

CONTRIBUȚII LA OPTIMIZAREA TRANSMISIEI PE CANALE RADIO, FOLOSIND FUNCȚII WAVELET

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor inginer
la
Universitatea "Politehnica" din Timișoara
în domeniul Inginerie Electronică și Telecomunicații
de către:

ing. Marius Oltean

Conducător științific: prof.univ.dr.ing. Miranda Naforniță
Referenți științifici: prof.univ.dr. Silviu Ciochină
prof.univ.dr.ing. Corneliu Rusu
prof.univ.dr.ing. Alexandru Isar

Ziua susținerii tezei: 05.02.2010

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Automatică | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie | 8. Inginerie Industrială |
| 3. Energetică | 9. Inginerie Mecanică |
| 4. Ingineria Chimică | 10. Știința Calculatoarelor |
| 5. Inginerie Civilă | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 6. Inginerie Electrică | |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2006

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Departamentului de Comunicații al Facultății de Electronică și Telecomunicații a Universității „Politehnica” din Timișoara. Munca la această teză a fost sprijinită financiar de către CNCSIS, prin intermediul grantului de cercetare-dezvoltare „*Tehnici de optimizare a transmisiei pe canale radio*”, cod TD-403, derulat în perioada 2007-2009 în cadrul programului PNII – Resurse Umane.

Finalizarea tezei se datorează într-o bună măsură și persoanelor menționate mai jos, cărora le adresez gratitudinea mea.

Primul meu cuvânt de mulțumire se îndreaptă înspre conducătorul meu de doctorat, d-na. prof. dr. ing. Miranda Naforniță. Datorită sfaturilor dânzei, m-am îndreptat înspre acest domeniu de cercetare, iar finalizarea acestei lucrări nu ar fi fost posibilă fără suportul științific și moral de care m-am bucurat în mod constant din partea dânzei pe întreaga durată a tezei.

Țin de asemenea să le mulțumesc referenților științifici ai tezei, d-l prof. dr. ing. Silviu Ciochină, și d-l profesor dr. ing. Corneliu Rusu, pentru timpul pe care l-au dedicat analizei acestei lucrări, și pentru efortul pe care l-au făcut pentru a lua parte la susținerea publică a tezei.

În particular, doresc să îmi exprim gratitudinea față de d-l prof. dr. ing. Alexandru Isar, pentru interesul pe care l-a arătat în mod constant față de munca mea, de-a lungul acestor ani. Numeroaselor discuții pe care le-am purtat cu domnia sa le datorez o parte însemnată din acumulările științifice care mi-au permis finalizarea acestei teze.

Îi mulțumesc domnului decan al Facultății de Electronică și Telecomunicații, d-l prof. dr. ing. Marius Oteșteanu, pentru acceptul de a prezida comisia de doctorat și pentru susținerea materială constantă de care m-am bucurat din partea decanatului facultății noastre, care mi-a permis participarea la mai multe conferințe din țară și străinătate.

Un sincer cuvânt de mulțumire și recunoștință datorez d-lui prof. dr. ing. Ioan Naforniță. Dânsul este cel care, împreună cu d-l prof. Isar, m-au cooptat în colectivul Departamentului de Comunicații cu (deja) mulți ani în urmă, într-un moment mai delicat al vieții mele. Mai mult decât atât, a arătat în mod constant față de persoana mea o înțelegere și o bunăvoință deosebite, pe care nu am să le uit.

Marele nostru poet, Mihai Eminescu a spus „Ceea ce se simte și respectă adânc, se pronunță arareori!”. Acum este momentul, și acesta este mijlocul de a mărturisi simțământul meu de recunoștință față de familia mea, cei dragi, aflați alături de mine la bine și la greu. Ei dau sens existenței mele, și lor vreau să le adresez acest palid cuvânt de mulțumire.

Timișoara, februarie 2010

Marius Oltean

În locul unei dedicații...

*Aiurit,
Și aburit
Cum eram
Tot mă iubeam.*

*În strachină, nătâng
Împlântam piciorul stâng
Și nu călcam deștept
Nici cu piciorul drept.*

*Dar printre nori
Alergam ușor
Și dacă mă-ncurcam de stele
Le culegeam ca niște mere.*

*Aiurit
Și aburit
Cum eram
Tot mă iubeam.*

din poezia **Suvenir** de Eugen Ionescu

Oltean, Gheorghe Marius

Contribuții la optimizarea transmisiei pe canale radio, folosind funcții wavelet

Teze de doctorat ale UPT, Seria 7, Nr. 22, Editura Politehnica,
2010, 142 pagini, 76 figuri, 6 tabele.

ISSN: 1842-7014

ISBN : 978-606-554-050-7

Cuvinte cheie: undișoare, canale radio, wavelet OFDM

Rezumat:

În această teză se studiază câteva aplicații ale funcțiilor wavelet (undișoare) în transmisia de date pe canale radio. Atenția este focalizată asupra folosirii undișoarelor într-o tehnică de transmisie multi-purtătoare, denumită wavelet OFDM. Se arată că metoda bazată pe funcții wavelet are rezultate mai bune decât OFDM-ul tradițional în condițiile unei transmisii printr-un canal cu fading plat, variabil în timp. Localizarea temporală a undișoarelor "purtătoare" este extrem de importantă. Dacă se consideră selectivitatea în frecvență a canalului, se demonstrează că performanțele WOFDM depind atât de undișoara mamă, cât și de numărul de scări (iterații) ale transmisiei WOFDM. De data aceasta, undișoarele cu o localizare în frecvență mai bună permit obținerea unor performanțe superioare.

CUPRINS

Acronime.....	1
Lista tabelelor.....	2
Lista figurilor.....	3
Cuvânt înainte	6
Sinteza lucrării.....	7
Cap.1: Modulația multi-purtătoare cu purtătoare sinusoidale	9
1.1 Conceptul de modulație multi-purtătoare	9
1.2 Multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență (OFDM)	11
1.2.1 Schema bloc a unui sistem OFDM	12
1.2.2 Necesitatea transmisiei paralele multi-purtătoare	13
1.2.3 Descrierea modulatorului OFDM	15
1.2.4 Legătura dintre tehnica OFDM și Transformarea Fourier Discretă	16
1.2.5 Utilizarea prefixului circular în OFDM	21
1.2.5.1 Egalizarea canalului cu ajutorul prefixului circular	24
Cap. 2: Utilizarea undișoarelor în transmisiile de date	27
2.1 Introducere	27
2.2 O privire generală asupra funcțiilor wavelet	27
2.3 Transformarea wavelet discretă	31
2.4 Criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol și funcțiile wavelet.....	34
2.4.1 Baze ortonormale pentru transmisii fără interferență inter-simbol ...	37
2.4.2 Formarea impulsurilor cu ajutorul funcțiilor wavelet	38
2.5 Utilizarea undișoarelor în transmisiile multi-purtătoare	39
Cap. 3: O comparație experimentală între OFDM și WOFDM	45
3.1 Dezavantajele principale ale tehnicii OFDM	45
3.2 Avantajele utilizării undișoarelor în transmisiile multi-purtătoare	49
3.2.1 Analiza comparativă a performanțelor BER în cazul OFDM și WOFDM	56
3.2.1.1 Modelarea canalelor radio cu fading plat	57
3.2.1.2 Performanțele transmisiilor multi-purtătoare în canale cu fading plat de tip Rayleigh.....	60
3.3 Localizarea timp-frecvență a bazelor folosite în modulațiile ortogonale	65
3.3.1 Modelarea matematică a modulațiilor ortogonale	67
3.3.2 Localizare timp-frecvență	68
3.3.3 Simularea numerică a calculului localizării timp-frecvență pentru undișoarele din familia Daubechies.....	71
3.4 Transmisii multi-purtătoare asociate cu turbo-codurile	74
Cap. 4: Studiul performanțelor WOFDM în canale cu fading plat	78
4.1 Alegerea undișoarelor folosite drept purtătoare în WOFDM	78
4.1.1 Explicarea rezultatului superior al undișoarei Haar	81
4.1.2 Influența numărului de momente nule	84
4.2 Influența numărului de iterații ale IDWT asupra performanțelor transmisiei	86
Cap. 5: Studiul performanțelor WOFDM în canale cu fading selectiv în frecvență	93
5.1 Considerații privind modelarea canalelor variabile în timp și selective în frecvență	93
5.2 Performanța BER globală a transmisiei WOFDM prin canale selective în frecvență	98

	VI
5.3 Repartiția erorilor pe scările de transmisie din WOFDM	100
5.3.1 Performanța BER a transmisiei WOFDM la diverse scări de transmisie	101
5.3.2 Alegerea undișoarei mamă folosită într-o transmisie WOFDM prin canale selective în frecvență.....	109
Cap. 6: Contribuții la optimizarea transmisiei pe canale radio folosind undișoare.....	114
6.1 Contribuții originale din teză.....	114
6.2 Perspectivele utilizării WOFDM.....	116
Bibliografie	118
Anexa1	123
Anexa2	125

