ale sistemelor neliniare în domeniul frecvență, și anume o metodă bazată pe metoda balanței armonice și una pe metoda seriilor Volterra.
- Am utilizat metoda balanței armonice pentru identificarea parametrilor unui sistem vibrant de tip van der Pol modificat. Am obținut parametrii cu o foarte bună precizie.
- Am aplicat metoda forței neliniare pentru determinarea funcțiilor de răspuns (Volterra) de ordin superior ale unui sistem neliniar amortizat.
- Am enunțat o metodă de stabilire a funcțiilor de răspuns Volterra a sistemelor vibrante neliniare cu amortizare fracționară.
- Am studiat comparativ numeric soluția unui sistem vibrant neliniar cu forță elastică de forma  $kx + a_2x^2 + a_4x^4$  cu amortizare fracționară cu unul cu amortizare vâscoasă și am stabilit funcțiile de răspuns neliniar pentru cele două sisteme.
- În Capitolul 5 am făcut investigația experimentală a unei probe de spumă poliuretanică, deoarece s-a constatat că în aceste materiale există atât neliniarități elastice cât și amortizare de ordin fracționar.
- Pentru aceasta am conceput un experiment bazat pe măsurarea răspunsului la excitare armonică a sistemului, sistemul fiind conceput astfel încât, cu ghidaje, să efectueze mișcări cu un singur grad de libertate pe verticală.
- Pentru identificarea parametrilor sistemului am elaborat o metodologie bazată pe metoda balanței armonice. Modelul al cărui parametri i-am identificat conține o forță elastică polinomială de ordinul 5 și o forță de amortizare proporțională cu derivata de ordinul  $\mu$ , unde  $\mu$  nu este întreg.
- Un merit al metodei constă în aceea că permite stabilirea ordinului derivatei fracționare.
- Am făcut determinarea componentelor armonice din datele experimentale cu ajutorul analizei Fourier a semnalelor măsurate cu cele două accelerometre.
- Rezultatele stabilite sunt similare cu cele găsite în literatura mondială.

Ca o concluzie trebuie să spunem că din metodele folosite în cuprinsul lucrării se poate aplica pentru sistemele cu mai multe grade de libertate metoda bazată pe seriile de funcții wavelet și metoda balanței armonice.

Rezultatele din această teză au fost publicate după cum urmează : 1 lucrare într-o revistă internațională cotate ISI, 3 lucrări la conferințe internaționale cotate ISI, 1 lucrare la conferință internațională, 4 lucrări în reviste din țară.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Abramowits, M., Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions, Nat. Bur. Standards, Washington, 1964.
- [2] Addison, P.S., The Illustrated Wavlet Transform Handbook, IOP Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia, 2002.
- [3] Akansu, A. N., Haddad, R. A., Multiresolution Signal Decomposition Transforms Subbands and Wavelets, Academic Press, Newark and London, 2001.
- [4] Al-Raheem, K. F., Roy, A., Ramachandran, K. P., Harrison, D. K., Grainger, S., Rolling Element Bearing Fault Diagnosis Using Laplace-Wavelet Envelope Power Spectrum, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007, 73629, 14 (2007).
- [5] Barrett, J.F., Bibliography on Volterra Series, Hermite Functional Expansions and Related Subjects, Report 77-E-71, Eindhoven University of Technology, Netherlands, March 1977.
- [6] Bedrosian, E., A product theorem for Hilbert transforms, Proc. IEEE, 51, 868-869 (1963).
- [7] Bedrosian, E., Rice, S., The output properties of Volterra series systems driven by harmonic and Gaussian inputs, Proceedings IEEE, 59, 1688-1707 (1971).
- [8] Beléndez, A., Gimeno, E., Alvarez, M. L., Méndez, D. I., Nonlinear oscillator with discontinuity by generalized harmonic balance method, Computers and Mathematics with Applications 58, 2117-2123 (2009).
