

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE PAR UNE CLASSE DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

V. ALACI



THÈSE POUR LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUE À LA FACULTÉ
DE BUCAREST LE 30 MAI 1921 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

D. EMMANUEL, président.
D. BUNGEȚIANO }
TR. LALESCO } membres.



Société Roumaine des Sciences.
Bucarest. — Roumanie.

Extrait du „Bulletin de Mathématiques pures et appliquées



BUCAREST

—
IMPRIMERIE DE L'ÉTAT

1925

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

PAR UNE CLASSE DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

V. ALACI

THÈSE POUR LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUE À LA FACULTÉ
DE BUCAREST LE 30 MAI 1924 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

D. EMMANUEL, président.
D. BUNGEȚIANO } membres.
TR. LALESCO }

Société Roumaine des Sciences
Bucarest. — Roumanie
Extrait du „Bulletin de Mathématiques pures et appliquées”

BIBLIOTECA GENERALĂ
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA”
TIMIȘOARA



00131184

BUCAREST

—
IMPRIMERIE DE L'ÉTAT
1925

SCOLA POLITEHNICA
de TIMIȘOARA

Biblioteca

6424.-

20 d

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE PAR UNE CLASSE DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

V. ALACI

Introduction

L'étude des séries trigonométriques a pris en ces derniers temps une orientation toute nouvelle.

Les travaux classiques de LEJEUNE DIRICHLET²⁾, LIPSCHITZ³⁾, PAUL DU BOY REYMOND⁴⁾, ont trouvé un point culminant dans le mémoire fondamental de RIEMANN⁵⁾.

Les recherches ultérieures, provoquées par ce mémoire et abordées à l'aide des méthodes classiques, donnaient naissance à des difficultés réelles. La théorie des séries trigonométriques était elle entrée ainsi dans une voie stérile, et les problèmes qu'on a étudiés depuis RIEMANN, concernaient surtout des fonctions de plus en plus compliquées ou des critères de convergence d'une nature analytique délicate, mais le plus souvent sans applications pratiques.

En un mot on peut dire qu'après RIEMANN on a étudié les

¹⁾ Thèse soutenue à l'Université de Bucarest, 30 Mai, 1921.

²⁾ Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire, entre des limites données. *Journal de Crelle* t. 4; 1829.

³⁾ Etudes sur le développement des séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable réelle et surtout de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et minima. *Journal de Crelle*, t. 63; 1824.

⁴⁾ Untersuchungen, über die Convergenz und Divergenz der Fourierchen Darstellungsformeln. (*Abhandlungen der Bayer Akad. Math. phys. classe* t. XII; 1876.

⁵⁾ Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe § 8.

series trigonométriques surtout au point de vue des singularités des fonctions représentables par ces séries.

On n'a imprimé à ces études une direction nouvelle, plus pratique, qu'à la suite des recherches de L. FEJÉR¹⁾. On sait que FEJÉR a laissé de côté la série proprement dite de FOURIER attachée à une fonction donnée $f(x)$ et à la place de celle-ci, il a considéré une autre somme trigonométrique, la moyenne arithmétique des premières n sommes FOURIER. Le résultat important obtenu ainsi, c'est que cette somme converge vers la fonction considérée, et de plus, cette convergence est même plus rapide.

Le procédé de FEJÉR a suggéré l'idée d'étudier d'une façon tout à fait générale le problème de l'approximation des fonctions par des sommes trigonométriques différentes de celles de FOURIER.

Déjà MR. D. JACKSON²⁾ dans sa thèse couronnée par l'Université de Göttingen utilise les sommes :

$$\frac{1}{p_0} \int_0^\pi \left(\frac{\sin mu}{\sin u} \right)^k f(x + 2u) du, \text{ où } p_0 = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nu}{\sin u} \right)^k du.$$

et démontre avec leur aide une série de propriétés nouvelles et intéressantes relatives au degré d'approximation, par les sommes trigonométriques des fonctions continues, qui vérifient une condition LIPSCHITZ. Grâce à un important théorème de M. LEBESGUE, ces études directes trouvent leurs applications aussi dans la théorie classique des séries FOURIER. Une voie nouvelle s'ouvre ainsi aux études des théories des séries FOURIER : d'une part on évite l'intégrale de DIRICHLET, dont l'étude analytique était à peu près épuisée, d'autre part, on introduit un nouvel objet de recherche des éléments concernant le grade de convergence des séries trigonométriques, définies par des fonctions continues.

MR. D. JACKSON³⁾, S. BERNSTEIN⁴⁾ et C. DE LA VALLÉE

¹⁾ Math. Annalen. Bd. pag. 273; 1903.

²⁾ Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Dissertation, Göttingen, 1911.

³⁾ On approximation by trigonometric sums and polynomials. [Transactions of the American Mathematical Society, vol. XIV (1912) p. p. 491—515, p. 492].

⁴⁾ Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. [Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, série II, vol. IV, 1912].

POUSSIN¹⁾ ont étudié d'une façon très détaillée ce nouveau champ de recherches et ont établi des théorèmes d'une réelle importance qui lient étroitement les fonctions derivables et le degré de convergence des séries attachées à ces fonctions.

Pour cette étude, ces géomètres utilisent les sommes trigonométriques définies par les intégrales à exposant pair :

$$F(r, x) = \frac{1}{\tau(r)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin rt}{\sin t} \right)^{2r} f(x + 2t) dt, \text{ où, } \tau(r) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin rt}{\sin t} \right)^{2r} dt,$$

nommées, sur la proposition de M. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *intégrales généralisées de FEJÉR*. L'étude de ces intégrales, qui se trouvent ainsi à la base des nouvelles théories, n'a pas été faite jusqu'à présent d'une manière complète, et n'a été développée qu'en vue de certains théorèmes nouveaux. D'autre part les intégrales généralisées de FEJÉR à exposant impair, n'ont pas été prises en considération jusqu'à présent.

* * *

Le présent travail a pour but de présenter une étude détaillée des intégrales généralisées FEJÉR, d'une façon générale, l'exposant pouvant être pair ou impair.

Le chemin suivi pour cette étude est analogue à celui parcouru par Mr. le professeur TRAIAN LALESCO²⁾ à son cours, traitant des «Séries trigonométriques» des sommes FEJÉR. ($p = 2$).

Dans cette méthode, une première partie des recherches a un caractère purement algébrique et concerne le calcul de quelques intégrales, qui jouent un rôle fondamental dans la théorie entière.

J'ai obtenu la valeur de ces intégrales à l'aide des coefficients polynomiaux, trouvés par MOIVRE³⁾, définis et complètement étudiés par DÉSIRÉ ANDRÉ⁴⁾.

¹⁾ Leçons sur l'Approximation des Fonctions d'une variable réelle, 1919.

²⁾ 1919—1920.

³⁾ Miscelanea Analytica p. 196.

⁴⁾ Mémoire sur «Les Combinaisons régulières et leurs applications». Annales de l'école Normale 2^e Serie, t. 5 ; 1876.

Les plus importants résultats obtenus sont les suivants :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \left[p, \frac{(n-1)p}{2} \right]_{n-1} \cdot \pi,$$

où $\left[p, \frac{(n-1)p}{2} \right]_{n-1}$ est le coefficient de rang $\frac{(n-1)p}{2}$ de la file des coefficients polynomiaux de DESIRÉ ANDRÉ.

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_a^b \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = 0, \quad 0 < a < b < \pi.$$

$$c) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt = \frac{\pi^2}{2},$$

en exceptant le cas n pair, p impair, dans quel cas l'intégrale a une autre valeur, calculé aux cours de travail, et enfin :

$$d) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^p t}{\sin t} dt = \frac{a_1 \pi}{2^p},$$

où $a_0(k)$ est un coefficient polynomial et a_1 est un coefficient numérique calculé au cours de travail.

Toutes ces intégrales ont été obtenues par une méthode uniforme.

Une deuxième partie de ce travail concerne la liaison entre les intégrales généralisées de FEYÉR et les sommes de FOURIER. On sait que l'intégrale de FEYÉR ($p = 2$) a été obtenue de la série FOURIER, en prenant la moyenne arithmétique des premières sommes n FOURIER. Il était intéressant de rechercher si une liaison analogue existait aussi dans le cas général. Nous avons montré qu'une pareille relation existait, c'est-à-dire que les intégrales généralisées FEYÉR s'exprimaient simplement à l'aide des sommes FOURIER, et des coefficients du tableau généralisé de PASCAL, formé par des coefficients polynomiaux introduits par D. ANDRÉ.

* * *

Les intégrales de la première partie une fois obtenues, l'étude des sommes trigonométriques représentées par les intégrales

généralisées FEJÉR peut se faire, soit en suivant une voie analogue à celle indiquée par FEJÉR, soit en employant la méthode appliquée par MR. LALESCO dans son étude des séries FOURIER.

Nous avons employé cette dernière méthode en étudiant tout d'abord :

La représentation et la convergence en cas de fonction périodique linéaire, et ensuite celle plus générale d'une fonction quelconque.

Nous avons obtenu dans le cas général par cette voie, un théorème fondamental analogue à celui de FEJÉR, et avec la plus grande facilité pour p pair. Si p est impair, la méthode suivie pour le cas précédent n'est plus applicable, et nous avons généralisé les méthodes classiques DIRICHLET et LIPSCHITZ, obtenant ainsi des résultats analogues à ceux des séries FOURIER ($p = 1$), en employant cependant une méthode plus simple.

* * *

Les résultats précédents ont rapport à la convergence des séries trigonométriques *aux points de continuité de la fonction*.

Aux points de discontinuité on sait que PAUL DU BOIS REYMOND, a démontré que les séries FOURIER convergent vers un segment entier de discontinuité, et que, plus tard, le savant anglais GIBBS a mis en évidence un phénomène parasite, en montrant que le segment limite est même plus grand que le segment de continuité. C'est ce qu'on appelle le phénomène GIBBS.

D'autre part FEJÉR a montré que ses sommes convergent également vers le segment entier de discontinuité, sans présenter le phénomène GIBBS.

Ce dernier résultat s'étend sans aucune difficulté au cas des intégrales généralisées FEJÉR à exposant pair. Dans le cas d'exposant impair, nous avons montré qu'en suivant une voie indiquée par M. LALESCO¹⁾, aux points de discontinuité, le phénomène GIBBS persiste, mais s'atténue à mesure que p grandit, et nous avons étudié en détail cette atténuation pour le cas de $p = 3$.

Enfin, les théorèmes généraux de MR. BERNSTEIN, D. JACK-

¹⁾ Sur l'approximation des fonctions par de séries trigonométriques. VI-ème Année, 15 Juillet 1920. Bulletin de l'Académie Roumaine.

SON et C. DE LA VALLÉE POUSSIN, relatifs au degré d'approximation des sommes trigonométriques pour les fonctions continues lipschitziennes, ou à une dérivée d'ordre i , peuvent être facilement généralisés à l'aide des méthodes utilisées. Nous avons obtenu ainsi quelques généralisations de ces théorèmes, en nous servant des sommes généralisées de FEJÉR. Quand la fonction a des points de discontinuité, Mr. C. WILDE a obtenu une série de théorèmes intéressants relatifs au grade d'approximation des sommes trigonométriques ($p = 2, p = 4$) en supprimant les petits intervalles autour de ces points.

Nous avons obtenu des théorèmes analogues pour le cas général.

* * *

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le professeur TRAIAN LALESCO pour les précieuses indications qu'il a bien voulu me fournir, et qui m'ont aidé à trouver les résultats du présent travail.

CHAPITRE I

Formules et un théorème nécessaire

§ I. Le calcul des intégrales de forme :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^p dt.$$

1. Nous élevons à la puissance p l'identité connue :

$$\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} = 1 + 2 \cos 2t + 2 \cos 4t + \dots + 2 \cos 2kt,$$

et nous obtenons :

$$(1) \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^p = (1 + 2 \cos 2t + \cos 4t + \dots + 2 \cos 2kt)^p.$$

Pour effectuer l'élevation à la puissance p , nous nous servons de la formule connue d'Euler :

$$2 \cos 2at = e^{2iat} + e^{-2ait}, \text{ dans laquelle, } i = \sqrt{-1}.$$

²⁾ On the degree of approximation to discontinuous functions by trigonometric sums. Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo t. 39. Fascicola III. Anno 1915.

Si nous notons :

$$e^{2it} = \alpha,$$

nous avons :

$$(2) \quad 2 \cos 2at = \alpha^a + \frac{1}{\alpha^a}$$

Nous faisons successivement en (2), $a = 1, 2, \dots, k$ et nous substituons dans le deuxième membre de l'égalité (1), et obtenons :

$$(3) \quad \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} \right)^p \\ = \frac{(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2k})^p}{\alpha^{pk}}$$

La substitution (2) nous a permis ainsi de réduire la question de l'élevation d'un polynôme trigonométrique à une puissance p , à l'élevation d'un polynôme à la puissance p .

Le développement :

$$(4) \quad (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2k})^p$$

est déjà connue. MOIVRE le premier a trouvé les coefficients du développement, ensuite D. ANDRÉ a étudié complètement les propriétés de ces coefficients et a indiqué plusieurs méthodes pour les calculer.

C'est d'après D. ANDRÉ que nous noterons nous aussi les coefficients du développement par :

$$(p, n)_{2k} \\ n = 0, 1, 2, \dots, 2pk$$

n étant le degré d' α en développement, et p et $2k$ il est facile de voir ce qu'ils sont. De ces propriétés établies nous allons conclure celles dont nous aurons besoins de nous servir :

1°. Dans le développement (4) les coefficients des termes équidistants des extrêmes, sont égaux.

2°. Un coefficient quelconque du développement (4) est égal au coefficient du même rang du développement :

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2k})^{p-1},$$

plus $2k$ coefficients, mis à la gauche de celui-ci.

· 3°. Les coefficients du développement (4) grandissent jusqu'au milieu et décroissent plus loin.

La propriété No. 2 nous permet d'obtenir les coefficients de proche en proche, d'une façon simple, en formant un tableau triangulaire, qui généralise le triangle de PASCAL.

Mais nous pouvons les calculer avec la formule donnée par MOIVRE et retrouvée par D. ANDRÉ :

$$(5) \quad (p, n)_{2k} = \sum (-1)^\lambda C_p^\lambda \Gamma_p^{n-\lambda(2k+1)}$$

λ variant de 0 jusqu'au quotient entier de n , divisé par $2k+1$. Ici C_p^λ et Γ_p^λ sont le symbole des combinaisons simples et des combinaisons à répétition. En développant la relation (3), en vertu de ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$(6) \quad \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k}\right)^p =$$

$$\frac{(p, 0)_{2k} + (p, 1)_{2k} \alpha + (p, 2)_{2k} \alpha^2 + \dots + (p, 2pk)_{2k} \alpha^{2pk}}{\alpha^{pk}} = (p, pk)_{2k} +$$

$$(p, pk-1)_{2k} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + (p, pk-2)_{2k} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \dots + (p, 0)_{2k} \left(\alpha^{pk} + \frac{1}{\alpha^{pk}}\right)$$

ou :

$$(p, 0)_{2k} = 1, (p, 1)_{2k} = p, (p, 2)_{2k} = \frac{p(p+1)}{2}, \dots$$

En nous servant de la transformation (2) en sens inverse, la relation (6) devient :

$$(7) \quad (1 + 2 \cos 2t + 2 \cos 4t + \dots + 2 \cos 2kt)^p = (p, pk)_{2k} +$$

$$+ 2(p, pk-1)_{2k} \cos 2t + 2(p, pk-2)_{2k} \cos 4t + \dots + 2(p, 0)_{2k} \cos 2pkt =$$

$$\frac{\sin^p(2k+1)t}{\sin^p t}$$

En intégrant de 0 à π nous obtenons :

$$(8) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\right)^p dt = \pi \cdot (p, pk)_{2k}$$

Nous avons ainsi calculé l'intégrale proposée.