Acronime

A	
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Loop
AWGN	Additive White Gaussian Noise
B	
BER	Bit Error Rate
BPSK	Binary Phase Shift Keying
C	
CPB	Creștere Procentuală a BER
D	
DAVB	Digital Audio & Video Broadcasting
DFT	Discrete Fourier Transform
DMT	Discrete MultiTone
DQPSK	Differential Quadrature Phase Shift Keying
DWT	Discrete Wavelet Transform
F	
FDMA	Frequency Division Multiple Access
FER	Frame Error Rate
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite Impulse Response
FTJ	Filtru Trece-Jos
FTS	Filtru Trece-Sus
I	
ICI	Inter-Channel Interference
IDWT	Inverse Discrete Wavelet Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
IIS	Interferență Inter-Simbol
L	
LTE	Long Term Evolution
M	
MIA	Modulator de Impulsuri în Amplitudine
O	
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
P	
PAPR	Peak-to-Average Power Ratio
PLC	Power Line Communications
Q	
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
R	
RMS	Root Mean Square
RSZ	Raport Semnal/Zgomot
T	
TFD	Transformarea Fourier Discretă
W	
WiFi	Wireless Fidelity
WiMAX	Worldwide Interoperability for Microwave Access
WOFDM	Wavelet-based OFDM

Lista tabelelor

3.1	Parametrii de simulare a modulațiilor ortogonale în canale cu fading plat.	61
3.2	Localizarea timp frecvență a undișoarelor Haar și sinus cardinal.	70
3.3	Parametrii folosiți pentru simularea transmisiei WOFDM codate.	75
4.1	Parametrii de simulare a transmisiei WOFDM în canale cu fading plat.	79
4.2	Selecție a performanței BER pentru $f_m=0.05$ și o singură iterație IDWT.	85
5.1	Valorile împrăștierii multicale în diverse cazuri de simulare.	95

Lista figurilor

1.1	Principiul accesului multiplu cu diviziune în frecvență.	9
1.2	Principiul transmisiei pe subcanale multiple.	10
1.3	Schema de principiu a receptorului Kineplex.	11
1.4	Schema bloc a unui sistem de transmisie bazat pe OFDM.	12
1.5	Principiul unei transmisii paralele multi-purtătoare.	13
1.6	Spectrul purtătoarelor folosite în OFDM.	17
1.7	Subpurtătoarele ortogonale din OFDM.	18
1.8	Simbolul OFDM (a), semnalul după multiplicatoare (b) și acela de la ieșirea integratoarelor (c).	19
1.9	Implementarea modulatorului OFDM prin intermediul IFFT.	20
1.10	Transmisia unor blocuri succesive (a) și interferența la receptor (b)	22
1.11	Interferență inter-bloc din cauza propagării multicanale(a), prefixul circular elimină această interferență (b).	23
2.1	Undeșoara mamă Symmlet la diverse scări și locații pe axa timpului.	28
2.2	Canalul de comunicație văzut ca un plan timp frecvență.	29
2.3	Obținerea undeșoarei mamă Haar din funcția de scară corespunzătoare.	30
2.4	Implementarea DWT folosind bancuri de filtre.	32
2.5	Implementarea IDWT folosind bancuri de filtre.	34
2.6	Schema bloc a unui lanț de transmisie în banda de bază.	35
2.7	Eșantionarea funcției de autocorelație a unei undeșoare mamă.	39
2.8	Un simbol WOFDM.	40
2.9	Demodularea simbolului WOFDM: ieșirea multiplicatorului (a) și a integratorului (b).	41
2.10	Undeșoarele de tip Haar folosite drept purtătoare în WOFDM.	42
2.11	Simbolul WOFDM obținut în urma modulației pe trei scări.	43
2.12	Implementarea WOFDM cu ajutorul IDWT.	44
2.13	Simularea transmisiei WOFDM.	44
3.1	Desincronizarea în timp și eroarea de detecție care apare din pricina acesteia.	46
3.2	Deplasarea de frecvență.	47
3.3	Ilustrarea parametrului PAPR pentru o modulație OFDM.	48
3.4	Diminuarea eficienței transmisiei din cauza prefixului circular.	49
3.5	Exemple de formă de undă ale purtătoarelor din WOFDM, comparativ cu OFDM.	52
3.6	Densități spectrale de putere (purtătoare sinusoidală și funcție de scară).	52
3.7	Analiză comparativă a Densităților Spectrale de Putere pentru tehnicile OFDM și WOFDM.	53
3.8	Comparație între duratele de simulare pentru transmisia OFDM, respectiv WOFDM.	55
3.9	Performanța BER a OFDM, respectiv WOFDM în canale AWGN.	56
3.10	Densitatea de probabilitate de tip Rayleigh.	58
3.11	Densitate spectrală de putere a eşantioanelor de fading (spectrul lui Jakes).	60

4 Lista figurilor

3.12	Comparație între OFDM și Haar - WOFDM cu 4 iterații.	62
3.13	Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading lent.	64
3.14	Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading rapid.	64
3.15	Durata efectivă a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies. Valorile sunt normate la unitate.	72
3.16	Durata efectivă a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies. Valorile sunt normate la unitate.	72
3.17	Localizarea timp-frecvență (produsul $\sigma_t \sigma_\omega$) a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies.	73
3.18	Implementarea modulației WOFDM asociată cu turbo-codul duo-binar	74
3.19	Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale AWGN.	76
3.20	Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale cu fading plat.	76
3.21	Performanța FER a transmisiei WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale cu fading plat.	77
4.1	Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă, o singură iterație IDWT și $f_m=0.05$.	80
4.2	Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă, o iterație IDWT și $f_m=0.005$.	81
4.3	Implementarea modulatorului IDWT cu o singură iterație.	81
4.4	Performanța BER pentru diverse undișoare, într-un canal variant în timp ($f_m=0.05$), fără zgomot AWGN, o singură iterație IDWT.	84
4.5	Performanța BER pentru diverse undișoare din familia Daubechies, într-un canal variant în timp ($f_m=0.05$), cu o singură iterație IDWT.	85
4.6	Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei, $f_m=0.05$.	87
4.7	Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei, $f_m=0.005$.	87
4.8	Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.005$, undișoara Haar.	88
4.9	Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.05$, undișoara Haar.	89
4.10	Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.005$, undișoara Daubechies-12.	90
4.11	Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=20\text{dB}$ și $f_m=0.05$.	91
4.12	Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=20\text{dB}$ și $f_m=0.005$.	92
4.13	Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=0\text{dB}$ și $f_m=0.05$.	92
5.1	Schemă de transmisie WOFDM prin canal cu fading selectiv în frecvență.	96
5.2	Modulul răspunsului în frecvență al canalului cu două căi de propagare de puteri egale, pentru $\tau_1=T_s$.	96
5.3	Modulul răspunsului în frecvență al canalului cu $P_1/P_2=10\text{dB}$ și $\tau_1=4T_s$.	97

5.4	Performanța BER a transmisiei WOFDM în canale cu două căi de propagare, $\tau_1=1$ și $f_m=0.005$.	98
5.5	Influența variabilității în timp a canalului asupra performanței BER, într-un canal cu două căi, $\tau_1=1$.	99
5.6	Simbolurile transmise la diverse scări (a) și benzile de frecvență prin care se transmit (b).	101
5.7	Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu puteri egale ale celor două căi, $\sigma_{\tau n}=0.5$ ($\tau_1=T_s$) și $f_m=0.005$.	102
5.8	Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu puteri egale ale celor două căi, $\sigma_{\tau n}=1$ ($\tau_1=2T_s$) și $f_m=0.005$.	104
5.9	Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu	105
5.10	două căi, $P_1/P_2=10$ dB, $\sigma_{\tau n}=1.15$ ($\tau_1=4T_s$) și $f_m=0.005$. Evoluția BER în funcție de $\sigma_{\tau n}$ pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu două căi de puteri egale și $f_m=0.005$.	106
5.11	Evoluția BER în funcție de $\sigma_{\tau n}$ pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu parametrii τ_1 și P_1/P_2 variabili, și $f_m=0.005$.	107
5.12	Influența deplasării Doppler asupra BER în condițiile unui canal cu două căi de propagare de puteri egale și întârziere variabilă a celei de a doua căi.	108
5.13	Comparație între curbele BER parțiale la scările 1 și 2 pentru undișoarele Haar și Daubechies-20, $\sigma_{\tau n}=0.5$, $f_m=0.005$.	110
5.14	Comparație între curbele BER parțiale la scările 3 și 4 pentru undișoarele Haar și Daubechies-20, $\sigma_{\tau n}=0.5$, $f_m=0.005$.	110
5.15	Performanța BER la scara 4 de transmisie pentru diverse undișoare din familia Daubechies, pentru o transmisie printr-un canal cu două căi de puteri egale, cu $\sigma_{\tau n}=0.5$ și $f_m=0.05$.	111
5.16	Performanța BER a undișoarelor din familia Daubechies la scările 3 și 4, pentru o transmisie printr-un canal cu două căi de puteri egale, cu $E_b/N_o=50$ dB, $f_m=0.05$ și $\sigma_{\tau n}=0.5$.	112
A 2.1	Caracteristicile de frecvență ale filtrelor $H(\omega)$.	130
A 2.2	Caracteristica de frecvență a filtrului $H(\omega+n)$.	131

Cuvânt înainte

Această teză este dedicată utilizării undișoarelor în transmisiile multi-purtătoare. Modulația cu purtătoare multiple a cunoscut, în ultimele decenii, o largă utilizare. Astfel, diverse variante ale OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) sunt propuse la ora actuală în majoritatea standardelor de transmisiuni pe canale radio, dar și în diverse aplicații de transmisie pe canale cu fir. Se pot enumera aici standardele DAVB (Digital Audio and Video Broadcasting), IEEE 802.11 (rețele WiFi), IEEE 802.16 (WiMAX), 3GPP release 8 (LTE), tehnologiile DSL (Digital Subscriber Loop) sau transmisia de date pe linii de alimentare cu tensiune.