- [9] Beléndez, A., Hernández, A., Beléndez, T., Álvarez, M. L., Gallego, S., Ortuño, M., Neipp, C., Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire, Journal of Sound and Vibration, 302, 1018-1029 (2007).
- [10] Bendat, J. S., The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements, Brüel & Kjaer, Naerum, 1985.
- [11] Bendat, J. S., Nonlinear System Analysis and Identification, from Random Data, Wiley, New York, 1990.
- [12] Bereteu, L., Drăgănescu, G. E., Stănescu, D. V., Identification of parameters of a system with fractional damping. Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation, , Cambridge, UK, ISSN: 1790-5117, ISBN: 978-960-474-157-1, Feb 2010, pp. 232-235
- [13] Bereteu, L., Drăgănescu, G. E., Stănescu, D. V., Sinescu, C., Quantitative measurement of speech sound distortions with the aid of minimum variance spectral estimation method for dentirtry use, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Tatlor & Francis, ISSN: 1025-5842 (print), ??



- [14] Boa, Z., Zhongkea, S., Jianjunb, L., Flight Flutter Modal Parameters Identification with Atmospheric Turbulence Excitation Based on Wavelet Transformation, *Chinese Journal of Aeronautics*, 20, 394-401 (2007).
- [15] Boyd, S. P., Volterra Series. Engineering Fundamentals, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1980.
- [16] Brehm, M., Zabel, V., Markwardt, K., Applications of Wavelet Packets in System Identification, *Proc. Appl. Math. Mech.* 5, 493-494 (2005).
- [17] Bussgang, J. J., Ehrman, L., Analysis of nonlinear systems with multiple inputs, *Proceedings of the IEEE*, 62 1088-1119 (1974).
- [18] Capon, J., High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE* 57, 1408 - 1418 (1969).
- [19] Capon, J., Maximum-likelihood spectral estimation, in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis* (S. Haykin, ed.), New York: Springer - Verlag, 1983.
- [20] Chakraborty, A., Basu, B., Mitra, M, Identification of modal parameters of a mdof system by modified L-P wavelet packets, *J. Sound Vibrations*, 295, 827-837 (2006).
- [21] Chatterjee, A., Vyas, N. S., Non-linear parameter estimation with Volterra series using the method of recursive iteration through harmonic probing, *Journal of Sound and Vibration*, 268, 657-678 (2003).
- [22] Chatterjee, A., Vyas, N. S., Non-linear parameter estimation in multi-degree-of-freedom systems using multi-input Volterra series, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18, 457-489 (2004).
- [23] Chen, Y. Y., Huang, P. Y., Yen, J. Y., Frequency-Domain Identification Algorithms for Servo Systems With Friction, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 10, 654-665 (2002)
- [24] Cohen, A., Ryan, R. D., *Wavlets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, London, 1995.
- [25] Debnath, L., Bhatta, D., *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007.
- [26] Deng, R., Davies, P., Bajaj, A. K., A Case Study on the Use of Fractional Derivatives: The Low-Frequency Viscoelastic Uni-Directional Behavior of Polyurethane Foam, *Nonlinear Dynamics* 38, 247-265 (2004).
- [27] Deng, R., Davies, P., Bajaj, A. K., Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications, *Journal of Sound and Vibration*, 262, 391-417 (2003).
- [28] Doyle, J. F., A Wavelet Deconvolution Method for Impact Force Identification, *Experimental Mechanics*, 37, 403-408 (1997).

- [29] Drăgănescu, G., *Vibrații și Zgomote*, Ed. Politehnica Timișoara, 2000.
- [30] Drăgănescu, G. E., Căpălnășan, V., *Nonlinear Relaxation Phenomena in Polycrystalline Solids*, *International Journal of Non-Linear Science and Numerical Simulation*, 4, 219-227 (2003).
- [31] Drăgănescu, G. E., Ercuța, A., *Identification of nonlinearities in anelastic polycrystalline materials using Volterra-Fourier Transform*, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, 5, 301-304 (2003).
