

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ȘI TELECOMUNICAȚII

TEZA DE DOCTORAT

CONTRIBUȚII PRIVIND UTILIZAREA FILTRELOR
KALMAN ÎN TELECOMUNICAȚII

ing. Gál János

Conducător științific:
Prof. Dr. Ing. Ioan Naforniță

TIMIȘOARA
2010

Cuprins

Lista figurilor.....	5
Lista tabelor.....	7
Introducere.....	9
Capitolul 1	
Interpretarea și estimarea frecvenței instantanee.....	12
1.1 Noțiunea de frecvență instantanee.....	12
1.2 Conceptul de frecvență instantanee.....	13
1.2.1 Conceptul de frecvență.....	13
1.2.2 Generalizarea conceptului de frecvență în cazul semnalelor nestaționare.....	15
1.2.3 Interpretarea frecvenței instantanee.....	18
1.3 Semnale cu fază polinomială (SFP).....	18
1.4 Estimarea frecvenței pentru semnale staționare.....	20
1.4.1 Definiția frecvenței instantanee în timp discret.....	23
1.5 Tehnici de estimare a frecvenței pentru semnale staționare.....	24
1.5.1 Estimarea adaptivă a frecvenței instantanee.....	24
1.5.2 Algoritmul LMS.....	25
1.5.3 Estimarea adaptivă RLS a frecvenței.....	26
1.5.4 Metode de estimare a frecvenței instantanee bazate pe modelarea polinomială a fazei.....	28
1.5.5 Algoritmul de estimare a coeficienților polinomiali bazat pe metoda celor mai mici pătrate.....	29
Capitolul 2	
Utilizarea filtrului Kalman în estimarea parametrilor semnalelor chirp.....	33
2.1 Filtrul Kalman.....	33
2.1.1 Prezentarea filtrului Kalman.....	33
2.1.2 Caracteristicile filtrului Kalman.....	34
2.2 Algoritmul filtrului Kalman standard discret.....	37
2.2.1 Reprezentarea semnalelor în spațiul stărilor.....	37
2.2.2 Condiții inițiale.....	40
2.3 Model în spațiul stărilor pentru semnale nestaționare cu variația fazei de tip polinomial.....	43
2.3.1 Modelul de semnal afectat de zgomot.....	44
2.3.2 Aproximarea lui Tretter.....	44
2.3.3 Vectorul de stare și ecuația de tranziție.....	47
2.3.4 Ecuația de măsurare.....	49
2.3.5 Legătura între stare și coeficienții polinomului fazei.....	49
2.4 Estimarea parametrilor unui semnal chirp	51
2.4.1 Algoritmul de filtrare Kalman standard.....	53
2.4.2 Rezultatele cercetării.....	55
2.4.3 Concluzii.....	64

Capitolul 3

Identificarea parametrilor semnalelor cu fază polinomială cu filtrul Kalman extins.....	65
3.1 Algoritmul filtrului Kalman extins	65
3.1.1 Prezentarea filtrului Kalman extins.....	65
3.2 Identificarea semnalelor cu fază polinomială prin utilizarea filtrarea Kalman extins.....	73
3.2.1 Introducere.....	73
3.2.2 Reprezentarea în spațiul stărilor neliniar semnalelor cu fază polinomială.....	74
3.2.3 Modelul în spațiul-stărilor și ecuația de tranziție.....	75
3.2.4 Ecuația de observare.....	76
3.2.5 Algoritmul EKF.....	77
3.2.6 Algoritmul EKF robust.....	79
3.2.7 Rezultatele cercetării.....	80
3.2.8 Analiza statistică.....	85
3.2.9 Concluzii.....	87

Capitolul 4

Demodularea necoerentă a semnalelor CPM prin filtru Kalman extins.....	88
4.1 Modulația continuă de fază CPM.....	88
4.2 Generarea semnalelor CPM.....	92
4.2.1 Implementarea modulației GMSK în sistemul GSM.....	96
4.3 Demodularea semnalelor CPM.....	96
4.3.1 Probabilitatea de eroare în MSK și GMSK.....	96
4.3.2 Demodularea coerentă a semnalelor CPM.....	98
4.3.3 Demodularea necoerentă a semnalelor CPM.....	99
4.3.3.1 Demodularea diferențială.....	99
4.3.3.2 Detectorul discriminator.....	100
4.4 Demodularea necoerentă prin filtru Kalman extins.....	101
4.4.1 Modelul în spațiul-stărilor și ecuația de tranziție.....	102
4.4.2 Algoritmul EKF.....	103
4.5 Concluzii.....	111

Capitolul 5

Contribuții și concluzii.....	112
Anexa 1.....	115
Anexa 2.....	117
Bibliografie.....	118
Lista lucrărilor publicate.....	124

Lista figurilor

1.1.	Semnalul chirp.....	12
1.2.	Mișcare armonică.....	13
2.1.	Concepte fundamentale în filtrarea Kalman.....	36
2.2.	Inițiatorii metodei de estimare optimale prin perspectivă istorică.....	36
2.3.	Schema bloc a filtrului Kalman.....	41
2.4.	Semnalul chirp înecat în zgomot cu amplitudine variabilă.....	52
2.5.	Estimarea frecvenței instantanee a semnalului chirp.....	55
2.6.	Estimarea amplitudinii.....	56
2.7.	Estimarea coeficientului α	57
2.8.	Estimarea coeficientului β	57
2.9.	Estimarea coeficientului γ	58
2.10.	Estimarea frecvenței instantanee.....	59
2.11.	Estimarea coeficientului α la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz.....	60
2.12.	Estimarea coeficientului α la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-400Hz.....	60
2.13.	Estimarea coeficientului β la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz.....	61
2.14.	Estimarea coeficientului β la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-400Hz.....	61
2.15.	Estimarea coeficientului γ la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz.....	62
2.16.	Estimarea coeficientului γ la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-400Hz.....	62
2.17.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării amplitudinii.....	63
2.18.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării frecvenței.....	64
3.1.	Rată de divergență față de SNR evaluate pe același semnal prin filtrarea Kalman.....	79
3.2.	Secvența SFP de ordinul 2 cu zgomot gaussian, SNR=5dB.....	80
3.3.	Estimarea amplitudinii prin EKF.....	81
3.4.	Estimarea coeficientului b_0 prin EKF ($b_0 = \pi/4$, $b_0 = \pi$).....	82
3.5.	Estimarea coeficientului b_0 prin EKF ($b_0 = \pi/3$, $b_0 = 2\pi/3$).....	82
3.6.	Estimarea coeficientului b_1 prin EKF.....	83
3.7.	Estimarea coeficientului b_2 prin EKF.....	84
3.8.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării amplitudinii.....	85
3.9.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_0 ..	86
3.10.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_1 ..	86
3.11.	Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_2 ..	87
4.1.	Drumurile posibile ale fazei (trellis).....	90
4.2.	Schema bloc a unui emițător MSK.....	92
4.3.	Schema bloc a unui emițător GMSK.....	93
4.4.	Impulsul de formare pentru trei produse durată \times bandă.....	94
4.5.	Densitatea spectrală de putere a modulației GMSK pentru diverse produse $B \times T_b$	95

4.6.	Schema bloc a unui receptor coerent MSK.....	98
4.7.	Schema bloc a unui detector diferențial.....	99
4.8.	Schema bloc a unui discriminator cu limitare.....	101
4.9.	Semnalul MSK demodulat EKF împreună cu mesajul transmis.....	105
4.10.	Performanțele sistemului MSK la variația ratei de eșantionare.....	106
4.11.	Performanțele sistemului GMSK la variația ratei de eșantionare cu $B \times T_b = 0.3$	106
4.12.	Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem MSK pentru trei valori ale ratei de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4, 8$ și 16	107
4.13.	Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem GMSK pentru trei produse durată \times bandă, $B \times T_b=0.3, 0.25$ și 0.5 și cu rata de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4$	108
4.14.	Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem GMSK pentru trei produse durată \times bandă, $B \times T_b=0.3, 0.25$ și 0.5	109
4.15.	O comparație între performanțele BER pentru sistemelor de transmisie MSK și GMSK folosind o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=8$	110
4.16.	O comparație între performanțele BER pentru sistemelor de transmisie MSK și GMSK folosind o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=16$	110

Lista tabelor

2.1.	Algoritmul de filtrare Kalman standard bazat pe predicția într-un pas...	42
2.2.	Erorile relative ale parametrilor estimați în cazul variației frecvenței instantanee cuprinse între valorile 200-400Hz.....	62
2.3.	Erorile relative ale parametrilor estimați în cazul variației frecvenței instantanee cuprinse între valorile 200-800Hz.....	63
3.1.	Algoritmul filtrului Kalman extins.....	72
3.2.	Erorile relative ale coeficientului estimat, b_0	83
3.3.	Erorile relative ale coeficientului estimat, b_1	83
3.4.	Erorile relative ale coeficientului estimat, b_2	84

INTRODUCERE

Subiectul tezei are ca obiect principal modelarea și identificarea semnalelor cu amplitudine variabilă și fază polinomială. Asemenea semnale se regăsesc frecvent în fizică, în special în semnalele de tip radar, sonar și telecomunicații. În aceste aplicații semnalul recepționat prezintă o modulația instantanee de fază datorată mișcării relative între senzor și țintă pentru sistemele radar sau între emițător și receptor în cazul comunicațiilor prin telefoane mobile. Aceste semnale sunt nestaționare, având parametri variabili în timp.

Dacă în cazul semnalelor staționare, în decursul timpului s-au dezvoltat o serie de modele și metode de prelucrare, extinderea acestora în cazul semnalelor nestaționare arată repede limitele ce nu pot fi depășite decât prin dezvoltarea de metode specifice acestora. Estimarea parametrilor semnalelor cu fază polinomială, (SFP) afectate de zgomot gaussian aditiv a fost tratată cu interes considerabil în literatura de specialitate și au fost folosite câteva metode, formulate ca probleme de identificare a sistemelor liniare, pentru soluționarea problemei. Estimarea parametrilor prin filtrare Kalman a fost investigată pe larg în cazul semnalelor SFP afectate de zgomot gaussian. Utilizarea filtrării Kalman standard și varianta sa extinsă este justificată de către avantajele sale practice în determinarea parametrilor unui semnal SFP precum și în demodularea semnalelor cu fază continuă.

Teza de doctorat este structurată după cum urmează.

În prima parte a *capitolului 1* sunt prezentate noțiunile fundamentale și interpretarea frecvenței instantanee. Apoi urmează o scurtă descriere a semnalelor cu fază polinomială în privința aplicabilității acestora în comunicații. Tot în cadrul acestui capitol sunt prezentate principalele tehnici de estimare a frecvenței instantanee: estimarea adaptivă (algoritmul LMS și RLS), estimarea bazată pe modelarea polinomială a fazei și pe metoda celor mai mici pătrate.

Capitolul 2 începe cu prezentarea importanței filtrului Kalman, care a revoluționat domeniul estimării și care este bazat pe descrierea semnalelor în spațiul stărilor și algoritmi recursivi. În continuare este descris algoritmul filtrului Kalman standard. Apoi se prezintă un model de stare liniar prin aproximarea lui Tretter care transformă zgomotul aditiv în zgomot pe fază și care este utilizat în estimarea parametrilor semnalelor chirp. În final sunt prezentate rezultatele obținute în urma simulărilor.

În *capitolul 3* s-a considerat estimarea parametrilor unui semnal cu modulația liniară de frecvență, având amplitudinea variabilă, care este un semnal având faza sub forma unui polinom de gradul doi și perturbat de un zgomot aditiv și gaussian. Algoritmul filtrului Kalman extins dezvoltat în teză în comparație cu filtrul Kalman standard, înlătură incertitudinile asupra fazei prin înlocuirea semnalului real cu reprezentarea lui în forma analitică. Au fost analizate și comparate performanțele metodei EKF cu metoda Kalman-Tretter.

Capitolul 4 debutează cu o privire de ansamblu asupra modulației de tip CPM, (Continuous Phase Modulation) și include o sinteză a literaturii de specialitate privind cercetările făcute în domeniul modulațiilor MSK și GMSK. În scopul unei bune ilustrări a acestor modulații au fost prezentate caracteristicile fundamentale ale acestora, precum și modul de generare al semnalelor MSK și GMSK. Paragraful 4.2.1 oferă o scurtă introducere privind implementarea modulației GMSK în sistemul GSM. Urmează apoi o prezentare a detecției coerente și necoerente, împreună cu mai multe referințe din literatura publicată pe acest subiect. Detecția coerentă necesită un receptor capabil să estimeze cu erori acceptabile atât frecvența cât și faza purtătoarei semnalului. În cazul detecției necoerente, nu este necesară recuperarea purtătoarei și,

prin urmare, este mai puțin costisitoare și utilizează scheme mai simple, comparativ cu detecția coerentă. Acest capitol se concentrează pe demodularea necoerentă a semnalelor CPM folosind filtrul Kalman extins. Paragraful 4.4 prezintă modelul semnalului CPM în spațiul stărilor și ecuațiile care descriu algoritmului de filtrare Kalman extins utilizat. Apoi sunt analizate și comparate performanțele BER a semnalelor MSK și GMSK în canale AWGN.

Capitolul 5 este consacrat prezentării concluziilor rezultate în urma studiului teoretic și aplicativ efectuat acestei teze, evidențiind contribuțiile personale.

CAPITOLUL 1

Interpretarea și estimarea frecvenței instantanee

1.1 Noțiunea de frecvență instantanee

Importanța conceptului de frecvență instantanee, FI, provine din faptul că, în multe aplicații, suntem confrunțați cu sarcina prelucrării unor semnale ale căror caracteristici spectrale (în particular frecvența la care apare vârful spectral) variază în timp. Adeseori astfel de semnale sunt numite „nestaționare”, un exemplu fiind semnalul chirp.

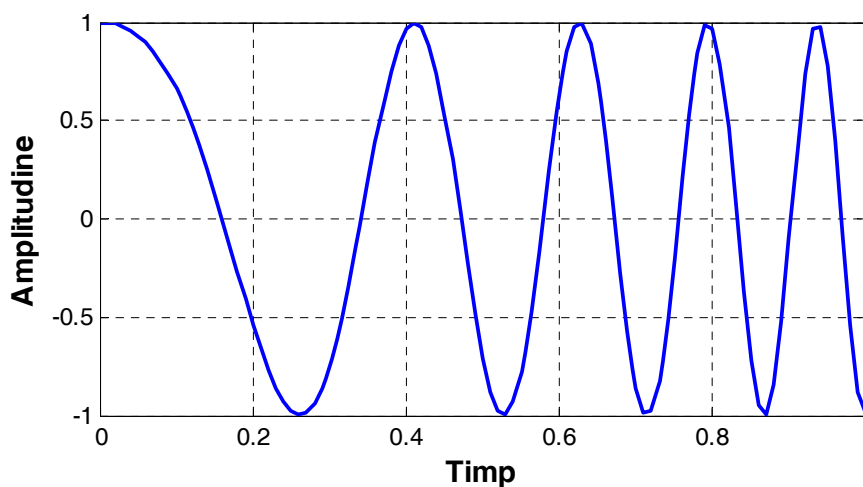


Figura 1.1. Semnalul chirp

Un astfel de semnal este modelabil printr-o sinusoidă a cărei „frecvență” se schimbă în timp. În prelucrările seismice astfel de semnale se utilizează ca o alternativă la

semnalele produse prin explozii, deoarece au avantajul că se pot controla, practic, caracteristicile lor spectrale în aproape orice privință, incluzând durata, lățimea de bandă și energia. Astfel de semnale se utilizează în primul rând pentru capacitatea de compresie în timp prin filtrare adaptată, apoi pentru estimarea schimbării de frecvență cauzată de efectul Doppler în cazul reflexiilor RADAR sau al urmării unor obiecte prin sistemul SONAR pasiv. Ele se mai întâlnesc în lumea vie, ca în cazul sistemelor de eco-locuție al lilieciilor. Pentru aceste semnale FI este o caracteristică importantă. Este un parametru variabil în timp ce localizează vârful spectral al semnalului, variabil în timp ca poziție pe axa frecvenței. FI poate fi interpretată, conceptual, ca fiind frecvența unei sinusoidale care se „potrivește” local „cel mai bine” cu semnalul supus analizei. Din punct de vedere fizic o astfel de abordare are sens numai pentru semnalele monocomponentă.

1.2 Conceptul de frecvență instantanee

1.2.1 Conceptul de frecvență

În mecanică, frecvența mișcării oscilatorii este definită ca fiind numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp. Într-o singură oscilație, corpul ce efectuează oscilațiile pleacă din punctul de echilibru, ajunge la o extremă, apoi la cealaltă extremă și revine în punctul de echilibru în același sens de mișcare cu începutul. Un tip aparte de mișcare oscilatorie este oscilația armonică, în care accelerația este proporțională cu elongația (deplasarea față de punctul de echilibru) și este îndreptată întotdeauna, ca sens, spre punctul de echilibru. Atunci când un corp greu se mișcă cu viteză unghiulară, ω , constantă, pe un cerc, proiecția sa pe un diametru este o mișcare oscilatorie armonică.

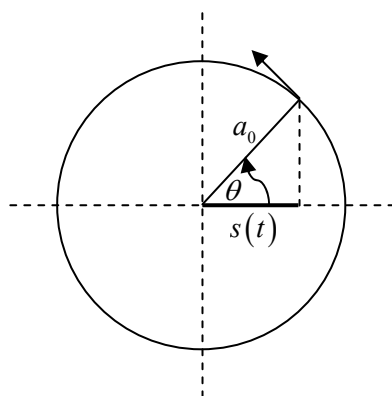


Figura 1.2. Mișcare armonică. Elongația este $s(t) = a_0 \cos \theta(t)$, unde $\theta(t) = \omega t$

Elongația, $s(t)$, viteza proiecției, $s'(t)$ și accelerația proiecției, $s''(t)$, sunt date de relațiile:

$$s(t) = a_0 \cos \theta = a_0 \cos \omega t \quad (1.1)$$

$$s'(t) = -a_0 \omega \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$s''(t) = -a_0 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 s(t) \quad (1.3)$$

Frecvența, f , este legată de viteza unghiulară, ω , prin formula $\omega = 2\pi f$. Se poate observa că mișcarea oscilatorie armonică poate fi determinată, rezolvând ecuația diferențială $s''(t) = -\omega^2 s(t)$. Soluția ecuației este dată de forma:

$$s(t) = \alpha e^{j2\pi ft} \quad (1.4)$$

unde expresia $\omega = 2\pi f$ reprezintă viteza unghiulară și α este o constantă arbitrară. Relațiile (1.1) – (1.4) leagă conceptul de frecvență de un exemplu practic.

În multe aplicații avem de-a face cu unde ce se propagă prin corpuri (solide, atmosferă, ș. a.) în care mișcarea unei particule dintr-un loc fixat poate fi descrisă printr-o oscilație armonică. Frecvența undei notată cu f se definește ca fiind numărul de unde ce trece prin punctul fixat într-o unitate de timp. Frecvența unui curent electric într-un circuit poate fi definită în mod asemănător ca fiind numărul de cicluri efectuate în unitatea de timp.

Fie acum un semnal, $s(t)$, ce compune dintr-o sumă ponderată de oscilații armonice. Descompunerea spectrală a unui astfel de semnal se obține prin transformarea Fourier:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.5)$$

Valorile funcției $S(\omega)$ caracterizează semnalul $s(t)$, așa că el poate fi reconstruit prin transformarea Fourier inversă:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.6)$$

Ecuțiile de analiză (1.5) și de sinteză (1.6) sunt semnificative doar pentru semnale staționare, adică acelea al căror spectru, $S(\omega)$, este constant în timp. Orice semnal staționar poate fi reprezentat ca o sumă ponderată de componente sinusoidale cu o

anumită frecvență, fază și amplitudine (la o frecvență f fixată, amplitudinea și faza oscilației armonice sunt constante).

În mod evident, conceptul de „frecvență” este unul neambiguu pentru semnalele al căror spectru $S(\omega)$ este constant în timp. Vom vedea că lucrurile stau astfel în cazul unor semnale nestaționare. Secțiunea următoare încearcă să clarifice lucrurile și să înlăture anumite ambiguități aparente.

1.2.2 Generalizarea conceptului de frecvență în cazul semnalelor nestaționare

Deoarece în mod obișnuit frecvența definește un număr de cicluri sau oscilații efectuate în unitatea de timp de către un corp în mișcare periodică, asocierea noțiunilor „instantaneu” și „frecvență” este un paradox.

De fapt noțiunea de „frecvența instantanee” este controversată, adaptată unei aplicații și introdusă în mod empiric. În această secțiune prezint anumite abordări anterioare ale frecvenței instantanee, apărute în decursul timpului, în ideea obținerii unor clarificări.

În anul 1937 Carson și Fry [CAR37] au considerat o frecvență variabilă în contextul studiului circuitelor electric. Au aplicat conceptul la studiul semnalului modulată în frecvență. Ei au definit semnalul modulată ca fiind:

$$w(t) = \exp \left[j \left(\omega_0 t + \lambda \int_0^t m(t) dt \right) \right] \quad (1.7)$$

unde, $\omega_0 = 2\pi f_0$ este frecvența purtătoare, λ reprezintă indicele de modulație iar $m(t)$ reprezintă semnalul de frecvență joasă ce trebuie transmis ($|m(t)| \leq 1$). Ei au definit frecvența unghiulară instantanee ca fiind:

$$\Omega(t) = \omega_0 + \lambda m(t) \quad (1.8)$$

unde $m(t)$ are dimensiunea de frecvență, iar frecvența instantanee ciclică este:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{\lambda}{2\pi} m(t) \quad (1.9)$$

Ei au definit astfel o „generalizare” a noțiunii de frecvență, considerată ca viteză de schimbare a fazei, la momentul t considerat.

În anul 1946 Van der Pol [VAN46] a abordat problema definirii frecvenței instantanee, analizând o oscilație armonică simplă:

$$s(t) = a \cos(2\pi ft + \theta) \quad (1.10)$$

unde, a , este amplitudinea, f , frecvența de oscilație iar θ o constantă de fază, a fazei, $\Phi(t) = 2\pi ft + \theta$. Pentru modulația de amplitudine el a folosit formula:

$$a(t) = a_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.11)$$

unde semnalul $g(t)$ reprezintă semnalul modulator. În mod similar el a extins-o și la modularea fazei prin:

$$\theta(t) = \theta_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.12)$$

Prin urmare faza, $\Phi(t)$, este $\Phi(t) = 2\pi ft + \theta(t)$.

Van der Pol a semnalat faptul că pentru a obține în relația (1.10) o modulație de frecvență, avem:

$$f_i(t) = f_0 [1 + \mu g(t)] \quad (1.13)$$

Introducând relația (1.13) în (1.10) avem:

$$s(t) = a \cos\{2\pi f_0 [1 + \mu g(t)]t + \theta\} = a \cos[2\pi f_0 t + 2\pi f_0 t \cdot \mu g(t) + \theta] \quad (1.14)$$

și deci nu găsim o formă ca (1.12).

Raționamentul l-a condus la concluzia că expresia (1.10), pentru oscilația armonică trebuie pusă sub forma:

$$s(t) = a \cos\left[\int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \theta\right] = a \cos \Phi(t) \quad (1.15)$$

unde argumentul funcției este:

$$\Phi(t) = \int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \theta. \quad (1.16)$$

În final se obține definiția frecvenței instantanee în timp continuu:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (1.17)$$

Folosind o reprezentare în real a semnalelor, Van der Pol a ajuns la aceeași concluzie cu Carson și Fry care au recurs la o reprezentare în complex a semnalelor.

În anul 1946 Gabor [GAB46] a făcut pasul următor. El a propus ca fiecărui semnal real să i se asocieze un semnal complex unic. Metoda propusă de el implică calculul transformatei Fourier a semnalului real și apoi suprimarea componentelor de frecvențe negative și multiplicarea amplitudinilor de la frecvențele pozitive cu doi. Această procedură este echivalentă cu calculul semnalului complex Gabor (cunoscut și sub numele de semnal analitic) din expresia:

$$z(t) = s(t) + j\mathcal{H}\{s(t)\} \quad (1.18)$$

sau

$$z(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.19)$$

unde, $z(t)$, este semnalul complex a lui Gabor, $s(t)$ este semnalul real și \mathcal{H} reprezintă transformata Hilbert.

Motivația lui Gabor pentru introducerea acestui semnal complex a fost definirea momentelor centrale ale frecvenței semnalului:

$$\langle f^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^n |Z(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df} \quad (1.20)$$

Aici, $Z(f)$, reprezintă spectrul semnalului complex. Dacă s-ar fi folosit spectrul semnalului real în relația de mai sus, toate momentele de ordin impar ar fi fost nule pentru că $|Z(f)|^2$ este pară, acest lucru fiind în neconcordanță cu realitatea fizică.

În anul 1978 Ville [VIL48] a unificat lucrările lui Carson și Fry pe de o parte și Gabor, pe de altă parte și a definit frecvența instantanee prin:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (1.21)$$

unde, $z(t)$, este semnalul analitic lui Gabor, dat prin relația (1.19). În reprezentarea lui Ville frecvența este definită ca prima derivată a fazei.

1.2.3 Interpretarea frecvenței instantanee

Se consideră problema poziționării unui semnal, $s(t)$, în domeniul frecvență. Se construiește semnalul analitic $z(t) = a(t)e^{j\Phi(t)}$ aplicând relația (1.18). Se determină apoi spectrul său, $Z(f)$ cu:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{j[\Phi(t)-2\pi ft]} dt \quad (1.22)$$

Aplicarea principiului fazei staționare spune că integrala va avea valoarea cea mai mare (în modul) la frecvența f_s pentru care faza este staționară, adică f_s satisface ecuația:

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t) - 2\pi f_s t] = 0 \quad (1.23)$$

ecuație ce conduce la

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1.24)$$

Se vede că f_s este o funcție de timp, $f_s(t)$ dă o măsură a concentrării energiei în domeniul frecvență, la momentul t . Această măsură este chiar *frecvența instantanee* în timp continuu pentru semnal. Proprietatea de concentrare a energiei în domeniul frecvență explică importanța frecvenței instantanee.

1.3 Semnale cu fază polinomială (SFP)

În multe aplicații tehnologice cum ar fi în telecomunicații, în sistemele de RADAR și SONAR, se folosesc semnale ce aparțin categoriei de semnale nestaționare care pot fi aleatoare sau deterministe și a căror caracteristică principală este variația frecvenței în funcție de timp. Analizele temporale și spectrale nu oferă o imagine completă asupra acestor semnale nestaționare. Analizele timp-frecvență s-au introdus tocmai în scopul înlăturării inconvenientelor pe care le prezintă metodele clasice de analiză. Unul din instrumentele de bază ale analizei timp-frecvență este spectrograma definită ca pătratul modulului transformatei Fourier a nucleului obținut prin produsul dintre semnal și o fereastră alunecătoare. Aplicarea spectrogramei a arătat limitele sale din punctul de vedere al rezoluției, ceea ce a condus la cercetarea și la dezvoltarea unor

noi transformate mai performante. Drept exemplu, putem cita distribuția Wigner-Ville, introdusă inițial de Wigner în mecanica cuantică [WIG32] și apoi de Ville [VIL48] pentru analiza timp-frecvență. Gabor [GAB46] a propus o transformare care astăzi poartă numele lui și care constă o descompunerea semnalului pe o familie de semnale gaussiene. Necesitatea obținerii de reprezentări timp-frecvență cu rezoluție cât mai bună și robustețe mare la zgomotul gaussian a dus la introducerea de noi distribuții ce permit reprezentarea frecvenței instantanee într-un mod care să elimine termenii de interferență. Putem aminti de exemplu distribuțiile introduse de Choi-Williams [CHW89], Barkat și Boashash [BBB99], [BBB01], Guo și alții [GUO94], Cohen și alții [COH99].

Din anii '80 și până în prezent, comunitatea științifică a celor care lucrează în domeniul prelucrării semnalelor a acordat o atenție specială studiului semnalelor cu fază polinomială (SFP). După cum sugerează numele lor aceste semnale au o fază modelată printr-un polinom, notat prin $\Phi(t)$. În cazul în care gradul polinomului este mai mare decât $M=2$, semnalele SFP sunt nestaționare. Modelarea semnalelor nestaționare prin SFP se întâlnește în diverse situații din care dau în continuare câteva exemple:

- În natură, undele sonore emise de lilieci și de unele mamifere marine pot fi modelate prin impulsuri cu modulație de frecvență liniară.
- În aplicațiile biomedicale, în scopul studierii fenomenului de hipertensiune, semnalele cardio-vasculare pot fi modelate printr-o sumă de semnale chirp.
- În aplicațiile RADAR cu compresie de impulsuri ce utilizează semnale cu MF pătratică, ecoul RADAR al unei ținte în mișcare are o funcție de fază neliniară ai cărui parametri depind de cinematica ținte. Unda reflectată se scrie atunci sub forma unui semnal SFP:

$$x(t) = \rho(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.25)$$

unde, $\rho(t)$, este amplitudinea și $\phi(t)$ faza semnalului:

$$\phi(t) = \Phi_0 + v_y t + \frac{1}{2} \left(a_y + \frac{v_x^2}{\Phi_0} \right) t^2 + \frac{1}{2\Phi_0} a_x v_x t^3 + \dots \quad (1.26)$$

unde Φ_0 este faza inițială, v_y și a_y reprezintă viteza și accelerația radială, iar cu v_x și a_x s-au notat viteza și accelerația ortogonală a ținte [WAN97].

- În domeniul transmisiunilor prin satelit, modelul de semnale bazat pe SFP a fost utilizat pentru a caracteriza variațiile importante ale frecvenței purtătoare în legătura dintre stațiile terestre și satelit.

Literatura științifică asupra modelării, estimării și reprezentării timp-frecvență a SFP este foarte abundentă. Citez cu titlu de exemplu lucrările lui Boashash [BOA94], [BOA91], Friedlander [FRI98] și Benidir-Ouldali [OUB97].

Cele mai multe aplicații tratează problema estimării parametrilor SFP ai unui semnal $y(t)$, înecat în zgomot, $w(t)$, dat prin:

$$y(t) = A \exp\{j\phi(t)\} + w(t) = A \exp j \left\{ \sum_{k=0}^M a_k t^k \right\} + w(t) \quad (1.27)$$

unde presupunem, că amplitudinea, A , a semnalului este constantă și că faza polinomială de este de gradul M . Semnalul, $w(t)$, este un zgomot aditiv, independent de SFP. Pentru $M = 2$, se obține un SFP numit semnal chirp.

1.4 Estimarea frecvenței pentru semnale staționare

În primul rând se caută anumite proprietăți pentru un estimator „bun”. Estimatorii trebuie să fie consistenți și eficienți statistic din punct de vedere al efortului de calcul. Un estimator consistent este unul care converge în probabilitate, în mod asimptotic, spre valoarea adevărată. Deci, pentru un estimator consistent avem:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \{ |\hat{a} - a| > \varepsilon \} = 0 \quad (1.28)$$

unde, \hat{a} , este un estimator al lui a , N este numărul de eșantioane în secvența observată (secvența observațiilor), iar ε este un număr pozitiv, arbitrar, de valoare mică [KAY88 p.45].

Un estimator statistic eficient este unul a cărui dispersie este minimă, atingând marginea inferioară Cramer-Rao (CRB) [KAY88 p.60], [HVT68 p.72]. Ea este dată de relațiile:

$$disp(\hat{a}) \geq \frac{1}{E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(z; a)}{\partial a} \right]^2 \right\}} \quad (1.29)$$

sau, echivalent, de

$$disp(\hat{a}) \geq \frac{-1}{E \left\{ \left[\frac{\partial^2 \ln p(z; a)}{\partial^2 a} \right]^2 \right\}} \quad (1.30)$$

unde, $\mathbf{z} = [z(1) \ z(2) \ \dots \ z(n)]$ este vectorul eșantioanelor observate, iar $p(z; a)$ semnifică funcția densitate de probabilitate a lui z , cu parametrul a dat, iar E reprezintă operatorul de mediere statistică. Deoarece z este complex, cu părțile reală și imaginară x și y , densitatea de repartiție a lui z este distribuția comună a lui x și y . Funcția $p(z; a)$ este denumită și funcția de verosimilitate.

S-ar putea că nici un estimator să nu atingă această limită, dar dacă există unul, acesta poate fi obținut aplicând o tehnică de verosimilitate maximă (ML) [KAY88 p.47]. Cu toate că estimatul ML este garantat a fi eficient din punct de vedere statistic pentru secvențe de date lungi, acesta poate să nu fie eficient din punctul de vedere al calculului. Din acest motiv se renunță uneori la estimatorii ML în favoarea unora suboptimali, dar cu necesități reduse de calcul.

Principiile descrise mai înainte au fost utilizate mult în estimarea frecvenței unei sinusoide în zgomot alb gaussian. Modelul de semnal care a fost utilizat adesea este:

$$z[n] = Ae^{j2\pi fn} + \varepsilon[n] \quad (1.31)$$

unde, A , este amplitudinea, f frecvența, $z[n]$ este secvența complexă observată, iar $\varepsilon[n]$ este secvența de zgomot alb, gaussian și complex.

Estimarea de verosimilitate maximă pentru frecvența unei singure sinusoide în zgomot alb, s-a arătat că se obține prin determinarea frecvenței la care spectrul își atinge maximum. Aceasta estimare poate fi implementată cu o căutare inițială grosieră pe domenii mari al unei transformări Fourier discrete urmată de o procedură de interpolare [RIF74]. Dacă estimarea grosieră a frecvenței se află în lobul principal al

răspunsului în frecvență, această tehnică converge spre maximul global corect. Estimarea atinge CRB la un prag al raportului semnal pe zgomot (SNR), suficient de mare, marginea fiind dată de [RIF74]:

$$\text{disp}[\hat{f}] \geq \frac{12}{(2\pi)^2 (A^2/\sigma^2) N(N^2 - 1)} \quad (1.32)$$

unde, N , este numărul de eșantioane independente, A este amplitudinea semnalului, iar $2\sigma^2$ este dispersia zgomotului complex.

Dispersia estimată se îndepărtează mult de la limita CRB odată ce SNR scade sub o valoare de prag, fapt ce este un fenomen comun estimatorilor neliniari.

După cum s-a menționat, metodele de estimare de maximă verosimilitate pot fi mari consumatoare de timp de calcul. Într-o încercare de a găsi estimatori de frecvență ce reduc efortul de calcul se folosesc adesea metode parametrice. Aceste metode se bazează pe modelarea (probabilității de distribuție) a priori a semnalului. Este avantajos, de multe ori, să presupunem că numărătorul funcției de transfer este o constantă. Astfel de modele sunt denumite autoregresive (AR) sau liniar predictive.

Estimările frecvenței sunt obținute prin găsirea rădăcinilor polinomului de la numitor. De exemplu, pentru o simplă sinusoidă complexă, aceste metode sunt foarte eficiente din punct de vedere al calculului, deși ele nu sunt, în general, eficiente statistic. De asemenea, ele permit ca sinusoida apropiată să fie bine rezolvată (distinge). Există câteva variante ale acestei abordări, incluzând metodele de entropie maximă, metoda Prony, ș. a. Ele sunt descrise pe larg în [KAY88] și [MAR87].

Alte tehnici care și-au găsit o largă utilizare pentru estimarea spațială a frecvențelor în domeniul procesării tablourilor sunt, de exemplu: descompunerea armonică a lui Pisarenko și MUSIC [KAY88 pp.431]. Aceste metode presupun că semnalul observat poate fi descompus în componentele de zgomot și semnal și apoi se poate utiliza faptul că vectorii de semnal vor fi ortogonali pe vectorii de zgomot. Astfel, estimatorul spectral MUSIC este format din inversa sumei produselor interioare între vectorul de semnal și estimările vectorului zgomot. Frecvențele componentelor de semnal sunt considerate a fi corespunzătoare vârfurilor estimării spectrale.