Tehnologiile enumerate mai sus sunt cele mai cunoscute aplicații ale modulațiilor multi-purtătoare. Utilizarea pe scară largă a acestora dovedește fiabilitatea și robustețea lor și justifică interesul acordat acestei direcții în cercetarea științifică. Aplicațiile enumerate anterior folosesc diverse versiuni ale OFDM.

Pe lângă numeroasele sale avantaje, OFDM prezintă însă și o serie de dezavantaje, care se constituie în impedimente serioase în implementarea practică și diminuează performanțele OFDM. La ora actuală există două direcții de cercetare principale în domeniul modulațiilor multi-purtătoare:

1. Pe de o parte, se caută soluții și algoritmi care, păstrând principiile de bază din OFDM (aceleași tipuri de purtătoare, aceiași algoritmi numerici de implementare a modulatorului și demodulatorului), să reducă impactul dezavantajelor acestei tehnici.

2. Pe de altă parte, tot mai multe lucrări și cercetări pledează pentru implementarea modulațiilor multi-purtătoare pe baze noi, prin folosirea altor familii de purtătoare ortogonale decât exponențialele complexe din OFDM.

În a doua categorie de metode se încadrează undișoarele. Folosirea undișoarelor într-o metodă de transmisie multi-purtătoare reprezintă o temă de cercetare care se află în plină expansiune. Principalele aplicații ale metodelor multi-purtătoare pe bază de undișoare prezentate în literatură sunt transmisia de date prin rețeaua de alimentare cu energie electrică, pe de o parte, și transmisia pe canale radio, pe de altă parte. Teza de față se ocupă de transmisia pe canale radio, dar o parte din rezultatele obținute și din concluziile extrase este aplicabilă și transmisiei de date pe liniile de alimentare cu energie electrică

Transmisia pe canale radio, a cunoscut în ultimele decenii o expansiune remarcabilă. Aceste canale sunt însă dificil de gestionat, semnalele transmise prin ele fiind supuse atenuării, propagării pe trasee multiple sau interferențelor externe. Date fiind aceste impedimente, credem că transmisiile multi-purtătoare pe bază de undișoare pot constitui, prin flexibilitatea și robustețea lor, o alegere bună în transmisia fără fir. Aceste tehnici încearcă să combine avantajele OFDM-ului clasic cu acelea pe care le conferă folosirea undișoarelor. Domeniul fiind relativ nou, lucrările ce există în literatură nu sunt nici pe departe la fel de numeroase ca și acelea care tratează diverse aspecte ale OFDM-ului tradițional, și ele au o natură relativ dispersată.

În lucrarea de față sunt sintetizate diversele aplicații ale undișoarelor în transmisiile de date, cu sublinierea avantajelor și dezavantajelor presupuse de utilizarea acestora în transmisii pe canale radio. De asemenea, din studiile și experimentele personale, au reieșit câteva concluzii și soluții originale.

Sinteza lucrării

În **capitolul I** sunt expuse principiile de bază ale modulației OFDM, cea mai răspândită metodă de modulație multi-purtătoare. Sunt tratate aspectele cele mai importante din OFDM: transmisia în paralel pe purtătoare multiple, implementarea modulatorului și a demodulatorului și folosirea prefixului circular.

În **capitolul al doilea** e prezentată o imagine de sinteză a folosirii undișoarelor în transmisia de date, care se referă la formarea impulsurilor cu ajutorul undișoarelor și la transmisia multi-purtătoare folosind undișoare. Legat de cea de a doua aplicație, în paragraful 2.4.1 am prezentat o primă contribuție originală, prin care am demonstrat că **orice funcție care generează baze ortonormale prin translație cu întregi satisface criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol**, și poate fi deci folosită ca funcție formatoare de impulsuri. Familiile de undișoare se supun acestei constrângeri, ca și caz particular.

În **capitolul III** am făcut o comparație între metoda OFDM tradițională, și cea bazată pe folosirea undișoarelor, denumită în teză WOFDM (Wavelet-based OFDM). În acest sens, am prezentat dezavantajele principale ale metodei OFDM și am arătat faptul că unele dintre aceste dezavantaje sunt eliminate în WOFDM. Tot în acest capitol am prezentat o serie de experimente și simulări, pentru a compara performanța BER (Bit Error Rate) a celor două tehnici, pentru canale cu fading plat și variabile în timp (paragraful 3.2). **Aceste comparații reprezintă o contribuție personală.** Capitolul continuă cu o analiză teoretică a localizării în timp și frecvență a familiilor de purtătoare folosite în OFDM și WOFDM. **Astfel, am demonstrat că localizarea timp-frecvență a undișoarelor este superioară aceleia a exponențialelor complexe de durată limitată, folosite în OFDM, ceea ce este o contribuție personală (paragraful 3.3).** În paragraful 3.4 am comparat cele două metode prin prisma performanței BER, atunci când datele sunt codate folosind turbo-coduri. Am arătat că, și în această situație, metoda bazată pe undișoare aduce un câștig față de transmisia OFDM clasică. **Rezultatele redată și comentate în paragraful 3.4 sunt de asemenea o contribuție personală.**

În **capitolul IV** am făcut o analiză experimentală detaliată a transmisiei WOFDM prin canale variabile în timp, cu fading plat. Analiza vizează modul în care trebuie aleși parametrii transmisiei, și anume undișoara mamă și numărul de iterații din modulatorul IDWT (Inverse Discrete Wavelet Transform). **Rezultatele obținute în capitolul IV sunt o contribuție personală.** În acest sens, am prezentat și o demonstrație matematică a robusteții adusă de folosirea undișoarei Haar și de implementarea unui număr cât mai mic de iterații în modulatorul IDWT. Astfel, am arătat că, dacă folosim undișoara amintită și implementăm o singură iterație a algoritmului de calcul al IDWT, variabilitatea în timp a canalului, dată de către fading, nu introduce nicio eroare de detecție, în cazul în care în canal nu există alte zgomote (de exemplu AWGN). În paragraful 4.1.1 am calculat probabilitatea de eroare în acest caz, ea fiind nulă. Acest rezultat este o contribuție personală.

În **capitolul V**, am realizat un studiu experimental al transmisiei WOFDM, pentru cazul unor canale care sunt atât variabile în timp, cât și selective în frecvență. Experimentele au urmărit să determine parametrii optimi ai transmisiei WOFDM printr-un asemenea canal. Se arată că, în cazul canalelor selective în frecvență, alegerea parametrilor se supune unor constrângeri cu totul diferite față de acelea

8 Sinteza lucrării

prezentate în capitolul anterior. Rezultatele prezentate și discutate în acest capitol reprezintă o contribuție personală.

În capitolul VI sunt trecute în revistă contribuțiile personale, și, legate de acestea, concluziile tezei.

1. MODULAȚIA MULTI-PURTĂTOARE CU PURTĂTOARE SINUSOIDALE

1.1 Conceptul de modulație multi-purtătoare

Originile tehnicii de multiplexare cu diviziune în frecvență se regăsesc departe în timp, acum mai bine de un secol. Este vorba despre transmiterea mai multor semnale de debite joase (de exemplu, semnale de telegrafie) printr-un canal de bandă largă, utilizând o frecvență purtătoare diferită pentru fiecare semnal. Pentru a facilita demultiplexarea transmisiilor la receptor, frecvențele purtătoare folosite au fost separate astfel încât să se evite suprapunerea spectrelor ocupate de fiecare dintre semnalele transmise. S-au folosit în acest scop benzi de frecvență "de gardă", care să permită separarea fiecărui spectru cu ajutorul unor filtre simplu de implementat. Din cauza acestor intervale de gardă, eficiența spectrală a unui astfel de sistem este redusă (fig. 1.1).

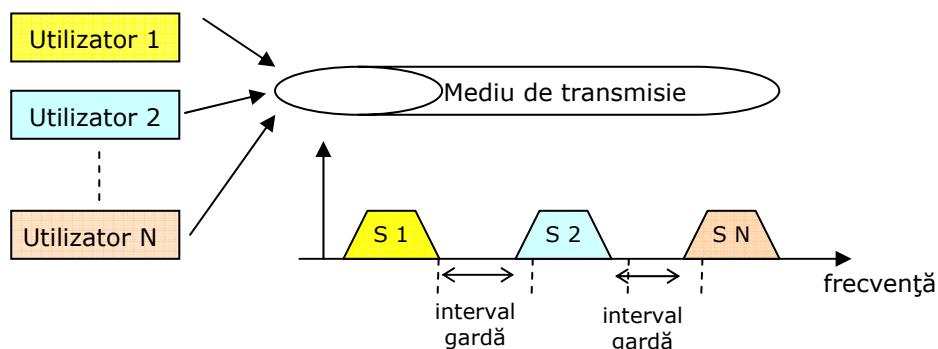


Fig. 1.1: Principiul accesului multiplu cu diviziune în frecvență.