- [32] Drăgănescu, G. E., Ercuța, A., Bereteu, L., *Identification of Nonlinear Anelastic Models*, *Journal of Physics: Conference Series*, 96, 012178-7 (2008).
- [33] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettiger, F., Tricomi, F., *Tables of Integral Transforms*, Edited by Staff of the Bateman Manuscript Project, Vol. 2, McGraw Hill, N.Y., 1954, ch. 13.
- [34] Erlicher, S., Argoul, P., *Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21, 1386-1421 (2007).
- [35] Eykhoff, P., *"Identificarea sistemelor"*, Ed. Tehnica, București, 1977
- [36] Eykhoff, P., *Identification Theory: Practical implications and limitations*, *Measurement*, vol. 2, issue 2, 75-85, ISSN: 0263-2241, Elsevier, (1984)
- [37] Farrar, C. R., Worden, K., Todd, M. D., Park, G., Nichols, J., Adams, D. E., Bement, M. T., Farinholt, K., *Nonlinear System Identification for Damage Detection*, Report LA-14353-MS, Los Alamos National Laboratory, 2007.
- [38] Fasana, L., Garibaldi, L., Giorcelli, E., Marchesiollo, S., *A road bridge dynamic response analysis by wavelet and other estimation techniques*, In: *Third International Conference on Acoustical and Surveillance Methods*, Senlis, 1-9, 1998.
- [39] Feldman, M., *Considering High Harmonics for Identification of Nonlinear Systems by Hilbert Transform*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21/2, 943-958 (2007).
- [40] Feldman, M., *Identification of weakly nonlinearities in multiple coupled oscillators*, *Journal of Sound and Vibration*, 303, 353-370 (2007).
- [41] Feldman, M., *Non-linear System Vibration Analysis Using Hilbert Transform - I. Free Vibration Analysis Method FREEVIB*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8, 119-127 (1994).
- [42] Feldman, M., *Non-linear System Vibration Analysis Using Hilbert Transform - II. Forced Vibration Analysis Method FORCEVIB*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8, 309-318 (1994).

- [43] Feldman, M., Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22/3, 509-519 (2008).
- [44] Feldman, M., Time-Varying And Non-Linear Dynamical System Identification Using The Hilbert Transform, *Proceedings of ASME VIB 2005: 20th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, September 24-28, 2005 Long Beach, DETC2005-84644, 2005.
- [45] Feldman, M., Time-Varying Vibration Decomposition and Analysis Based on the Hilbert Transform, *Journal of Sound and Vibration*, 295/3-5, 518-530 (2006).
- [46] Feldman, M., Vibration Analysis of Non-Symmetric Elastic Force Systems Via the Hilbert Transform, *15th IMAC, International Modal Analysis Conference, Orlando, USA*, 2, 1017-1022 (1997).
- [47] Feldman, M., Bucher, I., Rotberg, J., Experimental Identification of Nonlinearities under Free and Forced Vibration using the Hilbert Transform, *Journal of Vibration and Control*, 15, 1563-1579 (2009).
- [48] Feng, M. Q., Kim, J. M., Xue, H., Identification of a dynamic system using ambient vibration measurements. *Journal of Applied Mechanics*, 65, 1010 (1998).
- [49] Franchetti, P., Modena, C., Nonlinear Damping Identification in Precast Prestressed Reinforced Concrete Beams, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24, 577-592 (2009).
- [50] Gandino, E. , Marchesiello, S., Identification of a Duffing Oscillator under Different Types of Excitation, *Mathematical Problems in Engineering*, 695025-15 (2010)
- [51] Garnier, H., Wang, L., *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer-Verlag, London, 2008.
- [52] Ghanem, R., Romeo, F., A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear systems, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 36 835-859, (2001).
- [53] Giannakis, G. B., Serpedin, E., A bibliography on nonlinear system identification, *Signal Processing* 81, 533-580 (2001).