Calcul du nombre $(p, pk)_{2k}$.

2. Le nombre $(p, pk)_{2k}$ qui est un polynôme en k est indispensable au calcul de l'intégrale (8) et nous nous proposons de mettre en évidence son degré et le coefficient du terme du plus haut degré.

En nous basant sur la relation (5), nous pouvons écrire:

$$(p, pk)_{2k} = \Gamma_p^{pk} - p \Gamma_p^{(p-2)k-1} + \frac{p(p-1)}{2!} \Gamma_p^{(p-4)k-2} - \dots \\ + (-1)^n \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} \Gamma_p^{(p-2n)k-n}$$

En développant les combinaisons à répétition et en simplifiant, nous obtenons :

$$(9) \quad (p, pk)_{2k} = \frac{(pk+1)(pk+2) \dots (pk+p-1)}{(p-1)!} \frac{p}{1} \cdot \\ \frac{|(p-2)k| |(p-2)k+1| \dots |(p-2)k+(p-2)|}{(p-1)!} \\ + \frac{p(p-1)}{2!} \cdot \frac{|(p-4)k-1| |(p-4)k| \dots |(p-4)k+p-3|}{(p-1)!} + \dots \\ + (-1)^n \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} \cdot \\ \frac{|(p-2n)k-n+1| |(p-2n)k-n+2| \dots |(p-2n)k+p-n-1|}{(p-1)!}$$

D'où il est facile de déduire que :

$$(10) \quad (p, pk)_{2k} = a_1 k^{p-1} + P_{p-2}(k),$$

où :

$$(11) \quad a_1 = \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{p-1}{p-1} (p-2)^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!} (p-4)^{p-1} - \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} (p-2n)^{p-1} \right],$$

et $P_{p-2}(k)$ signifie un polynôme bien déterminé en k , du degré $p-2$, dont les coefficients ne nous intéressent pas effectivement.

Applications

3. Calculons complètement le nombre $(p, pk)_{2k}$ qui entre dans l'intégrale (8) à l'aide de la formule (5) dans le cas particuliers suivants :

1^o. Pour $p=1$, nous avons :

$$(1, k)_{2k} = \Gamma_1^k = 1,$$

et la relation (8) nous donne :

$$(12) \quad \int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt = \pi$$

Cette intégrale est classique.

2^o. Pour $p=2$, nous avons :

$$(2, 2k)_{2k} = \Gamma_2^{2k} = \frac{2 \cdot 3 \dots 2k (2k+1)}{2k!} = 2k+1,$$

alors (8) nous donne :

$$(13) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^2 dt = (2k+1)\pi$$

Cette intégrale a été calculée par FEJÉR et par une autre voie par MR. LALESCO.

3^o. Pour $p=3$, nous avons :

$$(3, 3k)_{2k} = \Gamma_3^{3k} - 3 \Gamma_3^{k-1} = 3k^2 + 3k + 1,$$

alors (8) nous donne :

$$(14) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^3 dt = (3k^2 + 3k + 1)\pi$$

4^o. Pour $p=4$, nous avons :

$$(4, 4k)_{2k} = \Gamma_4^{4k} - 4 \Gamma_4^{2k-1} = \frac{(2k+1)(8k^2+3k+3)}{3},$$

alors (8) nous donne :

$$(15) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^4 dt = \frac{(2k+1)(8k^2+8k+3)}{3}$$

Cette intégrale a été calculée par une autre voie par MR. LALESCO.

5^o. $p=5$, nous avons :

$$(5, 5k)_{2k} = \Gamma_5^{5k} - 5 \Gamma_5^{3k-1} + 10 \Gamma_5^{k-2} = \frac{115k^4 + 230k^3 + 185k^2 + 70k + 12}{12}$$

alors (8) nous donne :

$$(16) \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^5 dt = \frac{115k^4 + 230k^3 + 185k^2 + 70k + 12}{12}$$

§ II. Calcul des intégrales de forme :

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p dt.$$

4. Nous élevons à la puissance p l'identité connue :

$$\frac{\sin 2kt}{\sin t} = 2 \cos t + 2 \cos 3t + 2 \cos 5t + \dots + 2 \cos (2k-1)t,$$

et nous obtenons :

$$(17) \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p = \left(2 \cos t + 2 \cos 3t + 2 \cos 5t + \dots + 2 \cos (2k-1)t \right)^p$$

Si nous notons $e^{it} = \alpha$, nous avons $2 \cos at = e^{ia} + \frac{1}{e^{ia}}$ et si nous faisons successivement $a = 1, 3, 5, \dots, 2k-1$, le deuxième membre de l'égalité (17) devient :

$$\left(x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots + x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}} \right)^p = \frac{(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{4k-2})^p}{(2k-1)^p}$$

Nous effectuons l'élevation à la puissance p du polynôme du deuxième membre, en nous servant des coefficients polynomiaux de D. ANDRÉ, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots + x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}} \right)^p \\ &= \frac{(p, 0)_{2k-1} + (p, 1)_{2k-1} x^2 + (p, 2)_{2k-1} x^4 + \dots + (p, (2k-1)p)_{2k-1} x^{(4k-2)p}}{\alpha^{(2k-1)p}} \end{aligned}$$

Pour effectuer le quotient du deuxième membre, nous distinguerons deux cas :

1^o. Si p est pair, nous avons :

$$\begin{aligned} (18) \left(x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots + x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}} \right)^p &= \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} \\ &+ \left[p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right]_{2k-1} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \dots + (p, 1)_{2k-1} \left(x^{(2k-1)p-2} + \frac{1}{x^{(2k-1)p-2}} \right) \\ &+ (p, 0)_{2k-1} \left(x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}} \right) \end{aligned}$$

2°. Si p est impair, nous avons :

$$(19) \quad \left(x + \frac{1}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \dots + x^{2k-1} + \frac{1}{x^{2k-1}} \right)^p$$

$$= \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left[p, \frac{(2k-1)p-3}{2} \right]_{2k-1} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) +$$

$$\dots + (p, 1)_{2k-1} \left(x^{(2k-1)p-2} + \frac{1}{x^{(2k-1)p-2}} \right) +$$

$$(p, 0)_{2k-1} \left(x^{(2k-1)p} + \frac{1}{x^{(2k-1)p}} \right)$$

En nous servant de la transformation ci-haut, en sens inverse, les relations (18) et (19) en observant aussi la relation (17) deviennent :

$$(20) \quad \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p = \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} + 2 \left[p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right]_{2k-1} \cos 2t$$

$$+ \dots + 2 (p, 0)_{2k-1} \cos (2k-1) p t.$$

$$(21) \quad \left(\frac{\sin 2k t}{\sin t} \right)^p = 2 \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1} \cos t +$$

$$+ 2 \left[p, \frac{(2k-1)p-3}{2} \right]_{2k-1} \cos 3t + \dots + 2 (p, 0)_{2k-1} \cos (2k-1) p t.$$

En intégrant ces relations de 0 à π , nous obtenons :

$$(22) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin 2k t}{\sin t} \right)^p dt = \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1}^\pi$$

$$(23) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin 2k t}{\sin t} \right)^p dt = 0$$

La première a lieu quand, p est pair, et la seconde quand p est impair.

On peut d'ailleurs facilement vérifier l'intégrale (22), en décomposant l'intervalle d'intégration en $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ et en observant que ces deux intégrales sont égales et de signes contraires.

5. Observation. Si nous convenons de prendre :

$$\left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} = 0,$$

de sorte que p est impair, parce qu'en ce cas ce nombre de

D. ANDRÉ n'a aucun sens, les intégrales (22) et (23) peuvent être comprises en une seule, que voici :

$$(24) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin 2k t}{\sin t} \right)^p dt = \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1}^\pi$$

quel que soit p .

$$\text{Calcul du nombre, } \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1}$$

6. Après ce que nous avons dit nous ne considérerons que le cas p pair.

En désignant par r la moitié du nombre p , nous pouvons écrire :

$$\left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} = \left[p, (k-1)r \right]_{2k-1}$$

Sur la base de la relation (5) § I, nous avons :

$$(25) \quad \left[\frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} = \int_p^{pk-r} \frac{p}{1} \int_p^{(p-2)k-r} \frac{p(p-1)}{2!} \int_p^{(p-4)k-4} + \\ \dots + (-1)^n \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} \int_p^{(p-2n)k-r} \\ = \frac{(pk-r+1)(pk-r+2) \dots (pk+r-1)}{(p-1)!} \\ - \frac{p}{1} \cdot \frac{|(p-2)k-r+1| |(p-2)k-r+2| \dots |(p-2)k+r-1|}{(p-1)!} \\ + \dots + (-1)^n \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} \times \\ \frac{|(p-2n)k-r+1| |(p-2n)k-r+2| \dots |(p-2n)k+r-1|}{(p-1)!}$$

Si nous comparons ce développement à celui de la relation (9) nous voyons facilement que nous pouvons écrire :

$$(26) \quad \left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1} = a_1 k^{p-1} + P'_{p-2}(k),$$

où a_1 , a tout à fait l'expression donnée par (11) § I, mais :

$$P'_{p-2}(k) \neq P_{p-2}(k),$$

bien que tous les deux polynômes soient du degré $p-2$ en k .

Application

7. Calculons effectivement le nombre, $\left[p, \frac{(2k-1)p}{2} \right]_{2k-1}$ en quelques cas particuliers

1^o. Pour $p=2$, la relation (25) devient :

$$(2, 2k-1)_{2k-1} = \int_2^{2k-1} 1 dt = 2k,$$

et la relation (24) nous donne :

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^2 dt = 2k\pi.$$

2^o. Pour $p=4$, la relation (25) devient :

$$(4, 4k-2)_{2k-1} = \int_4^{4k-2} 1 dt - 4 \int_4^{2k-2} 1 dt = \frac{2k(8k^2+1)}{3},$$

et la relation (24) nous donne :

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^4 dt = \frac{2k(8k^2+1)\pi}{3}$$

8. **Observation.** Il est bon d'observer que les intégrales (8) et (24) sont des cas particuliers de l'intégrale plus générale :

$$(27) \quad \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \left[p, \frac{(n-1)p}{2} \right]_{n-1}$$

pour ;

$$n = 2k + 1 \text{ et } n = 2k.$$

Les relations (10) et (26) nous disent que le deuxième membre de (27) a la même forme et l'observation du N^o 5 nous dit que ce même membre est nul dans le cas où n est pair et p impair.

Pour simplifier l'exposition, nous convenons de noter :

$$(28) \quad \left[p, \frac{(n-1)p}{2} \right]_{n-1} = a_0(k) = a_1 k^{p-1} + P_{p-2}(k), \text{ où } k =$$

$\frac{n}{2}$ ou $k = \frac{n-1}{2}$, d'après que n est pair ou impair, et $P_{p-2}(k)$ est un polynome du degrés $p-2$, le même $P_{p-2}(k)$ de la relation (10), ou à $P'_{p-2}(k)$ de la relation (26), suivant que n est

impair ou pair, mais dont les coefficients effectifs ne nous seront pas nécessaires dans l'exposition qui suivra.

L'intégrale (27) devient alors :

$$(29) \quad \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{s \, nt} \right)^p dt = a_0(k) \pi.$$

9. Conséquence. Si dans l'intégrale (29) nous partageons l'intervalle d'intégration en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ et si nous observons que la deuxième intégrale par le changement de la variable :

$$t = \pi - u,$$

devient égale à la première, nous obtenons :

$$(30) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{s \, nt} \right)^p dt = \frac{\pi}{2}.$$

valable pour n'importe quels n et p entiers, excepté si n est pair et p impair, en quel cas nous avons de la relation (21) :

$$(31) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p-2k} t}{\sin^p t} dt = 2 \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1} \frac{2}{3} \left[p, \frac{(2k-1)p-3}{2} \right]_{2k-1} + \dots + \frac{2}{(2k-1)p} \cdot (p, 0)_{2k-1}$$

§ III. Calcul des intégrales de forme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt, \quad 0 < a < b < \pi$$

10. Considérons les développements suivants connus :

Pour p impair :

$$\sin^p nt = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}} \left[\sin p \, nt - \frac{p}{1} \sin (p-2) \, nt + \dots + \frac{p(p-1)\dots \frac{p+3}{2}}{(p-1)!} \sin nt \right]$$

Pour p pair :

$$\sin^p nt = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}} \left[\cos p \, nt - \frac{p}{1} \cos (p-2) \, nt + \dots + \frac{p(p-1)\dots \left(\frac{p}{2} + 1\right)}{(p)!} \cdot \frac{1}{2} \right]$$

Multiplions ces relations par le facteur $\frac{1}{\sin^p t}$ et en intégrant d'a à b, nous observons que nous obtenons dans le deuxième membre des intégrales respectivement de forme :

$$\int_a^b \sin \lambda nt \cdot \frac{1}{\sin^p t} dt, \quad \int_a^b \cos \lambda nt \cdot \frac{1}{\sin^p t} dt,$$

dans lesquelles λ est un nombre entier.

Comme le facteur $\frac{1}{\sin^p t}$ est continu dans l'intervalle (a, b), il en résulte que ces intégrales sont des coefficients *Fourier*, et d'après le théorème *Riemann*, elles tendent vers zéro pour $n = \infty$.

Il résulte de là que si p est impair :

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = 0,$$

et si p est pair :

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}} \left(\mp \frac{p(p-1) \dots (\frac{p}{2} + 1)}{(\frac{p}{2})!} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dt}{\sin^p t}$$

L'intégrale,

$$\int_a^b \frac{dt}{\sin^p t}$$

s'effectue facilement, par le changement de variable :

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$$

11. *Remarque.* Le degré d'approximation des deux intégrales (32) et (33) est celui des coefficients *Fourier*, c'est-à-dire :

$$\frac{A}{n},$$

A étant une constante.

12. *Conséquence.* Les intégrales (32) et (33) tendant la pre-

mière vers zéro et la seconde vers une quantité finie, il en résulte pour p impair ou pair :

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_a^b \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = 0$$

Le degré d'approximation avec lequel cette intégrale tend vers zéro, est :

$$\frac{A}{n^p},$$

A étant une constante.

§ IV. Le calcul des intégrales de la forme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt, \quad 0 < a < \pi$$

13. Nous remarquons que nous pouvons écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt$$

En vertu des relations (30) et (34) § II et § III, les intégrales du deuxième membre tendent respectivement, la première vers $\frac{\pi}{2}$ et la deuxième vers zéro.