Îndepărtată încă de conceptul de modulație multi-purtătoare, multiplexarea cu diviziune în frecvență reprezintă mai degrabă o tehnică de acces multiplu, care rezolvă problema partajării unui mediu de transmisie unic de către mai mulți utilizatori.

Pasul înspre ceea ce înseamnă modulația multi-purtătoare, a putut fi făcut în ipoteza că, în loc să transporte semnale provenite de la utilizatori distincți, purtătoarele utilizate să fie modulate de către simboluri care aparțin unui singur utilizator. În acest caz, sursa de informație ar putea genera date direct într-un format paralel, sau date secvențiale (seriale) aduse la intrarea unui convertor serial-paralel. Odată obținut formatul paralel al datelor, fiecare flux paralel va fi transmis pe câte o subpurtătoare distinctă. O asemenea transmisie paralelă, sau "simultană", este comparabilă ca debit total generat cu o transmisie serială de debit înalt care utilizează aceleași resurse (aceeași bandă de frecvențe totală), unde însă modularea are loc pe o singură purtătoare. Este evident că implementarea sistemului paralel cu emițătoare și receptoare multiple ar fi mai costisitoare decât implementarea

10 Modulația multi-purtătoare cu purtătoare sinusoidale - 1

sistemului serial, care cere un singur modulator și un singur demodulator. Mai mult decât atât, primele sisteme de transmisie paralelă pe purtătoare multiple făceau și ele apel la intervale de frecvență de gardă între subcanale, diminuând eficiența spectrală.

Dacă ne raportăm la debitele transmise în cazul tehnicii multi-purtătoare, remarcăm că pe fiecare subcanal în parte se transmit semnale cu debite joase. Pe de altă parte, semnalul transmis serial, cu debit înalt, se dovedește mult mai sensibil la fenomenul de interferență inter-simbol (IIS). În acest caz, durata scurtă a simbolurilor transmise face ca ele să ocupe întreaga lățime de bandă disponibilă, spre deosebire de lățimea de bandă redusă a fiecărui simbol transmis în paralel. Este de presupus că, în cazul transmisiei paralele, răspunsul în frecvență al canalului poate fi considerat aproximativ plat pentru fiecare subcanal în parte, reducându-se astfel efectul negativ introdus de selectivitatea în frecvență a canalului. Conceptul este ilustrat în figura 1.2, pentru 16 subcanale (subpurtătoare). Astfel, anterior dezvoltării unor tehnici de egalizare fiabile, transmisia paralelă oferea o posibilitate reală de atingere a unor debite înalte în canale dispersive, ea fiind folosită în ciuda costului său ridicat și a eficienței spectrale reduse.

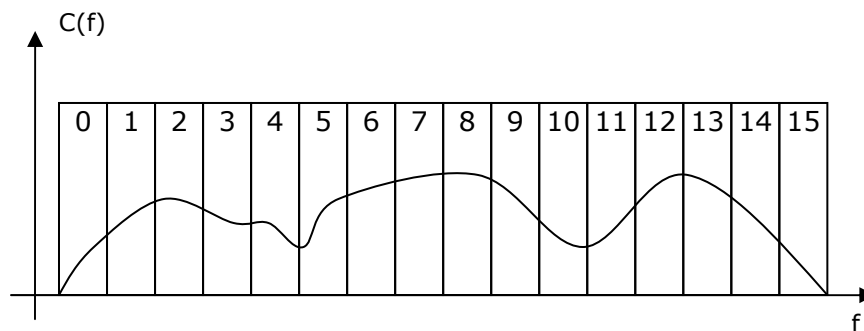


Fig. 1.2: Principiul transmisiei pe subcanale multiple.

Una dintre primele soluții care a fost avansată pentru rezolvarea problemei eficienței spectrale vine din partea unei companii americane (Collins Radio), care propune în deceniul 6 sistemul Kineplex, proiectat pentru a transmite date printr-un canal de înaltă frecvență, afectat de fading selectiv în frecvență [Bah,Sal'02]. Rata de date vizată era de 2400b/s. Într-un asemenea sistem se utilizau 20 de purtătoare, modulate folosind o modulație diferențială de fază în cuadratură DQPSK (Differential Quadrature Phase Shift Keying), fără filtrare. Spectrul fiecărui ton are forma $\sin(kf)/f$, conducând la interferență între spectrele ce corespund diverselor purtătoare. Caracteristica de frecvență de tip sinus cardinal rezultă din semnalul tip "poartă dreptunghiulară" ce corespunde simbolurilor de transmis (în timp), care translatat în frecvență prin transformarea Fourier, conduce înspre forma de oscilația atenuată caracteristică sinusului cardinal. Similar multiplexului cu diviziune de frecvență folosit în zilele noastre, subpurtătoarele erau separate între ele prin intervale de frecvență care sunt egale cu inversul duratei unui "simbol multi-purtătoare" transmis (sau, echivalent, cu inversul duratei "de observare" a demodulatorului).

Schema demodulatorului este ilustrată în figura 1.3. Fiecare purtătoare este detectată utilizând o pereche de circuite calate pe frecvența sa. Semnalul recepționat este transmis pe două ramuri, pe una dintre ele introducându-se o întârziere egală cu durata de transmisie a unui simbol, făcând astfel posibilă

calcularea diferenței de fază dintre două simboluri consecutive, și permițând astfel detectarea informației transmise. Performanțele obținute prin utilizarea acestui sistem au fost relativ bune, dar cu prețul unui cost de implementare ridicat.

Tehnica descrisă garantează ortogonalitatea purtătoarelor, ortogonalitate necesară pentru a separa semnalele transmise pe fiecare subpurtătoare în parte. Totuși, spectrul de tipul sinus cardinal al fiecărei subpurtătoare are câteva proprietăți care sunt indezirabile. Fiindcă o asemenea funcție se întinde pe întreaga axă a frecvențelor, toate subpurtătoarele folosite în transmisie se vor suprapune pe axa frecvențelor. Mai mult decât atât, orice sistem de transmisie radio trebuie să asigure un interval de gardă la stânga și la dreapta benzii dedicate, care să elimine interferențele cu sisteme ce lucrează în benzi de frecvență învecinate. Ori, energia lobilor laterali din spectrul $(\sin(kf))/f$ este suficient de mare încât să producă interferențe în benzile adiacente. Se preferă din acest motiv utilizarea unor semnale de bandă limitată care să moduleze fiecare subpurtătoare (în locul impulsurilor rectangulare), care pot fi obținute prin intermediul unor filtre Nyquist formatoare de impulsuri. Rezultatul unei asemenea abordări va fi că fiecare subpurtătoare modulată va afecta doar canalele adiacente (nivelul de interferență fiind mai mic), fără a fi influențată ortogonalitatea subpurtătoarelor. În plus, atenuarea în benzile adiacente va fi suficient de mare pentru a satisface constrângerile practice.

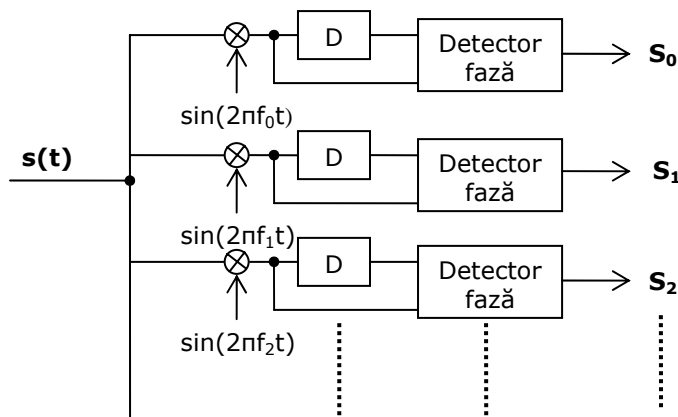


Fig 1.3: Schema de principiu a receptorului Kineplex.

1.2 Multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență (OFDM)

Așa cum rezultă din paragraful precedent, ideea care stă la baza modulației OFDM s-a născut cu mult timp în urmă. Introducerea ei în sisteme folosite pe scară largă a trenat însă vreme îndelungată, din pricina complexității de implementare, care în sistemele pe bază de circuite analogice conducea la dificultăți și costuri de implementare prohibitive.