- [54] Greblicki, W. , Pawlak, M., *Nonparametric System Identification*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [55] He, J. H., A generalized variational principle in micromorphic thermoelasticity. *Mech. Res. Commun.* 32, 93 - 98 (2005).
- [56] He, J. H., A Review of Some New Recently Developed nonlinear Analytical Techniques, *Int. Journ. Nonlin. Sci. Num. Simul.*, 1, 51 - 70 (2000).

- [57] He, J. H., Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int. J. Mod. Phys., B* 201141 - 1199 (2006).
- [58] He, J., Fu, Z. F., *Modal Analysis*, Butterworth-Heinemann, Oxford, Auckland, Boston, Johannesburg, Melbourne, New-Delhi, 2001.
- [59] Hensen, R. H. A., Molengraft, van de, M. R. J. G., Steinbuch, M., Frequency Domain Identification of Dynamic Friction Model Parameters, *Mathematical Problems in Engineering*, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 10, 191-196 (2002)
- [60] Huang, N., Attoh-Okine, N. O., *The Hilbert-Huang Transform in Engineering*, CRC Press, Boca Raton, 2005.
- [61] Huang N., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C., Liu, H. H., The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London - Series A* 454, 903 - 995 (1998).
- [62] Huang, C. S., Hung, S. L., Lin, C. I., Su, W. C., A Wavelet-Based Approach to Identifying Structural Modal Parameters from Seismic Response and Free Vibration Data, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 20, 408-423 (2005).
- [63] Huang, C. S., Su, W. C., Identification of modal parameters of a time invariant linear system by continuous wavelet transformation, *Mechanical Systems and Signal Processing* ,
- [64] Ikhouane, F., Rodellar, J., *Systems with Hysteresis Analysis, identification and Control using the Bouc-Wen Model*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2007.
- [65] Jaumouillé, V. , Sinou, J. J., Petitjean, B., An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems - Application to bolted structures, *Journal of Sound and Vibration*, 329, 4048-4067 (2010)
- [66] Juang, J.-N. , Phan M. Q., *Identification and Control of Mechanical Systems*, Cambridge University Press, 2001.
- [67] Kameyama, K., Inoue, T., Demin, I. Y., Kobayashi, K., Sato, T., Acoustical tissue nonlinearity characterization using bispectral analysis, *Signal Processing*, 53, 117 - 132 (1996).
- [68] Kareem, A., Kijewski, T., Time-frequency analysis of wind effects on structures, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 90, 1435-1452 (2002).
- [69] Karrari, M., Malik, O. P., Identification of synchronous generators using adaptive wavelet networks, *Electrical Power and Energy Systems* 27, 113-120 (2005).
- [70] Kerschen, G., Golingval, J. C., Physical Interpretation of the Proper Orthogonal Modes Using the Singular Value Decomposition, *Journal of Sound and Vibration*, 249, 5, 849-865, ISSN: 0022-460X, Elsevier, 2002

- [71] Kerschen, G., Vakakis, A. F., Lee, Y. S., McFarland, D. M., Bergman, L. A., Toward a fundamental understanding of the Hilbert-Huang Transform in nonlinear dynamics, *Journal of Vibration and Control*, 14, 77-105 (2008).
- [72] Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A. F., Golinval, J. C., Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing* 20, 505-592 (2006).
- [73] Kijewski-Correa, T. L., Full-Scale Measurements and System Identification: A Time-Frequency Perspective, PhD Dissertation, University of Notre Dame, Pndiana, vol 1-2, 2003.
- [74] King, F. W., Hilbert transforms, Vol 1 & 2, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [75] Khan, A. A., Vyas, N. S., Nonlinear bearing stiffness parameter estimation in flexible rotor-bearing systems using Volterra and Wiener approach, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16, 137-157 (2001).