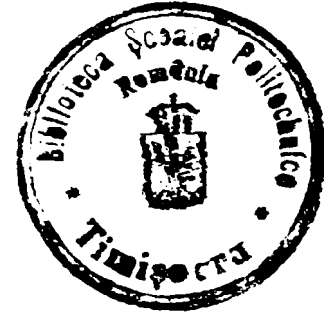
Il en résulte :

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \frac{\pi}{2}$$

14. Remarque. Le degré d'approximation avec lequel l'intégrale (35) tend vers $\frac{\pi}{2}$, est celui de l'intégrale qui tend vers zéro, c'est-à-dire.

$$\frac{A}{n^p},$$

A , étant une constante.



§ V. Le calcul des intégrales de la forme :

$$\frac{1}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt.$$

15. Si nous désignons par A l'intégrale à calculer et si nous faisons le changement de variable :

$$t = \pi - u,$$

nous avons :

$$A = \frac{\pi}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nu}{\sin u} \right)^p du - \frac{1}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nu}{\sin u} \right)^p u du,$$

exceptant le cas n pair et p impair que nous excluons en attendant.

Nous remarquons que la première intégrale, en vertu de la relation (29) est égal à $a_0(k) \cdot \pi$, et la deuxième intégrale est A même.

Nous déduisons facilement.

$$(36) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt = \frac{\pi^2}{2}$$

Reste à examiner l'intégrale :

$$\frac{1}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt,$$

dans le cas où n est pair ($n = 2k$) et p impair.

Nous considérons le développement (21) § II.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p &= 2 \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1} \cos t + \left[p, \frac{(2k-1)p-3}{3} \right]_{2k-1} \cos 3t \\ &+ \dots + 2(p,0)_{2k-1} \cos(2k-1)pt. \end{aligned}$$

En multipliant par $t dt$, en intégrant de 0 à π et en observant que les intégrales du deuxième membre sont de la forme :

$$\int_0^\pi t \cos(2i+1)t dt = \left[\frac{t \sin(2i+1)t}{2i+1} + \frac{\cos(2i+1)t}{(2i+1)^2} \right]_0^\pi = -\frac{2}{(2i+1)^2},$$

nous obtenons pour l'intégrale donné :

$$\frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p t dt = -\frac{4}{a_0(k)} \left\{ \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{3^2} \left[p, \frac{(2k-1)p-3}{2} \right]_{2k-1} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} (p, 0)_{2k-1} \right\},$$

où nous prendrons :

$$a_0(k) = \left[p, \frac{(2k-1)p-1}{2} \right]_{2k-1}.$$

16. **Observation.** Nous ne perdrons pas de vue que k dans toutes les formules qui renfermeront $a_0(k)$ est égal à $\frac{n}{2}$ ou à $\frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair.

§ VI. Calcul des intégrales de la forme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p dt.$$

17. En désignant par I_p l'intégrale à calculer, non passé à la limite, et en la retranchant de la relation (30), § II, nous pouvons écrire :

$$(37) \quad \frac{\pi}{2} - I_p = \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p nt \left[\frac{1}{\sin^p t} - \frac{1}{t^p} \right] dt.$$

Effectuons la paranthèse de sous le signe intégrale, en remplaçant $\sin t$ par la série connue :

$$\sin t = t \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right)$$

nous avons :

$$\frac{1}{\sin^p t} - \frac{1}{t^p} = \frac{1 - \left[-t^2 \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right) \right]^p}{t^p \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right)^p} \\ = \frac{p \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right) - \frac{p(p-1)}{2!} t^2 \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right)^2 + \dots - (-1)^p t^{2p-2} \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right)^p}{t^{p-2} \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right)^p}$$

ou :

$$(38) \quad \frac{1}{\sin^p t} - \frac{1}{t^p} = \frac{p}{6} t^{p-2} \cdot \psi(t).$$

où nous avons noté :

$$\psi(t) = \frac{p \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right) - \frac{p(p-1)}{2!} t \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right)^2 + \dots + (-1)^n t^{2n-2} \left(\frac{1}{3!} - \frac{t^2}{5!} + \dots \right)^p}{\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right)^p} \cdot \frac{6}{p}$$

On voit que $\psi(0) = 1$, c'est-à-dire $\psi(t)$ est une fonction régulière à l'origine.

En remplaçant dans (38) nous obtenons :

$$\frac{\pi}{2} - I_p = \frac{p}{6a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^p nt}{t^{p-2}} \cdot \psi(t) dt.$$

Le changement de variable :

$$n t = u,$$

nous permet d'écrire.

$$(39) \quad \frac{\pi}{2} - I_p = \frac{p}{6} \cdot \frac{u^{p-3}}{a_0(k)} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^p u}{u^{p-2}} \cdot \psi\left(\frac{u}{n}\right) du.$$

Nous passons à la limite pour $n = \infty$. Nous remarquons d'abord que le facteur $\psi\left(\frac{u}{n}\right)$ est fini dans l'intervalle d'intégration, ce qui fait que :

$$\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^p u}{u^{p-2}} \psi\left(\frac{u}{n}\right) du,$$

soit finie également à la limite.

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-3}}{a_0(k)} = 0$$

Alors, il résulte de (39).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - I_p \right) = 0,$$

équivalent à :

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p dt = \frac{\pi}{2}.$$

18. **Conséquence.** Si dans la formule (40), nous faisons le changement de variable :

$$nt = u,$$

nous obtenons :

$$(41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{a_0(k)} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^p du = \frac{\pi}{2}.$$

Mais nous observons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{a_0(k)} = \frac{2^{p-1}}{a},$$

parce que nous savons que $n = 2k$, ou $n = 2k + 1$, et $a_0(k)$, a la valeur donnée par la relation (28) § II. Alors du (40) nous déduisons facilement :

$$(42) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^p du = \frac{a_1 \pi}{2^p} \quad (1)$$

où a_1 , a la valeur donnée par la relation (11), § I.

19. **Observation.** En considérant la relation (39) nous voyons que le degrés d'approximation avec lequel l'intégrale tend vers $\frac{\pi}{2}$, est :

$$\frac{A}{n^2},$$

A étant une constante.

§ VII. Théorème nécessaire

Si $\varphi(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(0, x)$ où $0 < x < 2\pi$, et si, quand n tend vers l'infini, x tend vers zéro, x et $\frac{1}{n}$ ayant le même ordre infinitésimal, nous avons.

1) La valeur de l'intégrale (41) peut servir comme une solution simple d'un problème semblable proposée par Mr. Lulesco, dont on trouve la solution dans «G. M.» No. 5, 1909 par la méthode des résidus.

$$(43) \quad \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt = \frac{2^{p-1} \varphi(0)}{a_1} \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt,$$

a étant un nombre positif arbitraire ainsi que :

$$\lim_{x=0, n \rightarrow \infty} x \cdot n = a,$$

et *a*, ayant la valeur donnée par (11).

$\varphi(t)$ étant une fonction continue dans l'intervalle $(0, x)$, évident que aussi :

$$(44) \quad \psi(t) = \left(\frac{t}{\sin t} \right)^p \varphi(t)$$

est une fonction continue, dans le même intervalle.

Nous pouvons donc écrire :

$$(45) \quad \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt = \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \psi(t) dt.$$

Nous employons maintenant ici l'artifice suivant.

Nous considérons l'intégrale :

$$(46) \quad \int_0^x \left[n^p + \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \right] \psi(t) dt,$$

où le facteur : $n^p + \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p$ est une fonction positive dans l'intervalle $(0, x)$. Cela est évident quand *p* est pair, et en ce cas nous pouvons supprimer n^p ; au cas où *p* est impair, la fonction oscillatoire.

$$\left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p,$$

qui s'annule pour :

$$t = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi.$$

a le minimum au plus grand que $-n^p$, de sorte que le premier facteur sous le signe intégral de l'expression (46) est toujours positif dans l'intervalle $(0, x)$. D'autre part aussi le facteur $\psi(t)$ est continu dans l'intervalle $(0, x)$ et nous pouvons appliquer à l'intégrale (46) le premier théorème des moyennes.

On peut donc écrire :

$$(47) \quad \int_0^x \left[n^p + \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \right] \psi(t) dt = \psi(\xi) \cdot \int_0^x \left[n^p + \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \right] dt,$$

où $0 < \xi < x$.

La relation (47) peut s'écrire :

$$n^p \int_0^x \psi(t) dt + \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \psi(t) dt = n^p \psi(\xi) x + \psi(\xi) \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p dt,$$

Nous faisons le changement de variable dans l'intégrale du deuxième membre :

$$n t = u,$$

et nous pouvons écrire :

$$(48) \quad n^p \psi(\xi_1) \cdot x + \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \psi(t) dt = n^p \psi(\xi) \cdot x + \\ n^{p-1} \psi(\xi) \int_0^{nx} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^p du,$$

où $0 < \xi_1 < x$.

Nous multiplions la relation obtenue, par $\frac{1}{a_0(k)}$ et nous passons à la limite pour $n = \infty$ et par conséquent $x = 0$

Nous remarquons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty; x=0} \frac{n^p \psi(\xi_1) \cdot x}{a_0(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{a_0(k)} \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} n x \cdot \psi(\xi) = \frac{2^{p-1}}{a_1} a \psi(0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \frac{n^p \psi(\xi) \cdot x}{a_0(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{a_0(k)} \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} n x \psi(\xi) = \frac{2^{p-1}}{a_1} a \psi(0),$$

et en vertu de la relation (44) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \psi(\xi) = \lim_{\xi=0} \left(\frac{\xi}{\sin \xi} \right)^p \varphi(\xi) = \varphi(0).$$

Nous simplifions alors la relation (48), et nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^p \varphi(t) dt = \frac{2^{p-1}}{a_1} \varphi(0) \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE II

**L'expression par intégrale définies d'une certaine totalisation
de somme FOURIER et réciproquement.**

§ 1. Une totalisation remarquable.

21. FEJÉR dans son mémoire »Recherches sur les séries FOURIER« a démontré qu'en prenant la moyenne arithmétique des premières n sommes FOURIER, on obtient une nouvelle intégrale définie, analogue à celle étudiée par DIRICHLET.

Il a montré spécialement que :

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 f(x+2t) dt,$$

où s_0, s_1, \dots, s_{n-1} sont les sommes FOURIER. Au cas où $f(x)$ est une fonction finie et intégrable, il a encore montré que cette intégrale pour $n = \infty$, tend vers :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Nous montrerons maintenant qu'une certaine totalisation des sommes FOURIER, procure une nouvelle intégrale, analogue à celles étudiées par DIRICHLET et FEJÉR, qui convergent, pour $n = \infty$, vers la même limite. Cette convergence, nous la montrerons dans un autre chapitre.

Nous employons ici une méthode empirique et considérons le cas où $n = 2k + 1$.

22. Nous considérons les deux progressions arithmétiques suivantes :

$$\div 1 \ 3 \ 5 \ \dots \ 2k + 1, \quad \div 2k - 1 \ 2k - 2 \ \dots \ 2 \ 1.$$

Nous multiplions les termes de la première progression respectivement par les sommes FOURIER :

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k$$

et les termes de la deuxième, respectivement par les sommes FOURIER :

$$s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{2k}$$

et nous les additionnons dans l'ordre dans lequel elles sont écrites, et partageons le résultat par :

$$3k^2 + 3k + 1,$$

somme des termes des deux progressions considérées.

Nous obtenons ainsi la somme suivante, que nous notons par $v_3(x)$.

$$(1) \quad v_3(x) = \frac{1}{3k^2 + 3k + 1} \left[\sum_{i=0}^k (2i+1) s_i + \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) s_{k+i} \right],$$

où s_i est la somme FOURIER bien connue :

$$(2) \quad s_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2i+1)t}{\sin t} f(x+2t) dt$$

En vertu (2), la relation (1) devient :

$$(3) \quad v_3(x) = \frac{1}{(3k^2 + 3k + 1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+2t)}{\sin t} \left[\sum_{i=0}^k (2i+1) \sin(2i+1)t + \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \sin(2k+2i-1)t \right] dt$$

Effectuons maintenant la totalisation du deuxième membre.

Nous nous appuyons sur les égalités successives suivantes :

$$(4) \quad \sum_{i=0}^k (2i+1) \sin(2i+1)t = \frac{1}{2 \sin t} \sum_{i=0}^k (2i+1) [\cos 2it - \cos 2(i+1)t] \\ = \frac{1}{2 \sin t} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^k \cos 2it - (2k+1) \cos 2(k+1)t \right] = \frac{1}{4 \sin^2 t} [2 \sin t \\ + 2 \sum_{i=1}^k [\sin(2i+1)t - \sin(2i-1)t] - (2k+1) \sin(2k+3)t + (2k+1) \sin(2k+1)t] \\ = \frac{1}{4 \sin^2 t} [(2k+3) \sin(2k+1)t - (2k+1) \sin(2k+3)t]$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \sin(2k+2i-1)t = \frac{1}{2 \sin t} \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \\ \left[\cos 2(k+i)t - \cos 2(k+i+1)t \right] = \frac{1}{2 \sin t} \left[2k \cos 2(k+1)t - \sum_{i=2}^{2k+1} \cos 2(k+i)t \right] \\ = \frac{1}{4 \sin^2 t} \left[2k \sin(2k+3)t - 2k \sin(2k+1)t - \sum_{i=2}^{2k+1} (\sin(2k+2i+1)t - \sin(2k+2i-1)t) \right] \\ = \frac{1}{4 \sin^2 t} [2k+1 \sin(2k+3)t - 2k \sin(2k+1)t - \sin(6k+3)t]$$

En additionnant les égalités (4) et (5), on obtient après simplification :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k (2i+1) \sin (2i+1) t + \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) \sin (2k+2i-1) t \\ &= \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{3 \sin (2k+1) t - \sin (6k+3) t}{4} = \frac{\sin^3 (2k+1) t}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans (3), on obtient :

$$(6) \quad v_3(x) = \frac{1}{(3k^2 + 3k + 1)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin (2k+1) t}{\sin t} \right)^3 f(x+2t) dt.$$

Nous avons trouvé ainsi une intégrale analogue à celle de DIRICHLET et FEJÉR.

23. **Observation.** L'intégrale définie, qui entre dans la totalisation ci-haut est un cas particulier de l'intégrale générale :

$$(7) \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p f(x+2t) dt,$$

pour :

$$n = 2k + 1 \quad \text{et} \quad p = 3,$$

seul cas qu'il faille d'ailleurs prendre en considération, car dans le cas :

$$n = 2k, \quad p = 3,$$

l'intégrale (7) est nulle en vertu de la relation (23), § II.

§ II. Expression des intégrales de forme:

$$(8) \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin (2k+1) t}{\sin t} \right)^p f(x+2t) dt,$$

$$(9) \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin 4kt}{\sin 2t} \right)^p f(x+2t) dt$$

par les sommes FOURIER.

24. La relation trouvée par FEJÉR, entre son intégrale et les sommes FOURIER, nous a incité à chercher nous aussi, s'il existe une pareille relation aussi entre les intégrales plus générales (8) et (9) et les sommes FOURIER.

Notre réponse est affirmative.