Expansiunea modulației OFDM s-a produs de fapt odată cu maturizarea tehnicilor de procesare numerică de semnal și a algoritmilor asociați. În acest caz, o importanță particulară o prezintă algoritmul rapid de calcul al Transformării Fourier Discrete (TFD), care este punctul cheie al modulatorului și demodulatorului OFDM, așa cum se va vedea în cele ce urmează [Bin'90, Cim'85]. Utilizarea acestei tehnici a

cunoscut o dezvoltare rapidă mai ales în sisteme care folosesc transmisia fără fir. Astfel, o gamă largă de standarde și soluții proprietar folosesc OFDM la nivelul fizic pentru a transmite informația prin canalul radio. Între acestea se pot aminti DAVB (Digital Audio & Video Broadcasting) [ETSI'00], WiFi (IEEE 802.11) [IEEE'03], WiMAX (IEEE 802.16)[IEEE'04], LTE (Long Term Evolution, standard 3GPP release 8) [Fur,Ahs'09] sau Flash OFDM (soluție Flarion) [Fla'04]. Mai mult decât atât, versiuni de transmisii multi-purtătoare s-au adoptat și în transmisii pe fir, cu rezultate remarcabile. La acest capitol se poate aminti tehnologia ADSL (transmisii de date impresionante de date prin cablurile telefonice de cupru folosite în telefonia analogică clasică) [Bin'00]. De asemenea, o aplicație în plină expansiune ce folosește principiul modulațiilor ortogonale constă în transmisia de date prin rețeaua publică de alimentare cu tensiune electrică PLC (Power Line Communication) [Lam, Hub'00, Kat'01].

În cele ce urmează, se vor prezenta conceptele de bază ale modulației OFDM. Astfel, după exemplificarea conceptului de modulație multi-purtătoare, se va argumenta și explicita importanța ortogonalității pentru demodularea corectă a transmisiei efectuate. În continuare se va prezenta o descriere matematică a modulatorului OFDM, și se va explica importanța conceptului de "prefix circular", strâns legat de modulația OFDM. Capitolul se va încheia cu o secțiune dedicată expunerii dezavantajelor tehnicii discutate.

1.2.1. Schema bloc a unui sistem OFDM

În figura 1.4 se prezintă schema bloc a unui lanț de transmisie folosind multiplexul ortogonal cu diviziune de frecvență.

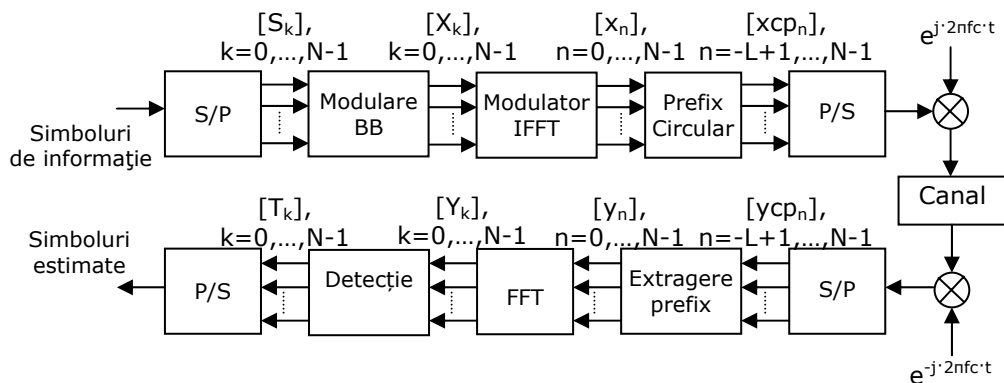


Fig.1.4: Schema bloc a unui sistem de transmisie bazat pe OFDM.

Simbolurile de informație sunt o secvență de biți, rezultată eventual în urma unei codări de canal a șirului inițial de date. Succesiunea astfel obținută este convertită în format paralel (pe N ramuri) și supusă unei "modulări în banda de bază". Prin aceasta se înțelege că, în funcție de constelația de modulație aleasă pe fiecare ramură, grupurile de biți sunt convertite în simboluri complexe. Pentru exemplificare, să alegem cazul modulației QPSK, pentru care fiecare dibit este convertit într-un număr complex (notat cu S_k în figura 1.4) din mulțimea $\{\sqrt{2} + j\sqrt{2}, \sqrt{2} - j\sqrt{2}, -\sqrt{2} - j\sqrt{2}, -\sqrt{2} + j\sqrt{2}\}$. Pe fiecare ramură în paralel,

simbolurile de modulație vor modula o purtătoare complexă. Tot acest proces este implementat prin intermediul algoritmului Inverse Fast Fourier Transform (IFFT) care reprezintă punctul cheie al modulatorului OFDM. Faptul că modularea este realizată prin aplicarea unei transformate Fourier inverse ne poate conduce spre interpretarea simbolurilor de intrare în modulator ca fiind "eșantioane" definite în frecvență. Aceasta reprezintă însă doar un detaliu de modelare a lanțului de transmisie, fără importanță practică. În ceea ce privește constelația de modulație folosită, ea poate fi aceeași sau diferită pe fiecare ramură în parte, ca rezultat al unui mecanism inteligent de optimizare a transmisiei, care se bazează pe estimarea canalului. Spre exemplu, sistemul de modulație "Discrete Multi Tone" (DMT) [Fis,Hub'96] folosit în ADSL, testează canalul cu un semnal pilot, urmând să "încarce" fiecare subpurtătoare în funcție de "gradul de încredere" al acesteia [Son'00]. Mecanismul este cunoscut sub numele de "bit loading" și face apel la teorema "waterfilling" [Hay'94]. Acest principiu este relativ simplu de implementat în mediile de transmisie ghidate, unde canalul se consideră de obicei invariant în timp. Tehnici asemănătoare, dar mai complexe se utilizează și în sistemele radio de tipul WiFi sau WiMAX, unde se folosește OFDM cu acces multiplu [Won,Che,Let,Mur'99].

În fața simbolului OFDM obținut de către modulatorul IFFT se inserează un prefix circular care are menirea de a separa între ele două blocuri OFDM succesive și de a facilita egalizarea canalului la receptor. În practică, toate aceste operații se implementează prin procesare numerică de semnal, astfel încât ceea ce înțelegem prin simbol OFDM la acest nivel este de fapt o secvență de $N+L$ numere complexe. Pentru a se obține semnalul ce corespunde modulației OFDM, este nevoie de conversia semnalului digital din banda de bază într-un semnal analogic (folosind un convertor numeric-analogic și un formator de impulsuri). Semnalul analogic astfel obținut, va fi la rândul lui translatat la frecvența radio de transmisie de către un convertor de radio-frecvență.

Receptorul implementează operațiile complementare: semnalul este translatat în banda de bază și convertit în semnal digital. După înlăturarea prefixului circular se poate folosi un egalizor de canal (nereprezentat în figură). Dacă se fac câteva ipoteze simplificatoare (adeseori neacoperite însă în practică), și anume: canal estimat perfect, liniar și invariant în timp și durată a prefixului circular mai mare decât durată răspunsului la impuls al canalului, atunci acest egalizor de canal este unul foarte simplu, constând într-o multiplicare cu o constantă a semnalului recepționat pe fiecare subpurtătoare, care să compenseze coeficientul complex al răspunsului în frecvență al canalului [Olt'04]. Secvența astfel obținută este adusă la intrarea blocului Fast Fourier Transform (FFT) care joacă rolul de demodulator. Simbolurile complexe de ieșire sunt transformate în grupuri de biți în conformitate cu constelația de modulație folosită pe fiecare dintre subpurtătoare. Dacă se folosește și un cod corector de erori, atunci decodorul ar putea îngloba întreaga parte de detecție, la ieșire obținându-se valoarea estimată a biților transmiși.

1.2.2 Necesitatea transmisiei paralele multi-purtătoare

Într-un mediu de comunicație radio, semnalul transmis se propagă pe un număr mare de trasee, care ajung la receptor cu întârzieri și energii diferite. Acest fenomen este cunoscut sub numele de propagare multicanală și conduce la apariția IIS la recepție. Simplificând lucrurile (considerând canalul ca fiind un Sistem Liniar și Invariant în Timp), propagarea multicanală produce același efect ca și un filtru, care

dispersează în timp semnalul de la emițător. Fenomenul poate fi modelat matematic printr-o operație de convoluție.

Efectele propagării multi-cale într-un canal radio pot fi descrise atât în domeniul frecvență, cât și în domeniul timp [Skl'97-1]. În primul caz se folosește termenul de fading selectiv în frecvență, iar în al doilea caz se pune în evidență tocmai dispersia temporală a semnalului. Consecința practică a propagării multicale o constituie limitarea superioară a ratei de transmisie a semnalelor digitale prin canalul radio. Pentru a combate acest fenomen, caracterul selectiv al canalului se compensează prin implementarea unor procedee de egalizare complexe la nivelul receptorului [Skl'97-2]. Acestea se bazează pe estimarea și urmărirea în timp a comportamentului canalului, și conduc la complexitate de calcul și dificultate de implementare crescute. De fapt, așa cum se va arăta printr-un exemplu numeric în cadrul acestei secțiuni, este important de menționat că fenomenul de propagare multicale este cu atât mai dăunător, cu cât ratele de transmisie dorite sunt mai mari.