- [76] Krauss, R. W., Nayfeh, A. H., Experimental Nonlinear Identification of a Single Mode of a Transversely Excited Beam, *Nonlinear Dynamics*, 18, 69-87 (1999)
- [77] Kubo, M., Terauchi, F., Aoki, H., Two Vibration Modes of a Human Body Sitting on a Car Seat- The Relationship Between Riding Discomfort Affected by the Material Properties of the Seat Cushion and the Two Vibration Modes, *Digital Human Modeling Lecture Notes in Computer Science*, 2007, 894-903.
- [78] Kwona, S. H., Leea, H. S., Kim, C. H., Wavelet transform based coherence analysis of freak wave and its impact, *Ocean Engineering* 32, 1572-1589 (2005).
- [79] Lardies, J., Gouttebroze, S., Identification of modal parameters using the wavelet transform, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, 2263-2283 (2002).
- [80] Le, T., Argoul, P., Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response, *J. of sound and vibration* 277, 73-100 (2004).
- [81] Lepik, U., Application of wavelet transform techniques to vibration studies, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 50, 155-168 (2001).
- [82] Lewandowski, R., Chorazyczewski, B., Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers *Computers and Structures* 88, 1-17 (2010).
- [83] Ling, W. M., Rivera, D. E., A methodology for control-relevant nonlinear system identification using restricted complexity models, *Journal of Process Control*, 11, 209-222 (2001).
- [84] Ljung, L., System Identification. Theory for the User, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, 1999.

- [85] Lu, H., Obeng, Y., Richardson, K. A., Applicability of dynamic mechanical analysis for CMP polyurethane pad studies, *Materials Characterization*, 49, 177-186 (2002).
- [86] Malkin, A. Y., Kuznetsov, V. V., Linearization as a method for determining parameters of relaxation spectra, *Rheologica Acta*, 40, 2279-283 (2001).
- [87] Malkin, A. Y., Masalova, I., From dynamic modulus via different relaxation spectra to relaxation and creep functions, *Rheologica Acta*, 40, 261- 271 (2001).
- [88] Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, NY, 1999.
- [89] Marinca, V., Drăgănescu, G. E., Construction of approximate periodic solutions to a modified van der Pol oscillator, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 4355-4362 (2010).
- [90] Marple Jr., S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [91] Marzocca, P., Nichols, J. M., Milanese, A., Seaver, M., Trickey, S. T., Second-order spectra for quadratic nonlinear systems by Volterra functional series: Analytical description and numerical simulation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 1882-1895 (2008).
- [92] Masiani, R., Capecchi, D., Vestroni, F., Resonant and coupled response of hysteretic two-degree-of-freedom systems using harmonic balance method, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37, 1421-1434 (2002)
- [93] Masri, S. F., Caffrey, J. P., Caughey, T. K., Smyth, A. W., Chassiakos, A. G., Identification of the state equation in complex non-linear systems, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39 1111-1127, (2004).
- [94] Masri, S. F., Miller, R. K., Saud, A. F., Identification of Nonlinear Vibrating Structures: Part I-Formulation, *Journal of Applied Mechanics*, 109, 918-922 (1987)
- [95] Masri, S. F., Miller, R. K., Saud, A. F., Identification of Nonlinear Vibrating Structures: Part II-Applications, *Journal of Applied Mechanics*, 109, 923-929 (1987)
- [96] Meyer, Y., *Wavelets. Algorithms and Applications*, SIAM Press, Philadelphia, 1993.
- [97] Mickens, R. E., Investigation of the properties of the period for the nonlinear oscillator *Journal of Sound and Vibration* 292, 1031-1035 (2006).
- [98] Mickens, R. E., *Truly Nonlinear Oscillations: Harmonic Balance, Parameter Expansions, Iteration, and Averaging Methods*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2010.
- [99] Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., Poggi, J. M., *Wavelet Toolbox 4 User's Guide*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1997-2009

- [100] Mix, D. F., Olejniczak, K. J., Elements of Wavelets for Engineers and Scientists, John Wiley & Sons, Hoboken, 2003.
- [101] Nam, S. W., Powers, E. J., Application of higher order spectral analysis to cubically nonlinear system identification IEEE Transactions on Signal Processing, 42, 1746 - 1765 (1994).