1^o. *Le cas de l'intégrale (8)*

En vertu de l'identité :

$$(10) \quad 2 \cos 2nt = \frac{\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t}{\sin t},$$

dans laquelle nous faisons successivement $n = 1, 2, \dots, pk$, la relation (7) § 1 peut s'écrire :

$$\left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\right)^p = (p, pk)_{2k} + (p, pk-1)_{2k} \cdot \frac{\sin 3t - \sin t}{\sin t} \\ + (p, pk-2)_{2k} \cdot \frac{\sin 5t - \sin 3t}{\sin t} + \dots + (p, 0)_{2k} \cdot \frac{\sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t}{\sin t},$$

où :

$$\left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\right)^p = (p, pk)_{2k} - (p, pk-1)_{2k} + [(p, pk-1)_{2k} \\ - (p, pk-2)_{2k}] \frac{\sin 3t}{\sin t} + \dots + [(p, 2)_{2k} - (p, 1)_{2k}] \frac{\sin(2pk-3)t}{\sin t} \\ + [(p, 1)_{2k} - (p, 0)_{2k}] \frac{\sin(2pk-1)t}{\sin t} + (p, 0)_{2k} \cdot \frac{\sin(2pk+1)t}{\sin t}.$$

En multipliant cette relation par $\frac{f(x+2t)}{a_0(k)\pi} dt$, en intégrant de 0 à π et en observant que les intégrales du deuxième membre

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2i+1)t}{\sin t} \cdot f(x+2t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, pk,$$

sont exactement les sommes FOURIER, nous obtenons :

$$(11) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\right)^p \cdot f(x+2t) dt = \frac{1}{a_0(k)} [(p, pk)_{2k} - \\ (p, pk-1)_{2k}] s_0 + \frac{1}{a_0(k)} [(p, pk-1)_{2k} - (p, pk-2)_{2k}] \cdot s_1 \\ + \frac{1}{a_0(k)} [(p, pk-2)_{2k} - (p, pk-3)_{2k}] s_2 + \dots + \frac{1}{a_0(k)} \cdot (p, 0)_{2k} \cdot s_{pk}.$$

2^o. *Le cas de l'intégrale (9).*

25. Nous partons de la relation (20) § II dans laquelle p est évidemment pair. La relation (21) § II dont il faudrait partir, dans le cas où p serait impair, n'a aucune sens, vu que les coefficients polynomiaux du développement, définis par D. ANDRÉ, n'ont aucun sens. Maintenant nous remplaçons dans la relation

(20) t par $2t$ et en utilisant dans le deuxième membre l'identité (10), § chapitre II, nous pouvons en serrant les termes semblables, en sinus.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin 4kt}{\sin 2t}\right)^p &= \left(p, \frac{(2k-1)p}{2}\right)_{2k-1} - \left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2}\right)_{2k-1} \\ &+ \left[\left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2}\right)_{2k-1} - \left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2}\right)_{2k-1}\right] \cdot \frac{\sin 3t}{\sin t} + \\ \dots &+ \left[\left(p, 1\right)_{2k-1} - \left(p, 0\right)_{2k-1}\right] \frac{\sin [2(2k-1)p-1]t}{\sin t} + \left(p, 0\right)_{2k-1} \\ &\frac{\sin [2(2k-1)p+1]t}{\sin t} \end{aligned}$$

En multipliant cette relation par, $\frac{f(x+2t) dt}{a_0(k) \pi}$ en intégrant de 0 à π et en observant que les intégrales du deuxième membre sont les sommes FOURIER, nous avons :

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{1}{a_0(k) \pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin 4kt}{\sin 2t}\right)^p f(x+2t) dt &= \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p}{2}\right)_{2k-1} \right. \\ &- \left.\left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2}\right)_{2k-1}\right] s_0 + \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2}\right)_{2k-1} \right. \\ &- \left.\left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2}\right)_{2k-1}\right] s_1 + \dots + \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, 1\right)_{2k-1} - \left(p, 0\right)_{2k-1}\right] \times \\ &s_{(2k-1)p-1} + \frac{1}{a_0(k)} \left(p, 0\right)_{2k-1} \cdot s_{(2k-1)p} \end{aligned}$$

Les formules (11) et (12) sont les relations remarquables, qui relient les intégrales proposées aux sommes FOURIER.

26. Applications. Nous savons que les coefficients polynomiaux, qui entrent dans les développements (11) et (12) on peut les calculer soit par la formule (5) § 1, Ch. I; soit par le triangle généralisé de PASCAL.

Employons cette dernière méthode, pour les coefficients du développement (11) et pour les cas $p = 1, 2, 3$. En nous basant sur la propriété du No. 2, § 1, Ch. I, nous avons le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & k+1 & 2k+1 & 2k-1 & \dots & k+1 & k & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots & k(k+1) & \dots & k(2k+3) & \dots & 3k^2+3k+1 & \dots \end{array}$$

Calculons maintenant les coefficients du développement (11)
à l'aide des nombres,

$$(p, n)_{2k}, \quad n=1, 2, \dots, pk.$$

de ce tableau.

Nous trouverons :

1^o. Pour $p=1$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} f(x+2t) dt = s_k,$$

c'est l'intégrale de DIRICHLET.

2^o. Pour $p=2$,

$$\frac{1}{(2k+1)\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^2 f(x+2t) dt = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{2k}}{2k+1}$$

c'est l'intégrale de FEJÉR.

3^o. Pour $p=3$,

$$\frac{1}{(3k^2+3k+1)\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^3 f(x+2t) dt = \frac{s_0 + 3s_1 + 5s_2 + \dots + (2k+1)s_k + 2k s_{k+1} + \dots + 2s_{3k-1} + s_{3k}}{3k^2+3k+1},$$

c'est l'intégrale (6) § I. Ch. II établie par nous.

§ III. L'expression des intégrales de forme (8) et (9) du paragraphe
précédent, par les sommes Fejér

27. Nous pouvons établir facilement des relations entre les
intégrales (8) et (9) et les sommes FEJÉR.

Pour cela nous considérons les identités FEJÉR.

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau_n &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}, \\ \tau_{n+1} &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}, \end{aligned}$$

dans lesquelles s_0, s_1, \dots, s_n sont les sommes FOURIER, et τ_n, τ_{n+1}
les sommes FEJÉR.

Du (13) nous obtenons facilement l'identité :

$$(14) \quad s_n = (n+1) \tau_{n+1} - n \tau_n$$

Si ici nous prenons $n = 0, 1, 2, \dots, pk$, nous obtenons successivement les sommes FOURIER

$$s_0, s_1, \dots, s_{pk}, \dots, s_{(2k-1)p},$$

en fonction des sommes FEJÉR.

En substituant ces valeurs dans les relations (11) et (12), nous obtenons après certaines simplifications.

$$(15) \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^p f(x+2t) dt = \frac{1}{a_0(k)} \left[(p, pk)_{2k} - 2(p, pk-1)_{2k} \right. \\ + (p, pk-2)_{2k} \sigma_1 + \frac{2}{a_0(k)} \left[(p, pk-1)_{2k} - 2(p, pk-2)_{2k} + (p, pk-3)_{2k} \right] \sigma_2 \\ + \frac{3}{a_0(k)} \left[(p, pk-2)_{2k} - 2(p, pk-3)_{2k} + (p, pk-4)_{2k} \right] \sigma_3 \\ + \dots + \frac{pk-1}{a_0(k)} \left[(p, 2)_{2k} - 2(p, 1)_{2k} + (p, 0)_{2k} \right] \sigma_{pk-1} \\ \left. + \frac{pk}{a_0(k)} \left[(p, 1)_{2k} - 2(p, 0)_{2k} \right] \sigma_{pk} + \frac{pk+1}{a_0(k)} (p, 0)_{2k} \sigma_{pk+1} \right]$$

$$(16) \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin 4kt}{\sin 2t} \right)^p f(x+2t) dt = \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p}{2} \right)_{2k-1} \right. \\ - 2 \left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right)_{2k-1} + \left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2} \right)_{2k-1} \sigma_1 \\ + \frac{2}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right)_{2k-1} - 2 \left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2} \right)_{2k-1} \right. \\ \left. + \left(p, \frac{(2k-1)p-6}{2} \right)_{2k-1} \right] \sigma_2 + \dots + \frac{(2k-1)p-4}{a_0(k)} \left[(p, 2)_{2k-1} \right. \\ - 2(p, 1)_{2k-1} + (p, 0)_{2k-1} \left. \right] \sigma_{(2k-1)p-1} + \frac{(2k-1)p}{a_0(k)} \left[(p, 1)_{2k-1} \right. \\ \left. - 2(p, 0)_{2k-1} \right] \sigma_{(2k-1)p} + \frac{(2k-1)p+1}{a_0(k)} (p, 0)_{2k-1} \sigma_{(2k-1)p+1} \right]$$

28. Applications. Appliquons la formule (15) au cas où $p = 3$. Au lieu de cette formule, qui nécessiterait le calcul des coefficients, nous utiliserons la relation :

$$\frac{1}{(3k^2 + 3k + 1)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^3 f(x+2t) dt \\ = \frac{1}{3k^2 + 3k + 1} \left[\sum_{i=0}^k (2i+1) S_i + \sum_{i=1}^{2k} (2k-i+1) S_{k+i} \right]$$

déduite des relations (6) et (1) § I. Ch. II dans lesquelles les coefficients sont calculés.

Nous remplaçons ici les sommes FOURIER du deuxième membre, par les sommes FEJÉR déduites de l'identité (14) et nous obtenons facilement après certaines simplifications :

$$(17) \quad \frac{1}{3k^2 + 3k + 1} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^3 f(x+2t) dt =$$

$$\frac{-2\sigma_1 - 4\sigma_2 - 6\sigma_3 - \dots - 2k\sigma_k + (k+1)\sigma_{k+1} + (k+2)\sigma_{k+2} + \dots + (3k-1)\sigma_{3k-1} + 3k\sigma_{3k} + (3k+1)\sigma_{3k+1}}{3k^2 + 3k + 1}$$

29. **Observation.** Les développements du § II et § III nous ont permis de trouver la liaison entre les intégrales généralisées FEJÉR (8) et (9) et les sommes FOURIER et FEJÉR ($\rho=2$). On se posait la question si les intégrales (8) et (9) à l'exponent p , ne s'exprimeraient pas plus simplement, par des intégrales de la même forme, mais à l'exponent $p-1$, c'est-à-dire, si le mécanisme de transition de p à $p-1$ n'aurait pas été plus simple.

La réponse est négative, comme nous pouvons facilement le voir par la relation (17) en cas où $p=3$.

CHAPITRE III

La convergence des sommes trigonométriques :

$$V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin kt}{\sin t} \right)^p f(x+2t) dt.$$

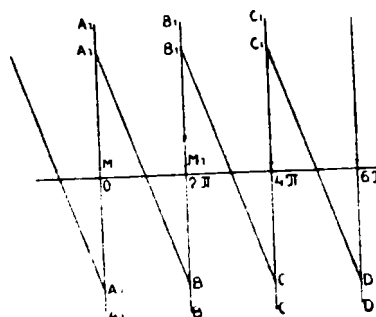
§ 1, Le cas de la fonction linéaire.

30. Soit $f(x)$ une fonction linéaire et périodique,

$$f(x) = \alpha + \beta x,$$

qui admet une période 2π .

La diagramme de cette fonction est — Fig. 1 — où nous avons supposé que $\alpha > 0, \beta < 0$. Cette fonction est évidemment discontinue aux points d'abscisse $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ où elle présente des sauts verticaux AA_1, BB_1, CC_1, \dots . Elle est représentée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ par $\alpha + \beta x$, dans l'intervalle $(2\pi, 4\pi)$ par $\alpha + \beta(x - 2\pi), \dots$ etc.



En ce cas la somme trigonométrique donnée devient :

$$(1) \quad V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \left\{ \alpha + \beta(x + 2t) \right\} dt$$

Cherchons la limite de cette somme, pour $n = \infty$, compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Nous observons que l'argument $x + 2t$ varie entre x et $2\pi + x$, quand t varie entre 0 et π . Par conséquent la fonction $\alpha + \beta(x + 2t)$, sort de l'intervalle $(0, 2\pi)$ quand t varie entre $\pi - \frac{x}{2}$ et π , et par suite dans cette intervalle nous remplacerons la fonction $\alpha + \beta(x + 2t)$, par $\alpha + \beta(x + 2t - 2\pi)$.

Nous décomposons donc notre intégrale comme suit :

$$V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^{\pi - \frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |\alpha + \beta(x + 2t)| dt + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_{\pi - \frac{x}{2}}^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |\alpha + \beta(x + 2t - 2\pi)| dt$$

$$= \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |\alpha + \beta(x + 2t)| dt - \frac{2\beta}{a_0(k)} \int_{\pi - \frac{x}{2}}^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt$$

ou :

$$(2) \quad V_p(x) = \frac{\alpha + \beta x}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt + \frac{2\beta}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt - \frac{2\beta}{a_0(k)} \int_{\pi - \frac{x}{2}}^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt$$

Dans la dernière intégrale, on peut remplacer l'intervalle $(\pi - \frac{x}{2}, \pi)$ par $(0, \frac{x}{2})$, la fonction sous le signe intégrale ayant la période π .

Nous savons d'ailleurs que :

$$\frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t dt = \frac{\pi}{2},$$

en vertu des relations (29) § II et (35) § V. Ch. I.

¹⁾ Nous convenons que l'accolade $\{ \}$ nous rappelle la périodicité de la fonction.

En remplaçant en (2) nous obtenons :

$$(3) \quad V_p(x) = \alpha + \beta x + 2\beta \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt, \right.$$

Nous passons à la limite pour $n = \infty$ et nous observons que le terme à soustraire tend vers $\frac{\pi}{2}$, en vertu de la relation (34)

§ IV. Ch. I.

Il résulte de là que :

$$\lim_{n=\infty} V_p(x) = \alpha + \beta x$$

Le développement (1) converge justement vers la fonction donnée.

L'expression (2) exige que nous excluons le cas où n est pair, p impair, parce que la première intégrale serait nulle.

31. **Observation.** Le degré d'approximation avec lequel le développement tend vers la fonction donnée,

$$\alpha + \beta x,$$

est celui par lequel

$$\frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt,$$

tend vers $\frac{\pi}{2}$, et en vertu de l'observation du No. 14 § IV. ch. I,

c'est $\frac{A}{n^p}$, A étant constant.

Cela signifie que plus p est grand, plus les sommes trigonométriques convergent plus rapidement.

32. **Applications.** Trouvons la série correspondante, qui représente la fonction $\alpha + \beta x$.

Pour cela nous calculerons, $\frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt$, du développement (3).