Tretter [TRE85] a introdus o altă tehnică de estimare a frecvenței. El a arătat că pentru o sinusoidă complexă în zgomot gaussian, la un nivel SNR mare, faza poate fi bine aproximată ca o funcție liniară de timp afectată aditiv într-un proces de tip zgomot alb gaussian. El a utilizat apoi o regresie liniară (metoda celor mai mici pătrate) pentru a estima frecvența. Deoarece metoda celor mai mici pătrate este echivalentă cu cea de tip ML pentru procese de tip alb, gaussian [KAY88 pp.49], estimatorul introdus de Tretter este tot de tip ML pentru valori mari ale SNR-lui. Deci, în cazul valorilor SNR mari dispersia sa se apropie de limita CRB.

O problemă a algoritmului lui Tretter este că prima sa etapă necesită extragerea fazei din date. Aceasta poate fi sursa unor erori numerice semnificative. Kay a găsit o formă modificată a acestui estimator prin ajustarea unui model pentru estimarea diferențelor de fază adiacente și nu a valorii fazei înseși, evitând astfel problema desfășurării fazei [KAY88]. Estimatorul rezultat este o simplă mediere (netezire) a diferențelor de fază cu o fereastră pătratică. Metodele descrise s-au ocupat de estimarea frecvențelor sinusoidelor și constituie o bază pentru a înțelege problema mai complicată a estimării frecvențelor variabile în timp.

1.4.1 Definiția frecvenței instantanee în timp discret

Pentru a implementa estimatori în timp discret pentru frecvența instantanee, se abordează mai întâi problema diferențierii în timp discret. O soluție este aceea de a utiliza un diferențiator în timp discret de tip FIR [OPP75 pp.164]. Frecvența instantanee în timp discret este definită ca:

$$f_i[n] = \frac{1}{2\pi} \Phi[n] * d[n] \quad (1.33)$$

unde, $d[n]$, este răspunsul la impuls al diferențiatorului FIR discret, iar $*$ denotă convoluția în timp. Totuși, astfel de filtre dau naștere unor probleme practice deoarece exagerează efectul zgomotului de frecvență înaltă [BOA91]. Aproximări bune pot fi obținute utilizând o tehnică de derivare a fazei. Această abordare, mai eficientă din punct de vedere al calculului dă, în general, rezultate mai bune în privința zgomotului, decât se obțin cu relația (1.30).

Diferențele finite înainte (FFD) și înapoi (BFD) definite de relațiile (1.34) și (1.35) sunt două operații de diferențiere a fazei utilizate de obicei:

$$\hat{f}_f[n] = \frac{1}{2\pi} [\Phi[n+1] - \Phi[n]] \quad (1.34)$$

$$\hat{f}_b[n] = \frac{1}{2\pi} [\Phi[n] - \Phi[n-1]] \quad (1.35)$$

Se poate utiliza și diferența centrală finită (CFD):

$$\hat{f}_c[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Phi[n+1] - \Phi[n-1]}{2} = \frac{1}{4\pi} [\Phi[n+1] - \Phi[n-1]] \quad (1.36)$$

Făcând o comparație între cei trei estimatori din relațiile (1.34), (1.35) și (1.36), estimatorul din (1.36) are unele avantaje. În primul rând, este nepolarizat și are întârziere de grup nulă pentru semnale MF cu modulație liniară. În al doilea rând, el corespunde momentului de ordin 1 în frecvență al unui număr de TFD [CLA80], [BOA90].

1.5 Tehnici de estimare a frecvenței pentru semnale staționare

1.5.1 Estimarea adaptivă a frecvenței instantanee

O abordare posibilă a estimării frecvenței instantanee este cea de a o formula ca o problemă de estimare adaptivă a frecvenței locale. Această abordare a dat naștere la circuite cu calare pe fază, PLL, utilizat pe larg în sistemele de comunicație [CAR86]. PLL-ul demodulează adaptiv semnalul de intrare, aducându-l în banda de bază, unde se filtrează, rezultatul obținut fiind reintrodus în etapa de demodulare. PLL-ul obișnuit se comportă foarte bine la zgomot, dar este incapabil să urmărească schimbări foarte rapide în frecvența instantanee. Sunt necesare modificări în structura sa pentru a fi capabil de această urmărire rapidă.

Snyder a propus câțiva estimatori adaptivi în [SNY]. El a propus un estimator bazat pe un criteriu neliniar de minimizare a erorii medii pătratice, precum și o aproximare liniară a acestui estimator (filtrul Kalman extins). El a demonstrat de asemenea că filtrul Kalman extins se reduce la PLL în cazul staționar. Au mai existat și alte variante și extinderi ale PLL-ului [HUA].

O altă formă de estimare adaptivă a frecvenței instantanee se bazează pe modelarea datelor ca un proces predictiv liniar. Două metode care pot fi utilizate pentru acest gen de estimări sunt algoritmi LMS și RLS [HAY91]. Ambii algoritmi sunt descriși în cele ce urmează.

1.5.2 Algoritm LMS

Griffiths [GRI75] a propus un algoritm adaptiv de estimare a frecvenței instantanee bazat pe un filtru de predicție liniară care și-a modificat coeficienții cu fiecare nou eșantion de date. Metoda lui Griffiths este conceptual fundamentată pe extragerea vârfului unei estimări spectrale bazată pe o predicție liniară pe termen scurt. Se obțin reduceri importante privind volumul de calcul, prin reajustarea estimării spectrale pe măsură ce apare un nou eșantion de date, în loc de a o recalcula de fiecare dată din datele primare. Algoritm rezultat, bazat pe tehnica gradientului descrescător, este foarte simplu. Totuși, deoarece algoritmul recursiv este un proces de urmărire a frecvenței instantanee, el este incapabil să răspundă la modificări foarte rapide (sau zgomotoase) ale frecvenței instantanee. De aceea estimarea poate prezenta sensibilități semnificative la zgomot. Mai jos se dau detalii privind algoritmul.

Vectorul eșantioanelor datelor, la momentul n , este notat cu:

$$\mathbf{z}[n] = [z[n] \quad z[n-1] \quad \dots \quad z[n-L+1]]^T \quad (1.37)$$

unde L este lungimea filtrului de predicție liniară. Vectorul corespunzător al coeficienților filtrului liniar este:

$$\mathbf{a}[n] = [a_1[n] \quad a_2[n-1] \quad \dots \quad a_L[n]]^T \quad (1.38)$$

Pe măsură ce un nou eșantion de date este prelucrat, coeficienții filtrului trebuie reactualizați, în așa fel încât să se minimizeze eroarea medie pătratică de predicție. Pentru statistici staționare eroarea este o funcție unimodală de vectorul coeficienților filtrului și de aceea metoda descreșterii gradientului poate fi folosită pentru a converge spre valorile optime ale coeficienților filtrului. Se utilizează algoritmul LMS al lui Widrow și Hoff [WID60] și coeficienții sunt dați de relații cum ar fi [MAR87 pp.264-266]:

$$\mathbf{a}[n+1] = \mathbf{a}[n] - 2\mu e[n+1] \mathbf{z}[n]^* \quad (1.39)$$

$$e[n+1] = z[n+1] + \mathbf{z}[n]^T \mathbf{a}[n] \quad (1.40)$$

unde $e[n+1]$ este eroarea liniară de predicție la momentul $n+1$, μ este constanta de adaptare, iar $*$ înseamnă conjugarea complexă. Forma obișnuită a ecuațiilor pentru algoritmul LMS este dată în [HAY91 pp.302-304].

Estimarea frecvenței instantanee este determinată din vârful spectrului obținut pe baza predicției liniare, adică: $\hat{f}_{i(n)} = f_i$ care maximizează ecuația de mai jos:

$$\frac{1}{\left| 1 + \sum_{k=1}^L a_k[n] e^{-j2\pi f_i k} \right|^2} \quad (1.41)$$

Dacă sunt de estimat sau de urmărit mai multe frecvențe, expresia (1.38) este modificată pentru a extrage diferitele vârfuri, corespunzătoare componentelor individuale de frecvență. Pentru a urmări o singură sinusoidă complexă în zgomot, frecvența instantanee poate fi determinată cu o eficiență de calcul ridicată în conformitate cu relația:

$$\hat{f}_i[n] = \frac{1}{2\pi} \arg[\mathbf{a}_1^*] \quad (1.42)$$

Coeficientul, μ , controlează rata de adaptare:

- dacă μ tinde spre limita sa superioară adaptarea este rapidă, dar eroarea în starea stabilă poate fi mare,
- dacă μ are valori mici, adaptarea va fi foarte lentă.

Principalul avantaj al acestui algoritm este simplitatea sa privind calculul, care este vizibilă din relația (1.39). În plus, pot fi utilizați algoritmi mai buni pentru adaptare [WID85].

1.5.3 Estimarea adaptivă RLS a frecvenței

Algoritmul RLS este o tehnică ce modelează datele ca o secvență de predicție liniară și care reactualizează coeficienții de predicție liniară cu fiecare nou eșantion de date. Algoritmul RLS diferă de algoritmul LMS prin aceea că în locul coeficientului de

adaptare scalar se utilizează pentru inversa matricei de covarianță o aproximare ponderată exponențial, numit „coeficient de adaptare” și nu coeficient de scalare.

Avantajul algoritmului RLS față de algoritmul LMS este viteza sa de convergență mărită și robustețea la nivelurile de energie ale semnalului. Algoritmul RLS clasic necesită L^2 calcule, spre deosebire de LMS ce necesită doar L calcule. Au fost dezvoltați algoritmi RLS rapizi ce conțin doar aproximativ L calcule. Reactualizarea parametrilor algoritmului la momentul n este obținută prin următorul set de ecuații [MAR87, pp.267-267]:

$$\mathbf{a}[n+1] = \mathbf{a}[n] - e[n+1] \mathbf{P}[n] \mathbf{z}[n]^* \quad (1.43)$$

$$e[n+1] = z[n+1] + \mathbf{z}[n]^T \mathbf{a}[n] \quad (1.44)$$

$$\mathbf{P}[n] = \left[\alpha \mathbf{P}[n-1]^{-1} + \mathbf{z}[n]^* \mathbf{z}[n]^T \right]^{-1} \quad (1.45)$$

unde, $\mathbf{P}[n]$, este aproximarea ponderată exponențial a inversei matricii de covarianță, iar α este un factor de „uitare”.

O formă standard a ecuațiilor pentru algoritmul RLS este dată în [HAY91 pp.480-483]. Utilizând lema inversiunii matricii, aceste ecuații se reduc la:

$$\mathbf{a}[n+1] = \mathbf{a}[n] - e[n+1] \mathbf{c}[n] \quad (1.46)$$

$$\mathbf{c}[n] = \frac{\mathbf{P}[n-1] \mathbf{z}[n]^*}{\alpha + \mathbf{z}[n]^T \mathbf{P}[n-1] \mathbf{z}[n]^*} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{P}[n] = \frac{1}{\alpha} \left(\mathbf{I} - \mathbf{c}[n] \mathbf{z}[n]^T \right) \mathbf{P}[n-1] \quad (1.48)$$

unde, $e[n+1]$, este definită în relația (1.44), iar \mathbf{I} este matricea identitate. Pentru o singură sinusoidă complexă zgomotoasă, ecuațiile de mai sus pot fi implementate foarte simplu și estimatorul ce rezultă este nedeplasat. Frecvența instantanee locală poate fi obținută conform relației (1.42). Pentru mai multe componente, estimările frecvențelor instantanee sunt extrase din vârfurile spectrului de predicție liniară, folosind expresia (1.38).

1.5.4 Metode de estimare a frecvenței instantanee bazate pe modelarea polinomială a fazei

Estimatorii ce se bazează pe definiția frecvenței instantanee discrete nu fac vreo presupunere implicită privind legea de variație a frecvenței și de aceea ei prezintă dispersie mare. O reducere semnificativă a dispersiei poate fi obținută prin includerea în procedura de estimare a anumitor cunoștințe apriorice. O cale pentru a face acest lucru este aceea de a presupune că legea frecvenței instantanee poate fi exprimată printr-un polinom de ordin finit, ceea ce implică o lege polinomială pentru variația fazei. Alegerea gradului polinomului este cea care permite încorporarea informației apriorice: dacă se știe că frecvența instantanee a semnalului se modifică lent, pot fi alese valori mici pentru gradul polinomului în timp ce valori mari se pot alege dacă se știe că frecvența instantanee se modifică rapid. Modelul semnalului în cazul aproximării polinomiale a fazei este o formă generalizată a relației (1.31) dată de:

$$z[n] = A[n] \exp j \{ \Phi[n] \} + \varepsilon[n] \quad (1.49)$$

$$z[n] = s[n] + jq[n] + \varepsilon[n] \quad (1.50)$$

unde

$$\Phi[n] = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p = \sum_{k=0}^p a_k n^k \quad (1.51)$$

iar, $A[n]$, este amplitudinea, $\Phi[n]$, faza și $\varepsilon[n]$ un proces de tip zgomot complex, de dispersie $2\sigma^2$, $n = \overline{0, N-1}$. Pentru $s[n]$ și $q[n]$ avem:

$$s[n] = A[n] \cos(a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p) \quad (1.52)$$

$$q[n] = A[n] \sin(a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p) \quad (1.53)$$

O posibilitate pentru a estima coeficienții a_k , $k = \overline{0, p}$ ai polinomului fazei este aceea de a găsi acei coeficienți care minimizează eroarea medie pătratică dintre semnalul estimat și cel observat. Aceasta va conduce la o problemă de cele mai mici pătrate, neliniară, și care va trebui soluționată numeric. O alternativă este aceea de a „liniariza” problema prin desfășurarea fazei. Tretter [TRE85] a arătat că această aproximare este bună pentru rapoarte semnal/zgomot mari. Pot fi atunci utilizate tehnici de estimare liniare ale metodelor celor mai mici pătrate.

O altă posibilitate este aceea de a extinde estimarea de maximă verosimilitate a parametrilor aplicată pentru o tonalitate staționară, la cazul polinomial. Deoarece semnalul observat este presupus a fi gaussian, aceasta va fi echivalentă cu soluția neliniară în metoda celor mai mici pătrate, dar este în mai multe sensuri mai ușor de implementat. Odată ce estimarea legii de variație a fazei, $\hat{\Phi}[n]$, a fost determinată, frecvența instantanee, $\hat{f}_i[n]$ se obține în mod direct din:

$$\hat{f}_i[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\hat{\Phi}[n]}{dn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p k \hat{a}_k n^{k-1} \quad (1.54)$$

relație în care \hat{a}_k este estimatorul coeficientului a_k .

1.5.5 Algoritm de estimare a coeficienților polinomiali bazat pe metoda celor mai mici pătrate

Cei $p+1$ parametri necunoscuți, a_0, a_1, \dots, a_p , din relația (1.52) se pot obține minimizând suma pătratului erorii, E , definite prin:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{z}[n] - z[n]|^2 \quad (1.55)$$

Soluția pentru parametrii \hat{a}_k se obține rezolvând sistemul de ecuații (1.56) și (1.57):

$$\sum_{n=0}^{N-1} z[n] \hat{A}[n] e^{j\hat{\Phi}[n]} n^k = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{A}^2[n] e^{2j\hat{\Phi}[n]} n^k \quad (1.56)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{j\hat{\Phi}[n]} n^k = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{A}[n] e^{2j\hat{\Phi}[n]} n^k \quad (1.57)$$

Considerăm o estimare a semnalului de forma:

$$z[n] = \hat{A}[n] \exp\{j\hat{\Phi}[n]\} \quad (1.58)$$

unde $\hat{\Phi}[n]$ și $\hat{A}[n]$ sunt ambele estimate ca polinoame:

$$\hat{\Phi}[n] = \sum_{h=0}^p \hat{a}_h n^h \quad (1.59)$$

și

$$\hat{A}[n] = \sum_{h=0}^q \hat{b}_h n^h \quad (1.60)$$

Suma E este dată de:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{z}[n] - z[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \hat{A}[n] \exp\{j\hat{\Phi}[n]\} - z[n] \right|^2 \quad (1.61)$$

Pentru a minimiza valoarea lui E în raport cu un parametru al estimatorului de fază, \hat{a}_h , trebuie găsită soluția ecuației, $\frac{\partial E}{\partial \hat{a}_h} = 0$.

Pentru $\forall k = \overline{0, p}$ se obține în formă vectorială:

$$[\hat{z} - z]^T \cdot y_h = 0, \quad h = \overline{0, p} \quad (1.62)$$

în care \hat{z} , z și y_h sunt vectori ce conțin $z[n]$, $\hat{z}[n]$ și $y_h[n] = n^h \cdot z[n]$ iar T reprezintă operațiunea de transpunere. Trecând la reprezentarea matricială, cu matricea \mathbf{Y} dată de:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \hat{z}[0] & 0 & \dots & 0 \\ \hat{z}[1] & \hat{z}[1] & \dots & \hat{z}[1] \\ \hat{z}[2] & 2\hat{z}[2] & \dots & 2^p \hat{z}[2] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{z}[N-1] & (N-1)\hat{z}[N-1] & \dots & (N-1)^p \hat{z}[N-1] \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

relația (1.62) se scrie sub forma:

$$\hat{z}^T \mathbf{Y} = z^T \mathbf{Y} \quad (1.64)$$

Ecuția trebuie minimizată și în funcție de cei $q+1$ parametri de amplitudine b_k , $k = \overline{0, q}$:

$$[\hat{z} - z]^T \cdot w_k = 0, \quad k = \overline{0, q} \quad (1.65)$$

în care

$$w_k[n] = n^k \exp\{j\hat{\Phi}[n]\} \quad (1.66)$$

astfel că:

$$\hat{z}^T \mathbf{W} = z^T \mathbf{W} \quad (1.67)$$

matricea, $\mathbf{W}_{N \times (q+1)}$, având forma:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \exp\{j\Phi[0]\} & 0 & \dots & 0 \\ \exp\{j\Phi[1]\} & \exp\{j\Phi[1]\} & \dots & \exp\{j\Phi[1]\} \\ \exp\{j\Phi[2]\} & 2\exp\{j\Phi[2]\} & \dots & 2^q \exp\{j\Phi[2]\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp\{j\Phi[N-1]\} & (N-1)\exp\{j\Phi[N-1]\} & \dots & (N-1)^q \exp\{j\Phi[N-1]\} \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Matricele \mathbf{W} și \mathbf{Y} vor fi inversabile doar dacă există mai mulți parametri decât date, $p+1 \geq N$ sau $q+1 \geq N$. În acest caz se obține soluția banală $\hat{z} = z$. Se mai poate observa că dacă legea de amplitudine este cunoscută sau este o constantă $\hat{A}[n] = \hat{A}$, $\forall n$, atunci $\mathbf{Y} = \hat{A}\mathbf{W}$ astfel că (1.64) și (1.67) devin identice.

În relațiile (1.56) și (1.57) este dată estimarea legii de variație a amplitudinii, obținută ca un polinom de gradul q , la fel ca și în cazul fazei:

$$\hat{A}[n] = \sum_{k=0}^q \hat{b}_k n^k \quad (1.69)$$

Relațiile (1.56) și (1.57) conduc la un sistem de $p+q+2$ ecuații neliniare, care nu se soluționează ușor. În plus, caracteristicile statistice ale estimatorului rezultat nu vor fi obținabile analitic. O soluție numerică poate fi obținută pentru întregul vector de parametri $\boldsymbol{\beta} = [b_0, b_1, \dots, b_q, a_0, a_1, \dots, a_p]^T$ din:

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial p(z; \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (1.70)$$

unde $p(z; \boldsymbol{\beta})$ este densitatea de probabilitate a semnalului, $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ este evaluarea a k -a din iterația lui $\boldsymbol{\beta}$, iar \mathbf{J} este matricea de informație a lui Fischer cu elementele date de:

$$\mathbf{J}_{i,j} = E \left\{ \frac{\partial \log p(z; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i} \cdot \frac{\partial \log p(z; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right\} \quad (1.71)$$

unde $E\{\cdot\}$ semnifică operatorul de mediere, iar β_i este al i -lea element al vectorului $\boldsymbol{\beta}$. Utilizarea acestei metode de determinare a mulțimii parametrilor este problematică. Pot exista mai multe maxime locale la care algoritmul va converge și se cere deci încorporarea anumitor mijloace pentru a încerca să se scape de aceste maxime locale. De aceea, este crucială o estimare inițială bună.

O metodă alternativă și mai simplă este cea în care faza se desfășoară și se modelează funcția de fază utilizând tehnici de regresie. Faza instantanee se obține atunci din date și are forma:

$$\Phi[n] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{z[n]\}}{\operatorname{Re}\{z[n]\}} \quad (1.72)$$

Rezolvarea ecuației (1.72) nu este simplă. În consecință există probleme de calcul cu „desfășurarea” fazei, în special la rapoarte semnal pe zgomot reduse. Presupunând amplitudinea constantă, modelul polinomial al lui (1.72) poate fi exprimat în formă matricială ca:

$$\Phi = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad (1.73)$$

unde Φ este vectorul de observare al fazei desfășurate, \mathbf{a} este vectorul parametrilor, iar \mathbf{X} este o matrice de constante. Cele trei matrici sunt definite după cum urmează:

$$\Phi = [\Phi[0], \Phi[1], \dots, \Phi[N-1]]^T \quad (1.74)$$

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_p]^T \quad (1.75)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & N-1 & \dots & (N-1)^p \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

Soluția în sensul erorii medii pătratice minime, pentru vectorul de parametri \mathbf{a} , considerând un zgomot aditiv, de medie nulă, este:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Phi \quad (1.77)$$

CAPITOLUL 2

Utilizarea filtrului Kalman în estimarea parametrilor semnalelor chirp

2.1 Filtrul Kalman

2.1.1 Aprecierea contribuția lui Rudolf E. Kalman

Rudolf Emil Kalman (19 Mai 1930) este cunoscut, în principal, pentru tehnica de filtrare liniară pe care a dezvoltat-o între anii 1959-1961 (din 1960 în colaborare cu Richard Bucy) [KAL60], [KAB61] pentru a elimina zgomotul nedorit dintr-un flux de date prin calculul recursiv. Filtrul Kalman este folosit pe scară largă atât în sisteme de localizare și navigare, identificare radar, clasificare sonar, și determinarea orbitei sateliților (de exemplu, pentru misiunile Ranger, Apollo și Mariner), cât și în domenii diverse cum ar fi prelucrarea datelor seismice, instrumentația pentru echipamente nucleare, și econometrie.

În anul 1985, a fost unul dintre laureații premiului Kyoto, inaugurat în acel an de către Fundația Inamori din Japonia. Premiul Kyoto este supranumit și ca „premiul Nobel japonez”. Recunoaște „activități intelectuale sau creative excepționale care au îmbogățit semnificativ experiența umană,” dar care sunt în afara celor cinci categorii

desemnate anume în testamentul lui Alfred Nobel. Kalman a primit primul premiu Kyoto în domeniul tehnologiei avansate.

Sontag și Yutaka Yamamoto de la Universitatea Kyoto, ambii foști studenți de-ai lui Kalman, au oferit următorul rezumat al contribuției lui Kalman pentru SIAM News:

„În timpul anilor 1960 Rudolph E. Kalman a fost liderul în dezvoltarea unei teorii riguroase a sistemelor de control. Printre multele sale contribuții covârșitoare se află formularea și studiul majorității noțiunilor fundamentale asupra spațiului stărilor (incluzând aici controlabilitatea, observabilitatea, minimalitatea, realizabilitatea din datele de intrare/ieșire, ecuațiile matricii Riccati, controlul linear-pătratic, și principiul separării) care sunt folosite azi în lumea întreagă. În timp ce unele din aceste concepte au fost întâlnite și în alte contexte, cum ar fi teoria controlului optimal, Kalman a fost acela care a recunoscut rolul central pe care acestea îl joacă în analiza sistemelor. Paradigmele formulate de Kalman și rezultatele de bază pe care le-a stabilit au devenit o parte intrinsecă a fundamentelor teoriei sistemelor și a controlului și reprezintă instrumente standard atât în cercetare cât și în partea de expunere, de la manuale pentru ingineri până la monografii de cercetare în matematică adresate absolvenților de universități. În timpul anilor 1970 Kalman a jucat un rol important în introducerea tehnicilor algebrice și geometrice în studiul sistemelor de control liniare și neliniare. Activitatea sa din anii 1980 încoace s-a concentrat pe legătura între latura teoretică a sistemelor și fundamentele statisticii, modelării econometrice, și identificării, ca un complement natural al studiilor sale de început asupra minimalității și realizabilității.”

Sursă: http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/siam_sontag.html

2.1.2 Caracteristicile filtrului Kalman

O caracteristică deosebită a unui filtru Kalman este faptul că pentru descrierea sa matematică se utilizează conceptul de spațiu a stărilor. O altă trăsătură care deosebește filtrul Kalman de filtrul optimal linear este faptul că soluția sa se

calculează recursiv. În particular, fiecare nouă estimare a stării se calculează pe baza estimării anterioare și a noii valori a mărimii de intrare, astfel încât numai ultima estimare trebuie memorată. Pe lângă faptul că elimină necesitatea de a memora toate datele de intrare anterioare, un filtru Kalman este mai eficient din punctul de vedere a efortului de calcul decât algoritmi care realizează la fiecare recursie estimarea directă din toate datele observate anterior. Aceste caracteristici reduc volumul de calcul necesar implementării filtrului Kalman pe un calculator. Filtrul Kalman este în esență un set de ecuații matematice, care implementează un estimator de tip predictor/corector.

Teoretic, filtrul Kalman este un estimator. Practic este una dintre cele mai mari descoperiri în istoria teoriei estimării statistice. Cele mai importante aplicații au fost acelea de control al sistemelor dinamice complexe ca: avioane, vapoare sau nave cosmice. Filtrul Kalman este de asemenea folosit pentru predicția evoluțiilor viitoare ale sistemelor dinamice pe care oamenii nu le prea pot controla, spre exemplu: cursul râului în timpul inundațiilor, traiectoria corpurilor cerești, etc.

Ar putea fi ciudat că termenul ”filtru” să fie asociat unui estimator. În general un filtru este un dispozitiv fizic utilizat pentru înlăturarea părților nedorite din amestecuri. La origini un filtru rezolvă problema separării componentelor nedorite din amestecurile gaze, lichide și solide. Apoi a fost aplicat circuitelor analogice care ”filtrează” semnalele electronice. Aceste semnale conțin componente de diferite frecvențe iar dispozitivele fizice de filtrare atenuează preferențial frecvențele nedorite.

Acest concept a fost extins în anii 1930 și 1940 la separarea ”semnalelor utile” de ”zgomot”, ambele fiind caracterizate prin densitățile spectrale de putere. Kolmogorov și Wiener au folosit caracterizarea statistică a distribuțiilor de probabilitate pentru a obține un estimat optimal al semnalului, fiind dată suma dintre semnal și zgomot.

Odată cu filtrarea Kalman, termenul a primit o semnificație mult diferită de ideea originală de separare a componentelor dintr-un amestec. Acesta include acum și soluția unei probleme de inversare, în care se știe reprezentarea variabilelor măsurabile în funcție de variabilele de interes. În esență, filtrul Kalman inversează

această relație funcțională și estimează variabilele independente (măsurabile). Aceste variabile de interes pot fi și dinamice, cu o dinamică previzibilă doar parțial.

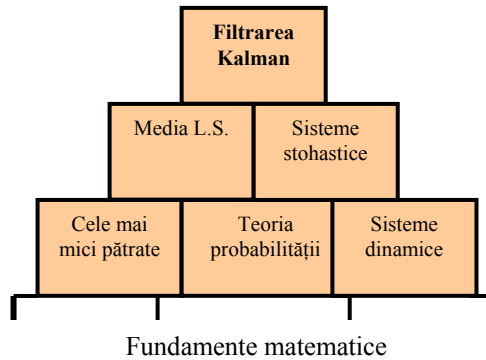


Figura 2.1. Concepte fundamentale în filtrarea Kalman

În figura 2.1 se prezintă subiectele principale ce formează fundamentele teoriei filtrării Kalman. Chiar dacă aceasta prezintă filtrarea Kalman ca și vârful piramidei, ea însăși constituie o parte a fundamentelor unei alte discipline – teoria controlului ”modern” - și formează o parte din teoria deciziei statistice [MOA01 pp.3].

Filtrul Kalman este rezultatul unui proces evoluționar de idei desfășurat pe parcursul mai multor secole. În figura 2.2 sunt prezentate inițiatorii metodei de estimare optimale prin perspectivă istorică.

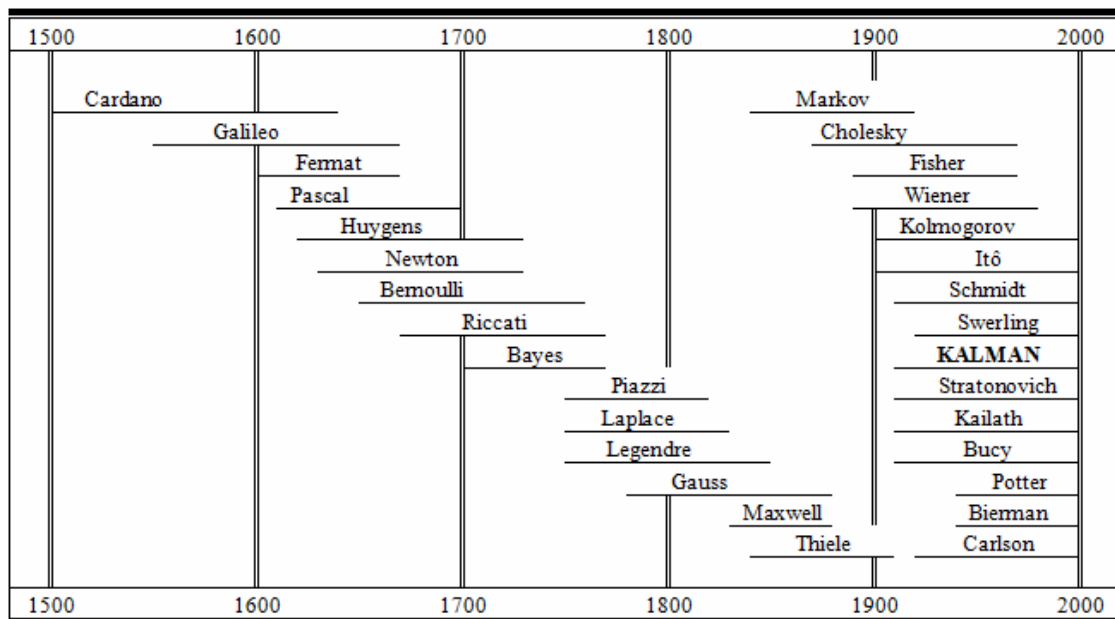


Figura 2.2. Inițiatorii metodei de estimare optimale prin perspectivă istorică

Această listă nu este exhaustivă, dar ar trebui să ofere o idee asupra perioadelor de timp. Figura acoperă doar o jumătate de mileniu, dar studiul și dezvoltarea conceptelor matematice datorează la momente mult mai îndepărtate în istorie, [MOA01 pp.6].

2.2 Algoritmul filtrului Kalman standard discret

Filtrul Kalman estimează un proces utilizând o formă de control cu reacție: filtrul estimează stările procesului pentru un anumit moment și obține apoi reacția în forma unor măsurători. Astfel, ecuațiile filtrului Kalman, se regăsesc în două grupuri: ecuații de predicție a stării și ecuații de reactualizare în măsurări. Ecuațiile de predicție sunt responsabile pentru a proiecta înainte (în timp) stările curente și estimările de covarianță ale erorilor, în vederea obținerii estimărilor *a priori* pentru următorul moment. Reactualizarea ecuațiilor de măsurare sunt responsabile pentru reacție, de exemplu în a încorpora rezultatul unei noi măsurări în estimatul *a priori* pentru a obține o estimare *a posteriori* mai bună.

2.2.1 Reprezentarea semnalelor în spațiul stărilor

O ecuație de proces are forma:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_1[n] \quad (2.1)$$

unde $\mathbf{F}[n+1|n]$ este o *matrice de tranziție a stărilor* de dimensiune $M \times M$ ce este cunoscută și care exprimă legătura dintre stările sistemului la momentele $n+1$ și n . Vectorul $\mathbf{v}_1[n]$ de dimensiune $M \times 1$ reprezintă semnalul de intrare a procesului. De obicei, în cazul abordării statistice a modelării sistemului, el este *zgomotul de proces*, un proces de zgomot alb cu media nulă, și are matricea de corelație:

$$E\{\mathbf{v}_1[n]\mathbf{v}_1^H[k]\} = \begin{cases} \mathbf{Q}_1[n], & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (2.2)$$

O ecuație de măsurare, ce stabilește vectorul de observație se exprimă prin relația:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_2[n] \quad (2.3)$$

în care $\mathbf{C}[n]$ este o *matrice de măsurare* de dimensiune $N \times M$ cunoscută. Vectorul $\mathbf{v}_2[n]$ de dimensiune $N \times 1$ este denumit *zgomot de măsurare*. Este, de obicei, modelat printr-un proces de zgomot alb ce are matricea de corelație:

$$E\{\mathbf{v}_2[n]\mathbf{v}_2^H[k]\} = \begin{cases} \mathbf{Q}_2[n], & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (2.4)$$

Se presupune că valoarea stării inițiale, $\mathbf{x}[0]$, este necorelată atât cu $\mathbf{v}_1[n]$ cât și cu $\mathbf{v}_2[n]$ pentru $n \geq 0$. Vectorii de zgomot $\mathbf{v}_1[n]$ și $\mathbf{v}_2[n]$ sunt statistic independenți, astfel că se poate scrie:

$$E\{\mathbf{v}_1[n]\mathbf{v}_2^H[k]\} = 0 \quad \forall n, k \quad (2.5)$$

Problema filtrării Kalman poate fi acum formulată după cum urmează: să se utilizeze toate datele observate, ce constau din vectorii $\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[n]$, pentru a stabili pentru fiecare $n \geq 1$ estimarea de medie pătratică minimă a componentelor stării $\mathbf{x}[i]$. Ea este denumită *problemă de filtrare* dacă $i = n$, *problemă de predicție* dacă $i > n$ și, în sfârșit, *problemă de mediere* dacă $1 \leq i < n$. În continuare ne vom concentra asupra problemelor de filtrare și predicție care sunt strâns legate, făcând apel la o abordare bazată pe procesul de inovații.

Să presupunem că dispunem de un anumit vector de stare la momentul de timp n , notat cu $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$, bazată pe totalitatea informației disponibile înaintea momentului de timp n . Mai mult, se cunoaște și matricea de covarianță a erorii de estimare corespunzătoare momentului de timp n , cu valoarea medie nulă:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[n|n-1] &= E\{\mathbf{e}[n|n-1]\mathbf{e}[n|n-1]^H\} \\ &= E\{(\hat{\mathbf{x}}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n-1])(\hat{\mathbf{x}}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n-1])^H\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vectorul de predicție a erorii de stare $\mathbf{e}[n|n-1]$ este ortogonal atât pe vectorul de zgomot de proces $\mathbf{v}_1[n]$ cât și pe vectorul de zgomot de măsurare $\mathbf{v}_2[n]$. Matricea $\mathbf{K}[n|n-1]$ se folosește pentru descrierea statistică a erorii făcute prin utilizarea estimării $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$.