- [102] Nazarian, P., Haeri, M., Tavazoei, M. S., Identifiability of fractional order systems using input output frequency contents, ISA Transactions 49, 207-214 (2010).
- [103] Neidhöfer, T. , Wilhelm, M., Spiess, H. W., Fourier - transform rheology on linear melts, Applied Rheology, 11, 126 - 133 (2001).
- [104] Nelles, O., Nonlinear System Identification. From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models, Springer Verl. Berlin, Heidelberg, 2001.
- [105] Newland, D. E., An Introduction to Random Vibrations and Wavelet Analysis, Dover Publ. Mineola and NY, 1993.
- [106] Nichols, J. M., Olson, C. C., Optimal bispectral detection of weak, quadratic nonlinearities in structural systems, Journal of Sound and Vibration 329, 1165-1176 (2010).
- [107] Nikkhah, M., Hajati, A., Nonlinear systems modal identification using continuous wavelet transform, First International Operational Modal Analysis Conference, Copenhagen, Denmark.
- [108] Niekias, H. L., Petropulu, A. P., Higher-Order Spectral Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [109] Nowick, A. S., Berry, B. S., Anelastic Relaxation in Crystalline Solids, Academic, N. Y., 1972.
- [110] Ogunfunmi, T., Adaptive Nonlinear System Identification The Volterra and Wiener Model Approaches, Springer Verl. New York, 2007.
- [111] Oldham, K. B., Spanier, J., Fractional Calculus, Academic, San Diego, 1974.
- [112] Pacheco, R. P., Steffen Jr., V., On the identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions, International Journal of Non-Linear Mechanics 39, 1147-1159 (2004).
- [113] Paia, F., Palazotto, A. N., Detection and identification of nonlinearities by amplitude and frequency modulation analysis, Mechanical Systems and Signal Processing, 22, 1107-1132 (2008).
- [114] Peng, Z. K., Lang, Z. Q., Billings, S. A., Tomlinson, G. R., Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis, Journal of Sound and Vibration, 311, 56-73 (2008)

- [115] Peng, Z. K., Chu, F.L., Application of the wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics: a review with bibliography, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18, 2, 199-221, ISSN:0888-3270, Elsevier, 204
- [116] Pintelon, R., Schoukens, J., *System Identification. A Frequency Domain Approach*, IEEE Press, New York, 2001.
- [117] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, Boston, NY, 2002
- [118] Poon, C. W., Chang, C. C., Identification of modal responses of hysteretic structures using Hilbert-Huang method, *Proceedings of the SPIE*, 6174, 1061-1070 (2006).
- [119] Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V., Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled with fractional derivatives. *Signal Processing*, 86 2703-2711 (2006).
- [120] Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V., Shcheglova, T. A., Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times. *Computers & Mathematics with Applications* 59 1727-1744 (2010).
- [121] Rugh, W. J., *Nonlinear System Theory. The Volterra/Wiener Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981
- [122] Rujan, D., Stănescu, D. V., Drăgănescu, G. E., Fractional modeling of diffusion processes. *Buletinul Științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Mecanică*, ISSN: 1224-6077, Ed. Politehnica Timișoara, Romania, vol. 55, no. 2, Ian 2011, pp. 20-25
- [123] Ruzzene, M, Fasana, A., Garibaldi, L., Piombo, B., Natural Frequencies and Dampings Identification using Wavelet Transform: Application to Real Data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11, 207-218 (1997).
- [124] Scott, A., *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Taylor & Francis Books, Inc., 2005.
- [125] Shanmugam, K. S., Jong, M. T., Identification of Nonlinear Systems in Frequency Domain *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems* AES-11, 1218-1226 (1975)
- [126] Sheen, Y. T., On the Study of Applying Morlet Wavelet to the Hilbert Transform for the Envelope Detection of Bearing Vibrations, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23, 1518-1527 (2009).