Nous multiplions par $\frac{1}{a_0(k)}$ dt les relations (7) ou (20) ch. I,



suisant que $n = 2k + 1$ ou $n = 2k$, et nous intégrons de 0 à $\frac{x}{2}$, nous obtenons :

$$(4) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \right)^p dt = \frac{1}{a_0(k)} \left[(p, pk)_{2k} \frac{x}{2} + (p, pk-1)_{2k} \frac{\sin 2x}{1} \right. \\ \left. + (p, pk-2)_{2k} \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (p, 1)_{2k} \frac{\sin(pk-1)x}{pk-1} + (p, 0)_{2k} \frac{\sin pkx}{pk} \right],$$

ou :

$$(5) \quad \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin 2kt}{\sin t} \right)^p dt = \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p}{2} \right)_{2k-1} \frac{x}{2} \right. \\ \left. + 2 \left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin x}{2} + 2 \left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin x}{2} \right. \\ \left. + 2 \left(p, \frac{(2k-1)p-6}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin 3x}{2} + \dots + 2 \left(p, 0 \right)_{2k-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)px}{2}}{(2k-1)p} \right]$$

Mais nous avons montré relativement à la relation (3), que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a_0(k)} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin ut}{\sin t} \right)^p dt \right) = 0$$

Remplaçons alors l'intégrale par les sommes correspondantes (4) ou (5), il en résulte facilement :

$$(6) \quad \frac{\pi-x}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, pk-1 \right)_{2k} \frac{\sin x}{1} + \left(p, pk-2 \right)_{2k} \frac{\sin 2x}{2} \right. \\ \left. + \dots + (p, 0)_{2k} \frac{\sin pkx}{pk} \right]$$

ou :

$$(7) \quad \frac{\pi-x}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k)} \left[\left(p, \frac{(2k-1)p-2}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin x}{2} \right. \\ \left. + \left(p, \frac{(2k-1)p-4}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin ax}{2} + \left(p, \frac{(2k-1)p-6}{2} \right)_{2k-1} \frac{\sin 3x}{3} \right. \\ \left. + \dots + \left(p, 0 \right)_{2k-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)px}{2}}{(2k-1)p} \right]$$

suisant que $n = 2k + 1$ ou $n = 2k$.

Ces développements sont valables pour chaque valeur de x , de l'intervalle de $(0, 2\pi)$.

Dans le cas particulier où $p = 1$, tous les coefficients du développement (6) sont égaux à 1 et nous obtenons le développement connu :

$$(8) \quad \frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

Le cas de la discontinuité

33. Nous chercherons la limite pour $n = \infty$ de l'intégrale (1), pour le point de discontinuité $x = 0$.

1°. La valeur statique

34. Nous faisons $x = 0$, dans la relation (3), équivalente à (1) et puis $n = \infty$ et nous obtenons :

$$V_p(x)_{x=0} = \alpha + \beta\pi,$$

Par conséquent :

$$\lim_{x=0, n=\infty} V_p(x) = \alpha + \beta\pi = \frac{\alpha + (\alpha + 2\beta\pi)}{2}$$

La limite cherché tend donc vers la semi-somme des valeurs de la fonction linéaire pour $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Géométriquement cela signifie qu'elle tend vers le milieu M du segment AA_1 , fig. 1. Par suite pour un point de discontinuité, le développement (1) ne tend pas vers la valeur de la fonction correspondante de ce point, mais vers la semi-somme des valeurs de la fonction aux points de discontinuité, exactement-comme dans le développement FOURIER.

5. Observation. De la démonstration n°. 30 ch. III et de la précédente il résulte que :

$$\lim_{n=\infty} V_p(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x & \text{pour } 0 < x < 2\pi \\ \alpha + \beta\pi & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Géométriquement ceci signifie que la fonction qui converge

vers $v_p(x)$ pour $n = \infty$ est formée de segments de droit AB_1, B_1C, C_1D, \dots en remplaçant cependant pour :

$$x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

les points A, B, B_1, C, C_1, \dots par les points isolés M, M_1, \dots dont les ordonnées sont :

$$\alpha + \beta\pi, \alpha + 3\beta\pi, \dots$$

exactement comme pour le développement dans la série FOURIER, de la même fonction linéaire.

2°. La valeur dynamique

36. Nous chercherons la valeur de $V_p(x)$ de (1) quand n tendant à l'infini, x tend en même temps vers zéro. Faisons un petit historique de ce qui nous a conduit à cette recherche dans notre cas général.

On sait que PAUL DU BOIS REYMOND a démontré, qu'alors que x et $\frac{1}{k}$ tendent en même temps vers zéro, ayant le même ordre infinitesimal, les sommes FOURIER :

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \left\{ x + \beta(x+2t) \right\} dt,$$

correspondant à la fonction linéaire périodique, tendent géométriquement vers la ligne brisée entière $MA_1 BB_1 CC_1 D, \dots$ fig. 1, en ne présentant plus de sauts verticaux.

Ce fait a été constaté plus tard, par voie mécanique par le mathématicien MICHELSON, qui a construit un appareil pour obtenir les courbes :

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x),$$

du développement FOURIER de la fonction linéaire (8), courbes qui tendent à la limite vers la ligne brisée entière.

LOVE, lui objectant, qu'en Mathématique on ne procède pas comme dans la Physique, on a reconu à l'arbitrage de POINCARÉ qui a donné raison à MICHELSON, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_p(x)$$

tend vers la ligne entière $MA_1 BB_1 CC_1 D, \dots$

Peu de temps après, le mathématicien GIBBS s'est occupé de nouveau de la représentation géométrique de la série FOURIER, correspondant à la fonction $\frac{\pi - x}{2}$ de la relation (8), et a observé que dans toutes les figures, la courbe limite, au lieu de donner aux points de discontinuité, seulement les segments :

$$MA, M_1B, M_1B_1, \dots$$

il a vu que ce sont des parties de la courbe, qui s'élève plus haut, à peu près de 0,1 de ces segments et qui persistent même à la limite, c'est-à-dire que la courbe limite n'est pas formée seulement par la ligne brisée $MA BB_1 CC_1 D \dots$ mais aussi par les segments parantes :

$$A_1A', BB', B_1B', \dots$$

A ce phénomène parasite on a donné le nom de phénomène GIBBS. Plus tard on a expliqué analytiquement ce phénomène pour $s_k(x)$. Nous démontrerons maintenant que ces faits persistent aussi pour le cas général de l'intégral (1), avec l'observation que le phénomène GIBBS a lieu seulement pour p impair.

Le cas général

37. Nous examinerons à cette fin :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0} v_p(x),$$

quand x et $\frac{1}{k}$ tendent en même temps à zéro, ayant le même ordre infinitesimal.

Nous considérons la relation (3) équivalente à (1) :

$$(9) \quad v_p(x) = \alpha + \beta x + 2\beta \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a_0(k)} \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt. \right)$$

et nous passons à la limite pour $n = \infty$ et $x = 0$ en même temps. Nous observons qu'en vertu du théorème de VIII, ch. I, où nous faisons $\varphi(t) = 1$, nous pouvons écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0} \frac{1}{a_0(k)} \int_0^x \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \frac{2^{p-1}}{a_1} \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt.$$

parce que dans le théorème mentionné, nous pouvons prendre :

$$x = \frac{2a}{n}, \text{ au lieu de } x = \frac{a}{n}.$$

La relation (9) devient :

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt = x + 2\beta \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2^{p-1}}{a} \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \right),$$

où nous savons que a est un nombre positif arbitraire, et a_1 a la valeur (11) § I. ch. I.

En donnant à a toutes les valeurs comprises entre 0 et ∞ , nous trouvons :

1°. Si p est pair :

$$0 \leq \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \leq \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt = \frac{a_1}{2^p} \pi.$$

2°. Si p est impair :

$$0 \leq \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \leq \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt$$

Au premier cas ;

$$\int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt,$$

tend vers son maximum $\frac{a_1}{2^p} \pi$, par des valeurs croissantes, et nous n'avons pas de phénomène GIBBS, car la limite ne peut pas être déposée.

En prenant la valeur maxima et minima pour la relation (10), nous trouvons :

$$x + \beta\pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} V_p(x) \leq x, \quad \beta < 0,$$

c'est-à-dire que chaque point du segment MA, appartient à la courbe limite, que, par conséquent, les courbes $V_p(x)$ tendent vers ligne brisée entière MA BB₁ CC₁ . . .

Au deuxième cas, quand p est impair, la fonction

$$\left(\frac{\sin t}{t} \right)^p$$

est oscillatoire. Elle s'annule pour :

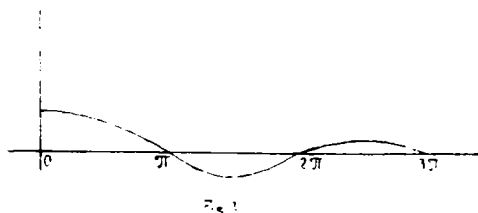
$$t = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

et plus t croit, plus l'amplitude d'écroit, comme on le voit dans la figure (2).

Alors :

$$\int_0^a \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt$$

représente une série alternée de surfaces décroissantes.



Sa valeur maxima nous l'avons, si nous considérons la surface de la première boucle :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt.$$

Ce fait n'a pas été observé de PAUL DU BOIS REYMOND, pour le cas qu'il a étudié, ($p = 1$) ; il l'a été observé plus tard pour ce cas, quand GIBBS eut découvert géométriquement le phénomène dont nous avons parlé.

En ce cas nous avons donc :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt > \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt,$$

et la relation (10) nous dit que son maximum est plus grands que α , que par conséquent la courbe limite $V_p(x)$ ne nous donne pas seulement la ligne brisée $MAB B_1 C C_1 \dots$ mais que nous obtenons aussi les segments parasites

$$AA', BB', B_1 B', \dots$$

Nous remarquerons encore qu'en ce cas n ne peut être que de la forme :

$$n = 2k + 1$$

§ II. Le cas général d'une fonction quelconque $f(x)$

38. Pour étudier avec facilité la convergence des sommes

$$V_p(x) = \frac{1}{2\alpha(k)\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p f(x + 2t) dt,$$

en ce cas général, il est besoin d'une certaine préparation, c'est-à-dire, de l'étude de l'intégrale :

$$(11) \quad J_p = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt, \quad 0 < a \leq \pi,$$

quand n tend vers l'infini.

Nous diviserons cette étude en deux parts, suivant que p est pair ou impair. Dans le premier cas nous suivrons de près la méthode employée par FEJER, pour le cas $p = 2$, la fonction $\varphi(t)$ étant finie et intégrable.

Dans le deuxième cas nous imposerons à la fonction $\varphi(t)$ les conditions DIRICHLET et LIPSCHITZ, connues pour le cas $p = 1$, en employant une méthode plus simple. Nous étudierons également le cas p pair ou impair. Dans tous les deux cas nous démontrons que l'intégrale proposée tend à la limite vers :

$$\frac{\varphi(+0)}{2}, \quad \text{si } 0 < a < \pi.$$

ou vers :

$$\frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2}, \quad \text{si } a = \pi.$$

§ III. Etude de l'intégrale J_p , au cas où p est pair :

39. Examinons la limite pour $n = \infty$ de l'intégrale (11) en supposant que $\varphi(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(0, a)$.

Nous prendrons deux cas :

1° Le cas, $0 < a < \pi$.

De l'hypothèse il ressort que nous pouvons faire correspondre à une grandeur positive δ une autre grandeur positive ε , de sorte que :

$$(12) \quad |\varphi(h) - \varphi(0)| < \delta,$$

$$\text{si :} \quad 0 < h \leq \varepsilon \leq \pi - a$$

Maintenant nous décomposons notre intégrale comme suit :

$$(13) \quad J_p = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_\varepsilon^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt.$$

Parceque le facteur :

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p$$

est une fonction positive, nous pouvons appliquer à chaque intégrale le premier théorème des moyennes.

Nous pouvons écrire :

$$(14) J_p = (\varphi(0) + \eta) \cdot \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt + \varphi(\varepsilon') \cdot \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_\varepsilon^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt,$$

$$\text{où :} \quad \eta < \delta \quad \text{et} \quad \varepsilon < \varepsilon' < a$$

En gardant ε fixe, et en faisant $n = \infty$, nous observons que :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_\varepsilon^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt = 0,$$

en vertu des relations (35) § IV et (32) § III. Ch. I, la relation (14) devient :

$$\left| J_p - \frac{\varphi(+0) + \eta}{2} \right| < \frac{\delta}{2} + \delta',$$

et par suite à la limite, nous pouvons prendre :

$$(15) \quad \lim_{n=\infty} J_p = \frac{\varphi(+0)}{2}$$

2^o. Le cas $a = \pi$.

Nous divisons l'intervalle d'intégration en $(0, \alpha)$ et (α, π) et nous opérons dans la deuxième intégrale le changement de variable :

$$t = \pi - u,$$

alors nous avons :

$$J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^\alpha \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \left(\frac{\sin nu}{\sin u} \right)^p \varphi(\pi - u) du.$$

Les deux intégrales sont de la forme précédente et par conséquent en vertu de la relation (15) nous pouvons écrire :

$$(16) \quad \lim_{n=\infty} J_p = \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi-0)}{2}$$

Le cas de la discontinuité de la fonction $\varphi(t)$

40. Les faits établis plus haut nous permettent facilement

de rechercher la limite de l'intégrale (11) et dans le cas suivant de discontinuité de la fonction $\varphi(t)$.

La fonction $\varphi(t)$ est finie, intégrable, avec un nombre fini de discontinuités simple (sauts verticaux).

L'intégrale (11) peut s'écrire :

$$J_p = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^{a_1} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p \varphi(t) dt + \dots \\ + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_{a_n}^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p \varphi(t) dt,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont les abscisses des points où la fonction $\varphi(t)$ présente des sauts verticaux. Maintenant la fonction $\varphi(t)$ est continue entre les limites de chaque intervalle, de sorte que passant à la limite pour $n = \infty$, nous observons que la première intégrale, en vertu de la relation (15) tend vers :

$$\frac{\varphi(+0)}{2}, \quad \text{dans le cas où } 0 < a < \pi,$$

Le reste des intégrales en ce cas, tend chacune vers zéro, en vertu de la relation (32) § II. Ch. I.

Dans le cas où $a = \pi$ ce qui a été dit se maintient, excepté pour la dernière intégrale qui tend vers :

$$\frac{\varphi(\pi - 0)}{2}$$

Ainsi donc dans ce cas de discontinuité, nous avons :

$$(16) \quad \lim_{n=\infty} J_p = \begin{cases} \frac{\varphi(+0)}{2} & \text{si } , 0 < a < \pi \\ \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2} & \text{si } , a = \pi \end{cases}$$

41 *Observation.* Le degré d'approximation avec lequel J_p tend vers sa limite, en cas de continuité ou de discontinuité de la fonction $\varphi(t)$ examinée plus haut, soit que $0 < a < \pi$, soit $a = \pi$, est celui du premier terme de tous les développements précédents de J_p ; il est par conséquent :

$$\frac{A}{n^p}$$

en vertu de l'observation du n^o 14 § IV. Ch. I.

§ IV. *Etude de l'intégrale J_p en cas que p est impair.*

42. Etudions la limite pour $n = \infty$ de l'intégrale (11), en faisant plusieurs hypothèses particulières sur la fonction $\varphi(t)$.

1^o. *La fonction $\varphi(t)$ est continue, positive et décroissante.*

Le cas $0 < a < \pi$.