Scopul este de a îmbunătăți vectorul de stare prezis $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ utilizând informația suplimentară adusă de valoarea măsurată la momentul de timp n , notată cu $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$, se alege sub forma unei combinații liniare între valoarea anterioară $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ și eroarea de predicție la momentul de timp n :

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{G}[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (2.7)$$

În ecuația de mai sus factorul $\mathbf{G}[n]$ reprezintă câștigul Kalman și se determină în așa fel încât valoarea estimată $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ să fie optimă conform unui criteriu statistic bine precizat. În literatura de specialitate este folosită eroarea medie pătratică drept criteriu de apreciere a optimalității soluției și în acest caz se demonstrează că valoarea optimă a factorului de câștig $\mathbf{G}[n]$ se poate scrie sub forma [HAY96 p.312]:

$$\mathbf{G}[n] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}[n]^H \left(\mathbf{C}[n]\mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}[n]^H + \mathbf{Q}_2[n] \right)^{-1} \quad (2.8)$$

Odată calculată matricea de câștig Kalman $\mathbf{G}[n]$, se poate utiliza ecuația (2.7) pentru a reînnoi cu un nou pas predicția. Cu alte cuvinte, fiind dată vechea predicție $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$, se calculează predicția curentă $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$.

Ecuția de calcul a matricii de câștig Kalman (2.8) nu este utilă sub forma actuală, întrucât pentru determinarea lui $\mathbf{G}[n]$ este nevoie de cunoașterea valorii matricii de autocorelație a erorii de predicție a stării $\mathbf{K}[n|n-1]$. Pentru a depăși această dificultate, se deduce în continuare o formulă de calcul recursiv pentru matricea $\mathbf{K}[n|n-1]$ folosind ecuații cu diferențe de tip Ricatti:

$$\mathbf{K}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{K}[n]\mathbf{F}[n+1|n]^H + \mathbf{Q}_1[n] \quad (2.9)$$

unde matricea pătrată de dimensiuni $M \times M$, $\mathbf{K}[n]$ este definită prin ecuația de recursie:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[n] &= \mathbf{K}[n|n-1] - \mathbf{F}[n|n+1]\mathbf{G}[n]\mathbf{C}[n]\mathbf{K}[n|n-1] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{F}[n|n+1]\mathbf{G}[n]\mathbf{C}[n])\mathbf{K}[n|n-1] \end{aligned} \quad (2.10)$$

S-a utilizat aici proprietatea:

$$\mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{F}[n|n+1] = \mathbf{I} \quad (2.11)$$

unde \mathbf{I} este matricea identitate [HAY96 p.315]. Această proprietate este o consecință a definiției matricii de tranziție. Relațiile anterioare se aplică în mod iterativ, permițând calcularea valorilor prezise ale mărimilor de interes la momentul de timp $n+1$ pe baza informațiilor disponibile până la momentul de timp n inclusiv.

Procesul aplicat la intrarea filtrului Kalman constă din datele observate $\mathbf{y}[n] = [y[1], y[2], \dots, y[n]]$. Ieșirea filtrului este egală cu vectorul de predicție a stării $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$. Fiind cunoscute matricile $\mathbf{F}[n+1|n]$, $\mathbf{C}[n]$, $\mathbf{Q}_1[n]$ și $\mathbf{Q}_2[n]$, se stabilește din ecuațiile (2.8), (2.9) și (2.10) faptul că matricea de corelație a predicției erorii de stare $\mathbf{K}[n+1|n]$ este independentă de mărimea de intrare a filtrului $\mathbf{y}[n]$, oricare ar fi aceasta. Matricea de câștig Kalman $\mathbf{G}[n]$ este de asemenea independentă de $\mathbf{y}[n]$. În consecință, matricea de corelație a predicției erorii de stare $\mathbf{K}[n+1|n]$, și matricea de câștig a lui Kalman $\mathbf{G}[n]$ pot fi calculate înainte ca filtrul Kalman să intre propriu-zis în operare. Utilizând matricea de corelație $\mathbf{K}[n+1|n]$ pentru a furniza o descriere statistică a erorii vectorului de predicție a stării $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$, aceasta poate fi examinată pe baza filtrului Kalman care produce o realizare a unui sistem fizic care prezintă interes. În acest fel, se poate stabili dacă gradul de satisfacție oferit de soluția furnizată de filtrul Kalman este convenabil.

2.2.2 Condiții inițiale

Pentru a pune în mișcare algoritmul filtrului Kalman este obligatorie specificarea condițiilor inițiale. Starea inițială a procesului descris prin ecuația (2.1) nu se cunoaște cu precizie. Ea se descrie de obicei prin media și matricea sa de autocorelație. În absența oricărei date observate la momentul $n=0$, putem alege drept estimare de predicție inițială valoarea:

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = E\{\mathbf{x}[1]\} \quad (2.12)$$

iar drept matrice de autocorelație:

$$\mathbf{K}[1|0] = E \left\{ (\mathbf{x}[1] - E\{\mathbf{x}[1]\})(\mathbf{x}[1] - E\{\mathbf{x}[1]\})^H \right\} = \mathbf{\Pi}_0 \quad (2.13)$$

Această modalitate de selectare a condițiilor inițiale nu numai că satisface intuitiv dar are de asemenea avantajul de a furniza o estimare filtrată a stării $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ care este nedeplasată. Presupunând că vectorul de stare $\mathbf{x}[n]$ este de medie nulă, putem simplifica relațiile (2.12) și (2.13) impunând:

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

și

$$\mathbf{K}[1|0] = E \left\{ \mathbf{x}[1]\mathbf{x}[1]^H \right\} = \mathbf{\Pi}_0 \quad (2.15)$$

Mecanismul de operare a filtrului Kalman poate fi reprezentat sugestiv prin schema bloc din figura 2.3.

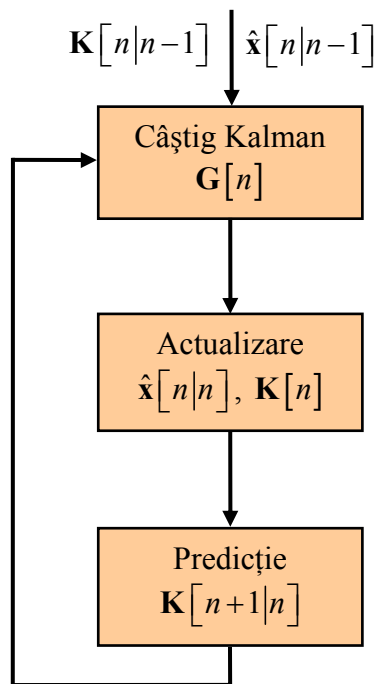


Figura 2.3. Schema bloc a filtrului Kalman

Filtrul Kalman este de fapt un algoritm de calcul care urmărește minimizarea unei funcții de eroare și nu de interpretarea obișnuită de sistem cu răspuns selectiv în frecvență.

Tabelul 2.1. Algoritmul de filtrare Kalman standard bazat pe predicția într-un pas

<i>Vectorul procesului de intrare</i>
Observații: $\{\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[n]\}$
<i>Parametrii cunoscuți</i>
Matricea de tranziție a stărilor: $\mathbf{F}[n, \mathbf{x}[n]]$
Matricea de măsurare: $\mathbf{C}[n, \mathbf{x}[n]]$
Matricea de autocorelație a vectorului de zgomot proces: $\mathbf{Q}_1[n]$
Matricea de autocorelație a zgomotului de măsurare: $\mathbf{Q}_2[n]$
<i>Algoritm de calcul $n=1, 2, 3, \dots$</i>
$\mathbf{G}[n] = \mathbf{F}[n+1 n] \mathbf{K}[n n-1] \mathbf{C}^H[n] (\mathbf{C}[n] \mathbf{K}[n n-1] \mathbf{C}^H[n] + \mathbf{Q}_2[n])^{-1}$ $\boldsymbol{\alpha}[n] = \mathbf{y}[n] - \mathbf{C}[n] \hat{\mathbf{x}}[n n-1]$ $\hat{\mathbf{x}}[n+1 n] = \mathbf{F}[n+1 n] \hat{\mathbf{x}}[n n-1] + \mathbf{G}[n] \boldsymbol{\alpha}[n]$ $\mathbf{K}[n] = \mathbf{K}[n n-1] - \mathbf{F}[n n+1] \mathbf{G}[n] \mathbf{C}[n] \mathbf{K}[n n-1]$ $\mathbf{K}[n+1 n] = \mathbf{F}[n+1 n] \mathbf{K}[n] \mathbf{F}^H[n+1 n] + \mathbf{Q}_1[n]$
<i>Condiții inițiale</i>
$\hat{\mathbf{x}}[1 0] = E[\mathbf{x}[1]]$ $\mathbf{K}[1 0] = E\left[(\mathbf{x}[1] - E[\mathbf{x}[1]])(\mathbf{x}[1] - E[\mathbf{x}[1]])^H\right] = \mathbf{\Pi}_0$

2.3 Model în spațiul stărilor pentru semnale nestaționare cu variația fazei de tip polinomial

Se consideră un semnal nestaționar în timp discret, $y[n]$, unde n este timpul normalizat, de forma:

$$y[n] = A \cos \Phi[n] \quad (2.16)$$

în care $\Phi[n]$ este un polinom de forma:

$$\Phi[n] = \sum_{k=0}^M a_k n^k \quad (2.17)$$

Frecvența instantanee, la momentul normalizat n , se determină cu:

$$f_i[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M k a_k n^{k-1} \quad (2.18)$$

Se vede imediat că, în măsura în care cunoaștem coeficienții $a_1 \div a_M$ ai polinomului ce descrie faza, putem determina frecvența instantanee, pentru această clasă de semnale.

Pentru a stabili coeficienții polinomului sau frecvența instantanee, se poate recurge la două clase de metode:

- metode neparametrice, ce recurg la reprezentările timp-frecvență [GOR99], [BOA92], [BOB92]
- metode parametrice, acestea se bazează pe existența unui model plauzibil pentru semnal, model în care sunt determinate valorile parametrilor care îl individualizează [GAL02], [BIG02], [BOP95], [VID95].

Se pune problema în continuare a găsirii unui model al semnalului în spațiul stărilor și apoi determinarea parametrilor semnalului prin filtrarea Kalman standard.

În principiu, dacă starea unui sistem este descrisă de vectorul de stare $\mathbf{x}[n]$ de care se ia cunoștință numai prin valori măsurate, grupate în vectorul $\mathbf{y}[n]$, avem:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] + \mathbf{G}[n] \quad (2.19)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{H}\mathbf{x}[n] + \mathbf{w}[n] \quad (2.20)$$

relații în care vectorul $\mathbf{G}[n]$ joacă rolul unei excitații, dar poate reprezenta și numai un zgomot. Vectorul $\mathbf{w}[n]$ este un vector de zgomot. Matricea \mathbf{F} se numește matrice de tranziție, iar matricea \mathbf{H} reprezintă matricea de măsurare. Se caută un model, conform ecuațiilor (2.19) și (2.20), pentru semnalele de fază polinomială, afectate de zgomot aditiv, alb, gaussian și de medie nulă.

2.3.1 Modelul de semnal afectat de zgomot

Dacă $y[n]$ este semnalul de forma (2.16), semnalul analitic corespunzător, este $A \exp\{j\Phi[n]\}$. Putem măsura valorile acestui semnal, după ce au fost afectate de zgomotul aditiv alb, gaussian $w[n]$, de medie nulă și dispersie σ^2 . Se consideră că zgomotul $w[n]$ are forma:

$$w[n] = w_R[n] + jw_I[n] \quad (2.21)$$

cu $w_R[n]$ și $w_I[n]$ notându-se coeficienții părților reală și imaginară. Dacă cele două componente sunt necorelate și ca urmare a repartiției gaussiene independente sunt de dispersii egale, atunci:

$$E\{w_R[n]w_R[n+k]\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta[k] \quad (2.22)$$

$$E\{w_I[n]w_I[n+k]\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta[k] \quad (2.23)$$

$$E\{w_R[n]w_I[n+k]\} = 0, \quad \forall k \in N \quad (2.24)$$

unde $E\{\cdot\}$ reprezintă operatorul de mediere statistică.

Un astfel de zgomot este denumit în literatură zgomot circular (Anexa 1) [MTK00].

2.3.2 Aproximarea lui Tretter

Semnalul măsurat, $y[n]$, va avea forma:

$$y[n] = A \exp\{j\Phi[n]\} + w[n] \quad (2.25)$$

unde, $w[n]$, este un zgomot alb, gaussian, de medie nulă și dispersie σ^2 . În prezența zgomotului aditiv $w[n]$, este imposibilă găsirea unui model de stare liniar capabil să descrie exact semnalul $y[n]$. În continuare descriem aproximarea lui Tretter. Cu ajutorul unei dezvoltări Taylor finite, transformăm zgomotul aditiv în două zgomote: un zgomot al fazei și un zgomot al amplitudinii. Modelul astfel obținut poate fi scris sub forma unui model de stare liniar care rămâne apropiat de semnalul o estimare de stare optimă. Determinăm deci amplitudinea și coeficienții fazei semnalului prin relații algebrice exacte, legând acestea de componentele stării estimate.

Ecuția (2.25) se poate modifica și devine:

$$y[n] = A \left(1 + \frac{1}{A} w[n] \exp\{-j\Phi[n]\} \right) \cdot \exp\{j\Phi[n]\} \quad (2.26)$$

Așa cum rezultă din Anexa 1, $w[n] \exp\{-j\Phi[n]\}$ este și el un zgomot circular, cu dispersia σ^2 și dispersiile componentelor reală, $v_R[n]$, și cea imaginară, $v_I[n]$, egale cu $\frac{\sigma^2}{2}$.

Fie

$$v[n] = w[n] \exp\{-j\Phi[n]\} = v_R[n] + jv_I[n] \quad (2.27)$$

Rezultă că avem:

$$y[n] = A \left(1 + \frac{1}{A} v[n] \right) \cdot \exp\{j\Phi[n]\} \quad (2.28)$$

unde

$$\frac{1}{A} v[n] = \frac{\sigma}{A} \cdot \frac{v[n]}{\sigma} \quad (2.29)$$

iar, $\frac{v[n]}{\sigma}$ are dispersia unitară. În consecință, ordinul de mărime al modulului termenului $\frac{v[n]}{\sigma}$ este $\frac{\sigma}{A}$. Vom admite că au fost făcute prelucrările preliminare de diminuare a efectelor zgomotului, așa că raportul $\frac{\sigma}{A}$ este de mult subunitar:

$$\frac{\sigma}{A} \ll 1 \quad (2.30)$$

Este evident că:

$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma^2} \quad (2.31)$$

și că pentru $SNR > 15dB$, $\frac{\sigma}{A} < 0.13$, acest lucru înseamnă că relația (2.30) este plauzabilă.

Avem:

$$\left| 1 + \frac{1}{A}(v_R[n] + jv_I[n]) \right| = \sqrt{\left(1 + \frac{v_R[n]}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_I[n]}{A}\right)^2} \cong 1 + \frac{v_R[n]}{A} \quad (2.32)$$

deoarece $\frac{v_I[n]}{A}$ este de ordinul lui $\frac{\sigma}{A}$.

Mai avem și

$$\begin{aligned} \Psi[n] &= \text{Arg} \left(1 + \frac{1}{A}v_R[n] + j\frac{1}{A}v_I[n] \right) = \\ &= \text{arctg} \frac{\frac{1}{A}v_I[n]}{1 + \frac{1}{A}v_R[n]} \cong \text{arctg} \frac{1}{A}v_I[n] \cong \frac{v_I[n]}{A} \end{aligned} \quad (2.33)$$

În consecință, ecuația (2.28) se poate pune sub forma:

$$y[n] = (A + v_R[n]) \exp \left\{ j \left(\Phi[n] + \frac{v_I[n]}{A} \right) \right\} \quad (2.34)$$

Relația (2.34) arată că amplitudinea, A , este afectată de $v_R[n]$, iar faza $\Phi[n]$ este afectată de $\frac{v_I[n]}{A}$. Concluzia privind faza este cunoscută în literatură de sub denumirea de aproximarea Tretter [TRE85].

Se consideră că semnalului complex, $y[n]$, i se atașează vectorul ce are ca și componente coordonatele polare ale semnalului, modulul și argumentul:

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} |y[n]| \\ \text{Arg} \{y[n]\} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ecuația (2.34) se poate scrie, folosind relația (2.35), sub forma:

$$\begin{bmatrix} |y[n]| \\ \text{Arg}\{y[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \Phi[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_R[n] \\ \frac{v_I[n]}{A} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Matricea de covarianță a vectorului de zgomot este (Anexa 2):

$$\mathbf{R} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Comparativ cu aproximarea introdusă de Tretter, modelul abordat pentru ordinul I al semnalului, $y[n]$, prezentat în ecuația (2.34), introduce un zgomot suplimentar, ce afectează amplitudinea de varianță, $\frac{\sigma^2}{2}$.

În cele ce urmează, vom construi un model de stare liniar al unui semnal de amplitudine variabilă și fază polinomială bazat pe acest model de abordare a semnalului.

2.3.3 Vectorul de stare și ecuația de tranziție

Căutarea unui model de stare constă în determinarea ecuației dinamice vectorială de ordinul I asociată cu o ecuație de măsurare care să reprezinte semnalul original. În acest caz, el este obținut pe baza unei relații de calcul polinomial, vectorul de stare este apoi constituit din amplitudinea A și faza $\Phi[n]$ și derivatele sale până la ordinul M .

Pentru un polinom, $P(x)$, de grad M este valabilă dezvoltarea în serie [BOP95]:

$$P(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=0}^M \frac{(\Delta x)^k}{k!} P^{(k)}(x_0); \quad \forall x_0, \forall \Delta x \in R \quad (2.38)$$

ca urmare a faptului că toate derivatele sale de ordin mai mare ca M sunt nule.

Pentru derivata de ordin l a polinomului $P^{(l)}(x)$, este valabilă dezvoltare în serie:

$$P^{(l)}(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=l}^M \frac{(\Delta x)^k}{(k-l)!} P^{(k)}(x_0); \quad l = \overline{1, M} \quad \forall x_0, \forall \Delta x \in R \quad (2.39)$$

Identificând $P(x)$ cu $\Phi[n]$, x_0 cu n și Δx cu 1, rezultă ecuațiile:

$$\Phi[n+1] = \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}[n] \quad (2.40)$$

$$\Phi^{(l)}[n+1] = \sum_{k=l}^M \frac{1}{(k-l)!} \Phi^{(k)}[n], \quad l = \overline{1, M} \quad (2.41)$$

Vom forma un vector de stare $\mathbf{x}[n]$ având expresia:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} A & \Phi[n] & \Phi^{(1)}[n] & \Phi^{(2)}[n] & \dots & \Phi^{(M)}[n] \end{bmatrix}^T \quad (2.42)$$

și dimensiunile $(M+2) \times 1$. Starea următoare, la momentul $n+1$, se poate scrie imediat ca fiind:

$$\mathbf{x}[n+1] = \begin{bmatrix} A & \Phi[n+1] & \Phi^{(1)}[n+1] & \Phi^{(2)}[n+1] & \dots & \Phi^{(M)}[n+1] \end{bmatrix}^T \quad (2.43)$$

Între cele două stări, la momente consecutive se poate scrie o relație sugerată de (2.40) și (2.41):

$$\begin{bmatrix} A \\ \Phi[n+1] \\ \Phi^{(1)}[n+1] \\ \Phi^{(2)}[n+1] \\ \vdots \\ \Phi^{(M)}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{M!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{(M-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(M-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \Phi[n] \\ \Phi^{(1)}[n] \\ \Phi^{(2)}[n] \\ \vdots \\ \Phi^{(M)}[n] \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Am obținut astfel o ecuație de tranziție. Comparând (2.44) cu (2.19) rezultă că matricea de tranziție, de dimensiuni $(M+2) \times (M+2)$ este:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{M!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{(M-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(M-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

iar vectorul, $\mathbf{G}[n]$, este nul:

$$\mathbf{G}[n] = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

2.3.4 Ecuația de măsurare

Vectorul de măsurare are numai două componente și deci, dimensiunile sale sunt 2×1 . Cum vectorul de stare are dimensiunile $(M+2) \times 1$, rezultă că matricea de măsurare \mathbf{H} are dimensiunile $2 \times (M+2)$. Se vede că (2.36) se poate obține din starea (2.42) prin relația:

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} |y[n]| \\ \arg\{y[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Phi[n] \\ \Phi^{(l)}[n] \\ \vdots \\ \Phi^{(M)}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_R[n] \\ v_I[n] \\ A \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Am obținut ecuația de măsurare. Comparând (2.47) cu (2.20) rezultă că matricea de măsurare, de dimensiuni $2 \times (M+2)$, este:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

În ceea ce privește vectorul $\mathbf{w}[n]$, el trebuie considerat a fi:

$$\mathbf{w}[n] = \begin{bmatrix} v_R[n] \\ v_I[n] \\ A \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

având matricea de covarianță dată de relația (2.37).

2.3.5 Legătura între stare și coeficienții polinomului fazei

Am determinat un model al semnalului de tip (2.16) în spațiul stărilor, prin ecuațiile (2.44) și (2.47). Se pune problema să determinăm modalitatea de obținere a coeficienților $a_1 \div a_M$ sau chiar $a_0 \div a_M$. Cunoașterea stării înseamnă cunoașterea valorilor A , $\Phi[n]$ și $\Phi^{(l)}[n]$, unde $l = \overline{1, M}$. Cunoscând $\Phi[n]$ și $\Phi^{(l)}[n]$, și înlocuind valorile de regim staționar cu n fixat, în (2.40) și (2.41) obținem, ținând seama și de forma (2.17):

$$\sum_{k=0}^M \sum_{m=k}^M \frac{(m-k)!}{(k-l)!} a_m n^{m-k} = \Phi[n]; \quad n \text{ fixat} \quad (2.50)$$

$$\sum_{k=l}^M \sum_{m=k}^M \frac{(m-k)!}{(k-l)!} a_m n^{m-k} = \Phi^{(l)}[n]; \quad n \text{ fixat, } l = \overline{1, M} \quad (2.51)$$

Rezolvând cele M ecuații liniare (2.51) se determină coeficienții $a_1 \div a_M$. Adăugând ecuația (2.50) se poate determina și a_0 . În ceea ce privește frecvența instantanee, $\Phi^{(l)}[n]$ din vectorul de stare permite obținerea ei prin relația:

$$f_i[n] = \frac{1}{2\pi} \Phi^{(i)}[n] \quad (2.52)$$

Pentru o clasă de semnale pentru care faza este dependentă de timp printr-un polinom, s-a determinat un model parametric liniar, în spațiul stărilor, ce permite filtrarea Kalman liniar adecvată pentru semnalele nestaționare cum sunt și cele descrise prin relația (2.17).

Unul din cele mai folosite modele ale unei evoluții în timp a parametrilor de semnal (în cazul de față, amplitudinea) este o parcurgere aleatoare. Mai exact se presupune că amplitudinea instantanee a unui chirp prezintă incrementi aleatori cu distribuție gaussiană. Din acest motiv s-a considerat un proces de tip „*random walk*” pentru amplitudinea variabilă:

$$A[n+1] = A[n] + v[n] \quad (2.53)$$

unde $v[n]$ este o secvență de scalari aleatori, independenți și identic distribuiți cu distribuția normală $N(0, \sigma_v^2)$. În continuare s-a utilizat un model de semnal cu fază polinomială de gradul $M = 2$ cu amplitudine variabilă dat de:

$$y[n] = A[n] \exp\{j\Phi[n]\} + w[n] \quad (2.54)$$

unde valoarea reală și pozitivă, $A[n]$, este amplitudinea variabilă, iar, $\Phi[n]$ este faza polinomială determinist exprimată, pentru un semnal chirp liniar cu:

$$\Phi[n] = \frac{\alpha}{2} n^2 + \beta n + \gamma \quad (2.55)$$

unde coeficienții α , β și γ sunt reale și necunoscute. Zgomotul utilizat este descris în ecuațiile (2.21) – (2.24).

2.4 Estimarea parametrilor unui semnal chirp

În acest paragraf se prezintă rezultatele simulărilor efectuate asupra unui semnal chirp afectat de un zgomot complex, alb și gaussian. Pentru a estima parametrii semnalului chirp afectat de zgomot, am folosit un model adecvat al semnalului cu accent pe faza sa instantanee dat de ecuația (2.35), care reprezintă vectorul de observație a modelului chirp liniar. Aproximarea lui Tretter [TRE85], arată că dacă raportul semnal pe zgomot din semnalul măsurat depășește 13dB, partea reală a zgomotului afectează doar amplitudinea $A[n]$, pe când faza $\Phi[n]$ este afectată de către partea imaginară a zgomotului ciclic. Ecuația (2.36) poate fi rescrisă în funcție de amplitudinea variabilă sub forma:

$$\begin{bmatrix} |y[n]| \\ \text{Arg}\{y[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \Phi[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_R[n] \\ w_I[n] \\ A[n] \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

În consecință vectorul de observare a zgomotului din ecuația (2.21), $w[n]$, poate fi scris sub forma:

$$\mathbf{w}[n] = [w_R[n] \quad w_I[n]]^T \quad (2.57)$$

Matricea de corelație a zgomotului $\mathbf{Q}_w[n]$ este formată ținând cont de relațiile (2.22) – (2.24) și descompunerea ecuației din (2.36) ca:

$$\mathbf{Q}_w[n] = \frac{\sigma_w^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2[n]} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Amplitudinea $A[n]$ fiind variabilă, $\mathbf{Q}_w[n]$ este recalculată pentru fiecare pas din algoritmul de filtrare. Ecuația (2.42) poate fi rescrisă în cazul semnalelor chirp cu amplitudine variabilă:

$$\mathbf{x}[n] = [A[n] \quad \Phi[n] \quad \Phi^{(1)}[n] \quad \Phi^{(2)}[n]]^T \quad (2.59)$$

unde

$$\Phi^{(1)}[n] = \Phi[n] - \Phi[n-1] \quad (2.60)$$

și

$$\Phi^{(2)}[n] = \Phi^{(1)}[n] - \Phi^{(1)}[n-1] \quad (2.61)$$

Se poate observa că în timp discret, sunt posibile și alte definiții pentru ecuațiile (2.60) și (2.61). În mod similar se obține relația dintre cele două stări pentru două momente consecutive:

$$\begin{bmatrix} A[n+1] \\ \Phi[n+1] \\ \Phi^{(1)}[n+1] \\ \Phi^{(2)}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A[n] \\ \Phi[n] \\ \Phi^{(1)}[n] \\ \Phi^{(2)}[n] \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Este vorba de o ecuație de tranziție dintre două stări consecutive fără a lua în considerare zgomotul de stare. Comparând relația de mai sus cu ecuația (2.19), se deduce matricea de tranziție:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Figura 2.4 prezintă semnalul chirp cu amplitudine variabilă înecat în zgomot.

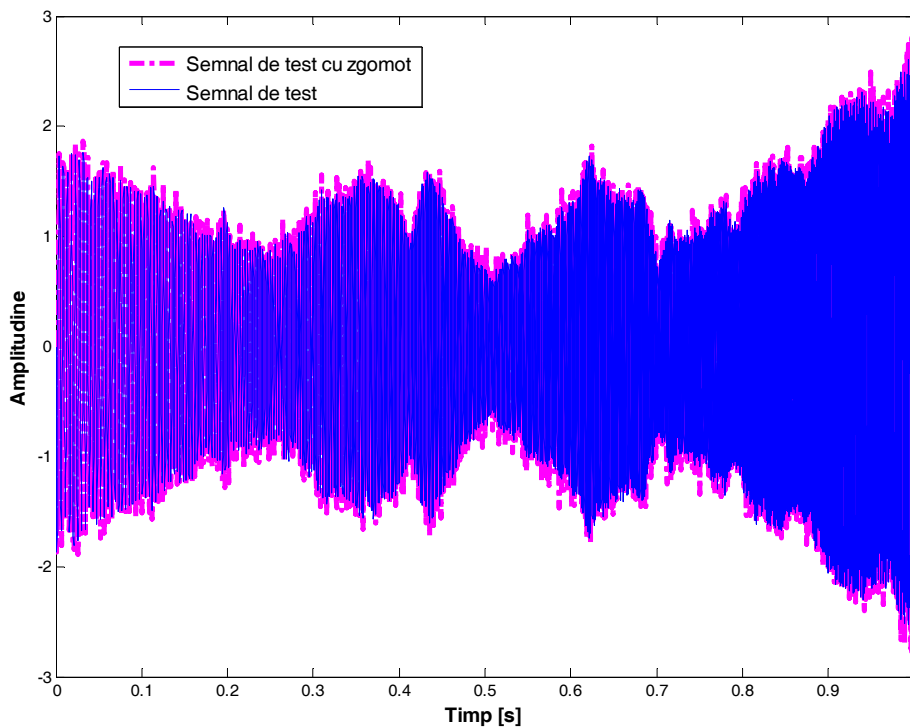


Figura 2.4. Semnalul chirp înecat în zgomot cu amplitudine variabilă

Ultima ecuație trebuie adăugată în (2.62) pentru a obține descrierea completă a evoluției stării a unui semnal chirp cu amplitudine variabilă:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] + [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T v[n] \quad (2.64)$$

Rezultă:

$$\mathbf{G} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.65)$$

În final putem rescrie (2.47) astfel:

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[n] + \begin{bmatrix} w_R[n] \\ w_I[n] \\ A[n] \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

ceea ce înseamnă că matricea observațiilor \mathbf{H} este:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

2.4.1 Algoritm de filtrare Kalman standard

Problema identificării sistemului pentru modelul de stare descris de ecuațiile (2.19) și (2.20) poate fi rezolvată folosind un filtru Kalman standard. Estimarea vectorului de stare se realizează printr-o modalitate recurentă a filtrului Kalman. Acest filtru este optim în sensul minimizării varianței. În plus este stabil la nivel global (altfel spus independent de condițiile inițiale) în cazul modelelor liniare cu procese aleatoare gaussiene.

Se consideră că vectorul de stare, $\mathbf{x}[n]$, și vectorul de zgomot, $\mathbf{v}_1[n]$, sunt independenți unul față de celălalt. Mai mult, se presupune, că starea inițială, $\mathbf{x}[1]$, zgomotul de observație, $\mathbf{w}[n]$, și zgomotul de stare, $\mathbf{v}[n]$ sunt mutual gaussiene și mutual independente. Prin urmare se stabilește din ecuația de stare (2.1) că estimarea de eroare medie pătratică minimă a stării $\mathbf{x}[n+1]$ de la momentul de timp $n+1$, fiind date de observațiile făcute până inclusiv la momentul n , este:

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n-1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n|n] + \mathbf{v}_1[n|n] \quad (2.68)$$

Având în vedere că vectorul de zgomot $\mathbf{v}_1[n]$ este independent de observațiile, $\mathbf{y}[1]$, $\mathbf{y}[2]$, ..., $\mathbf{y}[n]$, rezultă că estimarea de medie pătratică minimă a zgomotului de stare, $\mathbf{v}_1[n|n]$ este nulă.

Recursia ecuației de măsurare

$\mathbf{K}[n] = \mathbf{R}[n n-1] \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{R}[n n-1] \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{Q}}_w[n])^{-1}$	(2.69)
$\hat{\mathbf{x}}[n n] = \hat{\mathbf{x}}[n n-1] + \mathbf{K}[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}[n n-1])$	(2.70)
$\mathbf{R}[n n] = \mathbf{R}[n n-1] - \mathbf{K}[n] \mathbf{H} \mathbf{R}[n n-1]$	(2.71)

Recursia ecuației de stare

$\hat{\mathbf{x}}[n+1 n] = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}[n n]$	(2.72)
$\mathbf{R}[n+1 n] = \mathbf{F} \mathbf{R}[n n] \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{G}^T \sigma_v^2$	(2.73)

În relația (2.69), $\mathbf{K}[n]$ este matricea de câștig Kalman la momentul n . Deoarece nu se poate determina o valoarea exactă a matricii de corelație, aceasta se estimează prin $\hat{\mathbf{Q}}_w[n]$, matrice calculată în fiecare pas al algoritmului Kalman, utilizând relația de mai jos:

$$\hat{\mathbf{Q}}_w[n] = \frac{\sigma_w^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\hat{A}^2[n|n-1] \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Pentru a evalua parametrii semnalului chirp cu amplitudine de tip „random-walk”, descriși de vectorul următor:

$$\boldsymbol{\theta}[n] = [A[n] \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha]^T \quad (2.75)$$

se folosește relația (2.76):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[n] = \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (2.76)$$

unde matricea \mathbf{C} este o matrice diagonală dat de relația (2.77):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Pentru a implementa modelul în spațiul stărilor introdus mai sus, am folosit transformarea Hilbert urmată de calcule de modul și fază pentru a obține coordonatele carteziene ale descompunerii a ecuației (2.35). Aceste date reprezintă vectorul de intrare măsurat pentru un algoritm de filtrare Kalman bazat pe predicție de un pas implementat în mediul de programare MATLAB.

2.4.2 Rezultatele cercetării

Semnalul chirp folosit pentru testare este reprezentat în figura 2.4. El are o lungime de 5000 eșantioane, frecvența sa instantanee variază liniar între valorile 200Hz și 800Hz iar frecvența de eșantionare este 5000Hz. Zgomotul de observare utilizat $w[n]$ este alb, gaussian, de medie nulă și cu un raport semnal pe zgomot SNR=20dB. Pentru a înțelege mai bine efectele filtrului Kalman pe semnalele cu fază polinomială, figura 2.5 arată estimarea frecvenței instantanee și figura 2.6 prezintă estimarea amplitudinii pentru semnalul de test, [GCN06].

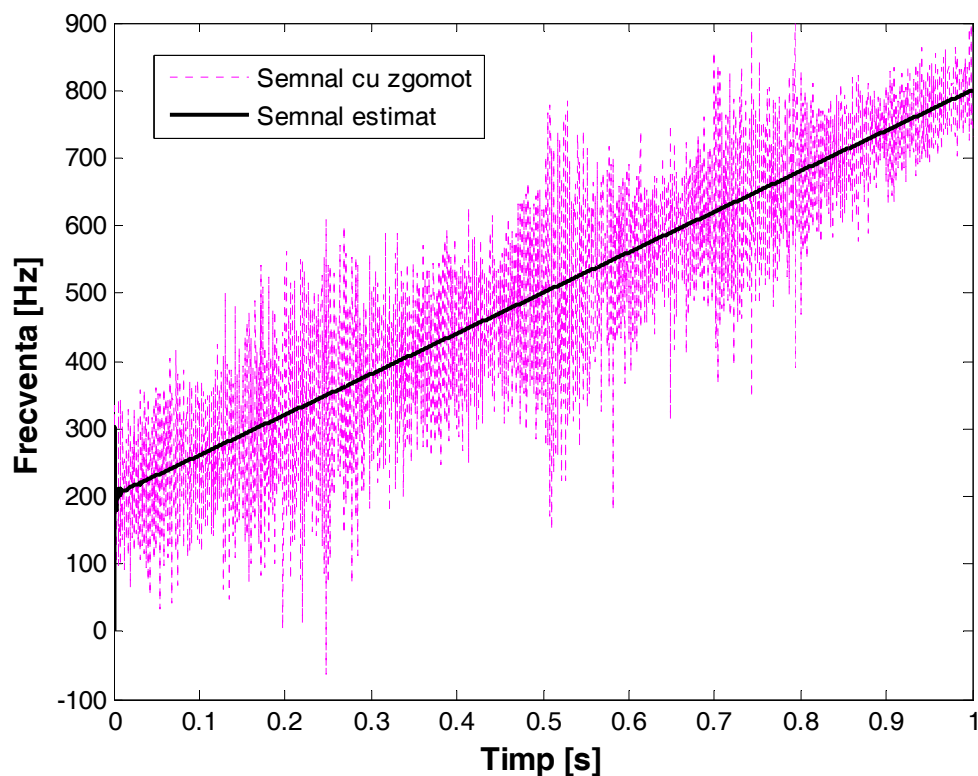


Figura 2.5. Estimarea frecvenței instantanee a semnalului chirp

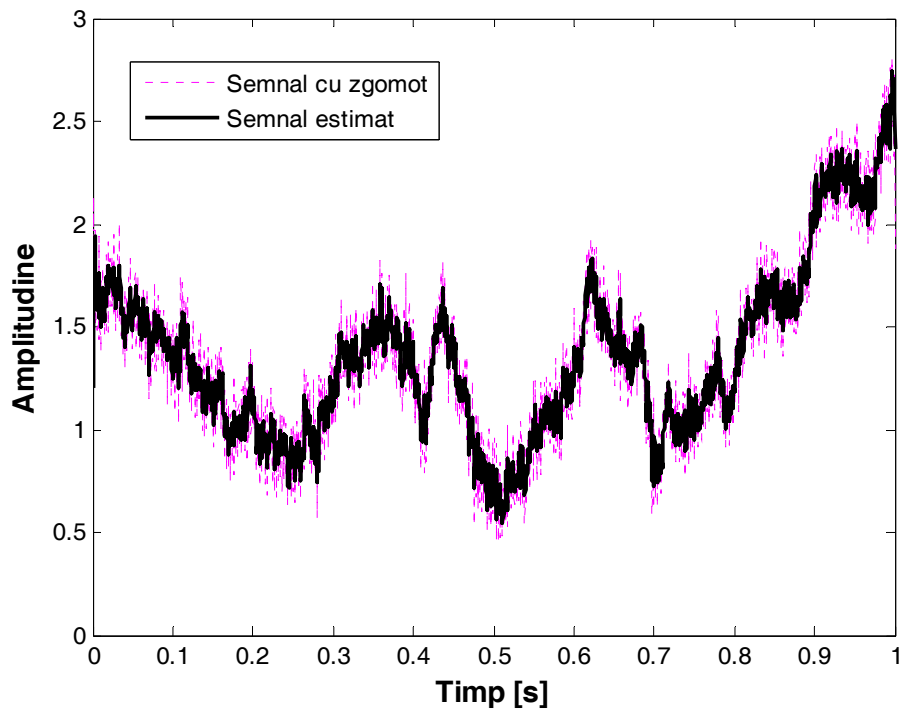


Figura 2.6. Estimarea amplitudinii a semnalului chirp

Analizând figura 2.6 se observă că este aplicabil modelul de tip „*random walk*” utilizat pentru amplitudinea variabilă a semnalului chirp. Estimarea amplitudinii variabile în prezența zgomotului gaussian a fost realizată cu succes.