- [127] Siebert, W. M., "Signals and Systems", McGraw Hill, New York, 1986
- [128] Singh, R., Davies, P., Bajaj, A. K., Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam, *Nonlinear Dynamics*, 34, 319-346 (2003).



- [129] Slavi, J. , Simonovski, I., Boltežar, M., Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data, *Journal of Sound and Vibration*, 262, 291-307 (2003).
- [130] Söderström, T., Ljung, L., *Theory and Practice Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, 1983.
- [131] Söderström, T., Stoica, P., *System Identification*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [132] Staszewski, W. Z., Chance, J. E., Identification of nonlinear systems using wavelets -experimental study, *IMAC97*, 1012-1016, 1997.
- [133] Staszewski, W. J., Robertson, A. N., Time-frequency and time-scale analyses for structural health monitoring, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 365, 449-477 (2007).
- [134] Stănescu, D. V., Parameter identification of vibrating systems using wavelet transform. *Buletinul Științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Mecanică*, ISSN: 1224-6077, Ed. Politehnica Timișoara, Romania, vol. 54, no. 1, Oct 2009, pp. 73-76.
- [135] Stănescu, D. V., Popoviciu, M. L., Caplescu, C., Vibrations of micro and nano-devices with viscous damping. *Buletinul Științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Mecanică*, ISSN: 1224-6077, Ed. Politehnica Timișoara, Romania, vol. 53, no. 4, Dec. 2008, pp. 83-86.
- [136] Stănescu, D. V., Drăgănescu, G. E., Bereteu, L., Identification of oscillations with fractional damping. *Buletinul Științific al Universității "Politehnica" din Timișoara, Seria Mecanică*, ISSN: 1224-6077, Ed. Politehnica Timișoara, Romania, vol. 55, no. 1, Ian 2011, pp. 37-40
- [137] Stoica, P., Robust Capon Beamforming. *IEEE semnal Proc Lett*, 10, 172 - 175 (2003).
- [138] Stoica, P., Jakobsson, A., Li, J., Matched-filter bank interpretation of some spectral estimators. *Signal Processing* 66, 45 - 59 (1998).
- [139] Storer, D. M., *Dynamic Analysis of Non-Linear Structures Using Higher Order Frequency Response Functions*, Ph. D. Thesis, Department of Engineering, University of Manchester, 1991.
- [140] Storer, D. M., Tomlinson, G. R., *Recent Developments in the Measurement and Interpretation of Higher Order Transfer Functions from Non-Linear Structures, Mechanical Systems and Signal Processing*, 1, 173-189 (1993).
- [141] Șfartz, E., A System Identification Method Using Wavelet. Application to a Single Degree of Freedom System, *Bull. Polytechnic Inst. Iassy, Ser. Mat., Mech. Phys.*, XLIX, 71-80 (2003).

- [142] Șfartz, E., A System Identification Method Using Wavelet. Application to a Multiple Degree of Freedom System, *Bull. Polytechnic Inst. Iassy, Ser. Mat., Mech. Phys.*, L, 89-100 (2004).
- [143] Ta, M. N., Lardiès, J., Identification of weak nonlinearities on damping and stiffness by the continuous wavelet transform, *Journal of Sound and Vibration* 293, 16-37 (2006).
- [144] Tan, J. B., Liu, Y., Wang, L., Yang, W. G., Identification of modal parameters of a system with high damping and closely spaced modes by combining continuous wavelet transform with pattern search, *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 1055-1060 (2008).
- [145] Tawfiq, I., Vinh, T., Contribution to the Extension of Modal Analysis to Non-Linear Structure Using Volterra Functional Series, *Mechanical Systems and Signal Processing* (2003) 17(2), 379-407.
- [146] Thrane, N., Hilbert Transform, Technical Review, Nr. 3, Brüel & Kjaer, Naerum, 1984.
- [147] Torrèsani, B., *Analyse continue par ondelettes*, InterÉditions et CNRS Éditions, Paris 1995.