En regardant l'intégrale (11) nous observons que le facteur :

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p,$$

est fini dans l'intervalle $(0, a)$, et le deuxième théorème des moyennes nous permet d'écrire :

$$J_p = \varphi(0) \cdot \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\xi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p dt, \quad 0 < \xi < a$$

En passant à la limite pour $n = \infty$ et observant que :

$$\lim_{n = \infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\xi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p dt = \frac{1}{2},$$

en vertu de la relation (35), § IV. Ch. I, nous obtenons :

$$(18) \quad \lim_{n = \infty} J_p = \frac{\varphi(+0)}{2}$$

Le cas $a = \pi$.

L'intégrale J_p , on peut l'écrire :

$$J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_a^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p \varphi(t) dt.$$

La première intégrale, en vertu de la relation (18) tend vers $\frac{\varphi(+0)}{2}$, et la deuxième il est facile de constater, en faisant le changement de variable :

$$t = \pi - u,$$

qu'elle se réduit à une intégrale pareille à la première, elle tend par conséquent à $\frac{\varphi(\pi-0)}{2}$.

Il résulte en ce cas que :

$$(19) \quad \lim_{n = \infty} J_p = \frac{\varphi(0) + \varphi(\pi-0)}{2}$$

2°. La fonction $\varphi(t)$ est continue, décroissante, mais non toujours positive dans l'intervalle $(0, a)$.

Soit C une constante positive, de sorte que :

$$\psi(t) = \varphi(t) + C,$$

soit positive dans l'intervalle, $(0, a)$.

Nous écrivons :

$$J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \psi(t) dt = C \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt$$

En passant à la limite pour $n = \infty$, en vertu de ce que nous avons établi au n° 1°, nous pouvons écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J = \begin{cases} \frac{\varphi(+0) - C}{2} = \frac{\varphi(+0)}{2} \text{ quand } , 0 < a < \pi . \\ \frac{\varphi(0) - C + \varphi(\pi - 0) - C}{2} = \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2} , \text{ quand } , a = \pi . \end{cases}$$

3°. La fonction $\varphi(t)$ est continue, croissante, dans l'intervalle $(0, a)$.

Considérons en ce cas la fonction $-\varphi(t)$ qui est décroissante. On peut écrire l'intégrale J_p .

$$J_p = - \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p | \varphi(t) | dt,$$

et sa limite est :

$$\frac{\varphi(+0)}{2} , \text{ quand } , 0 < a < \pi .$$

et :

$$\frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2} , \text{ quand } a = \pi ,$$

en vertu des démonstrations de ci-dessus.

4°. Avant de passer à d'autre hypothèse dans l'étude de l'intégrale J_p , nous établirons que la fonction $\varphi(t)$ étant monotone dans l'intervalle (g, h) nous avons.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_g^h \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt = 0, \quad 0 < g < h < \pi.$$

Nous considérons la fonction $\varphi_1(t)$ qui coïncide avec $\varphi(g)$ dans l'intervalle $(0, g)$ et avec $\varphi(t)$ dans l'intervalle (g, h) .

Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{\xi}^h \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt = \lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^h \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi_1(t) dt$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi_1(t) dt.$$

Les deux intégrales du deuxième membre tendent vers :

$$\frac{\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2},$$

en vertu de ce qui précède.

Il en résulte que :

$$(20) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{\xi}^h \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt = 0$$

5^o. La fonction $\varphi(t)$ est continue et a un nombre fini de maxima et de minima dans l'intervalle $(0, a)$.

L'intégrale (11) peut s'écrire :

$$J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{a_1} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{a_n}^{a} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont les points de maximum et minimum de la fonction $\varphi(t)$, compris dans l'intervalle $(0, a)$.

La fonction $\varphi(t)$ est maintenant monotone entre les limites de chaque intégrale de sorte qu'en passant à la limite pour $n = \infty$, nous observons que seulement la première intégrale tend vers $\frac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}$, en vertu de ce qui a été établi plus haut, et le reste des intégrales, en vertu de la relation (20) sont nulles dans le cas $0 < a < \pi$.

Au cas où $a = \pi$ ce qui a été dit subsiste, excepté pour la dernière intégrale qui tend vers, $\frac{\varphi(\pi-0)}{2}$.

De là il résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \begin{cases} \frac{\varphi(+0)}{2}, & \text{quand, } 0 < a < \pi \\ \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2}, & \text{quand, } a = \pi. \end{cases}$$

6°. La fonction $\varphi(t)$ est finie, a un nombre fini de discontinuités simples, présentant ou non, un nombre fini de maxima et de minima.

On peut écrire l'intégrale (11).

$$J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{a_1} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \dots \\ \dots + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{a_n}^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont les points de discontinuité de la fonction $\varphi(t)$. En passant à la limite pour $n = \infty$, toutes les intégrales sont nulles en vertu de la relation (20) excepté la première, qui tend vers

$$\frac{\varphi(+0)}{2}, \text{ dans le cas où, } 0 < a < \pi$$

Mais si $a = \pi$ la dernière intégrale tend également vers :

$$\frac{\varphi(\pi - 0)}{2}.$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \begin{cases} \frac{\varphi(+0)}{2}, & \text{quand, } 0 < a < \pi \\ \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2}, & \text{quand, } a = \pi \end{cases}$$

43. *Conclusions.* Toutes les conditions relative à la fonction $\varphi(t)$ étudiées en rapport avec l'intégrale (11) constituent les conditions DIRICHLET, appliquées à notre cas général.

Nous pouvons résumer ainsi les résultats établis :

Si la fonction $\varphi(t)$ reste finie, et intégrable et en général continu, peut-être présente-t-elle un nombre fini de maxima et de minima, peut-être possède-elle un nombre limité de discontinuités simples, dans tous ces cas, nous avons établi que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \begin{cases} \frac{\varphi(+0)}{2}, & \text{quand, } 0 < a < \pi \\ \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2}, & \text{quand, } a = \pi \end{cases}$$

44. *Observation.* Le grade d'approximation dans tous les cas étudiés ci-dessus, avec lequel l'intégrale (11) tend vers sa limite, est celui du premier terme de tous les développements précédents de J_p , c'est par conséquent, de J_p , c'est-à-dire :

$$\frac{A}{n^p}$$

en vertu de l'observation du No. 14 § IV, ch. I, A étant constante.

§ V. L'étude de l'intégrale J_p , au cas p pair ou impair

45. Nous rechercherons la limite pour $n = \infty$ de l'intégrale (11) et dans ce cas plus général.

Nous imposerons à la fonction $\varphi(t)$ des conditions plus larges que les précédentes qu'elles complètent et qui constituent les conditions LIPSCHITZ. Les résultats établis par LIPSCHITZ pour l'intégrale DIRICHLET, nous les étendrons facilement à notre cas général, en nous contentant de les énoncer, la démonstration étant la même. Nous énoncerons et démontrerons complètement d'autres résultats, valables seulement pour le cas où $p \leq 2$.

1^o. *La fonction $\varphi(t)$ devient infinie entre un nombre fini ou infini de points de l'intervalle $(0, a)$ mais de telle sorte qu'il existe dans l'intervalle $(0, a)$, des intervalles (r, s) de façon que :*

$$\int_r^s \varphi(t) dt,$$

reste une fonction finie et continue des limites r et s .

2^o. *La fonction $\varphi(t)$ présente un nombre fini ou infini de discontinuités simples dans l'intervalle $(0, a)$, mais de sorte qu'il existe des intervalles (r, s) dans l'intérieur de $(0, a)$ de façon que la fonction $\varphi(t)$ reste finie et continue.*

3^o. *La fonction $\varphi(t)$ présente un infinité de maxima et de minima, dans l'intervalle $(0, a)$, reste cependant comprise entre la valeur positive et négative d'une constante, de sorte que :*

$$\varphi(\delta) - \varphi(0),$$

s'étend vers zéro en même temps que δ , de façon que :

$$|\varphi(t + \delta) - \varphi(t)| \leq M \delta^\alpha,$$

où M est constante connue et $0 < \alpha < 1$.

Avec les restrictions de ci-dessus, *Lipschitz* a démontré que l'intégrale J_p , dans le cas particulier quand $p=1$, qu'il a étudié, tend vers les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \begin{cases} \frac{\varphi(+0)}{2}, & \text{quand, } 0 < a < \pi \\ \frac{\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)}{2}, & \text{quand, } a = \pi. \end{cases}$$

En répétant exactement le raisonnement de *Lipschitz*, dans notre cas général, nous trouvons les mêmes limites pour J_p .

4°. *Cherchons maintenant la limite de l'intégrale J_p , quand la fonction $\varphi(t)$ satisfait, dans l'intervalle $(0, a)$ une condition Lipschitz mineur.*

$$(21) \quad |\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| \leq M \delta^\alpha,$$

ou M est une constante connue, $0 < \alpha < 1$ et $p > 1$.

Le cas, $0 < a < \pi$.

Nous multiplions la relation (30) § II, ch. I, avec $\varphi(+0)$ et nous la soustrayons de la relation (11) après avoir décomposé l'intervalle d'intégration en $(0, a)$ et $(a, \frac{\pi}{2})$.

Nous pouvons écrire :

$$(22) \quad J_p - \frac{\varphi(+0)}{2} = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p [\varphi(t) - \varphi(0)] dt \\ - \frac{\varphi(+0)}{a_0(k) \cdot \pi} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt.$$

De la condition (21) nous déduisons :

$$|\varphi(t) - \varphi(+0)| \leq M t^\alpha$$

Alors, (22) devient :

$$J_p - \frac{\varphi(+0)}{2} \leq \frac{M}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p t^\alpha dt - \frac{\varphi(+0)}{a_0(k) \cdot \pi} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt.$$

En remplaçant le $\sin t$ du dénominateur de la première intégrale par son développement en série, nous pouvons écrire :

$$(23) \quad J_p - \frac{\varphi(+0)}{2} \leq \frac{M}{a_0(k)\pi} \cdot \int_0^a \frac{\sin^p nt}{t^{p-\alpha}} \cdot \psi_1(t) dt \\ - \frac{\varphi(+0)}{a_0(k)\pi} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt,$$

où :

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots\right)^p}$$

Nous faisons maintenant dans la première intégrale de (23) le changement de variable :

$$nt = u,$$

et nous avons :

$$J_p - \frac{\varphi(+0)}{2} \leq \frac{M n^{p-1-\alpha}}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{na} \frac{\sin^p u}{u^{p-\alpha}} \varphi_1\left(\frac{u}{n}\right) du - \frac{\varphi(+0)}{a_0(k) \cdot \pi} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p dt.$$

Nous passons à la limite pour $n = \infty$ et en remarquant facilement que la deuxième intégrale tend vers zéro, nous obtenons :

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(J_p - \frac{\varphi(+0)}{2} \right) < \frac{M}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{u^{p-\alpha}} \varphi_1\left(\frac{u}{n}\right) du \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1-\alpha}}{a_0(k)}.$$

Le facteur $\varphi_1\left(\frac{u}{n}\right)$ est fini, et par hypothèse p étant au moins 2, il s'en suit que :

$$p - \alpha > 1,$$

et par conséquent l'intégrale est finie : donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1-\alpha}}{a_0(k)} = 0.$$

Il résulte de (24) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \frac{\varphi(+0)}{2}$$

Le cas $\alpha = \pi$.

En décomposant l'intégrale J_p , nous avons :

$$(25) \quad J_p = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \cdot \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt + \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \varphi(t) dt$$

La dernière intégrale, en changeant la variable :

$$t = \pi - u,$$

se réduit à une intégrale de première forme et par conséquent en nous basant sur les développements antérieurs nous trouvons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \frac{\psi(+0) + \psi(\pi - 0)}{2}$$

46. *Observation importante.*

Si nous analysons la relation (24) nous observons que l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u^{p-\alpha}} \psi\left(\frac{u}{n}\right) du,$$

reste finie même dans le cas où nous prenons $\alpha = 1$, mais alors nous devons prendre $p \geq 3$. Les conclusions sont les mêmes. Cette simple analyse nous permet d'imposer à la fonction $\psi(t)$ la condition importante qui suit :

5^o. La fonction $\psi(t)$ satisfait une condition Lipschitz proprement dite :

$$|\psi(t + \delta) - \psi(t)| < M\delta,$$

M étant une constante connue $p > 3$.

Sur la base de l'importante observation de ci-dessus, nous pouvons conclure aussi ici que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_p = \begin{cases} \frac{\psi(+0)}{2}, & \text{quand, } 0 < a < \pi \\ \frac{\psi(+0) + \psi(\pi - 0)}{2}, & \text{quand, } a = \pi \end{cases}$$

47. *Observation.* Le degré d'approximation avec lequel J_p tend vers sa limite, dans les cas cas No. 4 et 5^o, est celui du facteur :

$$\frac{n^{p-1-\alpha}}{a_0(k)},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{A}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

A étant une constante.

§ VI. La convergence des sommes V_p dans le cas d'une fonction $f(x)$ quelconque

48. Grâce à la préparation faite aux paragraphes III, IV et V, nous pouvons commencer l'étude général de la convergence des sommes :

$$(26) \quad V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p f(x + 2t) dt.$$

annoncé au § II. Nous supposerons en premier lieu que la fonction $f(x)$ est périodique, de période 2π , et que dans l'intervalle de périodicité, elle présente une des particularités suivantes :

1^o. Elle est continue ou même discontinue entre un nombre fini de points, quand p est pair.

2^o. Elle remplit une des conditions DIRICHLET énoncées au No. 42, dans le cas où p est impair.

3^o. Elle remplit une des conditions LIPSCHITZ énoncées au § V, pour p quelconque.

4^o. Elle satisfait une condition mineure LIPSCHITZ pour $p \geq 2$.

5^o. Elle satisfait une condition LIPSCHITZ, proprement dite, pour $p \leq 3$.

Le cas, $0 < x < 2\pi$, mais différent d'un point de discontinuité de la fonction $f(x)$.

49. Nous poserons l'expression (26) sous une forme équivalente. Nous observons que l'argument $x + 2t$ de la fonction $f(x + 2t)$ varie entre x et $2\pi + x$, quand t varie entre 0 et π . Par conséquent la fonction $f(x + 2t)$ sort de l'intervalle $(0, 2\pi)$ alors quand x varie entre $\pi - \frac{x}{2}$ et π et par conséquent dans cet intervalle, la fonction $f(x + 2t)$ on la remplacera par :

$$f(x + 2t - 2\pi).$$

Nous décomposerons alors notre intégrale de sorte que :

$$V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p f(x + 2t) dt + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_{\pi - \frac{x}{2}}^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |f(x + 2t - 2\pi) - f(x + 2t)| dt.$$

Dans la dernière intégrale nous faisons le changement de variable :

$$t = \pi - u,$$

et nous obtenons :

$$(27) \quad V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p f(x+2t) dt + \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p |f(x-2t) - f(x-2t+2\pi)| dt$$

Nous passons à la limite pour $n = \infty$ et nous supposons que la fonction $f(x+2t)$, considérée comme fonction de t , remplit une des conditions de cidessus.

En ce cas nous pouvons nous servir de résultats établis au § III, IV et V relatifs à l'intégrale J_p de la relation (11).

Nous pouvons donc écrire :

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_p(x) = \frac{f(x) + f(x+2\pi)}{2} + \frac{f(x) - f(x+2\pi)}{2} = f(x).$$

Les sommes $V_p(x)$ convergent en ce cas vers $f(x)$ même.