În continuare sunt prezentate rezultatele simulării care s-au efectuat pentru estimarea parametrilor semnalului chirp în prezența zgomotului aditiv și gaussian utilizând algoritmul de filtrare Kalman liniar.

Valorile exacte ale parametrilor semnalului sunt: $\alpha = 7.5398 \times 10^{-5}$, $\beta = 0.2513$ și $\gamma = \pi/2$. Zgomotul de stare $v[n]$ este alb, gaussian, de medie nulă și de dispersie $\sigma_v^2 = 1.799 \times 10^{-3}$.

Figurile 2.7, 2.8 și 2.9 ilustrează convergența parametrilor α , β și γ ai semnalului chirp.

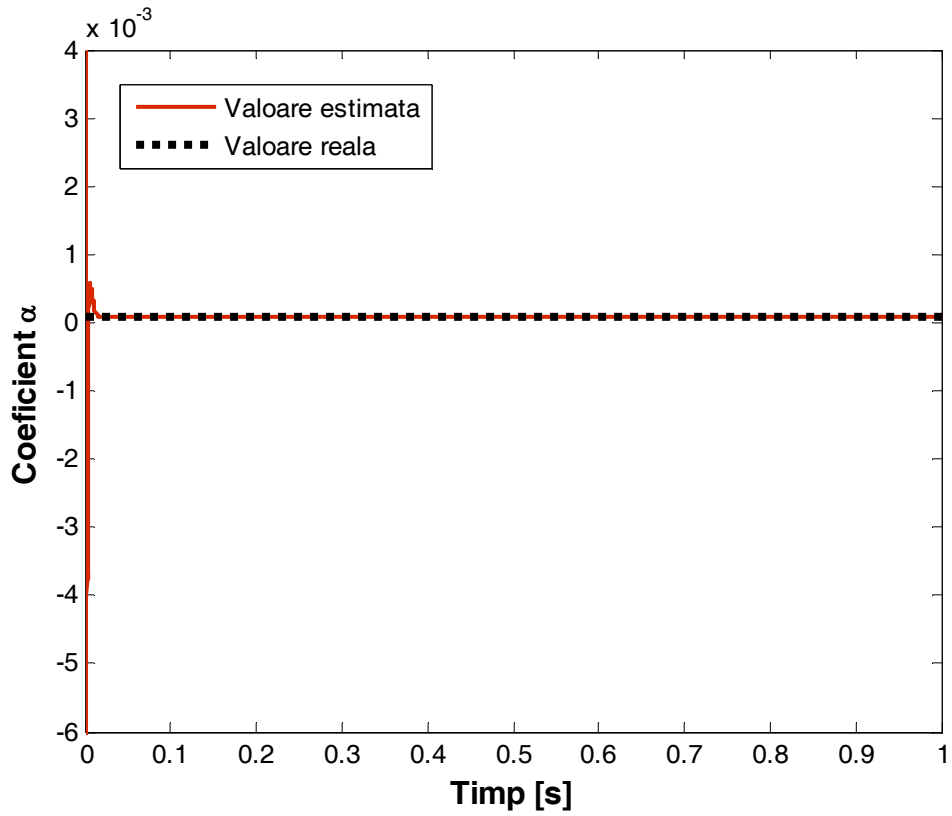


Figura 2.7. Estimarea coeficientului α

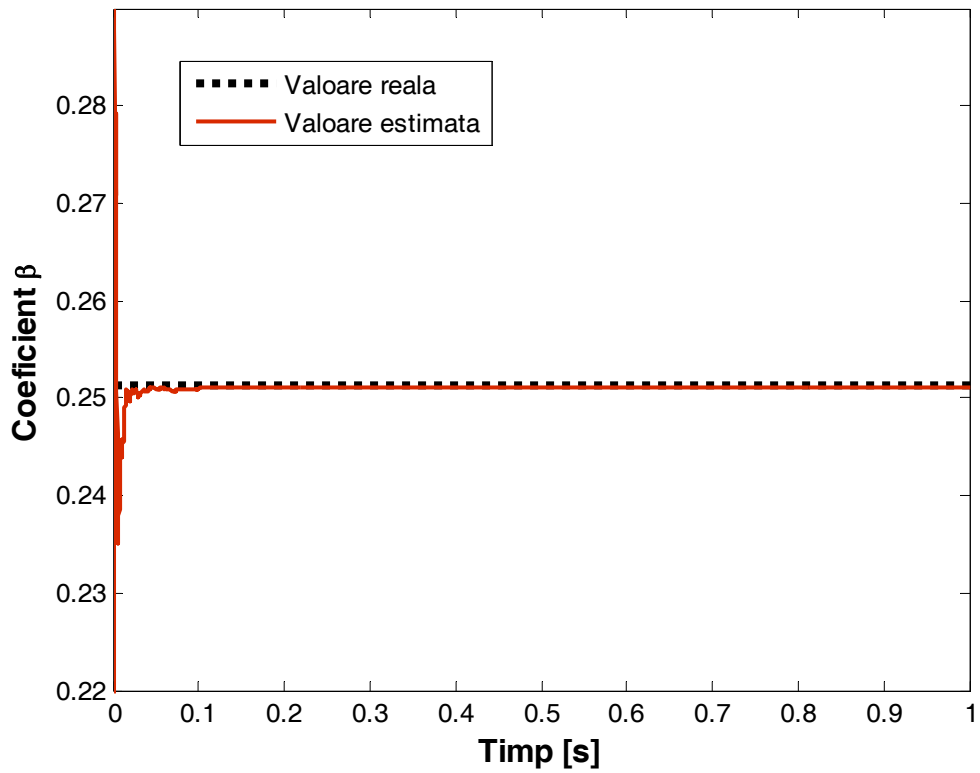


Figura 2.8. Estimarea coeficientului β

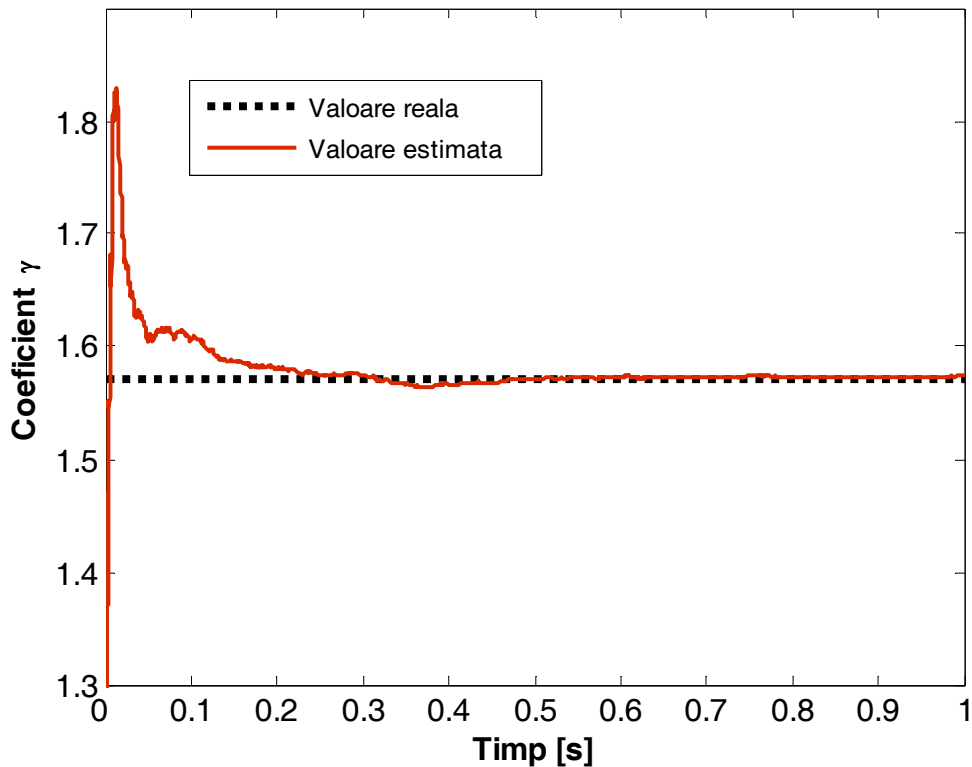


Figura 2.9. Estimarea coeficientului γ

În urma simulărilor efectuate se observă din figurile 2.7, 2.8 și 2.9 că filtrul Kalman standard converge foarte rapid spre valorile căutate. Astfel, se poate spune că toți parametrii au fost corect estimați în mai puțin de 0.3 secunde.

Faza inițială a semnalului este parametrul cel mai dificil de estimat dat fiind faptul că aceasta estimare este obținută plecând de la estimările altor parametri ai fazei.

În figura 2.10 este prezentată estimarea frecvenței instantanee în două cazuri diferite. În primul caz frecvența semnalului chirp variază liniar între 200 și 400 Hz, iar în cazul al doilea variația acesteia este între 200 și 800 Hz. Simulările s-au efectuat pentru câte două valori diferite ale raportului semnal pe zgomot (SNR=5dB și SNR=10dB). Se observă că estimarea frecvenței instantanee este mai bună și pentru rapoarte semnal pe zgomot mici dacă panta frecvenței instantanee este mai mare. În cazul analizat s-au obținut rezultate mai bune pentru frecvența instantanee cuprinsă între 200 și 800 Hz.

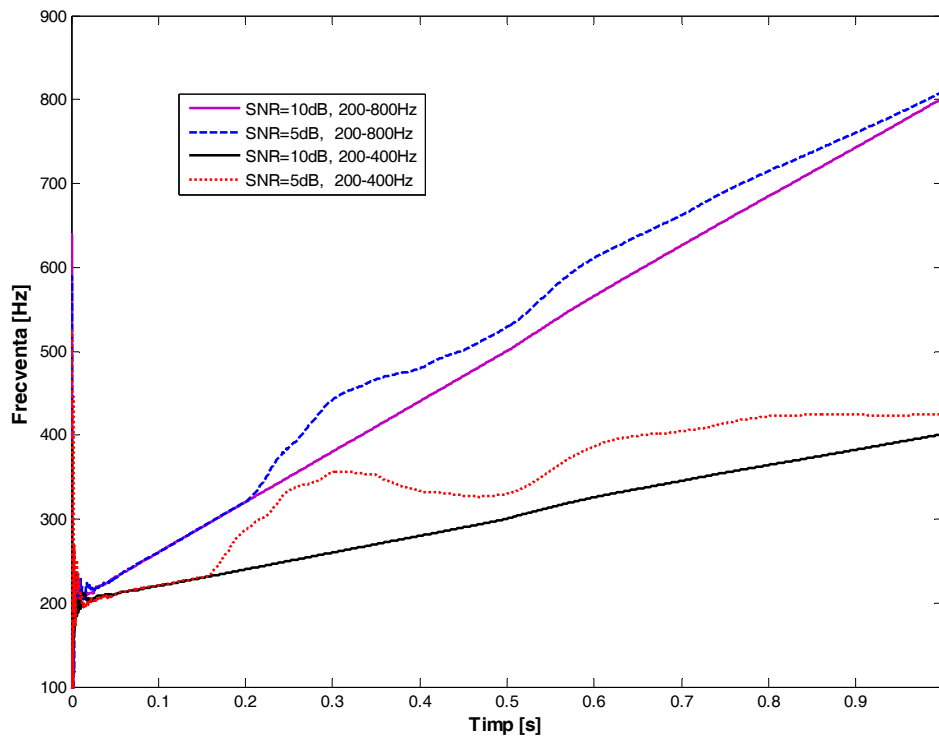


Figura 2.10. Estimarea frecvenței instantanee

În continuare sunt prezentate rezultatele simulării în ceea ce privește convergența parametrilor pentru diferite domenii de variație ale frecvenței instantanee și pentru diverse valori ale raportului semnal pe zgomot.

În figurile 2.11 și 2.12 este ilustrată convergența coeficientului α . În primul caz frecvența instantanee variază între 200 și 800Hz și faza inițială are valoarea $\pi/3$, iar în al doilea caz frecvența instantanee are valori cuprinse între 200 și 400Hz, iar faza inițială este $\pi/2$. La frecvența instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz și cu faza inițială $\gamma=\pi/3$ valorile exacte ale parametrului α sunt: SNR=5dB: $\alpha=6.967 \times 10^{-5}$, SNR=10dB: $\alpha=7.54 \times 10^{-5}$, iar în cazul intervalului 200-400Hz și cu faza inițială $\gamma=\pi/2$, avem: SNR=5dB: $\alpha=2.528 \times 10^{-5}$ și SNR=10dB: $\alpha=2.513 \times 10^{-5}$.

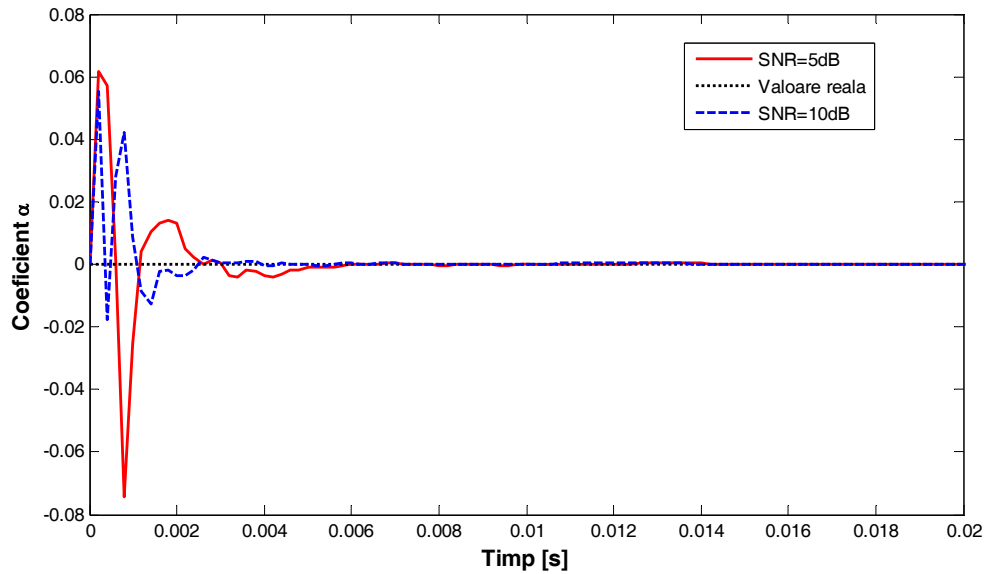


Figura 2.11. Estimarea coeficientului α la variația frecvenței instantenee cuprinsă între valorile 200-800Hz

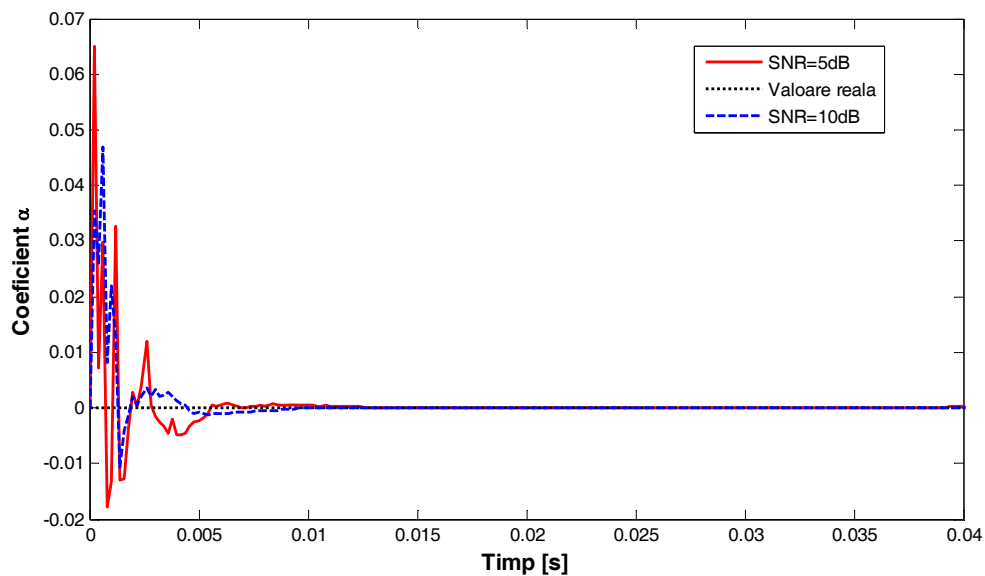


Figura 2.12. Estimarea coeficientului α la variația frecvenței instantenee cuprinsă între valorile 200-400Hz

În ambele cazuri estimarea coeficientului α este corectă și la rapoarte semnal pe zgomot mici. Se observă din rezultatele simulărilor că diferența între cele două cazuri este ne semnificativă din punctul de vedere al vitezei de convergență către valoarea reală.

La frecvența instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz valorile exacte ale parametrului β sunt: SNR=5dB: $\beta = 0.2852$, SNR=10dB: $\beta = 0.2512$, iar în cazul intervalului 200-400Hz, avem: SNR=5dB: $\beta = 0.3038$ și SNR=10dB: $\beta = 0.2513$.

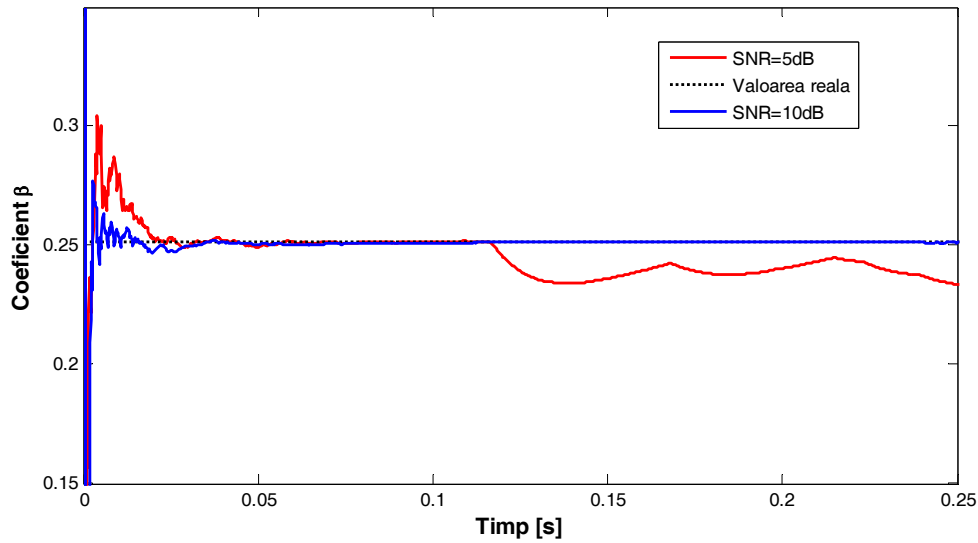


Figura 2.13. Estimarea coeficientului β la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz

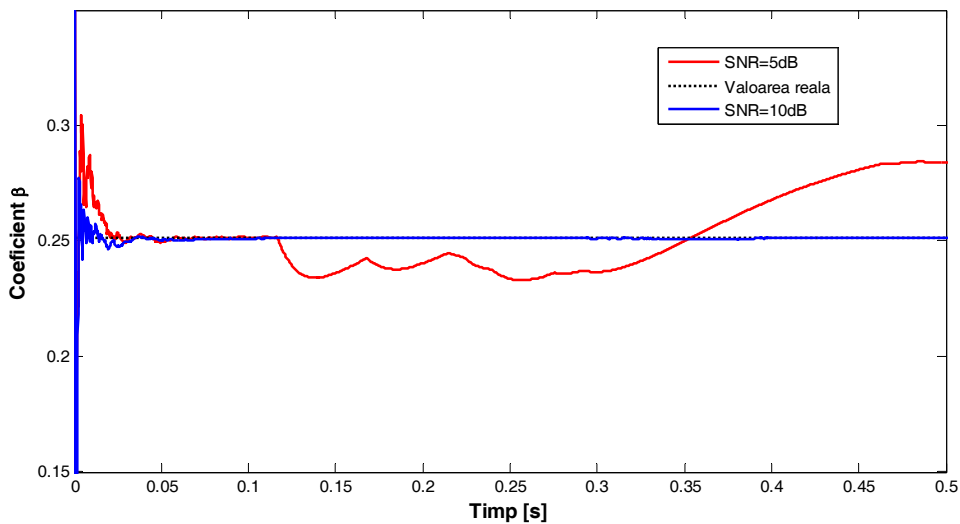


Figura 2.14. Estimarea coeficientului β la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-400Hz

În figurile 2.13 și 2.14 este ilustrată convergența coeficientului β . Valoarea fazei inițială în ambele cazuri s-a considerat egală cu $\pi/2$. Se observă în ambele situații o diferență între valoarea reală și valorile estimate la cele două valori ale SNR-ului.

În figurile 2.15 și 2.16 este ilustrată convergența coeficientului γ . Valoarea fazei inițiale în primul caz s-a considerat egală cu $\pi/3$ iar în al doilea caz are valoarea egală cu $\pi/2$. În urma simulărilor efectuate pentru estimarea coeficientului γ , s-au constatat cazuri de divergență la valori ale SNR-ului egale cu 5dB, respectiv 10dB.

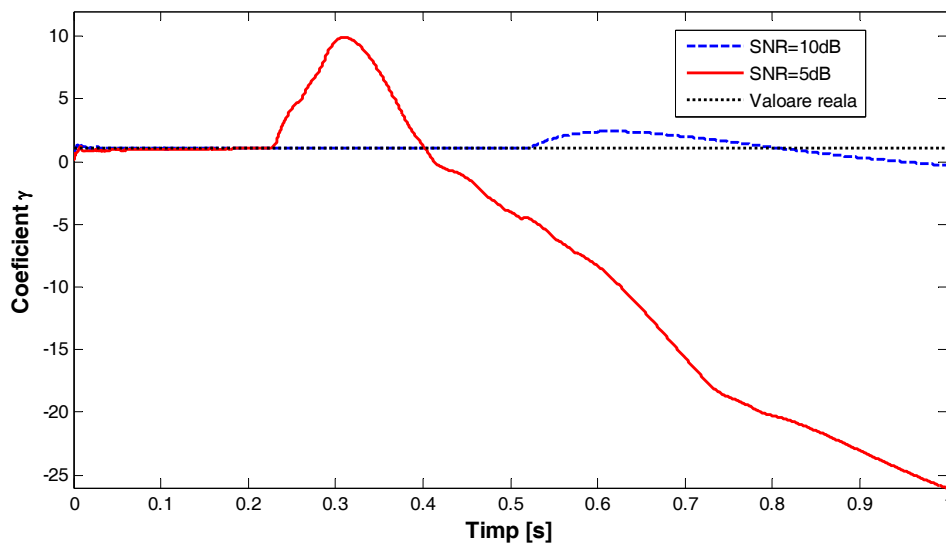


Figura 2.15. Estimarea coeficientului γ la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-800Hz

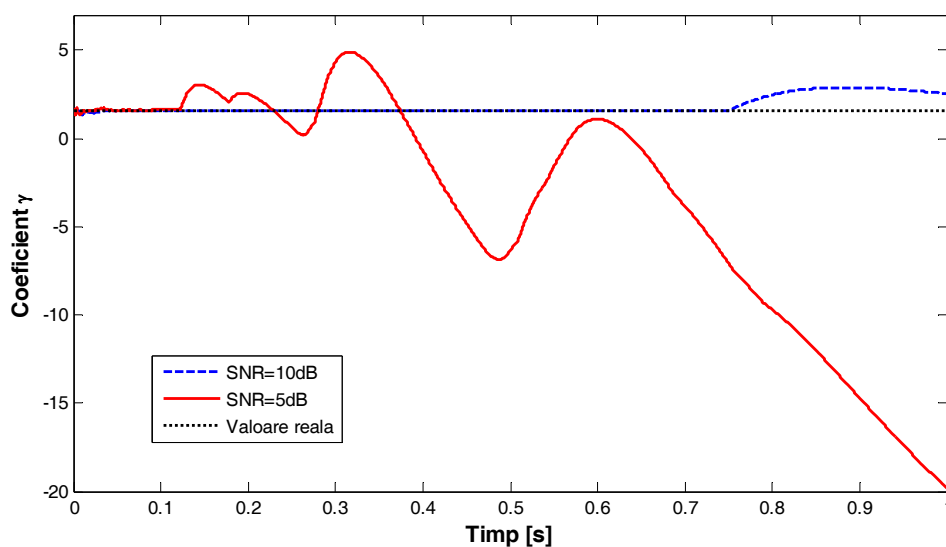


Figura 2.16. Estimarea coeficientului γ la variația frecvenței instantanee cuprinsă între valorile 200-400Hz

Tabelul 2.2. Erorile relative ale parametrilor estimați în cazul variației frecvenței instantanee cuprinse între valorile 200-400Hz

Eroare	e_γ	e_β	e_a
Valoare SNR=5dB	Convergență slabă	5.25%	$1.47 \times 10^{-5}\%$
Valoare SNR=10dB	Convergență slabă	0.01%	$2.74 \times 10^{-7}\%$

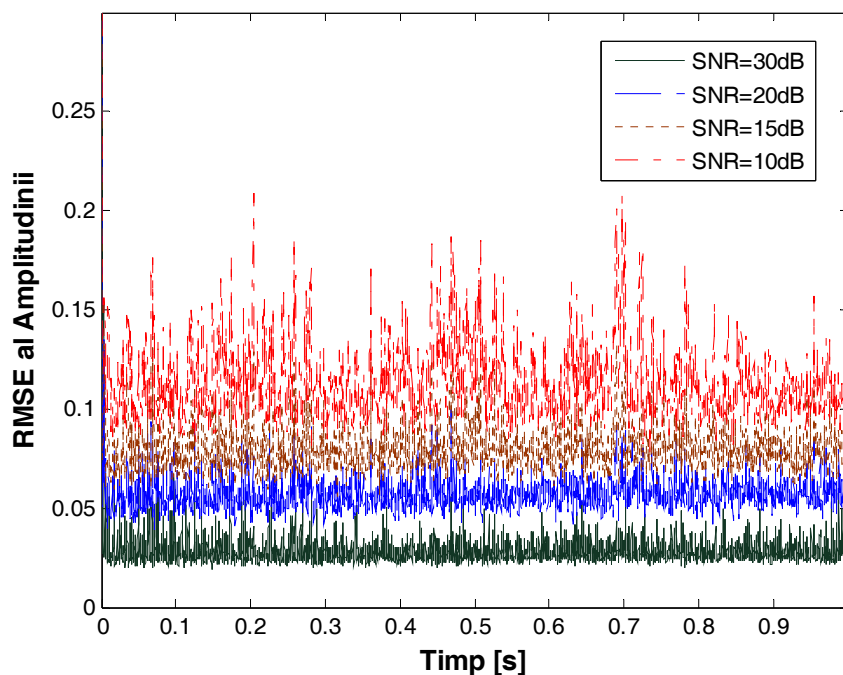
Tabelul 2.3. Erorile relative ale parametrilor estimați în cazul variației frecvenței instantanee cuprinse între valorile 200-800Hz

Eroare	e_γ	e_β	e_α
Valoare SNR=5dB	Convergență slabă	3.39%	$5.72 \times 10^{-4}\%$
Valoare SNR=10dB	Convergență slabă	0.01%	$2.00 \times 10^{-7}\%$
Valoare SNR=20dB	0.32%	0.01%	$2.00 \times 10^{-7}\%$

O măsură obiectivă a calității estimării prin filtrarea Kalman a valorii frecvenței instantanee RMSE este definită prin:

$$\Delta f_i^{RMS} [n] = \sqrt{E \left\{ \left(f_i^{ref} [n] - f_i^{est} [n] \right)^2 \right\}} \quad (2.78)$$

unde $f_i^{ref} [n]$ este frecvența instantanee al semnalului de test, sau de referință și $f_i^{est} [n]$ reprezintă valoarea estimată a frecvenței instantanee prin filtrarea Kalman, iar $E \{ \cdot \}$ este operatorul de mediere statistică. Aceste rezultate confirmate de un număr important de simulări arată că filtrul Kalman standard utilizat în aproximarea lui Tretter este performant în estimarea parametrilor unui semnal chirp înecat în zgomot alb și gaussian.


Figura 2.17. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării amplitudinii

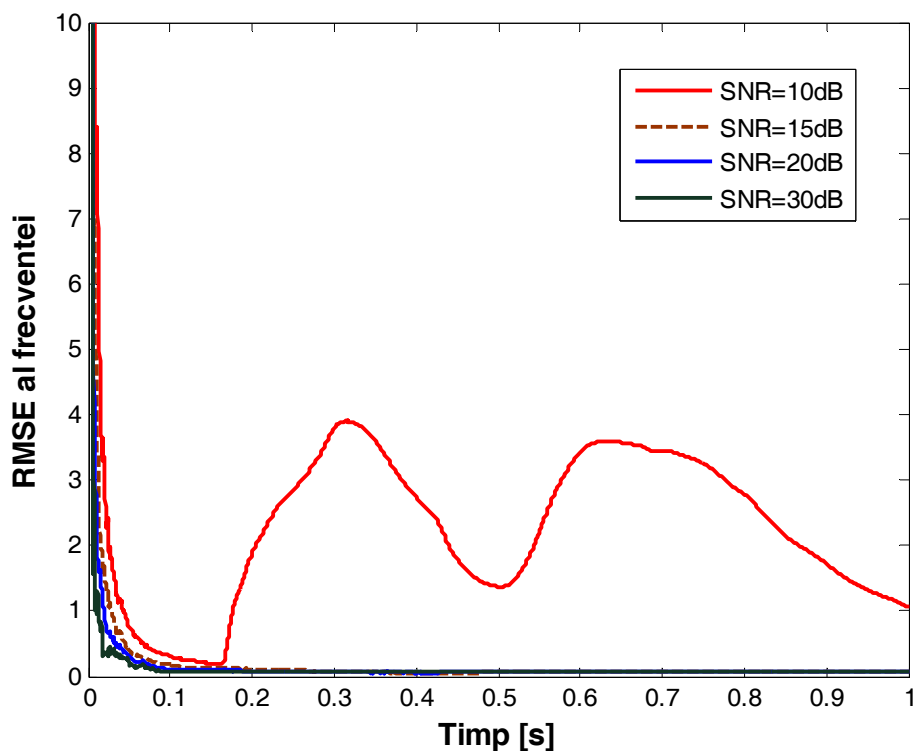


Figura 2.18. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării frecvenței

2.4.3 Concluzii

Rezultatele obținute confirmă aproximarea lui Tretter că atâta timp cât raportul semnal pe zgomot (RSZ) depășește 13dB, modelul liniar al semnalului chirp este satisfăcător. Pentru a evalua performanțele filtrului Kalman în estimarea frecvenței și a amplitudinii pentru semnale chirp liniare cu amplitudine variabilă, figurile 2.17 și 2.18 arată că raportul semnal pe zgomot afectează RMSE-ul acestor parametri. Ca și concluzii, algoritmul bazat pe filtrul Kalman-Tretter dă posibilități reale de a estima parametrii semnalelor chirp afectate de zgomot alb, gaussian.

CAPITOLUL 3

Identificarea parametrilor semnalelor cu fază polinomială cu filtrul Kalman extins

3.1 Filtru Kalman extins

3.1.1 Prezentarea filtrului Kalman extins

Așa cum s-a descris în capitolul anterior, filtrul Kalman rezolvă problema de estimare a stării, $\mathbf{x}[n]$, a unui proces controlat în timp discret, guvernat de o ecuație diferențială *stohastică liniară*. Dar ce se întâmplă dacă procesul care trebuie estimat și relațiile de măsurare ale procesului sunt neliniare? Unele din cele mai interesante și cu succes încununate aplicații ale filtrării Kalman, se regăsesc chiar în acest domeniu. O filtrare Kalman care liniarizează valoarea medie curentă și covarianța este cunoscut ca *Filtrul Kalman Extins (Extended Kalman Filter, EKF)*. După modelul dezvoltării în serie Taylor, se poate liniariza și estimarea stării în jurul unei estimări curente. Astfel, se pot folosi atât derivatele parțiale ale procesului cât și funcțiile de măsurare pentru a calcula estimările chiar și în situația unor relații de legătură neliniare.

O asemenea extindere este fezabilă datorită faptului că filtrul Kalman este descris, în cazul nostru, prin ecuații cu diferențe finite. Trebuie subliniat faptul că o asemenea extindere nu este posibilă în cazul filtrului Wiener, întrucât noțiunea de răspuns la

impuls (pe care se bazează filtrul Wiener) are sens doar în cazul sistemelor liniare. Această observație reprezintă un avantaj major al filtrului Kalman în raport cu filtrul Wiener. Trebuie subliniat că o imperfecțiune a algoritmului EKF este aceea că distribuția, sau densitatea în cazul continuu, unei variabile aleatoare nu mai este una normală în urma trecerii ei prin transformări neliniare. Algoritmul EKF este o estimare *ad hoc* a stării, care doar aproximează legea lui Bayes prin liniarizare.

Se pornește în dezvoltarea filtrului Kalman extins de la modelul linear standard al unui sistem dinamic în spațiul stărilor introdus în capitolul anterior:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_1[n] \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_2[n] \quad (3.2)$$

unde $\mathbf{v}_1[n]$ și $\mathbf{v}_2[n]$ sunt procese de zgomot alb necorelate și cu media nulă și matrici de autocorelație, $\mathbf{Q}_1[n]$, respectiv, $\mathbf{Q}_2[n]$, definite prin relațiile (2.2), (2.3) și (2.5) descrise în capitolul 2.