Pentru a ameliora problemele ridicate de către selectivitatea în frecvență a canalului, elementul de noutate pe care îl aduce conceptul de modulație multi-purtătoare este înlocuirea transmisiei seriale pe o singură purtătoare, cu un debit înalt, cu mai multe transmisii paralele de debit redus. Generând N transmisii paralele, vom fi capabili să reducem de N ori lățimea de bandă a fiecărui flux, pentru că durata simbolurilor transmise pe fiecare purtătoare va crește la rândul ei de N ori. Suma ratelor de pe fiecare subcanal va conduce în final la rata de transmisie dorită, dar cu avantajul că selectivitatea în frecvență va afecta mult mai puțin fiecare subcanal în parte decât în cazul canalului unic de la transmisia serială. Două exemple (unul numeric și unul grafic) vor încerca să întărească această argumentare. Să considerăm o transmisie de 10Mb/s printr-un canal radio, pentru care se alocă o lățime de bandă de 10 MHz. În acest caz durata de transmisie a fiecărui bit în parte va fi inversa debitului, adică 0.1 μ s. Pe de altă parte, fenomenul de propagare multicale produce efecte de împrăștiere în timp a semnalului care sunt măsurabile și care depind de caracteristicile morfologice și topografice ale mediului considerat (forme de relief, clădiri, densitate de populație etc). Cu titlu de exemplu, să considerăm o împrăștiere de propagare multicale de cca. 10 μ s, valoare uzuală pentru mediul urban. Comparând această valoare cu durata bitului, rezultă că efectul produs de transmisia unui singur bit de informație va afecta semnalul (și implicit detecția la receptor) pe durata a 100 de biți consecutivi. Dacă se consideră acum o transmisie OFDM pe 1024 subpurtătoare, atunci lățimea de bandă a fiecărui subcanal este de cca. 10 KHz, deoarece durata simbolurilor transmise pe fiecare subpurtătoare va fi de 100 μ s, care este de 10 ori mai mare decât împrăștierea de propagare multicale. Dacă în primul caz propagarea multicale va avea efecte pronunțate, dificil de combătut, în cel de-al doilea exemplu, doar o mică parte din fiecare simbol (mai precis începutul său) va fi interferată de către simboluri precedent transmise.

În exemplul grafic din figura 1.5, se arată o transmisie paralelă pe 3 purtătoare, ale căror spectre se suprapun reciproc, dar pot fi totuși separate datorită ortogonalității, proprietate care va fi explicată mai târziu. Se observă durata mai mare a simbolurilor paralele transmise, așa cum s-a menționat în paragraful anterior.

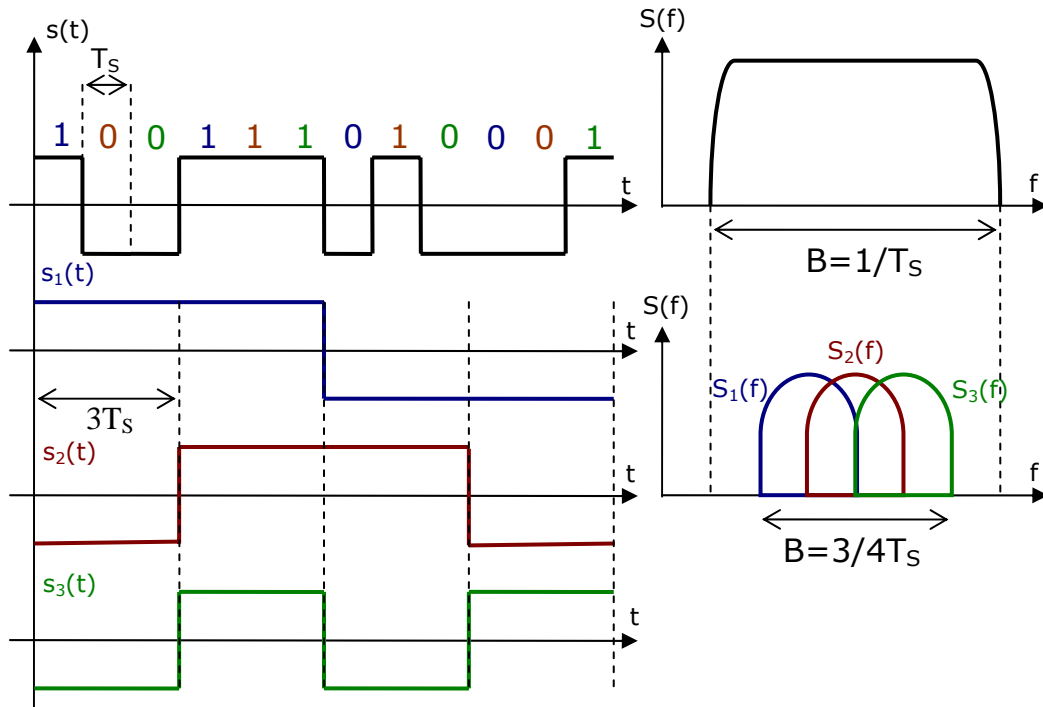


Fig.1.5: Principiul unei transmisii paralele multi-purtătoare.

1.2.3 Descrierea modulatorului OFDM

Așa cum rezultă din cele prezentate până acum, ideea de bază a modulației OFDM este transmisia simultană multi-purtătoare, pe mai multe subcanale de bandă relativ îngustă. Din punct de vedere matematic, fiecare purtătoare modulată poate fi descrisă ca fiind o exponențială complexă:

$$s_c(t) = A_c(t)e^{j[\omega_c t + \varphi_c(t)]} \tag{1.1}$$

Atât amplitudinea semnalului, $A_c(t)$, cât și faza acestuia, $\varphi_c(t)$ pot varia în timp, după o lege dată de către forma semnalului modulator. Totuși, putem considera că acești parametri sunt constanți pe durata de transmisie a fiecărui simbol, T .

Într-o transmisie serială clasică se utilizează un singur semnal purtător. În consecință, dacă dorim să alegem o rată de transmisie egală cu R , atunci fiecare simbol de transmis va avea durata $T_S = 1/R$, timp în care valoarea amplitudinii și a fazei semnalului transmis în canal vor fi constante.

Pe de altă parte, modulația OFDM folosește pentru transmisie N subpurtătoare. În acest caz se vor transmite simultan N fluxuri, fiecare cu o rată de simbol R/N . Semnalul care este transmis în canal pentru un singur simbol OFDM rezultă ca o sumă a tuturor acestor fluxuri:

$$s_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n(t)e^{j[\omega_n t + \phi_n(t)]} \tag{1.2}$$

unde :

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega \quad (1.3)$$

În relația (1.2), A_n , și φ_n sunt amplitudinea, respectiv faza corespunzătoare celui de-al n -lea simbol de informație transmis, iar ω_n este pulsația purtătoarei cu indexul n . Relația (1.3) ne arată că purtătoarele sunt spațiate între ele cu un interval notat $\Delta\omega$. Durata simbolurilor transmise pe fiecare purtătoare (timp în care putem considera amplitudinea A_n și faza φ_n ca fiind constante) este N/R , durată egală cu aceea a simbolului OFDM (T). În acest caz, ecuația (1.2) poate fi pusă sub forma:

$$s_S(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j(\omega_n t + \varphi_n)}, \text{ pentru } t \in [kT, (k+1)T] \quad (1.4)$$

Pentru că fiecare simbol OFDM înglobează informația corespunzătoare a N simboluri seriale consecutive, informație conținută în A_n și φ_n , este nevoie să eșantionăm cu frecvența $1/T_S$ pentru a obține o versiune discretizată a simbolului. Rezultatul este generarea a N eșantioane pe durata T a unui simbol OFDM. Expresia eșantionului cu indexul k va fi:

$$s_S(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j[(\omega_0 + n\Delta\omega)kT_S + \varphi_n]}, k = 0, \dots, N-1 \quad (1.5)$$

Dacă simplificăm ipotezele considerând $\omega_0 = 0$, valoarea eșantionului devine:

$$s_S(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Delta\omega kT_S}, k = 0, \dots, N-1 \quad (1.6)$$

În acest punct, relația (1.6) poate fi comparată cu expresia transformării Fourier rapide inverse:

$$g(kT_S) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT_S}\right) e^{jn2\pi k/N} \quad (1.7)$$

În relația (1.6) $A_n e^{j\varphi_n}$ poate fi interpretat ca "spectrul eșantionat" (cu pasul în frecvență $\Omega_0 = 1/T$) al unui semnal de intrare, ale cărui eșantioane în domeniul timp sunt generate de către modulatorul OFDM. Relațiile (1.6) și (1.7) sunt echivalente dacă:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{NT_S} = \frac{1}{T} \quad (1.8)$$

1.2.4 Legătura dintre tehnica OFDM și Transformarea Fourier Discretă

Ultima relație dedusă în paragraful precedent este similară aceleia pe care o cere ortogonalitatea. De altfel, faptul că purtătoarele folosite sunt ortogonale dă tuturor metodelor ce se supun acestui principiu și numele de "modulații ortogonale". Așa cum ne arată relațiile (1.6) și (1.7), impunerea ortogonalității stabilește o legătură fericită cu transformarea Fourier discretă inversă [Wei, Ebe'71], legătură care va fi studiată în profunzime în această secțiune. În acest caz, transformarea fiind inversabilă, recuperarea semnalului la demodulator poate fi făcută prin

intermediul transformării directe, care permite implementarea demodulatorului OFDM.