- [148] Vazquez-Feijoo, J. A., Worden, K., Stanway, R., Analysis of time-invariant systems in the time and frequency domain by associated linear equations (ALEs), *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20, 896-919 (2006)
- [149] Verboven, P., *Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis*, Thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2002.
- [150] Volterra, V., "Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations", Dover, New York, 1959
- [151] Wigrem, T., *Recursive Identification Based on the Nonlinear Wiener Model*, Acta Universitatis Upsaliensis, Uppsala, 1990.
- [152] Wilhelm, M., Reinheimer, P., Ortseifer, M., High sensitivity Fourier - transform rheology, *Applied Rheology*, 38, 349 - 356 (1999).
- [153] Worden, K., Manson, G., A Volterra series approximation to the coherence of the Duffing oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 286, 529-547 (2005).
- [154] Weeks, M., *Digital Signal Processing Using MATLAB and Wavelets*, Infinity Science Press LLC, Hingham, Massachusetts, 2007.
- [155] Xu, B., Brandt-Pearce, M., Modified Volterra Series Transfer Function Method, *IEEE Photonics Technology Letters*, 14, 47-49 (2002).
- [156] Xun, J., Yan, S., A revised Hilbert-Huang transformation based on the neural networks and its application in vibration signal analysis of a deployable structure, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 1705-1723 (2008).

- [157] Yan, B. F., Miyamoto, A., A Comparative Study of Modal Parameter Identification Based on Wavelet and Hilbert-Huang Transforms, *Computer-Aided Civil & Infrastructure Engineering*, 21, 9-23 (2006).
- [158] Yan, B. F., Miyamoto, A., Brühwiler, E., Wavelet transform-based modal parameter identification considering uncertainty, *Journal of Sound and Vibration* 291, 285-301 (2006).
- [159] Yang, J. N., Lei, Y., Lin, S., Huang, N., Identification of Natural Frequencies and Dampings of In Situ Tall Buildings Using Ambient Wind Vibration Data, *Journal of Engineering Mechanics*, 130, 570-577 (2004).
- [160] Yang, J. N., Lei, Y., Pan, S. W., Huang, N., System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis; part 1: normal modes, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, 1443-1467 (2003).
- [161] Yang, J. N., Lei, Y., Pan, S. W., Huang, N., System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis; part 2: complex modes, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, 1533-1554 (2003).
- [162] Yang, J. N., Lin, S., Hilbert-Huang based approach for structural damage detection, *Journal of Engineering Mechanics*, 130, 85-95 (2004).
- [163] Yang, Q., Novel analytical and numerical methods for solving fractional dynamical systems, PhD Thesis, Queensland University of Technology, 2010.
- [164] Yin, H. P., Duhamel, D., Argoul, P., Natural frequencies and damping estimation using wavelet transform of a frequency response function, *Journal of Sound and Vibration*, 271 999-1014 (2004).
- [165] Yu, K., Ye, J., Zou, J., Yang, B., Yang, H., Missile flutter experiment and data analysis using wavelet transform, *J. of sound and vibration* 269, 899-912 (2004).
- [166] Yushan, Z., Jianwen, L., Yuxian, H., Hilbert spectrum and intrinsic oscillation mode of dynamic response of a bilinear SDOF system: influence of harmonic excitation amplitude, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 4, 17-26, (2005).
- [167] Zadeh, L. A., "A contribution to the theory of nonlinear systems", *J. Franklin Inst.*, 1953
- [168] Zhang, J. H., Spectral Analysis for Systems with Hysteretic Restoring Force, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10, 19-28 (1996).
- [169] Zhang, J. H., Billings, S. A., Analysing non-linear systems in the frequency domain I: the transfer function, *Mechanical Systems and Signal Processing* 7, 531-550 (1993); Zhang, J. H., Billings, S. A., Analysing nonlinear systems in the frequency domain, II: the phase response, *Mechanical Systems and Signal Processing* 8, 45-62 (1994).