Ecuatiile de definiție ale filtrului Kalman standard corespunzătoare sunt rezumate în Tabelul 2.1. Se rescriu aceste ecuații într-o formă ușor modificată, mai convenabilă scopului propus.

În particular, se realizează recursia pentru estimarea stării sistemului în doi pași:

- În primul pas se recalculează $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$ pornind de la $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$.
- În al doilea pas, pornind de la $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ se obține $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$.

Ecuția:

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{G}[n]\boldsymbol{\alpha}[n] \quad (3.3)$$

are o importanță fundamentală, reprezentând formula de calcul recursiv utilizată în cazul filtrului adaptiv Kalman standard. Ea evidențiază faptul că estimarea de medie pătratică minimă, $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$ a stării unui sistem dinamic linear, poate fi calculată prin adăugarea la estimarea stării anterioare a sistemului $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ multiplicată cu matricea de tranziție a stării $\mathbf{F}[n+1|n]$, a unui termen de corecție dat de produsul

$\mathbf{G}[n]\boldsymbol{\alpha}[n]$. Pentru a stabili estimarea filtrată $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$, multiplicăm ambii termeni ai ecuației cu inversa matricii de tranziție $\mathbf{F}[n+1|n]$:

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \mathbf{F}^{-1}[n+1|n]\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] \quad (3.4)$$

Relația (3.4) arată că pornind de la soluția problemei predicției într-un pas, care este estimarea de medie pătratică minimă $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$, putem determina estimarea filtrată corespunzătoare $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ prin multiplicarea lui $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$ cu inversa matricii de tranziție a stărilor, $\mathbf{F}^{-1}[n+1|n]$. Această recursie face apel la înlocuirea ecuației (3.3) în (3.4) și definirea unei noi matrici de câștig Kalman. Matricea de câștig Kalman astfel definit este:

$$\mathbf{G}_e[n] = \mathbf{F}^{-1}[n+1|n]\mathbf{G}[n] \quad (3.5)$$

În aceste condiții, algoritmul de filtrare Kalman este descris prin următoarele ecuații:

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{x}[n|n] \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \mathbf{x}[n|n-1] + \mathbf{G}_e[n]\boldsymbol{\alpha}[n] \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\alpha}[n] = \mathbf{y}[n] - \mathbf{C}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{G}_f[n] = \mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n](\mathbf{C}[n]\mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n] + \mathbf{Q}_2[n])^{-1} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{K}[n]\mathbf{F}^H[n+1|n] + \mathbf{Q}_1[n] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{K}[n] = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_e[n]\mathbf{C}[n])\mathbf{K}[n|n-1] \quad (3.11)$$

În continuare, se abordează un model pentru sistemul dinamic. În loc de ecuațiile de stare (3.1) și (3.2), se utilizează modelul alternativ:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_1[n] + \mathbf{d}[n] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_2[n] \quad (3.13)$$

unde, $\mathbf{d}[n]$, este un vector cunoscut. Se verifică ușor în acest caz că ecuațiile Kalman (3.6) până la (3.11) rămân neschimbate, excepție făcând prima ecuație (3.6) care devine:

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\hat{\mathbf{x}}[n|n] + \mathbf{d}[n] \quad (3.14)$$

Această modificare va fi utilizată la deducerea filtrului Kalman extins ce va fi efectuată în continuare. După cum a fost menționat înainte, filtrul Kalman extins este o soluție aproximativă care oferă posibilitatea extinderii principiului de filtrare Kalman la modele neliniare în spațiul stărilor.

În particular, modelul neliniar, pe care l-am considerat în continuare, are următoarea formă:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]] + \mathbf{v}_1[n] \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]] + \mathbf{v}_2[n] \quad (3.16)$$

unde, ca și mai sus, $\mathbf{v}_1[n]$ și $\mathbf{v}_2[n]$ sunt procese de zgomot alb, necorelate, cu media nulă și matrici de autocorelație $\mathbf{Q}_1[n]$ respectiv $\mathbf{Q}_2[n]$. În schimb, aici, funcționala $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$ reprezintă o *matrice de tranziție neliniară*, posibil variabilă în timp.

În cazul liniar, ea se reduce pur și simplu la cazul tratat anterior:

$$\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]] = \mathbf{F}[n|n+1]\mathbf{x}[n] \quad (3.17)$$

În schimb, în cazul general neliniar, prin acțiunea funcționalei, $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$, componentele vectorului de stare, $\mathbf{x}[n]$ pot fi combinate neliniar. Mai mult, această dependență neliniară poate fi și variabilă în timp.

Similar, funcționala $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]]$ reprezintă o *matrice de măsurare neliniară* care, de asemenea, poate fi variabilă în timp.

Ideea fundamentală a filtrului Kalman extins constă în *liniarizarea* modelului în spațiul stărilor din ecuațiile (3.15) și (3.16) la fiecare moment de timp în jurul celei

mai recente estimări de stare, care poate fi $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ sau $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$, în funcție de forma particulară a funcționalei utilizate. Odată obținut modelul liniar, se aplică ecuațiile standard ale filtrului Kalman. Mai explicit, aproximarea se face în două etape:

Etapa 1

Se construiesc următoarele două matrici:

$$\mathbf{F}[n|n+1] = \left. \frac{\partial \mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n]} \quad (3.18)$$

și

$$\mathbf{C}[n] = \left. \frac{\partial \mathbf{C}[n|\mathbf{x}]}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]} \quad (3.19)$$

Drept urmare, componenta ij a matricei $\mathbf{F}[n+1|n]$ este egală cu derivata parțială a componentei i a matricei $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}]$ în raport cu componenta j a lui \mathbf{x} . Similar, componenta ij a matricei $\mathbf{C}[n]$ este egală cu derivata parțială a componentei i a matricei $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}]$, în raport cu componenta j a lui \mathbf{x} . În primul caz, derivatele sunt evaluate în $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$, în timp ce în al doilea caz, derivatele se evaluează la $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$. Componentele matricilor $\mathbf{F}[n+1|n]$ și $\mathbf{C}[n]$ sunt cunoscute (adică sunt calculabile), pentru că $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ și $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ sunt cunoscute.

Etapa 2

Odată făcută evaluarea matricilor $\mathbf{F}[n+1|n]$ și $\mathbf{C}[n]$, acestea sunt utilizate în continuare la stabilirea *aproximației Taylor de ordinul întâi* a funcționalelor neliniare $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$ și $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]]$ în jurul valorilor $\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ și $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$. În particular, $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$ și $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]]$ se aproximează după cum urmează:

$$\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]] \approx \mathbf{F}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n]] + \mathbf{F}[n+1|n](\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n]) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]] \approx \mathbf{C}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]] + \mathbf{C}[n](\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (3.21)$$

Pe baza ultimelor două relații, se poate trece la aproximarea ecuațiilor de stare neliniare (3.12) și (3.13) prin expresiile care urmează:

$$\mathbf{x}[n+1] \approx \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_1[n] + \mathbf{d}[n] \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{y}}[n] \approx \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}_2[n] \quad (3.23)$$

În (3.22) și (3.23) s-au introdus două noi cantități:

$$\bar{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{y}[n] - \left(\mathbf{C}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]] - \mathbf{C}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1] \right) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{d}[n] = \mathbf{F}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n]] - \mathbf{F}[n+1|n]\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.25)$$

Componentele vectorului $\bar{\mathbf{y}}[n]$ sunt toate cunoscute la momentul de timp n , și prin urmare, $\bar{\mathbf{y}}[n]$ poate fi privit ca un vector de observație la momentul n . Similar, și toate componentele vectorului $\mathbf{d}[n]$ se cunosc la momentul n .

Modelul de stare aproximativ descris de ecuațiile (3.22) și (3.23) este linear și are o formă matematică identică cu modelul descris prin ecuațiile (3.12) și (3.13) de fapt, cu acest obiectiv în vedere s-a formulat mai devreme modelul din ecuațiile (3.12) și (3.13). Ecuațiile filtrului Kalman extins sunt, prin urmare, și în acest caz, ecuațiile Kalman standard (3.7) până la (3.13) și (3.14) aplicate modelului liniar definit mai sus.

Se ajunge la următorul set de ecuații:

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n]] \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{G}[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]]) \quad (3.27)$$

Tabelul 3.1 prezintă un rezumat al algoritmului de filtrare Kalman extins, în care matricile liniarizate $\mathbf{F}[n+1|n]$ și $\mathbf{C}[n]$ sunt calculate din omoloagele lor neliniare pe baza ecuațiilor (3.18) și (3.19). Fiind dat un model de sistem în spațiul stărilor descris

prin ecuațiile (3.15) și (3.16), se poate utiliza acest algoritm pentru a calcula estimarea de stare recursiv.

Dacă se compară ecuațiile algoritmului de filtrare Kalman extins cu ecuațiile algoritmului de filtrare Kalman standard date prin relațiile (2.7) până la (2.10), observăm faptul că singurele diferențe dintre ele apar la calculul vectorului de inovații și a estimării vectorului de stare $\hat{\mathbf{x}}[n+1|n]$. În detaliu, termenii liniari $\mathbf{F}[n+1|n]\hat{\mathbf{x}}[n|n]$ și $\mathbf{C}[n]\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ de la filtrul Kalman standard sunt înlocuiți prin termenii aproximativi, $\mathbf{F}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n]]$ și $\mathbf{C}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]]$ respectiv de la filtrul Kalman extins.

Tabelul 3.1. Algoritmul filtrului Kalman extins

Vectorul procesului de intrare

Observații: $\{\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[2], \dots, \mathbf{y}[n]\}$

Parametrii cunoscuți

Matricea de tranziție a stărilor: $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$

Matricea de măsurare: $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]]$

Matricea de autocorelație a vectorului de zgomot proces: $\mathbf{Q}_1[n]$

Matricea de autocorelație a zgomotului de măsurare: $\mathbf{Q}_2[n]$

Algoritm de calcul $n=1, 2, 3, \dots$

$$\mathbf{G}_e[n] = \mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n](\mathbf{C}[n]\mathbf{K}[n|n-1]\mathbf{C}^H[n] + \mathbf{Q}_2[n])^{-1}$$

$$\alpha[n] = \mathbf{y}[n] - \mathbf{C}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]]$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{G}_e[n]\alpha[n]$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}[n|\hat{\mathbf{x}}[n|n]]$$

$$\mathbf{K}[n] = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_e[n]\mathbf{C}[n])\mathbf{K}[n|n-1]$$

$$\mathbf{K}[n+1|n] = \mathbf{F}[n+1|n]\mathbf{K}[n]\mathbf{F}^H[n+1|n] + \mathbf{Q}_1[n]$$

Condiții inițiale

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = E[\mathbf{x}[1]]$$

$$\mathbf{K}[1|0] = E\left[(\mathbf{x}[1] - E[\mathbf{x}[1]])(\mathbf{x}[1] - E[\mathbf{x}[1]])^H\right] = \mathbf{\Pi}_0$$

Observație

Matricile liniarizate $\mathbf{F}[n+1|n]$ și $\mathbf{C}[n]$ sunt calculate din omoloagele lor neliniare $\mathbf{F}[n|\mathbf{x}[n]]$ și $\mathbf{C}[n|\mathbf{x}[n]]$ prin utilizarea relațiilor (3.18) și, respectiv (3.19).

Filtrul Kalman este un sistem în timp discret, liniar, de dimensiuni finite, a cărui implementare se adecvează bine calculatorului electronic. O proprietate fundamentală a filtrului Kalman este aceea că el conduce la minimizarea urmei matricii de autocorelație a erorii de stare filtrate $\mathbf{K}[n]$. Aceasta, înseamnă că filtrul Kalman este *estimatorul liniar de varianță minimă* a vectorului de stare $\mathbf{x}[n]$.

Filtrul Kalman a fost utilizat cu succes la rezolvarea multor probleme tehnice și științifice. Mai mult, filtrul Kalman furnizează cadrul general pentru dezvoltarea tuturor algoritmilor cunoscuți din familia filtrelor adaptive RLS. Acest lucru a fost demonstrat într-o lucrare din 1994 a lui Sayed și Kailath [SAY94]. Drept urmare, s-a arătat perfectă echivalența dintre problemele întâlnite în filtrarea adaptivă a semnalelor și cele rezolvate prin filtrare Kalman în automatică. S-a deschis astfel calea aplicării și în prelucrarea digitală a semnalelor a acestor rezultate.

3.2 Identificarea semnalelor cu fază polinomială prin utilizarea filtrarea Kalman extins

3.2 1 Introducere

Semnalele cu faze polinomiale sunt frecvent întâlnite în multe aplicații de prelucrarea semnalelor. Ele sunt semnale nestaționare având o frecvență instantanee ce are o variație rapidă. Estimarea parametrilor semnalelor cu faze polinomiale afectate de zgomot aditiv, gaussian s-a bucurat de un interes considerabil în literatura de specialitate în special în prelucrarea semnalelor. Au fost folosite pentru rezolvarea acestei probleme mai multe metode de identificare [BBO92].

Aceste abordări acceptă soluția în forma unui filtru Kalman liniar, [PAR90], [TRE85], [GAL07] care este algoritmul optimal atunci când modelele semnalelor sunt considerate liniare și amândouă zgomote, de stare și de observație, sunt de tip aditiv și gaussian. Un model liniar poate fi obținut folosind o aproximare Tretter, care presupune că zgomotul gaussian are componentele de amplitudine și fază necorelate.

Cum modelul liniar Tretter [TRE85] lucrează satisfăcător atâta timp cât SNR-ul depășește 13 dB, la nivele mici ale SNR-ului se vor folosi modele neliniare și proceduri de filtrare Kalman extinsă [KAA98], [DJE05], [DJE06] care consideră o linearizare locală ce folosește extinderea șirului Taylor de ordinul întâi a ecuațiilor neliniare.

În acest capitol am considerat estimarea parametrilor unui semnal nestaționar de amplitudine variabilă, care este un semnal având faza sub forma unui polinom de gradul doi, perturbat de un zgomot aditiv și gaussian. Algoritmul EKF dezvoltat în teză în comparație cu filtrul Kalman standard înlătură incertitudinile asupra fazei prin înlocuirea semnalului real cu reprezentarea lui în forma analitică.

Un dezavantaj al algoritmului EKF este numărul important de cazuri de divergență care apar chiar și la rapoarte SNR mari. Pentru a depăși această limitare, algoritmul EKF prezentat folosește o procedură ce estimează adaptiv dispersia zgomotului cu scopul de a compensa efectul termenilor de ordine mari neglijați prin liniarizare.

3.2.2 Reprezentarea în spațiul stărilor neliniare a semnalelor cu fază polinomială

Un semnal complex de fază polinomială $y[n]$ având amplitudine variabilă și perturbat de zgomotul aditiv, $w[n]$ este exprimat prin:

$$y[n] = A[n] \exp(j\Phi[n]) + w[n] = A[n] \exp\left(j \sum_{i=0}^M b_i n^i\right) + w[n] \quad (3.28)$$

unde valoarea pozitivă, $A[n]$ este amplitudinea semnalului care poate fi constant sau variabil în timp iar $\Phi[n]$ este o fază deterministă de ordin M având coeficienții $b_i, i = 0, \dots, M$ presupuși a fi reali și necunoscuți. Zgomotul aditiv este considerat

complex, alb și gaussian, având medie nulă și dispersie σ_w^2 . Zgomotul poate fi scris sub forma:

$$w[n] = w_R[n] + jw_I[n] \quad (3.29)$$

unde $w_R[n]$ și $w_I[n]$ reprezintă partea reală respectiv imaginară a zgomotului analitic cu cele două componente necorelate și ca urmare a repartiției gaussiene independente sunt de dispersii egale. Un semnal analitic având aceste proprietăți se numește zgomot ciclic [TKM00].

3.2.3 Modelul în spațiul-stărilor și ecuația de tranziție

Modelul în spațiul-stărilor și ecuația de tranziție a unui semnal cu fază polinomială poate fi obținută luând ca și punct de plecare dezvoltarea în serie Taylor a fazei polinomiale de ordin M , $\Phi[n]$ cu [GAL07], [TKM00]:

$$\Phi[n+1] = \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}[n] \quad (3.30)$$

$$\Phi^{(l)}[n+1] = \sum_{k=l}^M \frac{1}{(k-l)!} \Phi^{(k)}[n], \quad l = \overline{1, M} \quad (3.31)$$

unde, $\Phi^{(k)}[n]$, reprezintă diferența finită de ordinul k a funcției de fază:

$$\Phi^{(k)}[n] = \Phi^{(k-1)}[n] - \Phi^{(k-1)}[n-1], \quad k = \overline{1, M} \quad (3.32)$$

Se observă că în timp discret sunt posibile și alte definiții pentru (3.32) [BBO92].

În scopul de a obține reprezentarea exactă a amplitudinii variabile ale SFP, am definit următorul vector de stare $\mathbf{x}[n]$ de dimensiune $(M+2) \times 1$:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} A[n] & \Phi[n] & \Phi^{(1)}[n] & \Phi^{(2)}[n] & \dots & \Phi^{(M)}[n] \end{bmatrix}^T \quad (3.33)$$

Considerând doar variații ale fazei semnalului SFP, ecuația de tranziție a stării poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] \quad (3.34)$$

unde matricea de tranziție \mathbf{F} de dimensiune $(M+2) \times (M+2)$ are forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1/1! & 1/2! & \dots & 1/M! \\ 0 & 0 & 1 & 1/1! & \dots & 1/(M-1)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Acest model poate fi extins cu scopul de a include amplitudinea variabilă ale SFP. Considerăm că amplitudinea semnalului folosește un model aleator de tip random-walk:

$$A[n+1] = A[n] + v[n] \quad (3.36)$$

unde $v[n]$ este o secvență de scalari aleatori, independenți și identic distribuiți având distribuția normală $N(0, \sigma_v^2)$. Astfel, rata de evoluție a amplitudinii este descrisă de σ_v^2 . Incluzând ecuația (3.36) în ecuația (3.34), expresia finală a ecuației de tranziție de stare este:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n] + \mathbf{G}v[n] \quad (3.37)$$

unde \mathbf{G} este un vector având forma $(M+2) \times 1$:

$$\mathbf{G} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.38)$$

Așa cum reiese din (3.37) ecuația de tranziție de stare pentru un model SFP este liniară.

3.2.4 Ecuația de observare

În acest paragraf se construiește un model de stare neliniară a vectorului de stare $\mathbf{x}[n]$ dat în (3.33). Ecuația de evoluție a acestui vector de stare este dată în (3.34). Această ecuație este liniară, dar ecuația de observare exactă asociată este neliniară.

În acest sens, semnalul măsurat, $\mathbf{y}[n]$, este exprimat ca un vector de mărime 2×1 în funcție de partea sa reală respectiv imaginară:

$$\mathbf{y}[n] = [\text{Re}(\mathbf{y}[n]) \ \text{Im}(\mathbf{y}[n])]^T \quad (3.39)$$

Așadar ecuația (3.39) se scrie sub următoarea formă:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) + \mathbf{w}[n] \quad (3.40)$$

unde funcția neliniară, $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ este scrisă prin:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) = \begin{bmatrix} h_1[n] \\ h_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[n] \cos(x_2[n]) \\ x_1[n] \sin(x_2[n]) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Se obține astfel un model de stare compus dintr-o ecuație de evoluția liniară asociată cu o ecuație de observare neliniară. Estimarea stării se face cu ajutorul unui filtru Kalman extins. Vectorul de observare corespunzător zgomotului $\mathbf{w}[n] = [w_R[n] \ w_I[n]]^T$ este definit prin relațiile (2.22) – (2.24). Matricea de corelație este data de relația (3.42):

$$\mathbf{Q}_w[n] = \frac{\sigma_w^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Pentru a folosi EKF aplicăm procedura de liniarizare de ordinul 1 asupra lui $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ în (3.41) în jurul estimării vectorului de stare $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}[n]) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]} (\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (3.43)$$

cu

$$\mathbf{H}[n] = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & -\hat{x}_1[n|n-1] \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & \hat{x}_1[n|n-1] \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Este evident ca înlocuirea lui $\mathbf{h}(\mathbf{x}[n])$ cu aproximarea sa de ordinul 1 are efecte importante asupra stabilității și convergenței algoritmului EKF, ceea ce implică apariția, în special pentru rapoarte SNR mici a cazurilor de neconvergență. Un mecanism care elimină aceste cazuri va fi prezentat în paragraful următor.

3.2.5 Algoritmul EKF

Filtrul Kalman extins (EKF) este o soluție *aproximativă* care oferă posibilitatea extinderii principiului de filtrare Kalman la modele *neliniare* în spațiul stărilor. Atâta timp cât modelul de observare este neliniar, pentru a aplica procedura de filtrare

Kalman așa cum s-a arătat, e nevoie de o liniarizare de ordinul 1 în jurul lui $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ la fiecare pas al algoritmului Kalman standard. Procedura este cunoscută ca și algoritmul EKF, [HAY96] și folosește ecuațiile (3.37) și (3.40) și de asemenea liniarizarea funcției de observare în jurul vectorului curent estimat (3.44).

Recursia ecuației de măsurare

$$\mathbf{H}[n] = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & -\hat{x}_1[n|n-1]\sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\hat{x}_2[n|n-1]) & \hat{x}_1[n|n-1]\cos(\hat{x}_2[n|n-1]) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{K}[n] = \mathbf{R}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n](\mathbf{H}[n]\mathbf{R}[n|n-1]\mathbf{H}^T[n] + \hat{\mathbf{Q}}_w[n])^{-1} \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n] \left(\mathbf{y}[n] - \begin{bmatrix} \hat{x}_1[n|n-1]\cos(\hat{x}_2[n|n-1]) \\ \hat{x}_1[n|n-1]\sin(\hat{x}_2[n|n-1]) \end{bmatrix} \right) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{R}[n|n] = \mathbf{R}[n|n-1] - \mathbf{K}[n]\mathbf{H}[n]\mathbf{R}[n|n-1] \quad (3.48)$$

Recursia ecuației de stare

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.49)$$

$$\mathbf{R}[n+1|n] = \mathbf{F}\mathbf{R}[n|n]\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 \quad (3.50)$$

unde $\mathbf{K}[n]$ este matricea de câștig Kalman la momentul n . Parametrii amplitudinii variabile SFP dați de vectorul:

$$\boldsymbol{\theta} = [A[n] \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_M]^T \quad (3.51)$$

pot fi estimați din estimările vectorului de stare folosind relația (3.52):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[n] = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-n}\hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (3.52)$$

unde matricea \mathbf{C} e o matrice diagonală:

$$\mathbf{C} = \text{diag}([1 \quad 1 \quad 1/1! \quad \dots \quad 1/M!]) \quad (3.53)$$

3.2.6 Algoritmul EKF robust

Cum EKF nu este un estimator optimal, s-a constatat după numeroase simulări efectuate că dacă estimarea inițială a stării nu este bună sau dacă procesul este modelat incorect, filtrul poate foarte ușor să devină divergent datorită aproximării de liniarizare. Acest comportament apare în cazul nostru atâta timp cât raportul SNR este mai mic decât 10 dB . De exemplu, pentru un $SNR = 0\text{ dB}$, rata cazurilor de divergență poate depăși 20% . Figura 3.1 reprezintă procentul de divergență în cazul metodelor Kalman-Treter, EKF standard și EKF robust în ceea ce privește SNR-ul obținut în urma simulărilor făcute folosind SFP obișnuit.

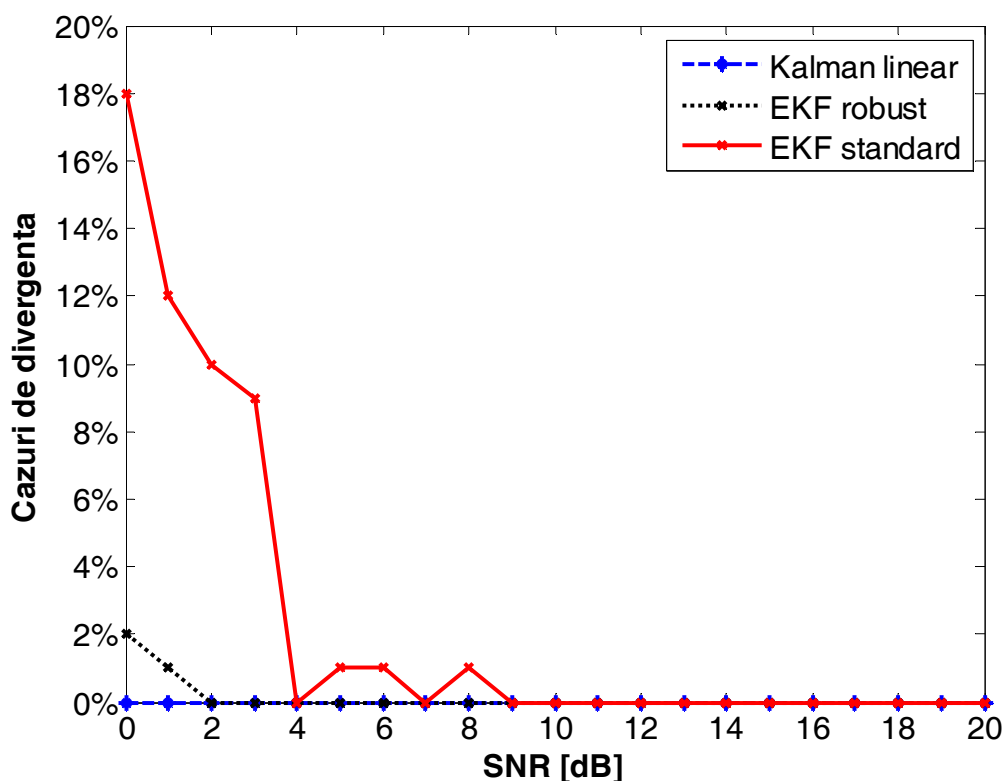


Figura 3.1. Rată de divergență față de SNR evaluate pe același semnal prin filtrarea Kalman

În mod contrar, nu există cazuri de divergență în cazul metodei liniare Kalman-Treter [GAL07]. Ca rezultat al diverselor simulări făcute, s-a constatat că este mai bine să supraestimăm valoarea dispersiei zgomotului ca să compensăm termenii neglijați la liniarizarea ecuației de măsurare.

Consecințele unei asemenea creșteri a dispersiei sunt pozitive: rata de divergență scade drastic. Același efect se observă și în cazul erorilor de estimare. Procedura de estimare a fost stabilă empiric și constă în substituția matricei $\hat{\mathbf{Q}}_w[n]$ în (3.46) cu $k_R \hat{\mathbf{Q}}_w[n]$ unde factorul de robustețe, k_R , este calculat în felul următor:

$$10 \lg k_R [\text{dB}] = \begin{cases} 15, & \text{if } 10 \lg \sigma_w^2 \leq 5 \\ 15 - 1.5(10 \lg \sigma_w^2 - 5), & \text{if } 5 < 10 \lg \sigma_w^2 \leq 15 \\ 0, & \text{if } 10 \lg \sigma_w^2 > 15 \end{cases} \quad (3.54)$$

Îmbunătățirile obținute folosind k_R sunt arătate în figura 3.1. Am ilustrat algoritmul EKF ce folosește factorul k_R ca și *algoritm EKF robust*, [GAC08].

3.2.7 Rezultatele cercetării

În continuare sunt reprezentate rezultatele simulării care au fost făcute pentru estimarea SFP înecat de un zgomot gaussian folosind algoritmul EKF robust. Secvența SFP alcătuită din 1000 de eșantioane și exprimată printr-un polinom de gradul doi este reprezentată în figura 3.2.

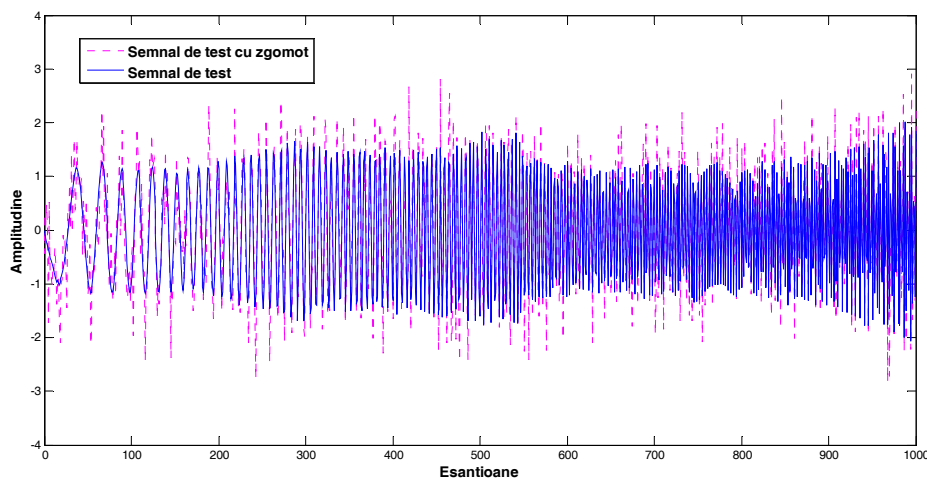


Figura 3.2. Secvența SFP de ordinul 2 cu zgomot gaussian, SNR=5dB

Zgomotul de stare, $v[n]$, este gaussian, alb, de medie nulă cu dispersia $\sigma_v^2 = 10^{-3}$.

Condiții inițiale au fost date în [KAA98] ca:

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = \left[1/2 \quad \pi/3 \quad 0 \quad 2 \cdot 10^{-3} \right]^T \quad (3.55)$$

și

$$\mathbf{R}[1|0] = \text{diag} \left[k_R/2 \quad \pi^2/9 \quad \pi^2/9 \quad 4.3865 \cdot 10^{-6} \right] \quad (3.56)$$

În contrast cu algoritmul de filtrare Kalman-Treter introdus în [GAL07], [GCN09] algoritmul EKF are performanțe satisfăcătoare la nivele joase al raportului SNR, în mod special, dacă estimarea este concentrată pe parametri de fază.

În figura 3.3 este prezentată estimarea amplitudinii pentru două valori diferite ale raportului semnal pe zgomot (SNR=5dB și SNR=15dB). Se observă din figură, că estimarea amplitudinii este puternic afectată de niveluri ridicate de zgomot.

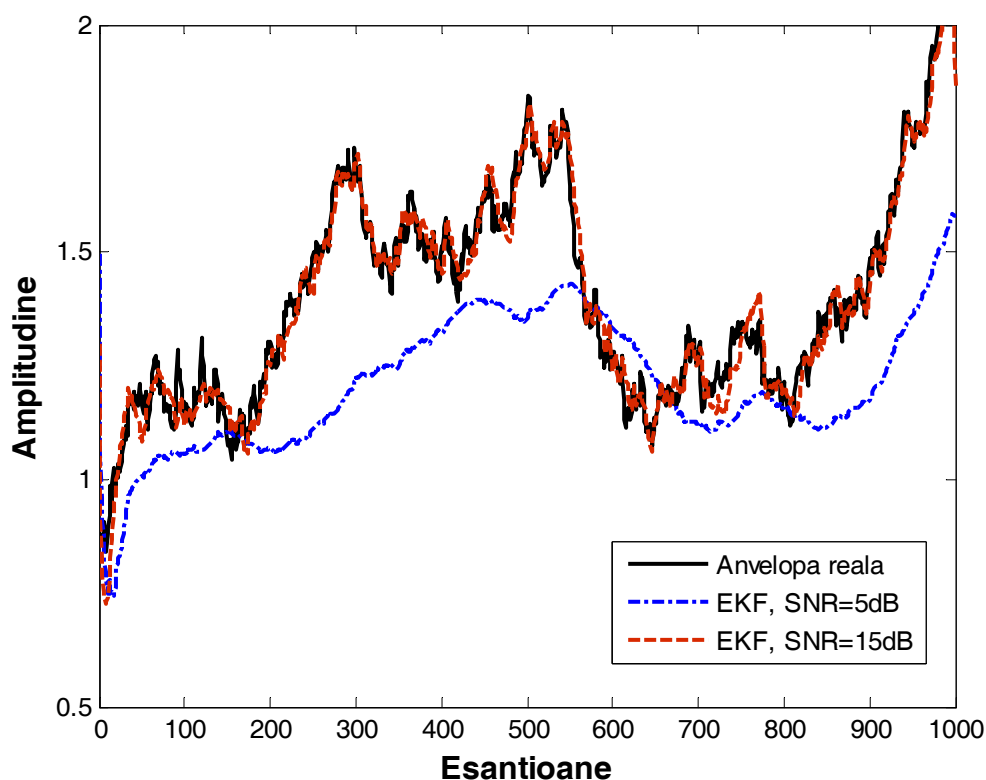


Figura 3.3. Estimarea amplitudinii prin EKF

În figurile 3.4 și 3.5 este ilustrată convergența coeficientului b_0 . Simulările s-au efectuat pentru următoarele valori exacte ale coeficientului b_0 : $\pi/4$, π , $\pi/3$ și $2\pi/3$.