Le cas de la discontinuité

Nous chercherons la limite pour $n = \infty$ de l'intégrale (26), pour un point de discontinuité par exemple, $x = 0$, supposant que $f(x)$ remplit une des conditions énoncées au commencement.

1°. *La valeur statique.*

Nous faisons $x = 0$ dans la relation (26) et nous avons :

$$V_p(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p f(2t) dt,$$

et nous passons à la limite pour $n = \infty$, nous obtenons en utilisant les résultats établis pour l'intégrale J_p .

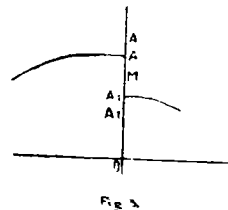
$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_p(x) = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2},$$

c'est-à-dire avec la semi-somme des valeurs de la fonction pour $x = 0$ et $x = 2\pi$. Géométriquement cela signifie que la courbe $v_p(x)$

converge pour le point de discontinuité $x = 0$, vers le milieu M du segment AA_1 , fig. 3.

2^o. La valeur dynamique.

Nous examinerons, $\lim_{n \rightarrow \infty, x=0} v_p(x)$, quand x et $\frac{1}{k}$ tendent vers zéro en même temps, ayant le même ordre infinitésimal, et quand $f(x)$ remplit une des conditions énoncées au commencement.



Comme x tend vers zéro, nous le pouvons supposer au commencement suffisamment petit pour que la fonction $f(t)$ dans l'intervalle $(0, \frac{x}{2})$ soit continue.

Nous posons maintenant à la limite la relation (27) équivalent à (26) et nous observons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p f(x + 2t) dt = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2},$$

en vertu de ce que nous avons établi relativement à l'intégrale J_p ; et encore :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p [f(x - 2t) - f(x - 2t + 2\pi)] dt \\ = [f(0) - f(2\pi)] \cdot \frac{2^{p-1}}{a_1 \pi} \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt, \end{aligned}$$

en vertu du théorème du § VIII. Ch. I.

Il résulte alors :

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} v_p(x) = f(0) + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2^{p-1}}{a_1} \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \right],$$

où a est un nombre positif arbitraire, et a_1 a la valeur donnée par la relation (11) § I. Ch. I.

En donnant à a toutes les valeurs comprises entre 0 et ∞ nous trouvons.

1^o. Si p est pair :

$$0 \leq \int_n^a \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \leq \int_n^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt = \frac{a_1}{2^p} \cdot \pi.$$

Dans ce cas, l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt,$$

tend vers le maximum par valeurs croissantes, et nous n'avons pas de phénomène *Gibbs*.

En prenant la valeur maxima et minima pour la relation (30), nous trouvons :

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty, x=0} V_p(x) \leq f(0),$$

ce qui signifie que chaque point du segment MA appartient à la courbe limite V_p , Fig. 3.

2°. Si p est impair,

$$0 \leq \int_0^a \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt - \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt,$$

parce que la fonction $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^p$, est oscillatoire et l'amplitude va en décroissant. Fig. 2. Dans ce cas nous avons le phénomène *Gibbs*, voir que :

$$\frac{2^{p-1}}{a^p} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt > \frac{2^{p-1}}{a^p} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^p dt = \frac{\pi}{2},$$

et la relation (30) nous dit que le maximum de la somme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, x=0} V_p(x),$$

est plus grand que $f(x)$. Géométriquement cela signifie que chaque point du segment MA' appartient à la courbe limite, que par conséquent en dehors du segment MA, qui fait partie de la courbe limite $V_p(x)$, nous avons aussi le segment parasite AA' en plus.

§ VII L'atténuation du phénomène Gibbs.

50. Nous mettrons à présent en évidence, l'atténuation du phénomène *Gibbs*, quand le nombre impair p croit.

Dans la relation (30) nous lisons que la grandeur du phé-

nomène *Gibbs* dépend du maximum de la valeur absolue de la différence :

$$\left| S_p - \frac{2^{p-1}}{a_1} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \right|$$

qui, d'après ce que nous avons affirmé, est :

$$(31) \quad \left| S_p - \frac{2^{p-1}}{a_1} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt \right|$$

Nous nous bornerons pour cela de calculer la valeur approximative de l'intégrale :

$$S_p = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^p dt,$$

pour $p=1$ et $p=3$.

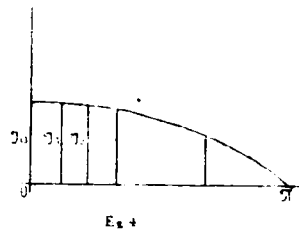
1°. *Le cas $p=1$.*

Bien que le phénomène *GIBBS* a été calculé pour le cas de $p=1$, nous le calculerons aussi nous par la méthode des trapèzes, avec une approximation suffisante pour le but que nous poursuivons.

Pour cela nous construisons la courbe,

$\frac{\sin t}{t}$, dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Nous divisons cet intervalle en n parties égales, et nous construisons les trapèzes inscrits et les rectangles circonscrits fig. 4.



Si $y_0=1, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n=0$ sont les ordonnées correspondantes, alors il est évident que :

$$\frac{\pi}{n} \cdot \frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1}}{2} < S_1 < \frac{\pi}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

ou :

$$\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) < S_1 < \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

De cette double inégalité on observe que, en prenant :

$$(32) \quad S_1 = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

on commet une erreur, $\frac{\pi}{2n}$.

Calculons S_4 , pour $n = 40$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 S_4 = \pi & \left\{ \frac{1}{80} + \frac{1}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{39} \right) \sin 40^\circ.30' + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{38} \right) \sin 9^\circ \right. \right. \\
 & + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{37} \right) \sin 15^\circ.30' + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{36} \right) \sin 18^\circ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{35} \right) \sin 22^\circ.30' \\
 & + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{34} \right) \sin 27^\circ + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{33} \right) \sin 31^\circ.30' + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} \right) \sin 36^\circ \\
 & + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{31} \right) \sin 40^\circ.30' + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right) \sin 45^\circ + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{29} \right) \sin 49^\circ.30' \\
 & + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{28} \right) \sin 54^\circ + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{27} \right) \sin 58^\circ.30' + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{26} \right) \sin 63^\circ \\
 & + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25} \right) \sin 67^\circ.30' + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{24} \right) \sin 72^\circ + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{23} \right) \sin 76^\circ.30' \\
 & \left. + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{22} \right) \sin 81^\circ + \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) \sin 85^\circ.30' + \frac{1}{20} \right\}
 \end{aligned}$$

Calculs.

$$\left(1 + \frac{1}{39} \right) \sin 40^\circ.30' = 1.02564 \times 0,078 = 0,07999992$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{38} \right) \sin 9^\circ = 0,52631 \times 0,156 = 0,08210436$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{37} \right) \sin 15^\circ.30' = 0,36036 \times 0,233 = 0,08396388$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{36} \right) \sin 18^\circ = 0,27777 \times 0,309 = 0,08583093$$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{35} \right) \sin 22^\circ.30' = 0,22857 \times 0,383 = 0,08754231$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{34} \right) \sin 27^\circ = 0,19607 \times 0,454 = 0,08901578$$

$$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{33} \right) \sin 31^\circ.30' = 0,17316 \times 0,522 = 0,09038952$$

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} \right) \sin 36^\circ = 0,15625 \times 0,588 = 0,09187500$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{31} \right) \sin 40^\circ.30' = 0,14337 \times 0,649 = 0,09304713$$

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right) \sin 45^\circ = 0,13333 \times 0,707 = 0,09426431$$

$$\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{29} \right) \sin 49^\circ.30' = 0,12539 \times 0,760 = 0,09529640$$

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{28} \right) \sin 54^\circ = 0,11905 \times 0,809 = 0,09631145$$

$$\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{27} \right) \sin 58^\circ.30' = 0,11396 \times 0,853 = 0,09720788$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{26}\right) \sin 63^\circ &= 0,10989 \times 0,891 = 0,09791199 \\
\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right) \sin 67^\circ.30' &= 0,10666 \times 0,924 = 0,09855384 \\
\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{24}\right) \sin 72^\circ &= 0,10416 \times 0,951 = 0,09905616 \\
\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{23}\right) \sin 76^\circ.30' &= 0,10230 \times 0,972 = 0,09943560 \\
\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{22}\right) \sin 81^\circ &= 0,10101 \times 0,988 = 0,09979788 \\
\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{21}\right) \sin 85^\circ.30' &= 0,10025 \times 0,997 = 0,09994925 \\
\frac{1}{20} &= 0,05000000
\end{aligned}$$

En additionnant ces résultats et les introduisant en S_1 , nous trouvons :

$$S_1 = \pi \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{\pi} \times 1,81155359 \right) = \pi (0,0125 + 0,5766) = 0,5891 \pi.$$

Il en résulte que :

$$\left| \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| = 0,0891 \pi,$$

avec une approximation de : $0,0125 \pi$.

2^o. Le cas $p = 3$.

Nous construisons une courbe $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3$, nous partageons l'intervalle $(0, \pi)$ en n parties égales. En prenant comme plus haut pour l'intégrale S_3 la valeur :

$$S_3 = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

nous commettons une erreur, $\frac{\pi}{2n}$.

Pour $n=10$, nous avons :

$$\begin{aligned}
S_3 = \pi \left\{ \frac{1}{20} + \frac{100}{\pi^3} \left[\left(1 + \frac{1}{9^3}\right) \sin^3 18^\circ + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{8^3}\right) \sin^3 36^\circ + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{7^3}\right) \sin^3 54^\circ \right. \right. \\
\left. \left. + \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3}\right) \sin^3 72^\circ + \frac{1}{5^3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Calculs.

$$\left(1 + \frac{1}{9^3}\right) \sin^3 18^\circ = 1,00137 \times 0,02950 = 0,02954$$

$$\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{8^3}\right) \sin^3 36^\circ = 0,12695 \times 0,20330 = 0,02581$$

$$\left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{7^3}\right) \sin^3 54^\circ = 0,03995 \times 0,52947 = 0,02115$$

$$\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3}\right) \sin^3 72^\circ = 0,02025 \times 0,86008 = 0,01741$$

$$\frac{1}{5^3} = 0,00800$$

En additionnant ces résultats, nous trouvons :

$$S_3 = \pi(0,05 + \frac{100}{\pi^3} \times 0,10191) = \pi(0,05 + 3,22515 \times 0,10191) \\ = 0,37867 \pi$$

Le facteur entre parenthèse est calculé avec une approximation de $\frac{1}{40} = 0,025$.

Il s'en suit que :

$$\left| \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt \right| = |0,5 - 0,50489| \pi = 0,00489 \pi,$$

avec une approximation égale à :

$$\frac{4}{3} \times 0,05 \pi = 0,06666 \pi.$$

Il est pour lors évident, que la différence (31) est plus petite quand $p=3$, que quand $p=1$, ce qui signifie que le phénomène Gibbs est plus atténué pour $p=3$.

51. *Observation.* Le degré d'approximation avec lequel les sommes trigonométriques $V_p(x)$ tendent vers $f(x)$, quand $f(x)$ satisfait une des conditions 1^o, 2^o et 3^o du N^o 48, est en vertu des observations des Nrs. 41 et 44.

$$\frac{A}{n^p},$$

A étant une constante. En ces cas on observe que la convergence est de plus en plus rapide à mesure que p est plus grand.

Mais si $f(x)$ remplit une des conditions 4^o ou 5^o du N^o 48,

alors le degré d'approximation, en vertu de l'observation No. 47, est :

$$\frac{A}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

A étant une constante.

Ce dernier cas renferme le théorème suivant de BERNSTEIN comme un cas particulier.

» Si $f(x)$ satisfait à la condition LIPSCHITZ :

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

nous avons :

$$|f(x) - \tau_n(x)| \leq \frac{A \cdot M}{n^\alpha},$$

où A est une constante numérique, qui peut être notée toujours quand α est donné.

CHAPITRE IV.

Du degré d'approximation des fonctions par les sommes trigonométriques

$$(1) \quad V_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p f(x+t) dt.$$

52. Nous nous proposons en ce chapitre de préciser de plus près le degré d'approximation avec lequel les sommes $V_p(x)$, tendent vers $f(x)$, quand la fonction $f(x)$ ou une de ses dérivées, est une fonction continue, lipschitzienne, dans l'intervalle de périodicité.

Nous préciserons le degré d'approximation dans le cas où la fonction $f(x)$ est simplement discontinue entre un nombre fini de points, de l'intervalle de périodicité, en supprimant les petits intervalles autour de ces points.

A cette fin nous démontrerons 5 théorèmes, dont les deux premiers seront une généralisation de 2 théorèmes de JACKSON qui n'étudie que les cas jusqu'à $p = 4$, et les trois derniers sont également des généralisations des théorèmes de C. WILDER, qui n'étudie que le cas $p = 2, p = 4$.

53. *Le théorème I. Si $f(x)$ est une fonction de période 2π , qui satisfait partout une condition Lipschitz :*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \lambda t,$$

λ étant une constante, alors il existe une somme trigonométrique

$V_p(x)$ d'ordre $\frac{(n-1)p}{2}$, de sorte que :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq A_1 \lambda \cdot \frac{n^{p-2}}{a_0(k)},$$

où A est une constante déterminée, et $p \geq 3$.

Nous décomposons l'intervalle d'intégration de (1) en $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ et nous faisons dans la deuxième intégrale le changement de variable :

$$t = \pi - u$$

Nous pouvons écrire :

$$(2) \quad V_p(x) = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |f(x+2t) + f(x-2t)| dt$$

Nous multiplions par $f(x)$ la relation (30), § II, ch. I, et nous la retranchons de la relation (2) et nous obtenons :

$$(3) \quad V_p(x) - f(x) = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| dt$$

D'autre part, de la condition LIPSCHITZ de l'hypothèse nous déduisons :

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leq |f(x+2t) - f(x)| + |f(x-2t) - f(x)| \leq 4\lambda t$$

Alors (3) devient :

$$(4) \quad |V_p(x) - f(x)| \leq \frac{4\lambda}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p t dt$$

Mais nous savons que :

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad \text{quand, } 0 < t \leq \frac{\pi}{2}$$

En substituant dans (4) et faisant ensuite le changement de variable :

$$nt = u,$$

nous obtenons :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{4 \lambda n^{p-2}}{a_0(k) \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \cdot \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du.$$

Si nous notons :

$$(5) \quad A_1 = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du,$$

qui est une constante finie, quelque grand que soit n , seulement si $p \geq 3$, nous obtenons :

$$(6) \quad |V_p(x) - f(x)| \leq A_1 \lambda \frac{n^{p-2}}{a_0(k)},$$

ce qu'il fallait établir.

Determination d'une limite supérieure pour A_1 .

54. En considérant de la valeur de A_1 , de la relation (5), nous pouvons écrire :

$$A_1 < 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du < 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left[\int_0^1 du + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{p-1}} \right],$$

d'où :

$$A_1 < 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right)$$

55 : **Théorème II.** Si $f(x)$ est une fonction de période 2π , possédant à $(i-1)^u$ dérivée, qui satisfait partout la condition LIPSCHITZ :

$$\left| f^{(i-1)}(x+t) - f^{(i-1)}(x) \right| \leq \lambda t,$$

λ étant une constante, il existe une somme trigonométrique $V_p(x)$ d'ordre $\frac{(n-1)p}{2}$, de sorte que :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq A_i \lambda \frac{n^{p-i-1}}{a_0(k)},$$

ou A_i est une constante déterminée et $p > i + 1$.