Dacă se consideră, în cele ce urmează, că subpurtătoarele folosite în transmise sunt separate prin intervalul de frecvență indicat de relația (1.8), atunci spectrele acestor subpurtătoare sunt ilustrate în figura 1.6. Fiecare sinus cardinal din acest spectru corespunde unei purtătoare sinusoidale modulate cu un simbol de informație reprezentat printr-un semnal dreptunghiular de durată egală cu aceea a unui simbol OFDM. Se poate remarca faptul că fiecare purtătoare trece prin 0 la frecvențele centrale corespunzătoare celorlalte subpurtătoare. La aceste frecvențe, interferența inter-purtătoare este nulă, fapt care permite separarea subpurtătoarelor la receptor. Situația este similară aceleia descrise de teorema lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol, în care interferența se referă însă la domeniul timpului. Așa cum rezultă din relația (1.1), purtătoarele sunt exponențiale complexe, care sunt compuse din sinusoidale (parte imaginară) și cosinusoidale (parte reală).

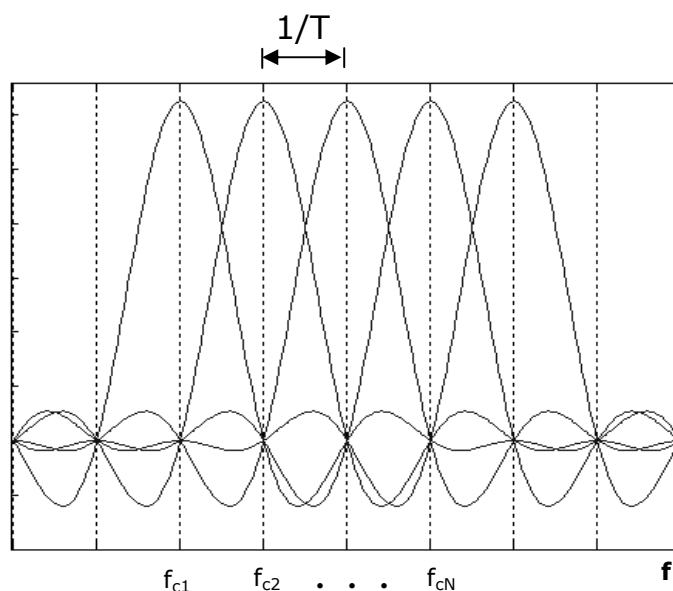


Fig. 1.6: Spectrul purtătoarelor folosite în OFDM.

Forma subpurtătoarelor ortogonale sinusoidale este arătată în fig. 1.7. Se observă că pe durata de transmisie a unui simbol OFDM fiecare subpurtătoare parcurge un număr întreg de cicluri, condiție care derivă din ortogonalitatea subpurtătoarelor.

În ciuda faptului că purtătoarele sunt exponențiale complexe, din motive de claritate a expunerii și pentru a permite o ilustrare grafică simplă ne vom referi doar la componenta lor sinusoidală, fără a restrânge generalitatea afirmațiilor. Dacă se consideră construcția receptorului OFDM, el poate fi privit ca un banc de corelatoare, care folosesc aceleași sinusoidale ca și acelea de la emisie. Semnalul recepționat (o sumă de sinusoidale ponderate cu valoarea simbolurilor de informație) este trecut prin acest banc de corelatoare. Pe fiecare ramură a corelatorului, o singură sinusoidă din semnalul recepționat va conduce la o corelație semnificativă, și anume aceea sinusoidă care este similară (aceeași frecvență) cu cea folosită în corelator, toate celelalte producând un efect nesemnificativ.

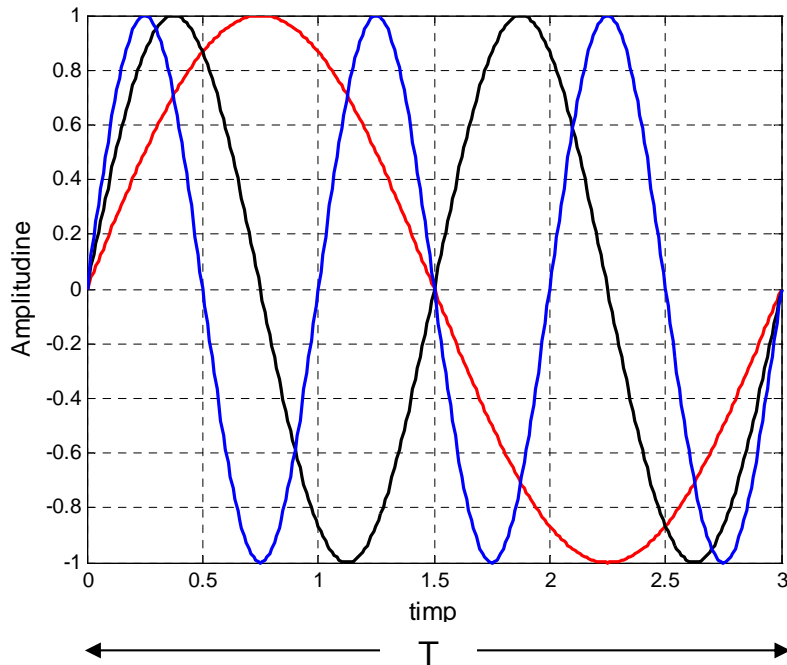


Fig.1.7: Subpurtătoarele ortogonale din OFDM.

Din punct de vedere matematic, afirmația precedentă se bazează pe binecunoscuta proprietate conform căreia sinusoidalele aflate în raport armonic sunt ortogonale între ele:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \sin(mf_0t) \cdot \sin(nf_0t) \cdot dt = \begin{cases} T/2, & \text{daca } m = n \\ 0, & \text{daca } m \neq n \end{cases} \quad (1.9)$$

Pentru ca relația (1.9) să fie validă, trebuie respectată condiția: $f_0 = \frac{1}{T}$. O

reprezentare grafică a etapelor demodulării este dată în figura 1.8. Astfel, în figura 1.8a) se reprezintă un simbol OFDM obținut modulând cu simboluri bipolare echiprobabile 20 de purtătoare cu frecvențe cuprinse între 510 și 700 KHz. Purătoarele sunt separate printr-un interval $\Delta f = 1/T = 10 \text{ kHz}$, durata unui simbol fiind astfel de $T=100\mu\text{s}$. Pentru două dintre ieșirile multiplicatoarelor ce compun demodulatorul, rezultatul este redat în figura 1.8b). Prima ieșire corespunde unui simbol transmis de +1, iar cea de a doua unui -1. Semnalul astfel rezultat este integrat pe durata a $100 \mu\text{s}$, corespunzătoare simbolului OFDM transmis. Evoluția în timp a semnalului de la ieșirea integratoarelor este ilustrată în figura 1.8c. În fiecare caz, corelația cu celelalte purtătoare (în afară de aceea corespunzând ramurii "curente") nu contribuie semnificativ la semnalul de ieșire. În consecință, o operație simplă de eșantionare și comparare cu pragul ne conduce la luarea unei decizii corecte.

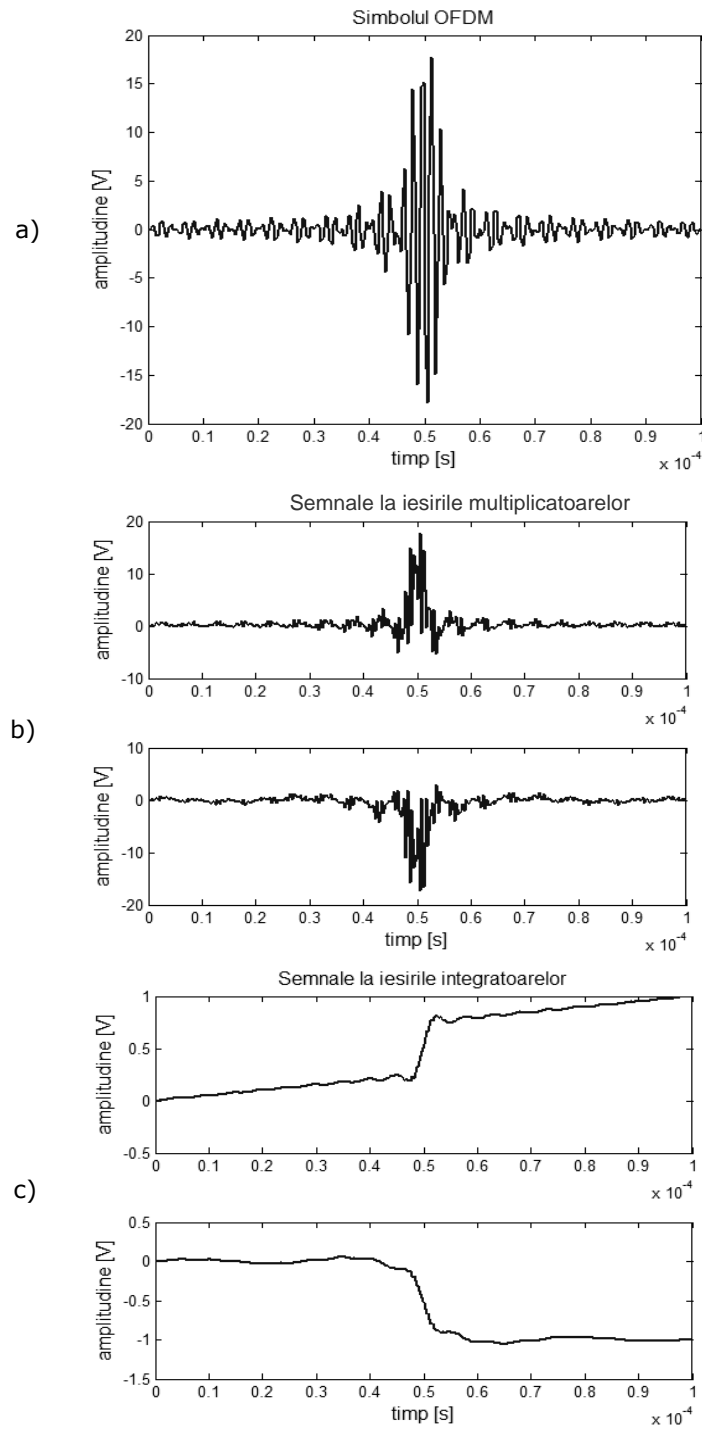


Fig. 1.8: Simbolul OFDM (a), semnalul după multiplicatoare (b) și acela de la ieșirea integratoarelor (c).