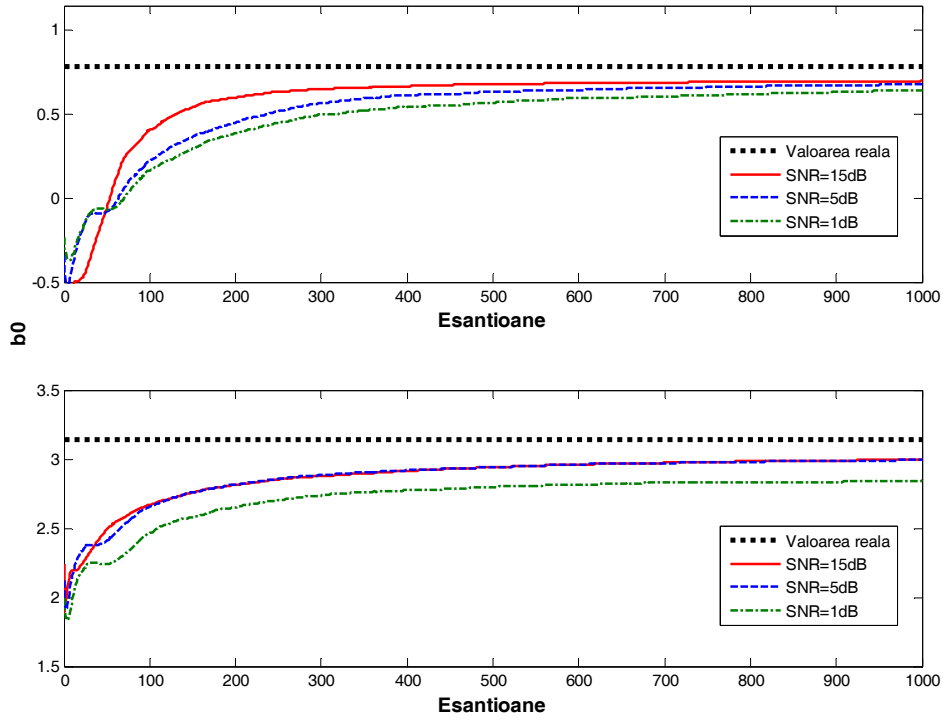


Figura 3.4. Estimarea coeficientului b_0 prin EKF ($b_0 = \pi/4$, $b_0 = \pi$)

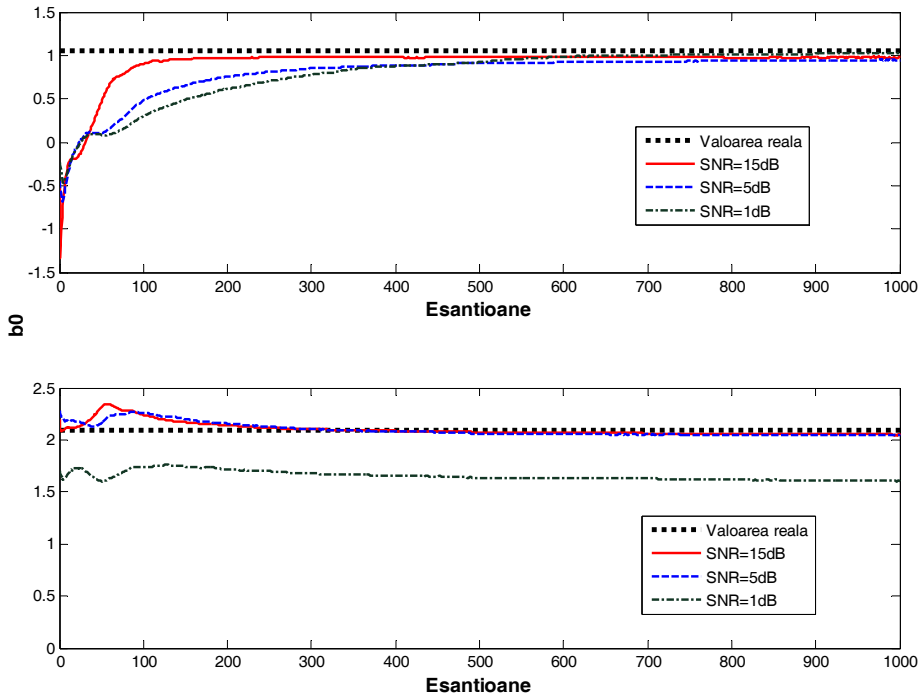
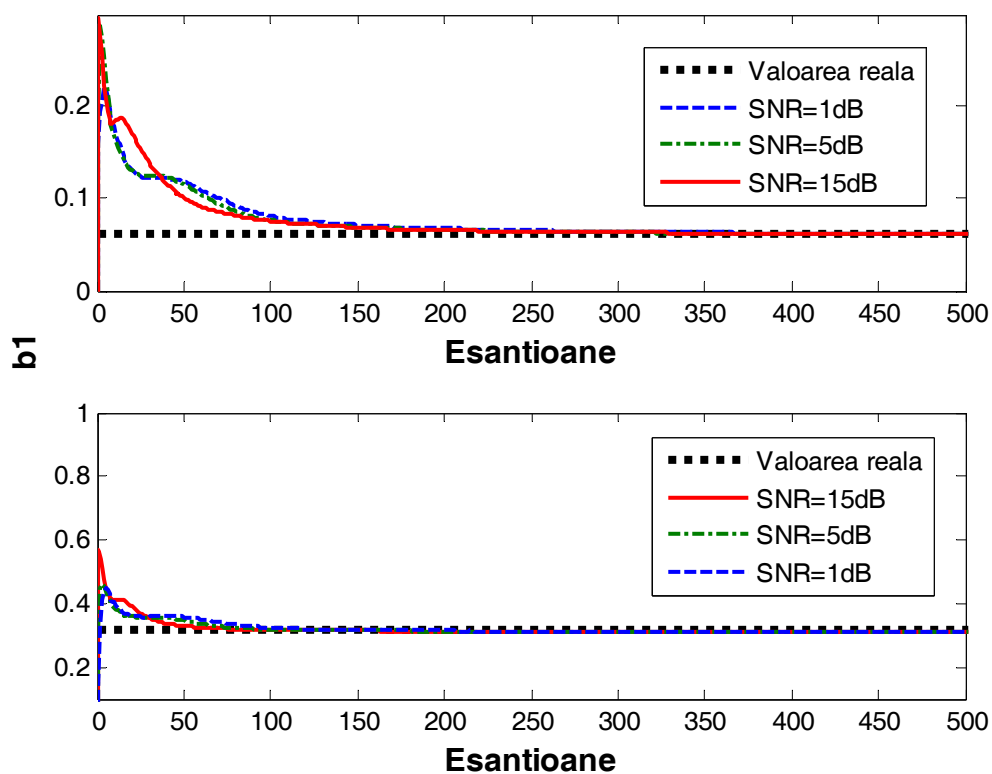


Figura 3.5. Estimarea coeficientului b_0 prin EKF ($b_0 = \pi/3$, $b_0 = 2\pi/3$)

Tabelul 3.2. Erorile relative ale coeficientului estimat, b_0

b_0	$\pi/4$	π	$\pi/3$	$2\pi/3$
Valoare SNR=15dB	8.51%	14.30%	6.9%	4.5%
Valoare SNR=5dB	10.44%	14.70%	9.94%	4.8%
Valoare SNR=1dB	13.79%	29.50%	5.1%	44.7%

În figura 3.6 este ilustrată convergența coeficientului b_1 . Simulările s-au efectuat pentru următoarele valori exacte ale coeficientului b_1 : $b_1 = 0.06283$ și $b_1 = 0.3142$.


Figura 3.6. Estimarea coeficientului b_1 prin EKF
Tabelul 3.3. Erorile relative ale coeficientului estimat, b_1

b_1	$b_1=0.06283$	$b_1=0.3142$
Valoare SNR=15dB	0.17%	0.21%
Valoare SNR=5dB	0.17%	0.22%
Valoare SNR=1dB	0.18%	0.24%

În figura 3.7 este ilustrată convergența coeficientului b_2 . Simulările s-au efectuat pentru următoarele valori exacte ale coeficientului b_2 : $b_2 = 0.001571$ și $b_2 = 0.0005236$.

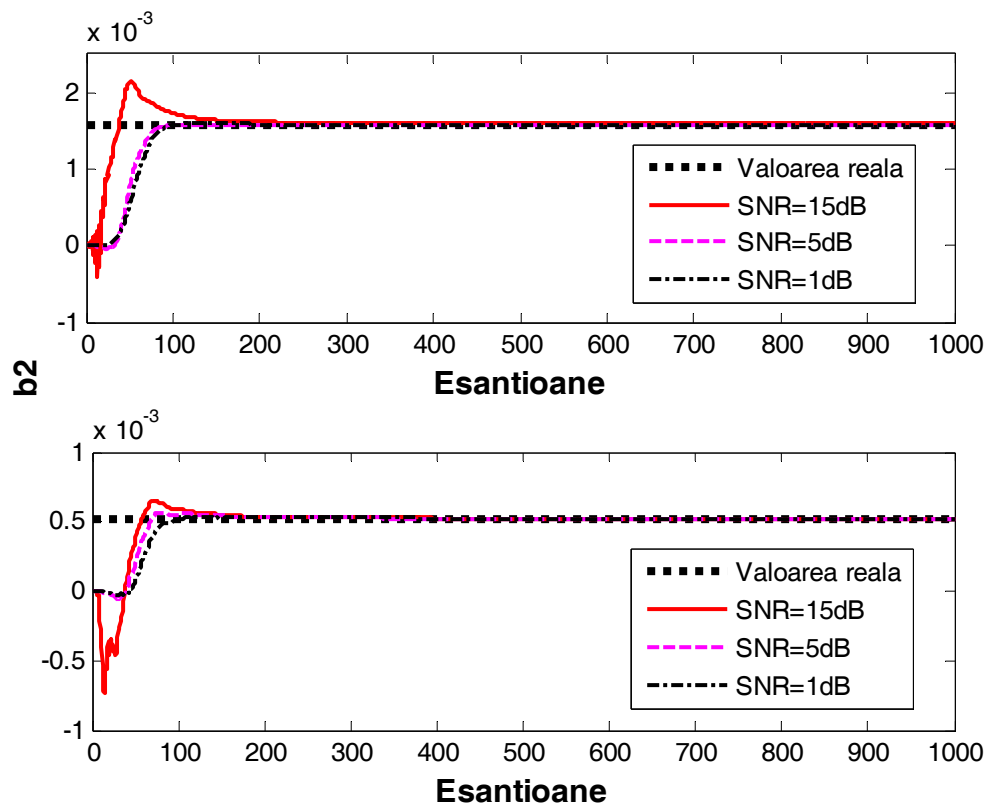


Figura 3.7. Estimarea coeficientului b_2 prin EKF

Tabelul 3.4. Erorile relative ale coeficientului estimat, b_2

b_2	$b_2=0.001571$	$b_2=0.0005236$
Valoare SNR=15dB	0.0023%	0.0016%
Valoare SNR=5dB	0.0022%	0.0016%
Valoare SNR=1dB	0.002%	0.0019%

Estimarea cea mai bună este obținută pentru b_2 , în timp ce faza inițială, b_0 , este cea mai dificilă de stabilit, deoarece estimarea sa depinde de estimarea exactă a coeficienților de ordin mare.

Se regăsește un comportament dinamic al estimărilor obținute prin filtru Kalman extins similar celui din metoda Kalman-Tretter. Astfel filtru converge în mai puțin de 200 iterații spre valorile exacte ale parametrilor. De asemenea prin numeroase simulări efectuate, s-a observat că parametri de fază b_2 și b_1 sunt determinați întotdeauna într-o primă etapă. Apoi, în etapa următoare se estimează faza inițială, b_0 . Se pare astfel că coeficientul de cel mai înalt grad al fazei este parametrul determinant în bună reconstrucție a fazei globale. O estimare corectă a acestui parametru implică în majoritatea cazurilor succesul estimării tuturor parametrilor semnalului.

3.2.8 Analiza statistică

În acest paragraf se efectuează o analiza statistică a celor două metode propuse și se compară performanțele lor.

O analiză statistică a fost făcută pe 100 de realizări zgomotoase al unui semnal de test pentru un raport semnal pe zgomot cuprins între valorile 0 și 20dB cu un pas de 1dB. Valorile medii a erorii RMS au fost calculate pentru fiecare din patru parametri care descriu semnalul cu faza polinomială de gradul doi pentru fiecare metodă. Figurile 3.8-3.11 arată traiectoria mediilor estimatorilor parametrilor în funcție de raport semnal pe zgomot, SNR.

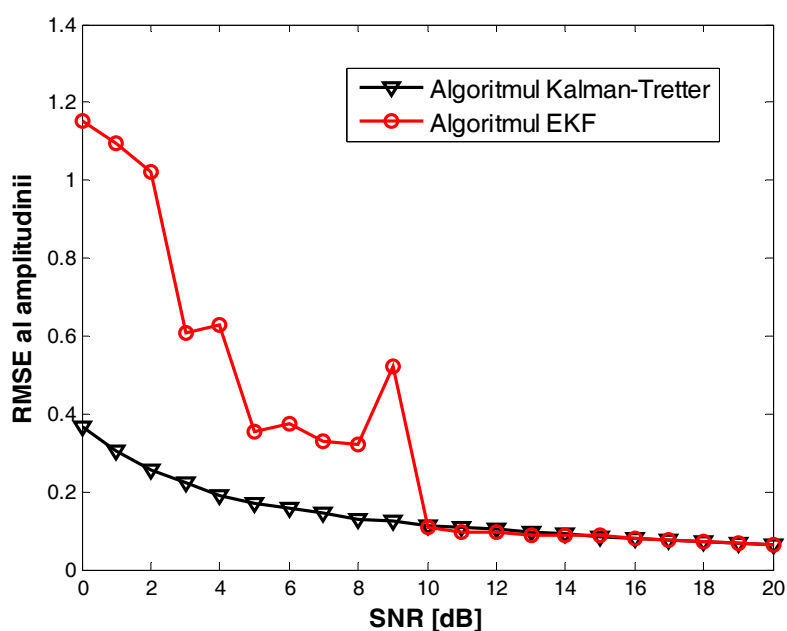


Figura 3.8. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării amplitudinii

În figura 3.8 se observă că algoritmul Kalman-Treter prezintă performanțe mai bune decât algoritmul EKF la estimarea amplitudinii pentru rapoarte semnal pe zgomot mai mici decât 10dB. La valori mai mari decât 10dB ale raportului semnal pe zgomot, ambele metode se comportă în mod identic.

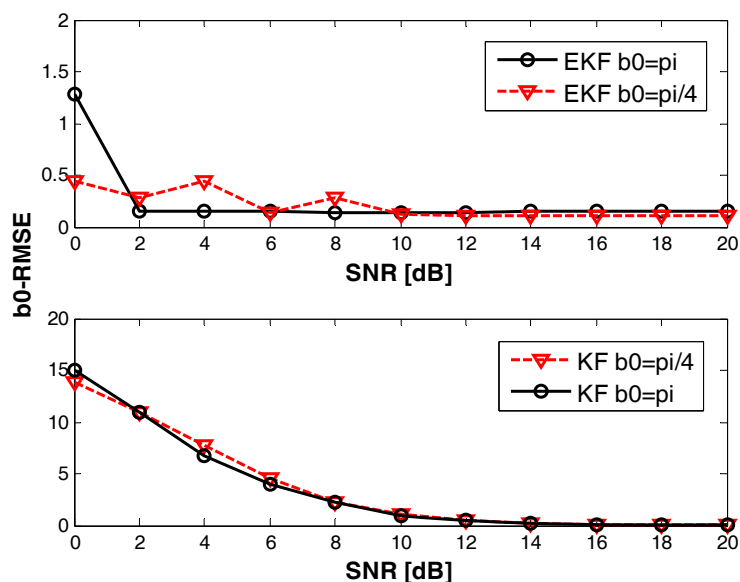


Figura 3.9. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_0

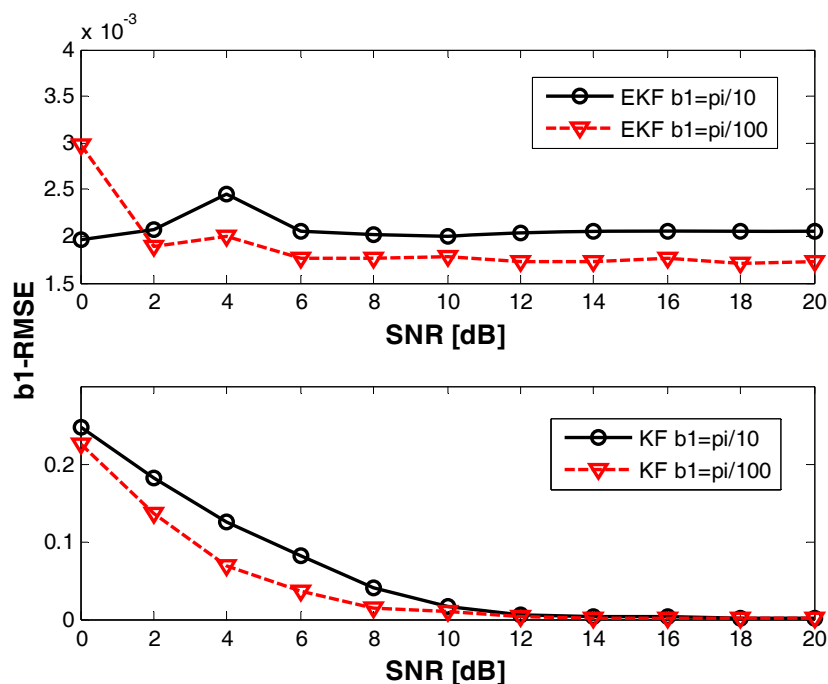


Figura 3.10. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_1

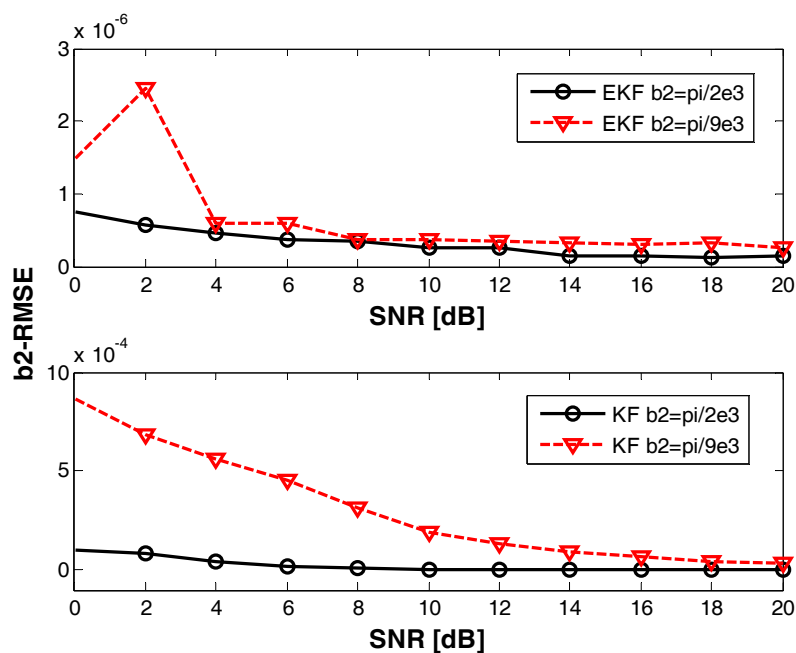


Figura 3.11. Variația RMSE în funcție de SNR în cazul estimării coeficientului b_2

Se observă că dacă raportul semnal/zgomot, SNR este mai mic, decât 13dB, în estimarea parametrilor fazei algoritmul EKF furnizează rezultatele mult mai bune decât rezultatele oferite de metoda Kalman-Treter. Ca rezultat, vom putea să declarăm că algoritmul EKF robust extinde gama metodelor Kalman de la 13dB cum era impusă de algoritmul liniar Kalman standard, la aproximativ 5dB.

3.2.9 Concluzii

În acest capitol am propus o metodă recurentă pentru a caracteriza semnalele cu fază polinomială. Această metodă se bazează pe abordarea stării semnalelor transformând astfel problema identificării parametrilor într-o problemă de estimare a stării. Prin utilizarea metodei EKF robust am testat performanțele acestei metode în comparație cu metoda Kalman-Treter. Metoda EKF robust oferă un nou model în spațiul-stărilor al semnalelor cu fază polinomială și de amplitudine variabilă, care permite o analiză mai bună a performanțelor utilizând algoritmul EKF decât algoritmul de filtrare Kalman standard. Algoritmul EKF robust implementat pe acest model extinde gama performanțelor de algoritmi Kalman în estimarea fazei polinomială de la un SNR de cel puțin 13dB la cel puțin 5dB.

CAPITOLUL 4

Demodularea necoerentă a semnalelor cu modulație de fază continuă utilizând filtrul Kalman extins

4.1 Modulația de fază continuă (CPM)

După cum indică și numele său, modulația de fază continuă, (CPM = Continuous Phase Modulation) este o clasă de semnale în care simbolurile de informație modulează faza purtătoarei astfel încât aceasta devine continuă. Semnalul de radiofrecvență prezintă o anvelopă constantă la ieșirea emițătorului [SUN86]. Această proprietate are două avantaje importante:

1. Semnalele cu anvelopa constantă sunt mai puțin sensibile la neliniaritățile amplificatorului decât alte scheme de modulație cu anvelopa variabilă. De fapt se utilizează amplificatoare de clasă C ce operează în modul de saturație completă ceea ce duce la o amplificare de putere mai eficientă [RAP91]. Pe de altă parte anvelopele variabile suferă fenomenul de creștere și împrăștiere a lobilor spectrali laterali datorită efectelor amplificatorului neliniar, ceea ce degradează performanța BER (vezi, de exemplu [FEH87] și [SEO85]).
2. Sunt mai rezistente la interferența datorată semnalelor de pe canalele adiacente (ACI, Adjacent Channel Interference). Aceasta se datorează spectrului lor de putere care este mai compact decât cel al semnalelor cu

anvelopa variabilă. O cantitate mai mare din energia semnalului este conținută în banda canalului [AND91].

Modulația de fază continuă se utilizează de obicei în comunicații wireless. Vom prezenta și analiza în continuare două tipuri de semnale din această categorie și anume: semnale MSK (Minimum Shift Keying) și GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying).

Modulația MSK este un caz special al CPFSK-lui (Continuous-Phase Frequency Shift Keying). În mod asemănător, pentru modulația FSK (Frequency Shift Keying), datele sunt codate cu două frecvențe, dar semnalul menține faza constantă între biții consecutivi. Proprietatea de continuitate a fazei este motivul principal pentru a obține o bandă de eficiență mai mare a CPFSK, în comparație cu alte tipuri de modulație FSK [RAP02].

Un semnal cu modulație de frecvență dar cu faza continuă, CPFSK este descris de ecuația următoare:

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\{\omega_1 t + \theta(0)\}, & \text{pentru "1"} \\ \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\{\omega_2 t + \theta(0)\}, & \text{pentru "0"} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (4.1)$$

unde, E_b , este energia transmisă pe bit iar, T_b , durata bitului. Faza semnalului la momentul de timp zero, $\theta(0)$, însumează efectele procesului de modulație, până la momentul zero.

O altă reprezentare a semnalului CPFSK, $s(t)$, este dată de:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\{\omega_c t + \theta(t)\} \quad (4.2)$$

unde, $\theta(t)$, reprezintă faza semnalului. Cazul în care $\theta(t)$ este o funcție continuă și semnalul $s(t)$ va fi o funcție continuă, chiar și în punctele de comutare a bitului transmis. Faza, $\theta(t)$, a semnalului crește și scade liniar în timp, pe durata, T_b .

$$\theta(t) = \theta(0) \pm \frac{\pi h}{T_b} t, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (4.3)$$

Parametrul h din ecuația (4.3) se numește raport de deviație. Substituind ecuația (4.3) în (4.2) și comparând cu (4.1) rezultă în final:

$$h = \frac{T_b}{\pi} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \text{ sau } h = T_b (f_1 - f_2) \quad (4.4)$$

Din (4.3) se vede că:

$$\theta(T_b) - \theta(0) = \begin{cases} \pi h, & \text{pentru "1"} \\ -\pi h, & \text{pentru "0"} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (4.5)$$

ceea ce înseamnă că, dacă se transmite un „1”, faza crește cu πh , iar dacă se transmite un „0” faza descrește tot cu πh .

Variația fazei, $\theta(t)$, în funcție de timp, urmează un drum, constând din segmente de linie dreaptă, panta cărora reprezintă schimbarea de frecvență. În figura 4.1 se arată drumurile posibile ale fazei, pornind de momentul $t = 0$, și diagrama se numește și arborele fazei (trellis). El arată tranzițiile de fază pentru secvență de intrare. Se poate observa din figură că la multiplii pari de durata bitului, T_b , faza semnalului CPFSK este un multiplu par de πh , în timp ce la multiplii impari de T_b , faza este un multiplu impar de πh .

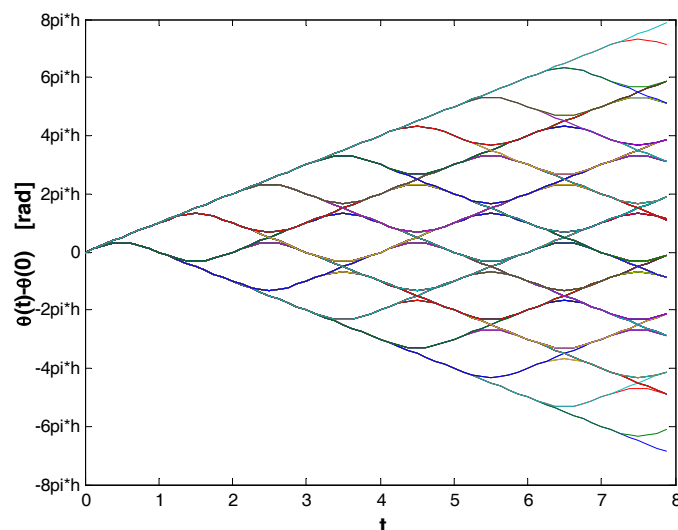


Figura 4.1. Drumurile posibile ale fazei (trellis)

Pentru un raport de deviație, $h = 1/2$, se vede din expresia (4.4), că $f_2 - f_1 = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2}$

adică, diferența dintre frecvențele de semnalizare este jumătatea ratei de bit. Acesta este distanța minimă între cele două frecvențe ce reprezintă „1” și „0” care le mai permite să rămână ortogonale, în sensul că nu interferă în procesul de detecție. Aceasta este motivul pentru care un sistem CPFSK cu raportul de deviere, $h = 1/2$, se numește și sistem cu deviație minimă de frecvență (Minimum Shift Keying, MSK). Cu cât este mai mic acest raport, cu atât va fi mai bună eficiența spectrală [AND86]. Se observă că această valoare pentru h este intervalul minim pentru care frecvențele sunt ortogonale, la detecția coerentă [SKL88], [PRO01]. Cu toate acestea, această abatere minimă nu asigură frecvențe ortogonale în cazul în care faza nu este cunoscută.

Semnalele de tip MSK prezintă o anvelopă constantă, care permite utilizarea unor amplificatoare neliniare de complexitate redusă, și a împrăștierii benzii înguste a acestora, limitând canalele adiacente de interferență. Cu toate acestea caracteristicile spectrale ale semnalului MSK din afara benzii, deși bune, nu satisfac cerințele drastice (influența canalelor adiacente) ale anumitor aplicații, cum ar fi comunicațiile wireless.

Semnalul MSK poate fi generat prin modularea frecvenței unui oscilator comandat în tensiune, OCT, în mod direct, prin folosirea unui tren de impulsuri gaussiene în banda de bază. Alte metode de generare includ folosirea modulatorului PLL sau a unui modulator ortogonal cu generatoare de forme de undă digitale.

Modulația GMSK se poate obține prin folosirea unui filtru de premodulare, de tip trece-jos, numit filtru de formare (filtru gaussian) în banda de bază. Premodularea folosită cu filtrul gaussian trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

- Răspunsul în frecvență să fie de bandă îngustă, cu panta abruptă (trecerea de la banda de trecere la banda de oprire să fie abruptă) pentru a suprima componentele de înaltă frecvență.
- Răspunsul la impuls cu supracreștere relativă cât mai scăzută, pentru a preveni deviația excesivă a frecvenței instantanee.

- Existența unui trellis de fază în care faza purtătoarei semnalului modulat ia numai valorile $\pm\pi/2$, la multipli impari de T_b , și numai valorile 0 sau π la multipli pari de T_b .

Aceste proprietăți pot fi obținute trecând semnalul de date binare, de tip NRZ (Non Return to Zero) printr-un filtru de formare în banda de bază, ce are un răspuns la impuls și implicit un răspuns în frecvență, de forma funcției gaussiene. Metoda de filtrare asociată modulației binare de frecvență se numește MSK cu filtrare gaussiană (Gaussian Minimum Shift Keying, GMSK).

4.2 Generarea semnalelor CPM

În figura 4.2 se arată structura unui modulator MSK. Avantajul schemei utilizată la generarea semnalelor MSK constă din faptul că raportul de deviere și coerența sunt neafectate de datele de intrare în domenii extinse ale ratei de bit de intrare.

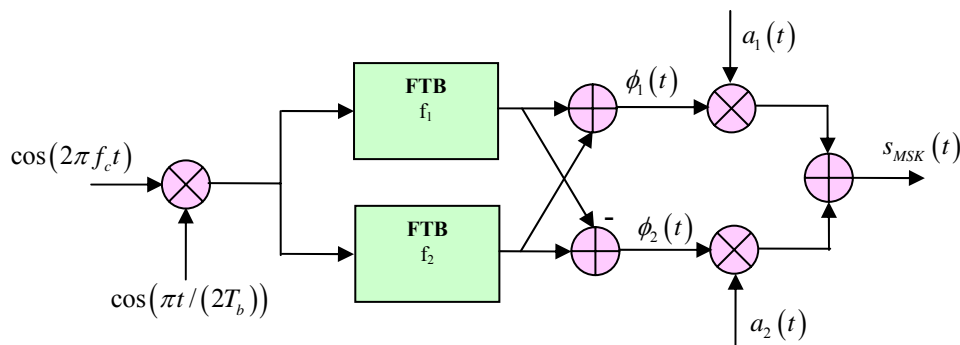


Figura 4.2. Schema bloc a unui emițător MSK

Se generează două unde coerente, de frecvențe, f_1 și f_2 , ce satisfac condițiile următoare:

$$f_1 = f_c + \frac{h}{2T_b}, \quad f_2 = f_c - \frac{h}{2T_b} \quad (4.6)$$

Raportul de deviație este $h = 1/2$. Cele două unde sunt separate, una de alta de două filtre trece-bandă, de bandă îngustă cu frecvențele centrate pe f_1 și f_2 . Din semnalele

de ieșire ale celor două filtre se obțin două purtătoare în cuadratură: $\phi_1(t)$ și $\phi_2(t)$. Ele se modulează cu câte o undă binară, $a_1(t)$ și $a_2(t)$, respectiv, ambele au rata de bit, $\frac{1}{2T_b}$, și sunt obținute din secvența binară de intrare. La ieșire se obține semnalul modulat, MSK. Spectrul modulației MSK se poate reduce, păstrând anvelopa constantă, dacă se introduce un filtru trece jos (filtru gaussian) în fața modulatorului. Astfel, modulatorul GMSK este format dintr-un filtru pre-modulator, de tip trece jos, cu o caracteristică gaussiană, care primește la intrare o secvență de date NRZ. Schema modulatorului GMSK este prezentată în figura 4.3 [PIB02].

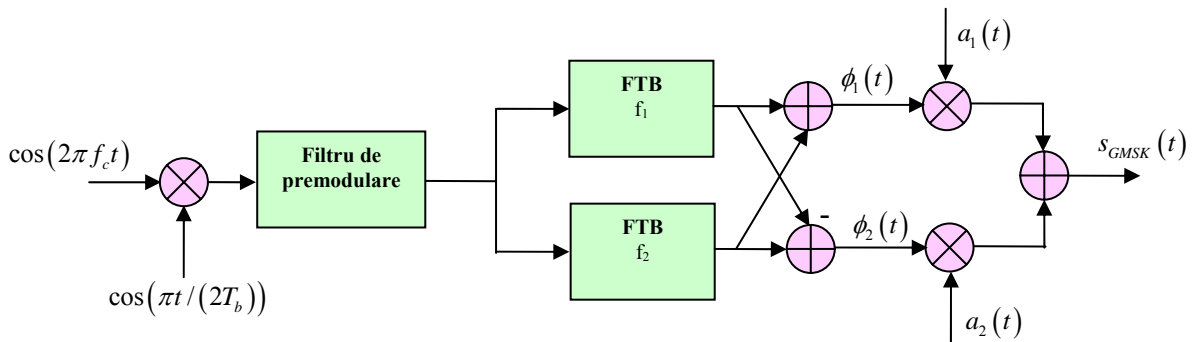


Figura 4.3. Schema bloc a unui emițător GMSK

Răspunsul la impuls al filtrului de formare în banda de bază, $h(t)$ este:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma T_b}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2 T_b^2}\right) \quad (4.7)$$

unde

$$\sigma = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{2\pi B T_b} \quad (4.8)$$

și B reprezintă lățimea de bandă a filtrului.

Răspunsul la impuls pătratic, $g(t)$, al filtrului trece-jos gaussian este:

$$g(t) = h(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) \quad (4.9)$$

unde funcția rectangulară $\text{rect}(x)$ este definită prin:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) = \begin{cases} 1/T_b, & \text{pentru } |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (4.10)$$

Răspunsul filtrului de formare din banda de bază, de tip gaussian, la un impuls de durată T_b , este:

$$g(t) = \frac{1}{2T_b} \left[Q\left(2\pi BT_b \frac{t-T_b/2}{T_b\sqrt{\ln(2)}}\right) - Q\left(2\pi BT_b \frac{t+T_b/2}{T_b\sqrt{\ln(2)}}\right) \right] \quad (4.11)$$

unde $Q(t)$ are expresia:

$$Q(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tau^2/2) d\tau \quad (4.12)$$

Expresia $g(t)$ dată prin (4.11) constituie impulsul de formare aplicat modulatorului. Produsul care controlează atât banda cât și interferența, $B \times T_b$, este produsul durată \times bandă, adimensional și este un parametru de proiectare. Figura 4.4 reprezintă trei impulsuri, pentru trei produse durată \times bandă cu valori: 2; 0.3 și 0.5.

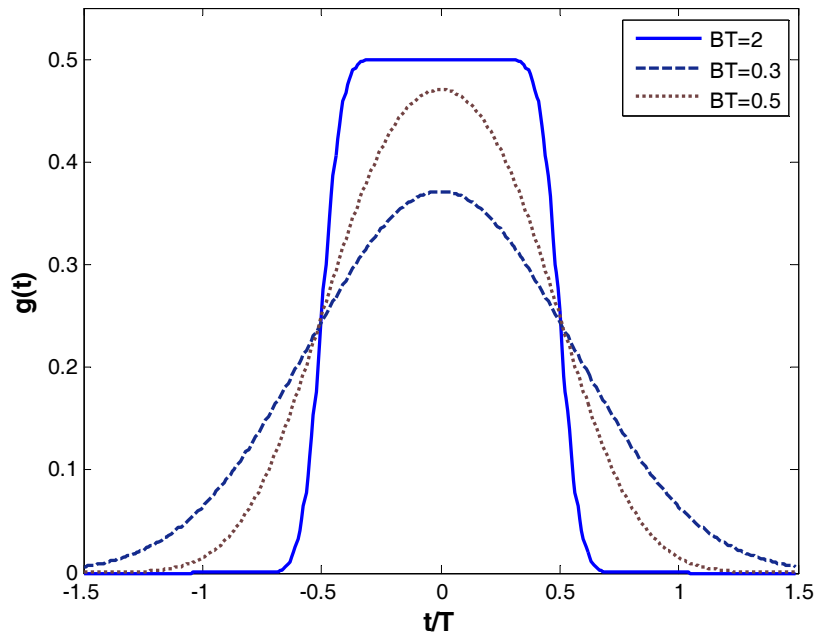


Figura 4.4. Impulsul de formare pentru trei produse durată \times bandă

Pentru valori mici ale produsului, $B \times T_b$, impulsul se întinde mai mult pe axa timpului decât pentru valori $B \times T_b$ mari. În figura 4.5 se arată densitățile spectrale de putere pentru cazul formării prin impuls gaussian, cu cele trei valori ale produsului, $B \times T_b$.

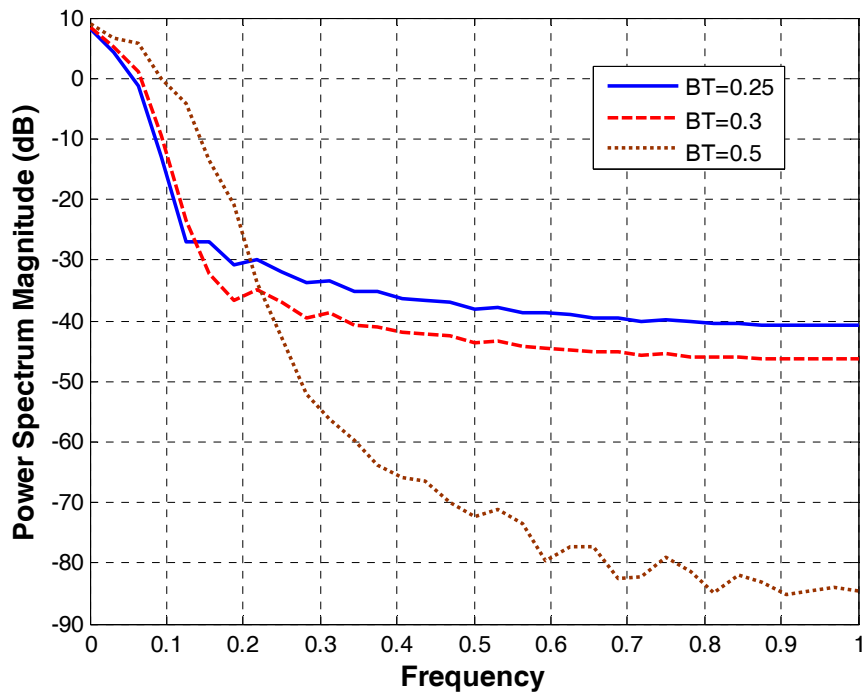


Figura 4.5. Densitatea spectrală de putere a modulației GSMK pentru diverse produse $B \times T_b$

Analizând figura 4.4 se observă că cu cât produsul $B \times T_b$ este mai mic, cu atât mai multă putere transmisă este concentrată în lobul central și deci în banda de trecere a semnalului GSMK.