Nous ne nous occuperons que du cas où $f(x)$ renferme la première dérivée, c'est-à-dire $i=2$,

En ce cas nous pouvons écrire, en tenant compte de la condition LIPSCHITZ :

$$\begin{aligned} f(x+2t) &= f(x) + 2t f'(x + \theta_1 \cdot 2t) = f(x) + 2t f'(x) + \theta'_1 \cdot 4\lambda t^2 \\ f(x-2t) &= f(x) - 2t f'(x + \theta_2 \cdot 2t) = f(x) - 2t f'(x) + \theta'_2 \cdot 4\lambda t^2, \end{aligned}$$

où :

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \theta'_1 < 1, \quad -1 < \theta'_2 < 1.$$

D'ici nous déduisons :

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leq 8\lambda t^2$$

Alors la relation (3) dont nous nous servons également ici, devient :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{8\lambda}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p t^2 dt.$$

Comme dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t,$$

nous pouvons remplacer $\sin t$ du numérateur et en effectuant ensuite aussi le changement de variable :

$$nt = u,$$

nous obtenons :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{8\lambda n^{p-3}}{a_0(k) \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-2}} du$$

Si nous notons :

$$(7) \quad A_2 = 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-2}} du,$$

qui est une quantité finie, quelque grande qu'elle soit, pourvu que $p > 3$, nous obtenons :

$$(8) \quad |V_p(x) - f(x)| \leq A_2 \lambda \frac{n^{p-3}}{a_0(k)}.$$

Nous procédons de même dans le cas général.

Détermination d'une limite supérieure pour A_2 .

56. En considérant la valeur de A_2 dans la relation (7) nous pouvons écrire :

$$A_2 < 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-2}} du < 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left[\int_0^1 du + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{p-2}} \right],$$

d'où :

$$A_2 < 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-3}\right)$$

57. *Théorème III.* Soit $f(x)$ une fonction de période 2π , qui dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ n'admet d'autres discontinuités qu'un nombre fini de sauts finis et dans certains intervalles fermés, ne comprenant aucun point de discontinuité, elle satisfait une condition LIPSCHITZ :

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \lambda t,$$

dans laquelle λ est une constante et se maintient le même pour tous les intervalles de même espèce.

Il existe alors une somme trigonométrique $V_p(x)$ de l'ordre $\frac{(n-1)^p}{2}$ de sorte que, à chaque point x , dont la distance du point le plus rapproché de discontinuité est au moins δ , nous avons :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{a_0 k} \left[A, \lambda n^{p-2} + V \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \right],$$

où A , est une constante déterminée, V est la variation de $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et $p \geq 3$.

Nous emploierons le même marche que celle du théorème du mémoire cité de C. WILDER.

Supposons que nous avons un seul point de discontinuité de sorte que $\delta \leq \pi$. Nous choisissons l'origine en ce point. Nous considérons ensuite la fonction auxiliaire $\varphi(x)$, dont on a obtenu la représentation graphique au moyen de la réunion par des lignes droites des extrémités de chaque partie continue du graphique $f(x)$. Considérons maintenant la somme trigonométri-

que $V'_p(x)$, correspondant à $\varphi(x)$ et nous formons la différence de la relation (3) :

$$(9) \quad V'_p(x) - \varphi(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \left[\varphi(x+2t) + \varphi(x-t) - 2\varphi(x) \right] dt$$

Evidemment que dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, la fonction $\varphi(x+2t)$ est linéaire et par suite :

$$\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t) - 2\varphi(x) = 0,$$

en cet intervalle, et la relation (9) devient :

$$V'_p(x) - \varphi(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p \left[\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t) - 2\varphi(x) \right] dt$$

En prenant les valeurs absolues, nous avons :

$$(10) \quad \left| V'_p(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p \left[\left| \varphi(x+2t) - \varphi(x) \right| + \left| \varphi(x-2t) - \varphi(x) \right| \right] dt$$

Mais les oscillations de $\varphi(t)$, dans l'intervalle $(0, \pi)$ ne sont pas plus grandes que celles de $f(x)$, il s'en suit que :

$$\left| \varphi(x+2t) - \varphi(x) \right| + \left| \varphi(x-2t) - \varphi(x) \right| \leq 2V$$

D'autre part, dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}.$$

La relation (10) devient alors.

$$\left| V'_p(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{2V}{a_0(k)\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{1} \right)^p dt = \frac{V}{a_0(k)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \frac{1}{p-1} \times \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{p-1} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{p-1} \right],$$

ou :

$$(11) \quad \left| V_p'(x) - \varphi(x) \right| < \frac{V}{a_0(k)} \cdot \left(\frac{\pi}{\delta} \right)^{p-1}$$

Considérons à présent la différence :

$$(12) \quad f(x) - \varphi(x) = F(x).$$

C'est une fonction continue, si elle est définie aux point de discontinuité, ainsi que nous l'avons vu quand nous avons défini $\varphi(x)$, et satisfait partout une condition LIPSCHITZ.

En effet, si dans intervalle $(x, x + t)$, la fonction $f(x)$ est continue, alors d'après l'hypothèse :

$$(13) \quad |f(x + t) - f(x)| \leq \lambda t,$$

et de la définition de $\varphi(x)$, nous avons pour la même valeur de λ

$$(14) \quad |\varphi(x + t) - \varphi(x)| \leq \lambda t$$

En soustrayant l'égalité (14) de (13), nous obtenons :

$$(15) \quad |F(x + t) - F(x)| \leq 2 \lambda t.$$

Si dans l'intervalle, $(x, x + t)$ la fonction $f(x)$ a des points de discontinuité, nous avons montré que dans les intervalles partiels, où ces points divisent l'intervalle $(x, x + t)$, l'inégalité est satisfaite.

En vertu du théorème I, No. 53, nous savons qu'il existe une somme trigonométrique $V_p''(x)$, de sorte que :

$$(16) \quad \left| V_p''(x) - F(x) \right| \leq A_1 \lambda \frac{n^{p-1}}{a_0(k)},$$

où A_1 a une valeur déterminée dont la limite supérieure a été fixée au No. 54, vu que les conditions de ce théorème sont remplies. Cette inégalité est satisfaite pour chaque valeur de x .

L'inégalité (16) peut être écrite aussi, en vertu de la relation (12).

$$\left| V_p''(x) - (f(x) - \varphi(x)) \right| < A_1 \lambda \frac{n^{p-2}}{a_0(k)},$$

et en vertu de l'inégalité (11) nous avons :

$$(17) \quad \left| V_p''(x) + V_p'(x) - f(x) \right| < A_1 \lambda \frac{n^{p-2}}{a_0(k)} + \frac{V}{a_0(k)} \cdot \left(\frac{\pi}{\delta} \right)^p$$

Comme :

$$V_p''(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p F(x+2t) dt,$$

$$V_p'(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p F(x+2t) dt,$$

il s'en suit que :

$$V_p''(x) + V_p'(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p f(x+2t) dt = V_p(x).$$

Alors la relation (16) devient :

$$|V_p(x) - f(x)| < \frac{1}{a_0(k)} \left[A_1 \lambda n^{p-2} + v \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{p-1} \right]$$

ce qu'il fallait démontrer.

58. *Théorème IV.* Soit $f(x)$ une fonction de période 2π , finie et intégrable, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Il existe une somme trigonométrique $V_p(x)$ de l'ordre $\frac{(n-1)^p}{2}$ où $p \geq 3$, de sorte que pour chaque point x , compris au milieu d'un intervalle fermé de longueur $2\delta \leq 2\pi$, dans lequel $f(x)$ satisfait la condition LIPSCHITZ :

$$|f(x+\delta) - f(x)| \leq \lambda \delta,$$

nous avons :

$$|V_p(x) - f(x)| < \frac{1}{a_0(k)} \left[A_3 \lambda n^{p-2} + v \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{p-1} \right],$$

où A_3 est une constante déterminée et v est l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Evidemment que λ est en général différente, pour les différents intervalles, et plus sa valeur pour le voisinage d'un point sera plus petite, meilleure en sera l'approximation en ce point.

Nous considérons maintenant la somme trigonométrique $V_p(x)$ correspondant à $f(x)$. Nous choisissons l'origine au milieu du segment 2δ , et nous formons la différence (3) du No. 53, nous avons :

$$(18) \quad V_p(x) - f(x) = \frac{1}{a_0(k)\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^p |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| dt$$

Nous décomposerons l'intervalle d'intégration en $\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ et $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dans le premier intervalle, en vertu de la condition de LIPSCHITZ, nous avons :

$$|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)| \leq 4\lambda t$$

Dans le deuxième intervalle, nous avons :

$$|f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)| \leq 2\gamma$$

Alors la relation (18) devient :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{a_0(k)\pi} \left[4\lambda \int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p t dt + 2\gamma \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p dt \right]$$

Majorons les deux intégrales :

Nous savons que :

$$\sin t > \frac{2}{\pi} t, \text{ quand } 0 < t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Alors :

$$(19) |V_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{a_0(k)} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \left[2\lambda \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{|\sin^p nt|}{t^{p-1}} dt + \gamma \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{t} \right)^p dt \right]$$

Nous faisons dans la première intégrale le changement de variable :

$$nt = u,$$

alors :

$$(20) |V_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{a_0(k)} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \left[2\lambda n^{p-1} \int_0^{\frac{n\delta}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du + \gamma \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin tu|}{t} \right)^p dt \right]$$

Comme par hypothèse $p \geq 3$, nous observons que :

$$\int_0^{\frac{n\delta}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du < \int_0^{\infty} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du < \int_0^1 du + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{p-1}} = 1 + \frac{1}{p-2}$$

De même:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{|\sin t|}{t} \right)^p dt < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{t^p} = \frac{1}{p-1} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{\pi}{\pi} \right)^{p-1} \right] < \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1}$$

Si nous notons maintenant :

$$A_3 = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right),$$

alors l'inégalité (20) devient :

$$|V_p(x) - f(x)| < \frac{1}{a_0(k)} \left[A_3 \lambda n^{p-2} + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \right],$$

ce qu'il fallait établir.

59. *Le théorème V. Soit $f(x)$ une fonction intégrable et finie de période 2π .*

Pour chaque point x , pour lequel $f(x)$ a quatre dérivées finies, nous trouvons une somme trigonométrique $V_p(x)$ de l'ordre $\frac{(n-1)p}{2}$ et où $p > 3$, de sorte que :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq A_4 \frac{n^{p-2}}{a_0(k)}$$

La démonstration est analogue à celle donnée par C. WILDER, dans le mémoire cité.

Considérons la somme trigonométrique $V_p(x)$, correspondant à $f(x)$ et formons la différence (3) du No. 53, nous avons :

$$(21) |V_p(x) - f(x)| = \frac{1}{a_0(k) \cdot \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^p [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] dt$$

Parce que $f(x)$ est fini, il existe aussi une constante G de sorte que :

$$f(x) \leq G,$$

pour toutes les valeurs de x , alors aussi :

$$f(x+2t) \leq G$$

$$f(x-2t) \leq G.$$

Il résulte que :

$$\left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{2t} \right| < \left| \frac{f(x+2t) - f(x)}{2t} \right| + \left| \frac{f(x-2t) - f(x)}{2t} \right| < \frac{2G}{t},$$

pour $t \neq 0$. Soit N la plus grande de toutes les valeurs absolues des nombres dérivés en un point quelconque x .

Alors si nous nous donnons une petite quantité ε , il existe un δ , de sorte que si :

$$|2t| < \delta,$$

$$\left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{2t} \right| < 2N + \varepsilon$$

Soit M , le plus grand des nombres $2N + \varepsilon$ et $\frac{4G}{\delta}$.

Alors :

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| < 2Mt.$$

L'inégalité (21) devient :

$$(22) \quad |V_p(x) - f(x)| < \frac{2M}{a_0(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{|\sin nt|}{\sin t} \right)^p t dt.$$

Mais nous savons que :

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad \text{quand,} \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2},$$

et si nous faisons ensuite aussi le changement de la variable :

$$nt = u,$$

l'inégalité (22) devient :

$$|V_p(x) - f(x)| \leq \frac{2M n^{p-2}}{a_0(k) \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du,$$

où il faut que $p > 3$.

Si nous notons :

$$A_1 = M \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin^p u|}{u^{p-1}} du,$$

nous avons :

$$(23) \quad |V_p(x) - f(x)| \leq A_1 \frac{n^{p-2}}{a_0(k)},$$

ce qu'il fallait démontrer.



Etablissement d'une limite supérieure pour A_4

60. En procédant d'une façon analogue que celle du No. 54, nous trouvons :

$$A_4 < M \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right).$$

Une observation sur les sommes $v_3(x)$

61. Les sommes trigonométriques $v_p(x)$ étudiées dans le présent travail, comme nous l'avons déjà dit, comprennent comme cas particuliers, justement celles de FOURIER, FEJÉR et JACKSON, respectivement pour $p=1$, $p=2$ et $p=4$.

Nous observons ainsi que D. JACKSON a laissé de côté le cas $p=3$, qui se serait imposé à ses recherches, et s'est occupé du cas $p=4$.

Il est certain qu'on a laissé de côté le cas $p=3$, parce que les courbes limites $V_3(x)$ présentaient aux points de discontinuité le phénomène GIBBS, ce qui n'avait pas lieu dans le cas JACKSON, $p=4$.

Les sommes JACKSON $V_4(x)$ présentaient l'avantage que leur convergence étaient plus rapide que celle des sommes FOURIER et FEJÉR, et, fait important aussi, la fonction $f(x)$ correspondante pouvait satisfaire une condition LIPSCHITZ proprement dite, ce qui n'était pas permis, quand il était question des sommes FOURIER et FEJÉR.

La fonction $f(x)$ dans le cas des sommes FOURIER et FEJÉR, ne pouvait satisfaire qu'une condition LIPSCHITZ mineure.

Les premières somme $V_p(x)$, dans lesquelles la fonction $f(x)$ correspondante, peut satisfaire une condition LIPSCHITZ proprement dite, ne sont pas celles de D. JACKSON où $p=4$, mais celles où $p=3$, c'est-à-dire les sommes $V_3(x)$, comme cella ressort de l'importante observation du No. 46.

Au point de vue pratique, les sommes $V_3(x)$ se présentent plus simplement en développement, offrent l'avantage des sommes Jackson, en tant que la fonction $f(x)$ correspondante peut être *lipschitzienne* proprement dite, et aux points de continuité

de la fonction, tend vers la fonction $f(\mathbf{x})$ même, comme les sommes JACKSON.

Il est vrai cependant, que ces sommes $V_3(\mathbf{x})$ présentent aux points de discontinuité de la fonction $f(\mathbf{x})$, le phénomène GIBBS ; mais ce phénomène est aussi plus atténué que celui que présentent les sommes FOURIER, comme nous l'avons montré en § VIII, Ch. III.