O caracteristică nedorită a modulației GSMK este că, în urma filtrării unde NRZ binare cu filtrul gaussian, semnalul modulator nu se mai întinde pe durata unui singur bit, ca în sistemul MSK obișnuit. Impulsurile modulator se extind și în alte intervale de semnalizare, ceea ce generează interferențe între simboluri. Cu cât produsul, $B \times T_b$, este mai mic, cu atât extinderea se accentuează. Trebuie făcut un compromis între lățimea de bandă și pierderile de performanță, prin alegerea unui produs $B \times T_b$ acceptabil.

4.2.1 Implementarea modulației GMSK în sistemul GSM

Sistemul de modulație GMSK se aplică în comunicațiile wireless de tip GSM care este standardul european pentru celulare cu bandă de 900MHz [JEN97]. Sistemul GSM este un sistem de comunicații, cu acces multiplu și divizare în timp. Spectrul disponibil este împărțit în subbenzi de câte 200kHz. Fiecare subbandă este alocată unui sistem GSM ce transmite date cu 271 kbiți/sec. Parametrul $B \times T_b$ este standardizat și are valoarea 0.3. Sistemul Cellular Digital Packet Data implementată pe standardul analog AMPS în SUA folosește modulația GMSK cu $B \times T_b = 0.5$.

4.3 Demodularea semnalelor CPM

4.3.1 Probabilitatea de eroare în MSK și GMSK

În cazul unui canal AWGN, semnalul recepționat este:

$$x(t) = s_{MSK}(t) + w(t) \quad (4.13)$$

unde, $s_{MSK}(t)$, este semnalul transmis, iar $w(t)$ este un eșantion al unui proces aleator alb, gaussian, de medie nulă și densitatea spectrală de putere, $N_o/2$. Pentru a decide care simbol a fost transmis în intervalul $0 \leq t \leq T_b$, trebuie găsită o procedură de detectare a fazelor $\theta(0)$ și $\theta(T_b)$, din semnalul recepționat. Pentru detecția optimă a fazei, $\theta(0)$, se determină mai întâi, proiecția semnalului recepționat $x(t)$, pe semnalul de referință $\phi_1(t)$, în intervalul $[-T_b, T_b]$:

$$x_1 = \int_{-T_b}^{T_b} x(t) \phi_1(t) dt = s_1 + w_1, \quad -T_b \leq t \leq T_b \quad (4.14)$$

unde

$$s_1 = \sqrt{E_b} \cos \theta(0), \quad -T_b \leq t \leq T_b \quad (4.15)$$

și w_1 este valoarea eșantionului unei variabile de medie nulă și dispersie, $N_o/2$. Cazul în care $x_1 > 0$, receptorul va alege estimarea, $\hat{\theta}(0) = 0$, iar dacă $x_1 < 0$, se alege $\hat{\theta}(0) = \pi$.

În mod asemănător, pentru detectarea optimă a lui $\theta(T_b)$, se determină proiecția semnalului recepționat, $x(t)$, pe semnalul de referință $\phi_2(t)$, în intervalul $[0, 2T_b]$:

$$x_2 = \int_0^{2T_b} x(t)\phi_2(t) = s_2 + w_2, \quad 0 \leq t \leq 2T_b \quad (4.16)$$

unde

$$s_2 = -\sqrt{E_b} \sin \theta(T_b), \quad 0 \leq t \leq 2T_b \quad (4.17)$$

și w_2 este valoarea eșantionului unei alte variabile gaussiene, de medie nulă și dispersie $N_o/2$ necorelată cu prima. Cazul în care $x_2 > 0$, implică estimarea $\hat{\theta}(T_b) = -\pi/2$, iar dacă $x_2 < 0$, se alege $\hat{\theta}(T_b) = \pi/2$. Pentru a reconstrui secvența binară inițială se procedează la întreteserea celor două procedee de estimare a fazei descrise mai sus.

Probabilitatea de eroare în cazul detecției MSK este:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}} \right) \quad (4.18)$$

Performanța bună se datorează faptului că observarea durează $2T_b$.

În cazul modulației GMSK probabilitatea de eroare medie are expresia:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{E_b}{N_o}} \right) \quad (4.19)$$

unde, α , este o constantă a cărei valoare depinde de produsul, $B \times T_b$. Comparând expresia (4.19) cu (4.18) se vede că degradarea performanțelor unui sistem GMSK în raport cu un sistem MSK este dată de cantitatea $10 \log \frac{\alpha}{2}$. Pentru valorarea produsului $B \times T_b = 0.3$, degradarea performanțelor este de $\sim 0.46\text{dB}$, ceea ce corespunde la $\alpha = 1.8$. Pierderea de performanță este mică și poate fi tolerată, în vedere că banda semnalului GMSK este foarte mică.

4.3.2 Demodularea coerentă a semnalelor CPM

În [SUN86] Sundberg prezintă diferite metode pentru a îmbunătăți detecția semnalelor MSK, păstrând amplitudinea constantă. Aceste metode oferă spectrul de putere mai îngust, diminuarea lobilor laterali ai spectrului, o probabilitate mai mare de a detecta erorile, sau o combinație a celor mai sus menționate. Pentru o recepție coerentă se ia în considerare relația dintre parametrii importanți ai sistemelor, cum ar fi numărul de nivele ale simbolurilor, netezirea formei impulsului, și indicele de modulație. Atunci când faza purtătoarei poate fi recuperată la recepție se poate obține o performanță ridicată utilizând demodulatorul coerent. În figura 4.6 se arată schema bloc a unui receptor MSK. Se efectuează intercorelațiile între semnalul recepționat, $r(t)$, și semnalele coerente $\cos(2\pi f_c t + \varphi_0)$ și $-\sin(2\pi f_c t + \varphi_0)$.

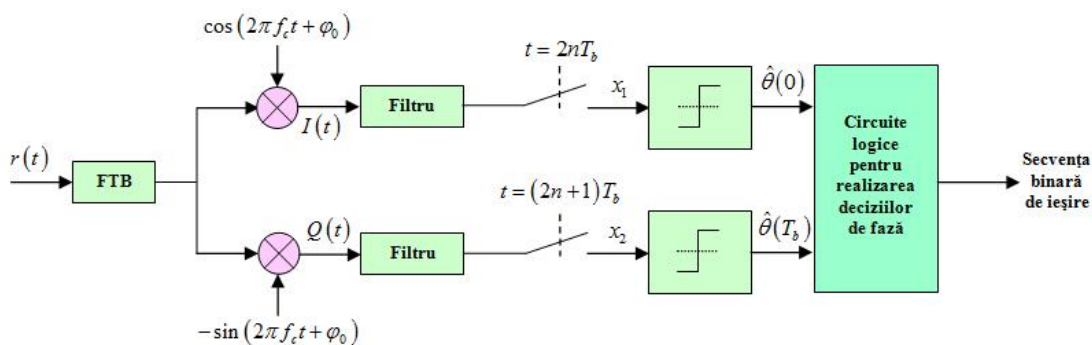


Figura 4.6. Schema bloc a unui receptor coerent MSK

Componentele în fază și în cuadratură se prelucrează separat [BEN99]. Ieșirile x_1 și x_2 sunt comparate cu pragurile de decizie de 0 [Volt] și se realizează estimările fazelor $\hat{\theta}(0)$ și $\hat{\theta}(T_b)$. În final, din aceste decizii privind faza se reconstruiește secvența binară de intrare. Reconstrucția se realizează, pentru canalul AWGN, cu o probabilitate de eroare medie pe simbol, P_e , minimă.

În [MUH81] Murota și Hirade propun folosirea modulației GMSK la demodularea coerentă pentru serviciile mobile. Autorii arată modul în care diverse proprietăți cum este spectrul de putere, și rata erorii de bit sunt calculate și utilizate în evaluarea performanțelor. Ei arată relația dintre lățimea de bandă normalizată și puterea

semnalelor GMSK la valori $B \times T_b$ diferite. Scăderea teoretică a puterii semnalului GMSK ($B \times T_b = 0.3$) de la MSK este în jur de 0.5dB în funcție de E_b / N_o . Sunt date schemele bloc ale versiunilor analogice și digitale ale unui demodulator coerent ortogonal. Performanța este evaluată în medii statice și dinamice, și sunt date formulele teoretice pentru BER, cu excepția cazului de fading Rayleigh rapid unde performanța de urmărire a circuitului de recuperare a purtătoarei nu poate fi analizată.

4.3.3 Demodularea necoerentă a semnalelor CPM

Deși receptorul coerent oferă o performanță bună, deseori este de preferat evitarea complexității sincronizării de fază, care necesită utilizarea buclei PLL și este vulnerabil la fenomenul de fading. După cum s-a văzut anterior, când se folosește demodularea necoerentă, spațierea în frecvență a tonalităților MSK este mai mică decât minimumul necesar pentru ortogonalitate. De aceea tehnicile necoerente permit demodularea ieftină a semnalelor CPM, dar cu performanțe mai scăzute în AWGN.

4.3.3.1 Demodularea diferențială

În [SIC84] se compară demodularea diferențială pentru transmisia GMSK bazată pe 1 bit cu cea bazată pe 2 biți și se propune o prelucrare analitică a performanței metodei, punând în evidență compromisurile făcute la diferiți parametri de proiectare, cum ar fi lățimea de bandă a filtrelor de transmisie și de recepție și nivelul pragului de decizie. Autorii definesc prin formule teoretice sofisticate performanțele demodulatorilor atât pentru canalul AWGN cât și pentru canalul cu fading rician. În ceea ce privește probabilitatea de eroare de bit, demodularea diferențială bazată pe 2 biți oferă performanță superioară față de demodularea diferențială pe 1 bit atât pentru canalul AWGN cât și pentru canalul cu fading rician.

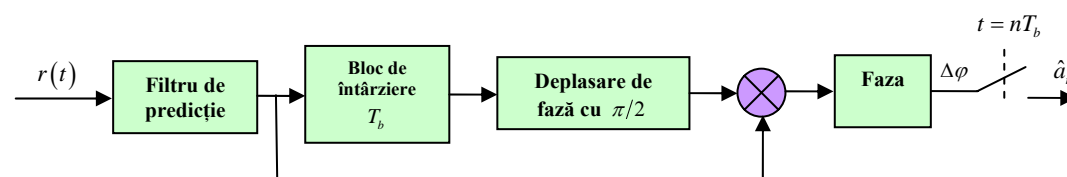


Figura 4.7. Schema bloc a unui detector diferențial

Schema bloc a unui receptor diferențial este prezentată din figura 4.7. Detecția diferențială constă în compararea fazei semnalului la două momente de timp diferite. Intervalul dintre două observații este de obicei un multiplu întreg al duratei bitului, T_b , iar majoritatea receptoarelor diferențiale sunt cu 1 sau cu 2 biți, ceea ce înseamnă că intervalul de timp pentru compararea fazei este T_b , sau $2T_b$.

Utilizând reprezentarea complexă în banda de bază pentru semnalul recepționat și neglijând efectul filtrului de predicție, expresia pentru diferența de fază este:

$$\Delta\varphi(t) = \arg\{r(t)r^*(t-T_b)\} \quad (4.20)$$

Această diferență de fază este eșantionată la momentul de timp $t = nT_b$. Frecvența instantanee $f_i(t)$ se definește prin [BOA92]:

$$f_i(t) = f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT_b) \quad (4.21)$$

unde, $g(t)$, este un impuls dreptunghiular de amplitudine, $A = 1V$ și durată T_b .

Utilizând expresia de mai sus, diferența de fază la momentul de timp nT_b este dată de:

$$\Delta\varphi(nT_b) = 2\pi \int_{t=(n-1)T_b}^{nT_b} f_d \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT_b) + \Delta\varphi_{zgomot} \quad (4.22)$$

unde $\Delta\varphi_{zgomot}$ corespunde efectului unui zgomot aditiv. Pentru MSK diferența de fază depinde doar de valoarea bitului curent, iar expresia se reduce la:

$$\Delta\varphi(nT_b) = \frac{\pi}{2} a_n + \Delta\varphi_{zgomot} \quad (4.23)$$

4.3.3.2 Detectorul discriminator

În mod similar cu semnalele FSK, semnalele MSK pot fi demodulate ușor utilizând detectorul discriminator. Acesta conține un circuit diferențiator care derivează semnalul recepționat, obținându-se un semnal cu modulație de amplitudine și de frecvență. Se poate verifica imediat că înfășurătoarea acestui semnal are amplitudinea proporțională cu frecvența instantanee a semnalului MSK și semnalul modulator poate fi recuperat prin detecție urmată de filtrare trece jos.

În cele din urmă, decizia statistică a discriminatorului poate fi exprimată în mod similar cu expresia (4.23). Diagrama bloc a receptorului discriminator cu limitare este prezentată în figura 4.8.

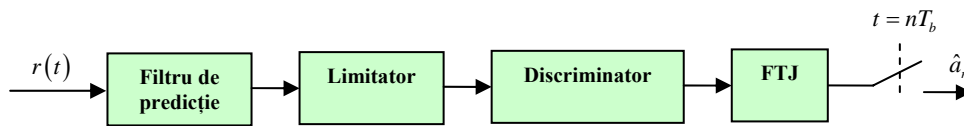


Figura 4.8. Schema bloc a unui discriminator cu limitare

Înainte de operația de discriminare semnalul este trecut printr-un limitator care reface anvelopa constantă a semnalului.

În cazul semnalului MSK detectoare diferențiale și discriminatoare au performanțe identice în canale AWGN [SIM83]. Cu toate acestea, în prezența interferenței din canal, a zgomotului FM aleator sau a fading-ului Rayleigh, performanțele detectorului diferențial și ale discriminatorului sunt ușor diferite [LAS97].

4.4 Demodularea necoerentă prin filtru Kalman extins

Modulația de fază continuă prezintă o anvelopă constantă și o lățime de bandă, motiv pentru care o anumită clasă de modulație, și anume GMSK a fost selectată ca standard al sistemului GSM. În general, soluția optimă pentru demodularea semnalelor CPM constă într-un estimator de plauzibilitate maximă (MLSE), implementată prin utilizarea algoritmului Viterbi. În acest paragraf se propune o nouă abordare pentru demodularea semnalelor CPM bazată pe un model în spațiul stărilor prin utilizarea filtrării Kalman extinse.

Un semnal modulat CPM, $y[n]$, având amplitudine constantă și perturbat de zgomotul aditiv, $w[n]$ este exprimat prin:

$$y[n] = A \cos \varphi[n] + w[n] \quad (4.24)$$

unde valoarea pozitivă, A , este amplitudinea constantă și $\varphi[n]$ este faza semnalului.

Zgomotul aditiv este considerat alb și gaussian, având medie nulă și dispersie, σ_w^2 .

4.4.1 Modelul în spațiul-stărilor și ecuația de tranziție

Vectorul de stare

Se definește următorul vector de stare, $\mathbf{x}[n]$, de dimensiune 2×1 :

$$\mathbf{x}[n] = [\varphi[n] \quad \Omega[n]]^T \quad (4.25)$$

în care

$$\Omega[n] = \varphi[n] - \varphi[n-1] \quad (4.26)$$

unde, $\Omega[n]$, reprezintă derivata de ordinul I a funcției de fază.

Din ecuația (4.25) faza semnalului se mai poate scrie:

$$\varphi[n] = \varphi[n-1] + \Omega[n-1] \quad (4.27)$$

Ecuația de stare

Dacă se iau în considerare doar variațiile fazei semnalului CPM, ecuația de tranziție a stării poate fi scrisă ca și :

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n-1] \quad (4.28)$$

unde matricea de tranziție a stărilor notată cu \mathbf{F} de dimensiune 2×2 are forma, [DCC06]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Considerăm pentru frecvența semnalului un model aleator de tip random-walk:

$$\Omega[n] = \Omega[n-1] + v[n] \quad (4.30)$$

unde, $v[n]$, este o secvență de scalari aleatori, independenți și identic distribuți având distribuția normală, $N(0, \sigma_v^2)$. Astfel, valoarea varianței, σ_v^2 , controlează capacitatea algoritmului de a urmări variațiile frecvenței semnalului modulat. Incluzând ecuația (4.30) în ecuația (4.28), expresia finală a ecuației de tranziție de stare este:

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{F}\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{G}v[n] \quad (4.31)$$

unde, \mathbf{G} , este un vector având forma 2×1 :

$$\mathbf{G} = [0 \quad 1]^T \quad (4.32)$$

Așa cum reiese din (4.31) ecuația de tranziție de stare pentru un model CPM este liniară.

Ecuția de observare

În scopul estimării parametrilor semnalului CPM perturbat de zgomot se utilizează un model neliniar. În acest sens, semnalul măsurat, $y[n]$, este exprimat sub forma:

$$y[n] = A \cos \varphi[n] + w[n] \quad (4.33)$$

unde amplitudinea semnalului se neglijează deoarece este o constantă iar, $w[n]$ este zgomotul de măsurare de varianță σ_w^2 . Ecuația (4.33) poate fi scrisă făcând abstracție de amplitudine sub forma [GCN10], [GAN10]:

$$y[n] = \cos(\mathbf{I}^T \mathbf{x}[n]) + w[n] \quad (4.34)$$

unde

$$\mathbf{I}^T = [1 \quad 0] \quad (4.35)$$

Analizând (4.34), se constată că este o ecuație neliniară și prin urmare se aplică algoritmul de filtrare Kalman extins. Derivata funcției neliniare $\cos(\mathbf{I}^T \mathbf{x}[n])$ este necesară în vederea aplicării algoritmului EKF:

$$\mathbf{h}[n] = -\mathbf{I} \sin(\mathbf{I}^T \mathbf{x}[n]) \quad (4.36)$$

4.4.2 Algoritmul EKF

Filtrul Kalman extins este o metodă aproximativă și oferă posibilitatea extinderii principiului de filtrare Kalman standard la modele neliniare în spațiul stărilor. Având în vedere faptul că ecuația de măsurare a modelului adoptat este neliniară, se efectuează în fiecare moment o liniarizare a acestuia în jurul vectorului $\hat{\mathbf{x}}[n|n-1]$ la fiecare pas al algoritmului Kalman standard. Ecuațiile (4.37) – (4.42) descriu algoritmului de filtrare Kalman extins.

Recursia ecuației de măsurare

$$\mathbf{h}[n] = -\mathbf{I} \sin(\mathbf{I}^T \hat{\mathbf{x}}[n|n-1]) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{K}[n] = \mathbf{R}[n|n-1] \mathbf{h}^T[n] (\mathbf{h}[n] \mathbf{R}[n|n-1] \mathbf{h}^T[n] + \sigma_w^2)^{-1} \quad (4.38)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n|n] = \hat{\mathbf{x}}[n|n-1] + \mathbf{K}[n] (y[n] - \cos(\mathbf{I}^T \hat{\mathbf{x}}[n|n-1])) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{R}[n|n] = \mathbf{R}[n|n-1] - \mathbf{K}[n] \mathbf{h}[n] \mathbf{R}[n|n-1] \quad (4.40)$$

Recursia ecuației de stare

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1|n] = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}[n|n] \quad (4.41)$$

$$\mathbf{R}[n+1|n] = \mathbf{F} \mathbf{R}[n|n] \mathbf{F}^T + \sigma_v^2 \mathbf{G} \mathbf{G}^T \quad (4.42)$$

unde, $\mathbf{K}[n]$, este matricea de câștig Kalman la momentul n , iar $\mathbf{R}[n|n-1]$ este matricea de corelație a procesului de inovație [PKO99], [WTL07].

Condițiile inițiale sunt date în expresiile (4.43) și (4.44):

$$\hat{\mathbf{x}}[1|0] = [\Omega_0 \quad 0]^T \quad (4.43)$$

$$\mathbf{R}[1|0] = \frac{\pi^2}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

În ceea ce privește partea experimentală s-a considerat un sistem de transmisie care folosește modulația de tip MSK respectiv GMSK, utilizând mediul de programare MATLAB versiunea 7.6. Mesajul transmis este alcătuit dintr-o secvență unipolară aleatoare generată cu funcția *randsrc*. Semnalul modulat MSK apoi GMSK este transmis pe un canal de comunicație AWGN afectat de zgomot gaussian alb și aditiv. La recepție s-a utilizat în scopul demodulării necoerente filtrul Kalman extins. Simulările au fost efectuate pentru diferite valori ale ratei de eșantionare (n_{Samp}) și ale raportului semnal pe zgomot (SNR). Rata de eșantionare indică numărul de eșantioane utilizate de EKF pentru demodulare. S-a constatat că algoritmul EKF lucrează satisfăcător și la nivele joase ale raportului SNR.

În figura 4.9 este reprezentată o secvență din mesajul MSK transmis împreună cu semnalul demodulat MSK cu EKF. S-a ales o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=16$ și un raport semnal pe zgomot SNR=8dB.

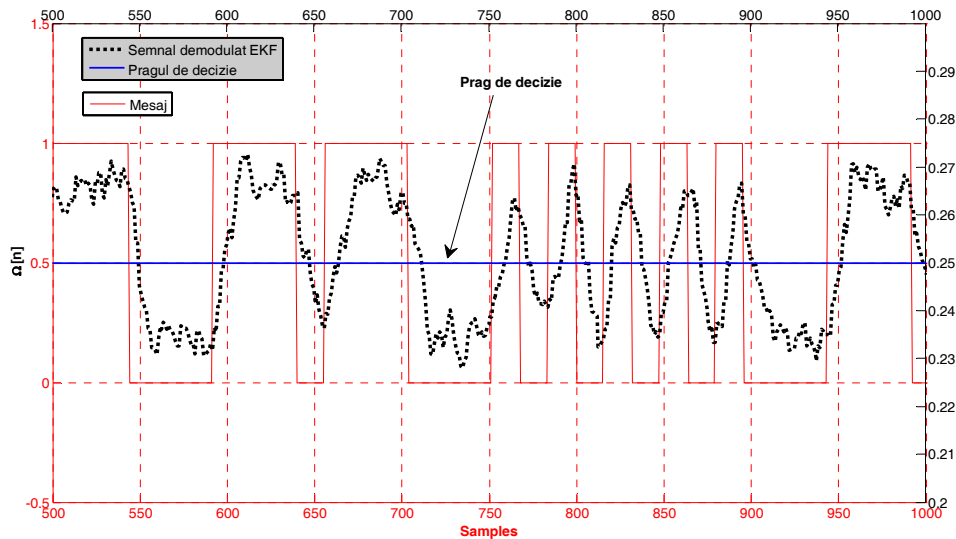


Figura 4.9. Semnalul MSK demodulat EKF împreună cu mesajul transmis

Se poate observa din figură, că în condițiile amintite mai sus semnalul estimat urmărește mesajul transmis și în cazul în care variațiile biților din mesajul transmis sunt rapide. În continuare s-a elaborat un algoritm de căutarea valorii optime a pragului de decizie în scopul refacerii biților recepționați. Aceeași procedură este utilizată și în cadrul demodulației GMSK. Evaluarea performanțelor unui sistem de transmisie de date are printre parametrii cei mai importanți, rata erorii de bit (BER). Într-o analiză comparativă a modulațiilor MSK și GMSK trebuie să se aibă în vedere și această măsură. Performanțele utilizării filtrului Kalman extins în cele două tipuri de modulație sunt prezentate în continuare.

Figura 4.10 ilustrează variația performanței BER a sistemului MSK cu rata de eșantionare. Simulările au fost efectuate pentru patru valori diferite ale SNR-ului ($\text{SNR}=2,4,6,8$) și pentru trei valori diferite ale ratei de eșantionare ($n_{\text{Samp}}=4, 8$ și 16). Se poate observa din figură că la $\text{SNR}=6\text{dB}$ și la $\text{SNR}=8\text{dB}$ variația ratei de eșantionare nu influențează în mod deosebit performanțele BER a sistemului MSK.

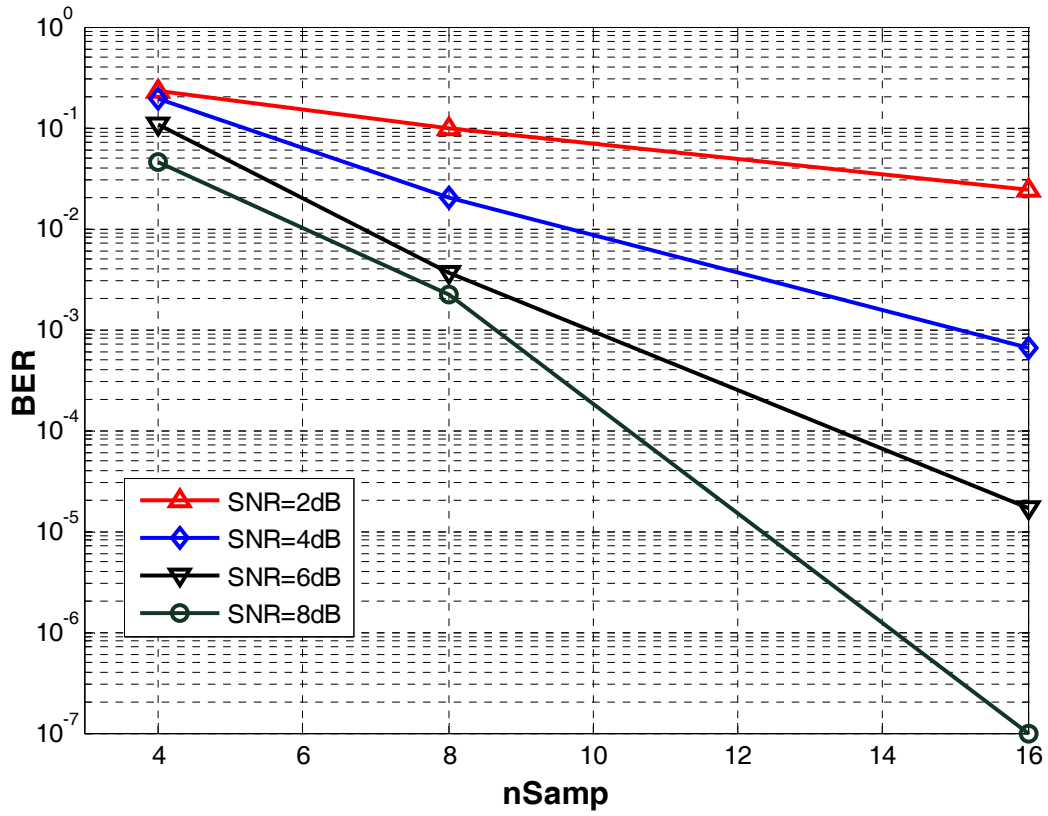


Figura 4.10. Performanțele sistemului MSK la variația ratei de eșantionare

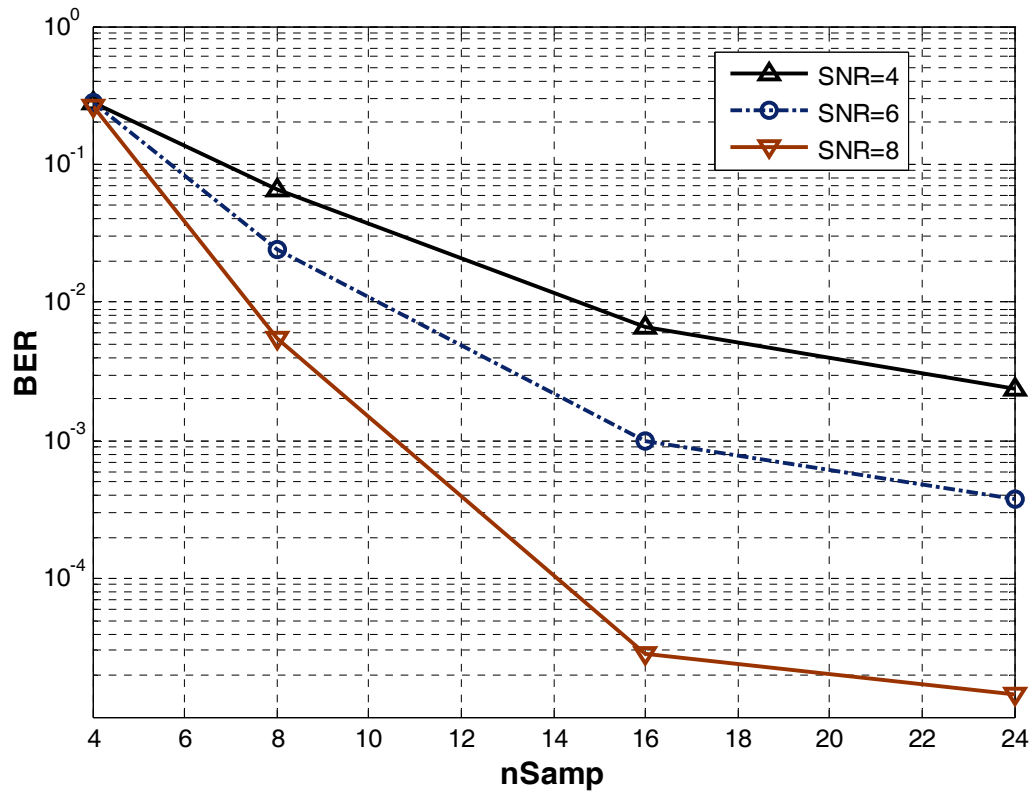


Figura 4.11. Performanțele sistemului GMSK la variația ratei de eșantionare cu $B \times T_b = 0.3$

Figura 4.11 reprezintă variația performanței sistemului GMSK utilizând valoarea produsului $B \times T_b = 0.3$, cu rata de eșantionare. Simulările au fost efectuate în condițiile identice cu cele de la MSK. În acest caz s-au efectuat simulările pentru patru valori diferite ale ratei de eșantionare ($nSamp=4,8,16$ și 24). Întotdeauna se caută un compromis între valoarea raportului semnal pe zgomot și rata de eșantionare. Așa cum se observă din figură performanța crește odată cu creșterea ratei de eșantionare.

În continuare se face o analiză a performanțelor BER ale sistemelor MSK și GMSK în canale AWGN.

În figurile următoare sunt reprezentate performanțele BER în cazul demodulării sistemelor MSK și GMSK obținute prin filtru Kalman extins. Simulările s-au efectuat pentru diferite valori ale ratei de eșantionare, ale produsului durată \times bandă, în funcție de raportul E_b/N_0 . Rezultatele obținute au fost comparate cu curba teoretică.

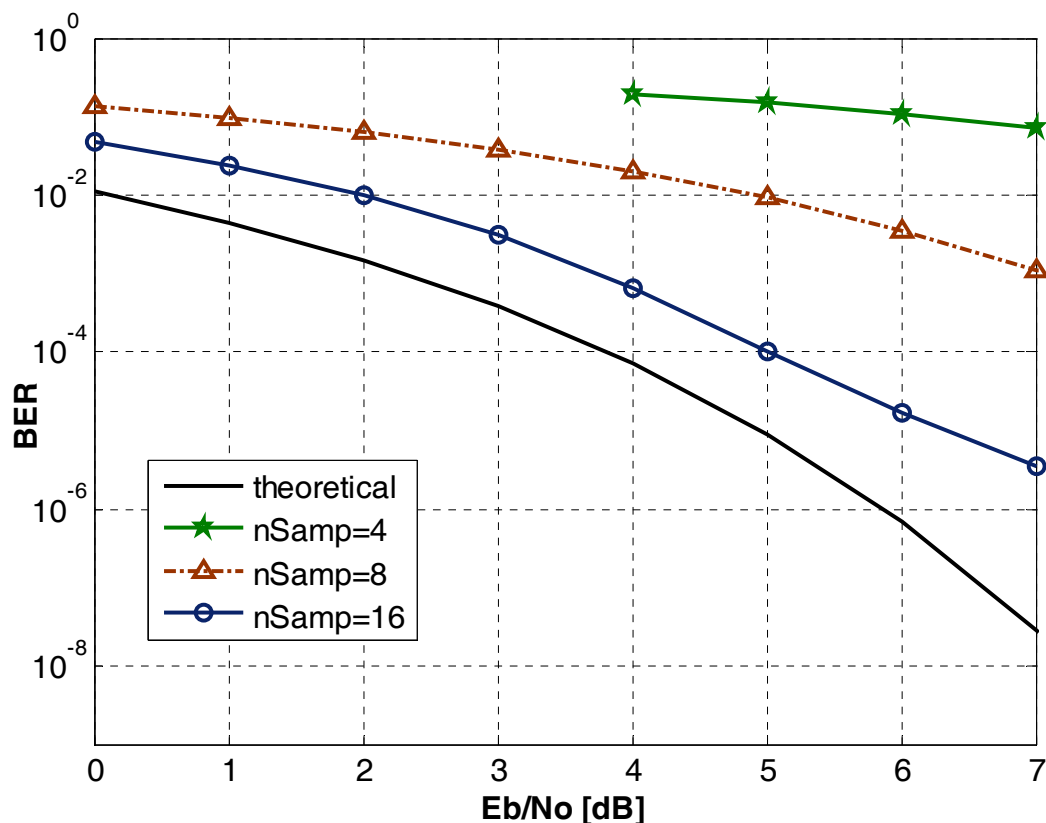


Figura 4.12. Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem MSK pentru trei valori ale ratei de eșantionare $nSamp=4, 8$ și 16

Figura 4.12 prezintă performanțele BER în cazul detecției semnalului MSK prin EKF pentru trei diferite valori ale ratei de eșantionare și anume: $n_{\text{Samp}}=4$, 8 și 16. Rezultatele obținute s-au comparat cu curba teoretică. După cum era și așteptat, odată cu creșterea ratei de eșantionare performanța demodulatorului utilizat crește. S-a constatat, că în cazul $n_{\text{Samp}}=4$, dacă raportul semnal pe zgomot este mai mic decât 4, stabilitatea filtrului nu mai este asigurată și în consecință algoritmul Kalman extins devine divergent. În consecință demodulatorul necoerent prin EKF nu poate fi utilizat în asemenea condiții.

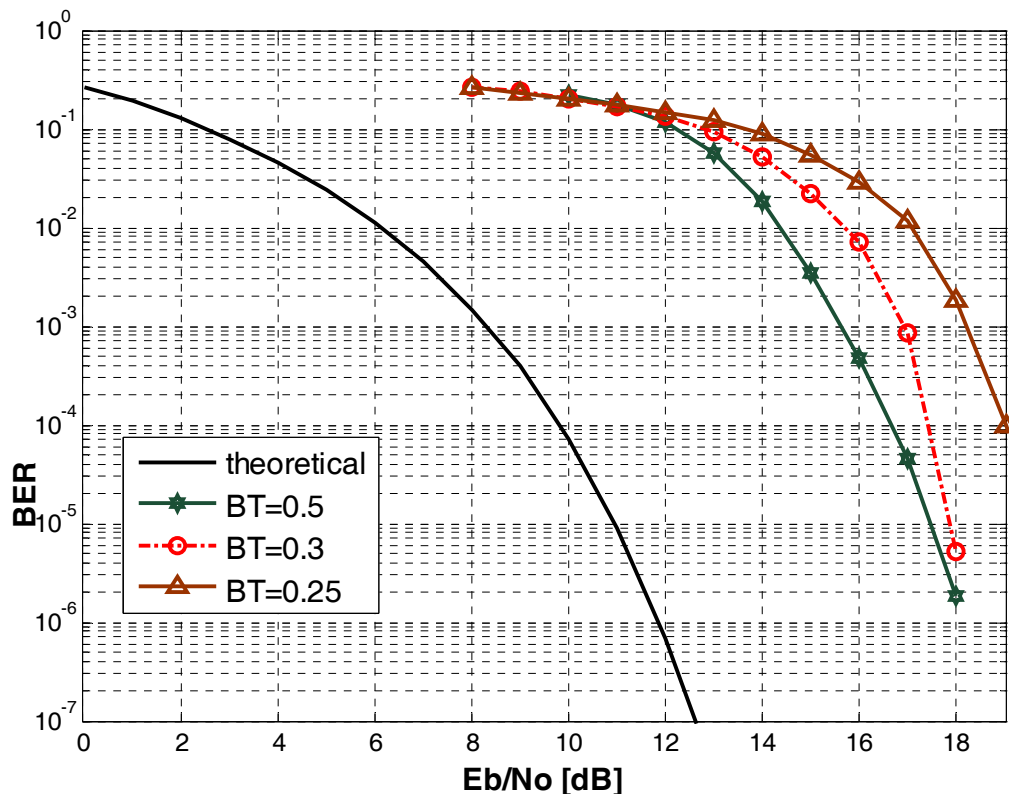


Figura 4.13. Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem GMSK pentru trei produse durată \times bandă, $BT=0.3$, 0.25 și 0.5 și cu rata de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4$

În figura 4.13 se analizează performanțele BER în cazul detecției semnalului GMSK prin EKF pentru o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4$ și pentru trei produse durată \times bandă, $BT=0.25$, 0.3 și 0.5 . Algoritmul EKF utilizat nu este un estimator optimal, mai ales dacă procesul nu este modelat corect și filtrul devine ușor divergent datorită operației de liniarizare. Acest comportament apare și în cazul prezentat din figură mai ales dacă raportul E_b/N_0 este mai mic decât 7dB , indiferent de valoarea produsului durată \times bandă. O concluzie pe care o putem trage este aceea că, în urma simulărilor

pe care s-au efectuat în canalul AWGN cu o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4$, demodularea semnalelor GMSK cu EKF nu este adecvată la rapoarte E_b/N_0 mai mici decât 7 dB.

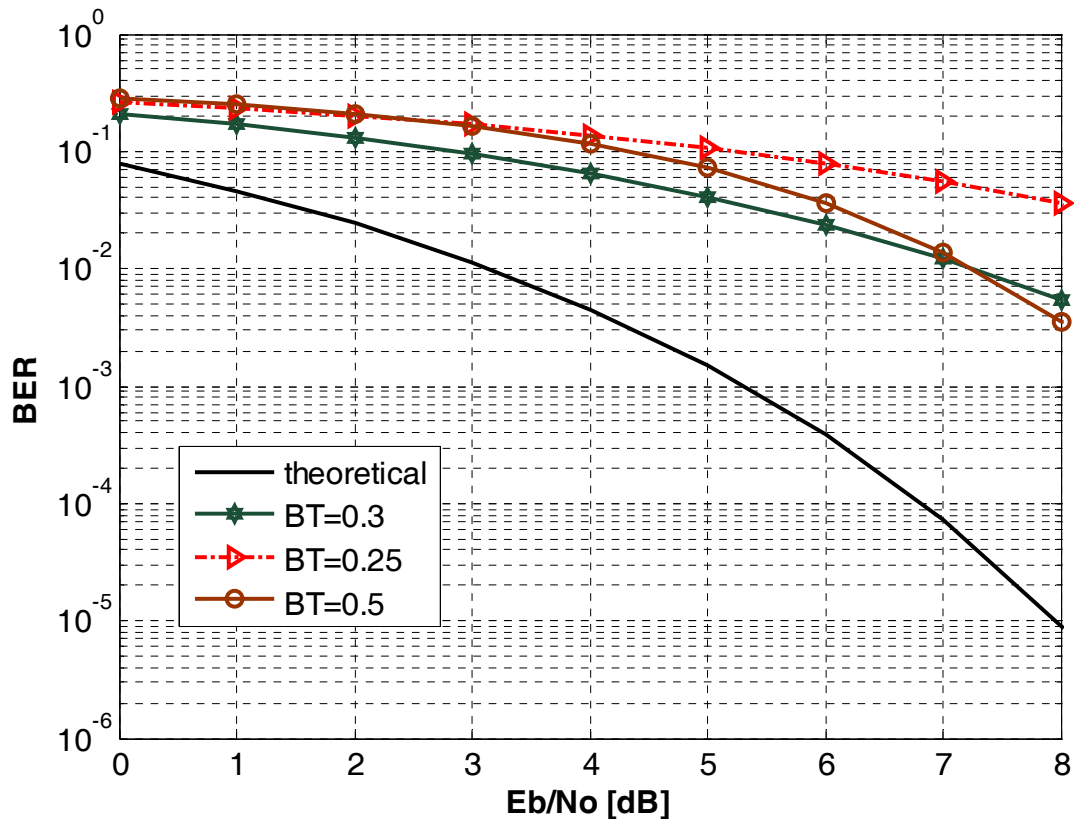


Figura 4.14. Performanțele BER obținute prin demodularea unui sistem GMSK pentru trei produse durată \times bandă, $BT=0.3$, 0.25 și 0.5

În figura 4.14 am arătat rezultatele simulărilor BER obținute prin demodularea unui sistem GMSK pentru trei produse durată \times bandă. În cadrul simulărilor se compară performanța filtrului Kalman extins cu curba teoretică. În acest caz am fixat o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=8$. Deși valoarea produsului $B \times T_b = 0.3$ este standardizat în comunicațiile mobile GSM, prin utilizarea filtrului Kalman extins în demodularea necoerentă a semnalelor GMSK produsul $B \times T_b = 0.5$ prezintă rezultate mai bune la rapoarte E_b/N_0 mai mari decât 7dB. În aceste condiții, utilizarea filtrului Kalman extins prezintă rezultate satisfăcătoare în demodularea semnalelor GMSK.

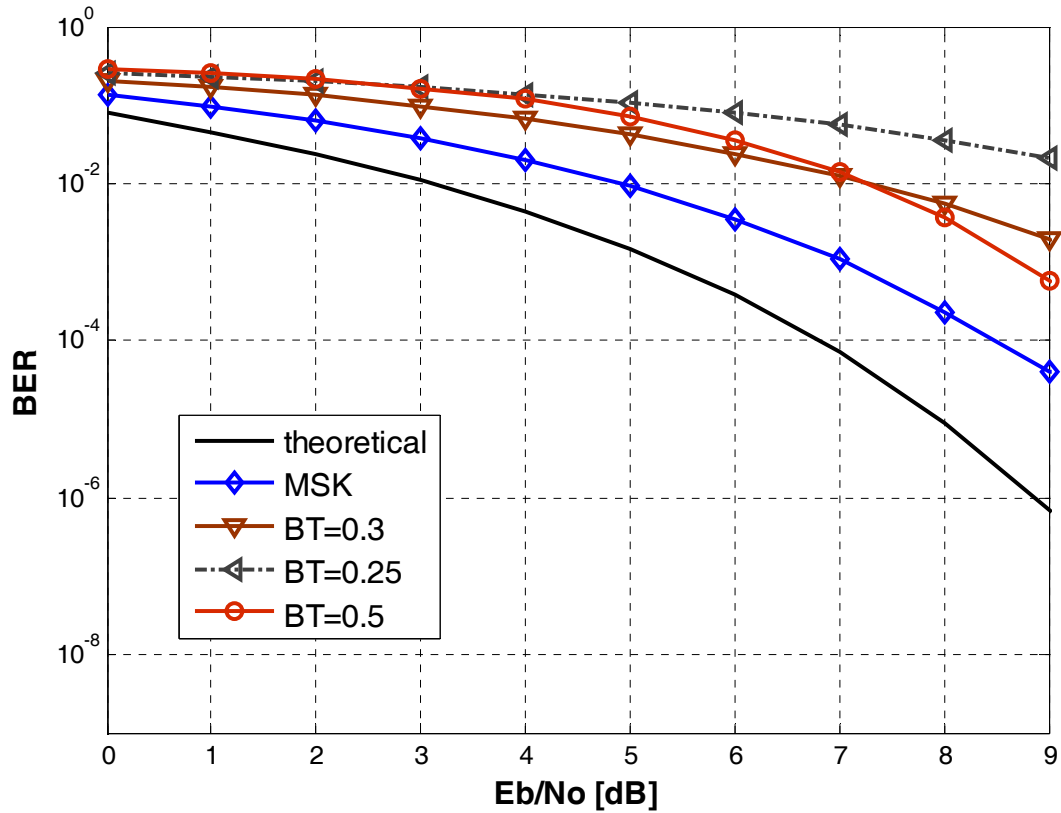


Figura 4.15. O comparație între performanțele BER pentru sistemelor de transmisie MSK și GMSK

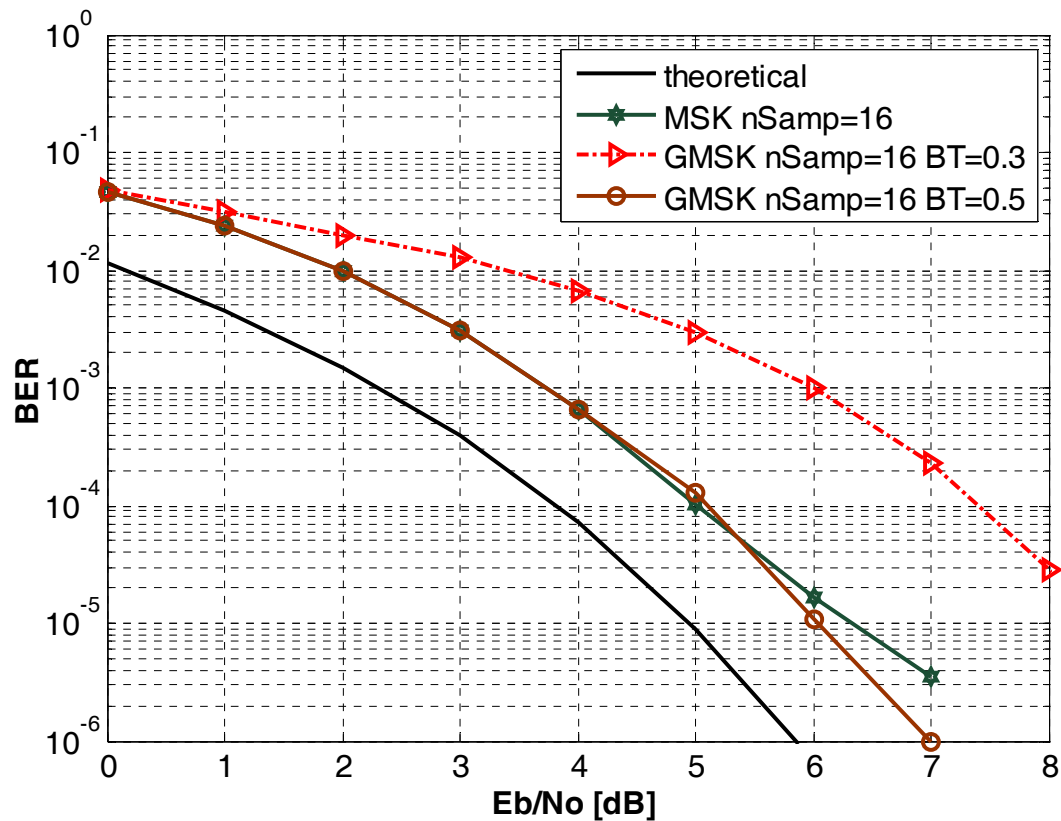


Figura 4.16. O comparație între performanțele BER pentru sistemelor de transmisie MSK și GMSK folosind o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=16$

În figura 4.15 sunt comparate performanțele BER dintre cele două tipuri de modulație MSK și GMSK. Am folosit o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=8$ în ambele cazuri. După cum se observă din figură în cazul semnalelor MSK am obținut rezultate mai bune decât în cazul GMSK. Se observă că curba obținută în cazul demodulației MSK prin EKF se apropie cu cea ideală.

În figura 4.16 sunt comparate performanțele BER dintre cele două tipuri de semnale MSK și GMSK folosind o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=16$. Se observă că la o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=16$, curbele obținute pentru MSK și GMSK cu valoarea $BT=0.5$ au performanțe similare pentru raportul E_b/N_0 mai mic decât 4dB. La valori mai mari decât 6dB ale raportului E_b/N_0 modulația GMSK cu $BT=0.5$ prezintă performanțe mai bune decât modulația MSK.

4.5 Concluzii

Detecția coerentă sau demodulația semnalelor digitale necesită un receptor capabil să determine sau să estimeze, cu erori acceptabile, atât frecvența cât și faza purtătoarei semnalului. Pentru detecția necoerentă nu este necesară recuperarea purtătoarei și astfel, în locul unui subsistem de recuperare a purtătoarei se folosește de obicei un element de întârziere cu un simbol pentru compararea a două simboluri consecutive. Similar cu alte scheme de modulație cu anvelopă constantă sau variabilă, detecția coerentă și cea a necoerentă se utilizează cu succes atât în cazul semnalelor MSK cât și la GMSK. Cu toate că, în general detecția coerentă are performanțe mai bune decât detecția necoerentă pe canale AWGN, subsistemele de sincronizare a purtătoarei necesare pentru detecția coerentă sunt mai complexe. Mai mult, în prezența fading-ului sau al altor tipuri de interferență de canal, schemele tradiționale de detecție coerentă duc la performanțe scăzute. Pentru aplicații în care canalul este variabil în timp, tehnicile tradiționale de detecție coerente necesită timpi mari de achiziție.

În paragraful 4.3 am descris un model în spațiul stărilor în scopul demodulării semnalelor CPM prin utilizarea filtrului Kalman extins. Am studiat două tipuri de semnale din această clasă: MSK și GMSK. Am comparat performanțele lor BER cu curba teoretică. Rezultatele pe care le-am obținut în urma simulărilor, au condus faptul că în condiții, în care cazurile de divergență sunt eliminate, EKF furnizează rezultate satisfăcătoare și chiar bune în demodularea necoerentă.

CAPITOLUL 5

Contribuții și concluzii

În acest capitol sunt prezentate contribuțiile originale cuprinse în lucrarea de față. Scopul urmărit în teză este utilizarea filtrelor Kalman în estimarea parametrilor semnalelor cu fază polinomială afectată de zgomot gaussian și în demodularea necoerentă a semnalelor cu modulație de fază continuă.

În capitolul 2, am făcut o prezentare succintă a algoritmului Kalman standard și utilizarea sa în estimarea parametrilor semnalelor chirp. În cadrul acestui capitol, mai precis în paragraful 2.4, am propus un model liniar în spațiul stărilor pentru semnalele chirp cu amplitudine variabilă.

În paragraful 2.4.2 am analizat, prin simulare, convergența parametrilor semnalului chirp înecat în zgomot gaussian aditiv pentru diferite domenii de variație ale frecvenței instantanee și pentru diverse valori ale raportului semnal pe zgomot. În urma simulărilor efectuate am observat că filtrul Kalman standard converge foarte rapid spre valorile căutate. Aceste rezultate confirmate de un număr important de simulări arată că filtrul Kalman standard utilizat în aproximarea lui Tretter este performant în estimarea parametrilor unui semnal chirp înecat în zgomot alb, gaussian, atâta timp cât raportul semnal pe zgomot depășește 13dB.

În capitolul 3, am considerat estimarea parametrilor semnalelor chirp folosind algoritmul Kalman extins. În acest scop am propus un model neliniar în spațiul stărilor pentru semnalele cu fază polinomială. În urma simulărilor efectuate am observat cazuri de divergență datorită liniarizării, la rapoarte semnal pe zgomot mai mici decât 10dB. Am ajuns la concluzia că este mai bine să supraestimez valoarea dispersiei zgomotului ca să compensez termenii neglijați la liniarizarea ecuației de măsurare. Consecințele unei asemenea creșteri a dispersiei au fost pozitive, rata de divergență a scăzut în mod semnificativ. Am definit un factor de robustețe din ecuația (3.51) și am denumit algoritmul EKF respectiv „algoritm EKF robust”.

În paragraful 3.2.7 am simulat estimarea parametrilor semnalului SFP înecat într-un zgomot gaussian, folosind algoritmul EKF robust. Am observat că dacă raportul semnal pe zgomot este mai mic de 13dB, în estimarea parametrilor fazei algoritmul EKF furnizează rezultatele mult mai bune decât rezultatele oferite de metoda Kalman-Treter. Din analiza rezultatelor obținute a rezultat următoarea concluzie: algoritmul EKF robust implementat pe acest model extinde gama performanțelor algoritmilor Kalman în estimarea fazei polinomiale de la un raport semnal pe zgomot de cel puțin 13dB la cel puțin 5dB.

În capitolul 4 am studiat principalele metode de demodulare (coerentă și necoerentă) a semnalelor cu modulație de fază continuă, transmise prin canalul AWGN. Am propus utilizarea filtrului Kalman extins la demodularea necoerentă a semnalelor MSK și GMSK.

În paragraful 4.4 am propus un model în spațiul stărilor privind utilizarea filtrului Kalman extins în scopul demodulării necoerentă a semnalelor cu modulație de fază continuă cu amplitudine constantă, perturbate de zgomot gaussian aditiv.

În paragraful 4.4.2 am făcut o analiză a performanțelor BER ale semnalelor MSK și GMSK. Am observat că în cazul modulației MSK am obținut rezultate mai bune decât în cazul modulației GMSK. Utilizarea filtrului gaussian limitează variațiile frecvenței instantanee a semnalului modulat în frecvență. Prin aceasta se reduce banda semnalului modulat cu sacrificiul introducerii de interferențe intersimbol. Prin filtrare impulsurile de date devin mai lungi și pătrund în intervalele de simbol alăturate. Cum

algoritmul EKF utilizat nu este un estimator optimal, filtrul devine ușor divergent datorită operației de liniarizare. Acest comportament l-am observat în cazul demodulării semnalelor MSK și GMSK folosind o rată de eșantionare $n_{\text{Samp}}=4$ și un raport E_b/N_0 mai mic de 7dB, indiferent de valoarea produsului durată \times bandă.

ANEXA 1

Zgomotul $v[n]$ poate fi pus sub forma:

$$v[n] = (w_R[n] + jw_I[n])(\cos \Phi[n] - j \sin \Phi[n]) \quad (\text{A1.1})$$

din care rezultă că avem:

$$v_R[n] = w_R[n] \cos \Phi[n] + w_I[n] \sin \Phi[n] \quad (\text{A1.2})$$

$$v_I[n] = -w_R[n] \sin \Phi[n] + w_I[n] \cos \Phi[n] \quad (\text{A1.3})$$

Corelația lui $v_R[n]$ este:

$$\begin{aligned} E\{v_R[n]v_R[n+k]\} &= E\{w_R[n]w_R[n+k]\} \cos \Phi[n] \cos \Phi[n+k] + \\ &+ E\{w_I[n]w_I[n+k]\} \sin \Phi[n] \sin \Phi[n+k] \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

Produsele mixte au media statistică nulă, așa cum se vede din ecuația (2.24). Dar, ținând seama de relațiile (2.22) și (2.23) și de dezvoltarea expresiei $\cos[\Phi[n] - \Phi[n+k]]$, găsim că:

$$E\{v_R[n]v_R[n+k]\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta[k] \cos[\Phi[n] - \Phi[n+k]] \quad (\text{A1.5})$$

Pentru $k=0$ $\delta[0]=1$ și $\cos[\Phi[n] - \Phi[n]] = 1$ așa că:

$$E\{v_R^2[n]\} = \frac{\sigma^2}{2} \quad (\text{A1.6})$$

Pentru $k \neq 0$, $\delta[k]=0$ și deci corelația este nulă. Rezultă că putem renunța la factorul în cosinus:

$$E\{v_R[n]v_R[n+k]\} = \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] \quad (\text{A1.7})$$

În mod asemănător avem și:

$$\begin{aligned} E\{v_I[n]v_I[n+k]\} &= E\{w_R[n]w_R[n+k]\}\sin\Phi[n]\sin\Phi[n+k] + \\ &\quad + E\{w_I[n]w_I[n+k]\}\cos\Phi[n]\cos\Phi[n+k] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k]\cos[\Phi[n]-\Phi[n+k]] \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

din care rezultă că:

$$E\{v_I[n]v_I[n+k]\} = \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] \quad (\text{A1.9})$$

Putem scrie pentru intercorelație:

$$\begin{aligned} E\{v_R[n]v_I[n+k]\} &= E\{w_R[n]w_R[n+k]\}\cos\Phi[n]\sin\Phi[n+k] + \\ &\quad + E\{w_I[n]w_I[n+k]\}\sin\Phi[n]\cos\Phi[n+k] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k]\sin[\Phi[n]-\Phi[n+k]] \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

Pentru $k = 0$ factorul sinus este nul, iar pentru $k \neq 0$ factorul $\delta[k]$ este nul. Rezultă că avem:

$$E\{v_R[n]v_I[n+k]\} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (\text{A1.11})$$

Relațiile (A1.7), (A1.9) și (A1.11) demonstrează că, dacă $w[n]$ este un zgomot circular, atunci și $v[n]$, ce rezultă din $w[n]$ prin modificarea deterministă a fazei, este tot un zgomot circular.

ANEXA 2

Matricea de covarianță a vectorului de zgomot $\begin{bmatrix} v_R[n] & \frac{v_I[n]}{A} \end{bmatrix}^T$ se calculează cu relația:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E \left\{ \begin{bmatrix} v_R[n] \\ \frac{v_I[n]}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R[n] & \frac{v_I[n]}{A} \end{bmatrix} \right\} = \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} v_R^2[n] & \frac{1}{A} v_R[n] v_I[n] \\ \frac{1}{A} v_R[n] v_I[n] & \frac{1}{A^2} v_I^2[n] \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E\{v_R^2[n]\} & \frac{1}{A} E\{v_R[n] v_I[n]\} \\ \frac{1}{A} E\{v_R[n] v_I[n]\} & \frac{1}{A^2} E\{v_I^2[n]\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Se ține seama de (A1.7), (A1.9) și (A1.11) și se obține:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2A^2} \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

Vom observa doar că matricea \mathbf{R} fiind inversabilă, există soluție a problemei în sensul erorii medii pătratice minime.

BIBLIOGRAFIE

[AND86] J. B. Andersonn, T. Aulin, C. E. Sundberg, *Digital Phase Modulation*, Plenum Press, New York, NY, 1986

[AND91] J. B. Anderson și C. E. W. Sundberg, „Advances in constant envelope coded modulation”, *IEEE Commun. Mag.*, pp. 36-45, Dec. 1991

[BBB01] B. Barkat and B. Boashash, „A high-resolution quadratic time-frequency distribution for multicomponent signals analysis”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49, No.10, pp.2232-2239, Oct. 2001.

[BBB99] B. Barkat and B. Boashash, „Design of higher order polynomial Wigner-Ville distributions”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47, No.9, pp.2608-2611, Sept. 1999.

[BIG02] Bianu M., Gordan C., Nafornta I., „A States Space Model of Nonstationary Signals with Phase Variation as a Polynomial”, *4th International Conference on Renewable Sources and Environmental Electro-Technologies*, Oradea, 6-9 iunie 2002.

[BOA90] G. Jones and B. Boashash, „On the concepts of instantaneous frequency, time-delay, instantaneous bandwidth and their relation to time-frequency distributions” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing 90*, pp. 2467-2470, 1990.

[BOA91] B. Boashash, P. O’Shea and B. Ristic, „Statistical/computational comparison of some estimators for instantaneous frequency”, in *Proc. Int. Conf. Acoustic, Speech, Signal Processing*, Toronto, Canada, 1991, vol. 5, pp. 3193-3196

[BOA92] Boashash B., “Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 1: Fundamentals”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 80, No. 4, April 1992, pp. 520-538

- [BOA94] B. Boashash and P. O'Shea, „Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(1) pp. 216-220, Jan., 1994.
- [BOB92] Boashash B., „Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 2: Algorithms and Applications”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 80, No. 4, April 1992, pp. 540-568
- [BOP95] Boashash B., Powers E., Zoubir A. M., „Higher Order Statistical Signal Processing”, pp. 27-111, Longman&Woley, 1995
- [CAG09] Andrei Câmpeanu, **Gál János**, *Metode adaptive de prelucrare a semnalelor*, Editura Politehnică Timișoara, 2009, ISBN: 978-973-625-605-9
- [CAR37] J. Carson and T. Fry, „Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation”, *Bell System Tech. J.*, vol. 16, pp. 513–540, 1937.
- [CAR86] A. Carlson, *Communications Systems*, New York, McGraw-Hill, 1986
- [CHW89] Choi and Williams, „Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(6), pp.862-871, 1989
- [CLA80] T. A. C. M. Classen and W. F. G. Mecklenbrauker, „The Wigner Distribution – Part II”, *Philips Journal of Research*, vol. 35, pp. 276-300, 1980
- [COH99] I. Cohen, S. Raz and D. Malah, „Adaptive suppression of Wigner interference-terms using shift-invariant wavelet packet decompositions”, *Signal Processing*, 73(3) pp.203-223, 1999
- [DCC06] D-C. Chang, W-T. Lin, Y-F. Chen, „Kalman Carrier Recovery Algorithm for High-Order QAM”, *IEICE Trans. Commun.*, vol. E89-B, no.11, November 2006
- [DJE05] M. Djeddi, and M. Benidir, „A two Parallel Extended Kalman Filtering Algorithm for the Estimation of Chirp Signals in Non-Gaussian Noise”, 2005, September, *EUSIPCO-2005*, Antalya-Turkey.
- [DJE06] M. Djeddi, and M. Benidir, „A Robust Estimator for Polynomial Phase Signals in Non Gaussian Noise using Parallel Unscented Kalman Filter”, 2006, September, *EUSIPCO-2006*, Florence-Italy.
- [FEH87] K Feher, *Advanced Digital Communications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987
- [FRI98] S. Golde and B. Friedlander, „A modification of the discrete polynomial transform”, *Trans. on Signal Processing*, 46(5) pp.1452-1922, May 1998
- [GAB46] D. Gabor, „Theory of communication”, *Proc. IEE*, vol. 93 (III), pp. 429-457, 1946

- [GAC08] **Gal J.**, Campeanu A., Nafornta I., „Identification of Polynomial Phase Signals by Extended Kalman Filtering”, *Proceedings EUSIPCO 2008, 16th European Signal Processing Conference organised by EURASIP*, August 25-29, Lausanne, Switzerland, pp. 405-409
- [GAL02] **Gal J.**, Sălăgean M., Bianu M., Naforniță I., „The Instantaneous Frequency Determination for Signals with Polynomial Phase using Kalman Filtering”, *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunication, Fifth edition*, September 19-20, 2002, vol. I, pp. 186-189
- [GAL07] **J. Gal**, A. Câmpeanu, and I. Naforniță, „Estimation of Chirp Signals in Gaussian Noise by Kalman Filtering”, *Proceedings of International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, ISSCS 2007 July 2007, pp. 299-302, Iași Romania.
- [GAN10] **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforniță, „Kalman Noncoherent Detection of CPFSK Signal”, *The 8th International Conference on Communication “COMM 2010”*, 10-12 June 2010, Bucuresti, vol. I pp. 65-68
- [GCN06] **J. Gal**, A. Campeanu, I. Nafornta, „Estimation of Noisy Sinusoids Instantaneous Frequency by Kalman Filtering”, *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications*, Seventh edition, September 21-22, 2006, vol. II, pag. 69-72
- [GCN09] **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforniță, „Estimation of Chirp Signals by Extended Kalman Filtering”, *Lucrările Sesiunii de comunicări științifice “Doctor Etc 2009”* Timișoara 24-25 septembrie 2009, pp. 35-39.
- [GCN10] **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforniță, „Noncoherent Demodulation of Continuous Phase Modulation Signals using Extended Kalman Filtering”, *OPTIM 2010 – 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*, Brasov, 20-22 mai 2010, pag. IACM.4.1.09
- [GOR99] Gordan C., „Studiul reprezentărilor timp-frecvență și aplicarea lor la estimarea frecvenței instantanee” – *Teză de doctorat*, 1999
- [GRI75] L. Griffiths, „Rapid measurement of digital instantaneous frequency”, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing* pp. 202-221, 1975
- [GUO94] Z. Guo, L-G. Durand, and H. C. Lee, „The time-frequency distributions of nonstationary signals based on a Bessel kernel”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(7), pp. 1700-1707, 1994
- [HAY91] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991, 2nd edition
- [HAY96] Simon Haykin, „*Adaptive Filter Theory*”, Ed. Prentice – Hall, Inc., 1996
- [HUA] D. Huang and E. J. Hannan, „Estimation of Time-Varying Frequency”, submitted to *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*

- [HVT68] H. Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory Part I*, New York: John Wiley, 1968
- [JEN97] Jen-Wei Liang Ng, B.C. Chen, J.-T. Paulraj, A. „GMSK linearization and structured channel estimate for GSM signals”, *MILCOM 97 Proceedings*, vol. 2, pp. 817-821, November, 1997
- [KAA98] W. El Kaakour, „Modélisation et identification des signaux à phase polynomiale“. *PhD thesis*, Université de Nantes - École Centrale de Nantes, Juin 1998.
- [KAB61] Kalman R. E., and Bucy, R. S., „New results in linear filtering and prediction theory” *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng* 83 (1961), pp.95-108., 1961
- [KAL60] R. E. Kalman „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems” *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82 (Series D): pp.35-45., 1960
- [KAY88] S. Kay, *Modern Spectral Estimation*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988
- [LAS97] J. D. Laster, *Robust GMSK Demodulation Using Demodulator Diversity and BER Estimation*, PhD Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va, March 1997
- [MAR87] S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987
- [MOA01] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Ed. John Wiley & Sons, Inc. 2001
- [MTK00] Moon, T.K., Stirling W.C., „*Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*”, Ed. Prentice-Hall, 2000.
- [MUH81] Kazuaki Murota și Kenkichi Hirade, „GMSK modulation for digital mobile radio telephony”, *IEEE Transactions On Communications*, COM-29(7), July 1981
- [OPP75] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975
- [OUB97] A. Ouldali and M. Benidir, „Distinction between polynomial phase signals with constant amplitude and random amplitude”, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 5 pp.3653-3656, April 1997
- [PAR90] P. J. Parker, and B. D.O. Anderson, „Frequency tracking of nonsinusoidal periodic signals in noise”, *Signal Processing*, Vol. 20, 1990, pp. 127–152.
- [PIB02] P. Barthelemy, „*A Model-Based Receiver for CPM Signals in a Cochannel Interference Limited Environment*”, PhD Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, May 2002

- [PKO99] P. J. Kootsookos, „A Review of the Frequency Estimation and Tracking Problems”, CRASys Technical Report, February 21, 1999
- [PRO01] J. G. Proakis, *Digital Communications Fourth Edition*, McGraw-Hill, New York, NY, 2001
- [RAP02], T. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, New Jersey Prentice Hall, 2002
- [RAP91] T. S. Rappaport, „The wireless revolution”, *IEEE Commun. Mag.*, pp. 52-71, Nov. 1991
- [RIF74] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, „Single tone parameter estimation from discrete-time observations”, *IEEE Trans. Inform. Theory* vol. 20, pp. 591-598, 1974
- [SAY94] Sayed, A. H, and T. Kailath, „A state-space approach to adaptive RLS filtering”, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 11, pp. 18-60, 1994.
- [SEO85] J. S. Seo și K. Feher, „SQAM: a new superposed QAM modem technique”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, pp. 296-300, Mar. 1985
- [SIC84] Marvin K. Simon și Charles C. Wang, „Differential detection of gaussian MSK in a mobile radio environment”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, VT-33(4), November 1984
- [SIM83] M. K. Simon, C. C. Wang, „Differential Versus Limiter Discriminator Detection of Narrowband FM”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 31, no. 11, November 1983
- [SKL88] B. Sklar, *Digital Communications Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1988
- [SNY] D. L. Snyder, *A State Space Approach to Analog Communications Systems*, Cambridge, MA: MIT Press
- [SOK00] Sokol Saliu, „Definition of instantaneous frequency on real signals”, *In Eusipco*, 2000
- [SUN86] C. E. W. Sundberg, „Continuous phase modulation”, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 24, pp. 25-38, Apr. 1986
- [TRE85] S. A. Tretter, „Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid by Linear Regression”, *IEEE Trans. On Information Theory*, vol. II-31, No. 6, Nov. 1985, pp. 832-835.
- [VAN46] B. Van der Pol. „The fundamental principles of frequency modulation”, *Proc. IEE*, vol. 93 (III), pp. 153-158, 1946
- [VID95] Vincent I., Doncarli C., Le Carpentier E., „Classification des signaux non-stationnaires: comparaison d'une approche parametrique et d'une approche non-

parametrique”, *Quinzieme colloque Gretsi-Juan-les-Paris*, 18-21 Septembre 1995, pp. 161-164

[VIL48] J. Ville, „Théorie et Application de la Notion de Signal Analytic”, *Cables at Transmissions*, vol. 2A, pp.61-74, 1948

[WID60] B. Widrow and M. Hoff „Adaptive switching circuits” in *IRE 1960, Wescon. Conv. Rec., Part 4*, 1960, pp. 96-104

[WAN97] Y. Wang and G. Zhou. On the use of high order ambiguity function for multicomponent polynomial phase signal. *Proc. ICASSP*, 5: 3629-3632, April 1997

[WID85] B. Widrow and S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985

[WIG32] E. Wigner, „On the quantum correction for the thermodynamics equilibrium”, *Physics review*, 40, pp.749-759, 1932

[WTL07] W-T. Lin, D-C. Chang, „Adaptive Carrier Synchronization Using Decision-Aided Kalman Filtering Algorithms”, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 53, November 2007

Lista lucrărilor publicate

1. **Janos GAL**, Marius SĂLĂGEAN, Mirela BIANU, Ioan NAFORNIȚĂ, „The Instantaneous Frequency Determination for Signals with Polynomial Phase using Kalman Filtering”, *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications*, Fifth edition, September 19-20, 2002, vol. I, pag. 186-189
2. Cristian CHIONCEL, **Janos GAL**, „Parameter estimation of the chirp signal”, *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications*, Sixth edition, October 22-23, 2004, vol. II, pag. 87-90
3. **J. Gal**, A. Campeanu, I. Nafornta, „Estimation of Noisy Sinusoids Instantaneous Frequency by Kalman Filtering”, *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications*, Seventh edition, September 21-22, 2006, vol. II, pag. 69-72
4. **Gal, J.**, Campeanu, A., Naforntă, I., „Estimation of Chirp Signals in Gaussian Noise by Kalman Filtering”, *Proceedings of International Symposium on Signals, Circuits and Systems, ISSCS 2007 July 2007*, Iași Romania pp. 299-302.
5. **Gal, J.**, Campeanu, A., Naforntă, I., „Identification of Polynomial Phase Signals by Kalman Filtering”, *Lucrările Sesiunii de comunicări științifice “Doctor Etc 2007”* Tmș 20.09.2007, pp. 58-61.
6. **Gal J.**, Câmpeanu A., Naforntă I., „Identification of Polynomial Phase Signals by Extended Kalman Filtering”, *Proceedings of EUSIPCO 2008, 16th European Signal Processing Conference organised by EURASIP*, August 25-29, Lausanne, Switzerland, pp. 405-409
7. Andrei Câmpeanu, **Gál János**, Metode adaptive de prelucrare a semnalelor, Editura Politehnică Timișoara, 2009, ISBN: 978-973-625-605-9
8. **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforntă, „Estimation of Chirp Signals by Extended Kalman Filtering”, *Lucrările Sesiunii de comunicări științifice “Doctor Etc 2009”* Timișoara 24-25 septembrie 2009, pp. 35-39.
9. **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforntă, „Noncoherent Demodulation of Continuous Phase Modulation Signals using Extended Kalman Filtering”, *OPTIM 2010 – 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*, Brasov, 20-22 mai 2010, pag. IACM.4.1.09
10. **János Gál**, Andrei Câmpeanu, Ioan Naforntă, „Kalman Noncoherent Detection of CPFSK Signal”, *The 8th International Conference on Communication “COMM 2010”*, 10-12 June 2010, Bucuresti, vol. I pp. 65-68