Cel mai semnificativ "obstacol" presupus de demodulare îl constituie dificultatea de implementare practică, bazată pe hardware, a bancului de oscilatoare sinusoidale, care să genereze semnale ortogonale între ele și perfect sincronizate cu acelea de la emisie. Acesta este de fapt și motivul care a stat în calea dezvoltării expansive mai timpurii a tehnicilor multi-purtătoare. Soluția acestei probleme a fost găsită odată cu dezvoltarea tehnicilor de prelucrare numerică a semnalului.

Mai concret, așa cum s-a arătat mai devreme, există legături evidente între strategia de modulație/demodulare din OFDM și tehnicile numerice de calcul a transformării Fourier discrete. Pentru a surprinde mai bine natura acestei legături, se va realiza în continuare o analiză mai detaliată a Transformării Fourier Inverse. Mai precis, se va studia implementarea numerică a acestei transformate, ce presupune "eșantionarea în frecvență" a unui spectru care prin natura sa, este continuu după variabila Ω . Formula care descrie această transformare reprezintă o sumă de exponențiale complexe discrete. Suma poate fi descompusă în sinusoidale și cosinusoidale, ponderate de secvența complexă $X[k]$ (vezi fig. 1.9).

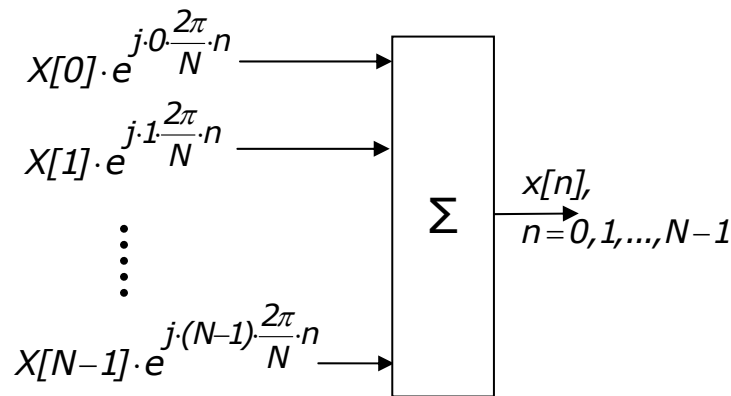


Fig. 1.9: Implementarea modulatorului OFDM prin intermediul IFFT.

Rezultatul indicat în (1.10) este un semnal discret în timp, notat cu $x[n]$.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left(\cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) + j \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \right), \quad (1.10)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$

Ceea ce este foarte important în relația (1.10), este că exponențialele complexe sunt ortogonale între ele și că separarea acestora în domeniul frecvenței discrete este $\Delta\Omega = 2\pi/N$. Acest ecart de frecvență, exprimat pentru semnalul în timp discret $x[n]$, poate fi echivalat cu acela al unui semnal în timp continuu $x(t)$ (simbolul OFDM analogic) care a fost eșantionat cu pasul $T_e = T_S$. Această echivalare se poate face cu relația:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\Omega/T_e}{2\pi} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T} \quad (1.11)$$

Schema ilustrată în figura 1.9 poate fi interpretată ca implementare a unei operații de sinteză: cele N eșantioane ale semnalului de ieșire $x[n]$ sunt "sintetizate" din N

sinusoide și cosinusoide de frecvențe $k \frac{2\pi}{N}$ (adică aflate în raport armonic), ponderea fiecărei armonici fiind determinată de către simbolul modulator $X[k]$. Privind lucrurile prin prisma transformării Fourier inverse implicate (algoritmul IFFT), eșantioanele de transmis pot fi interpretate ca fiind definite în domeniul frecvență. Astfel, în forma cea mai simplă posibilă, transmisia unui bit de 1 sau 0 pe purtătoarea k se va regăsi prin prezența, respectiv absența purtătoarei în cauză din compoziția semnalului $x[n]$. Simplificând și mai mult lucrurile, dacă presupunem că într-un bloc de biți de transmis un singur bit este 1 iar toți ceilalți sunt 0, simbolul OFDM care rezultă va fi pur și simplu o exponențială complexă (adică o sinusoidă – partea imaginară și o cosinusoidă – partea reală) de frecvență dată de indexul bitului de 1 (adică de poziția acestuia în blocul de date).

Întrucât transformarea Fourier este inversabilă, receptorul se bazează pe aplicarea transformării directe asupra blocului de date recepționat. După conversia la joasă frecvență și eșantionare, semnalul în domeniul timp recepționat este demodulat prin trecerea sa printr-un bloc de "analiză" bazat pe transformarea Fourier Discretă implementată prin intermediul Fast Fourier Transform (FFT). Demodulatorul prelucrează cele N eșantioane temporale ("observate" pe durata unui simbol sosit la recepție) și determină amplitudinea și faza cu care fiecare purtătoare contribuie la compoziția semnalului recepționat. Descrierea matematică a acestei operații este dată în relația (1.12).

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (\cos(k \frac{2\pi}{N} n) - j \cdot \sin(k \frac{2\pi}{N} n)), \quad (1.12)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

1.2.5 Utilizarea prefixului circular în OFDM

Așa cum rezultă din cele prezentate, folosind tehnica OFDM datele se transmit în blocuri, a căror conversie din numeric în analogic ne conduce la "simboluri OFDM". Întrucât acest simbol este obținut în banda de bază, fiind de fapt un bloc de eșantioane numerice, se va folosi uneori, în cele ce urmează, și termenul sinonim de "bloc OFDM". Acest lucru se impune pentru a evita confuzia de termeni atunci când se discută despre interferența inter-simbo.

Toate canalele utilizate în aplicații practice, fie că este vorba de canale dispersive cu fir, fie că avem de-a face cu canale radio, vor "împrăștia" în timp simbolurile OFDM, conducând la nivelul receptorului la apariția unei interferențe între două blocuri consecutive. Acest tip de interferență este denumit interferență inter-bloc sau interferență inter-simboluri OFDM și este ilustrată în figura 1.10.

Trebuie notat aici că, așa cum se prezintă în paragraful 1.2.2, transmisia paralelă multi-purtătoare este, prin natura sa, rezistentă la interferența inter-simbol. Într-adevăr, cum se observă și din figura 1.10, doar o mică parte din simbolul $i+1$ este afectată de către simbolul precedent transmis, cu indexul i . Acest lucru se întâmplă datorită duratei mari a simbolurilor OFDM, metodă ce face uz de transmisia paralelă pentru a atinge debitele înalte cerute de către aplicațiile moderne. Totuși, și această interferență care afectează doar începutul simbolului este supărătoare și trebuie eliminată. O abordare simplă pentru a contracara acest tip de interferență este utilizarea unei pauze ("interval de liniște") între două simboluri consecutive. Metoda

este cunoscută în literatură și sub numele "zero padding" [Muq,Cou'00]. Dacă se consideră o transmisie printr-un canal liniar, și dacă pauza de transmisie este suficient de mare, atunci efectul rezidual provenit de la simbolul precedent va fi "absorbit" de către acest interval de gardă. Eșantioanele afectate de efectul rezidual nu vor fi luate în calcul la demodulator, care "observă" mediul de transmisie doar pe durata simbolului util, ignorând semnalele sosite în perioada intervalului de gardă.

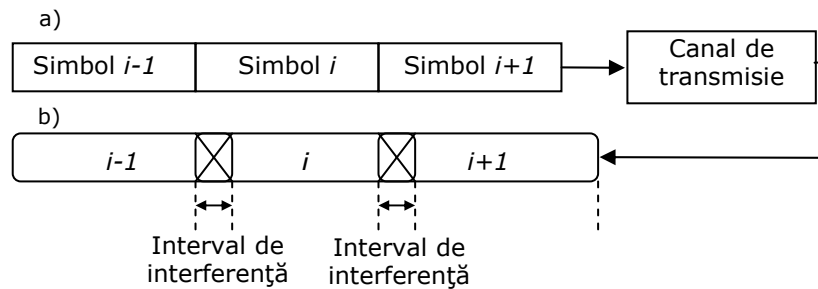


Fig. 1.10: Transmisia unor blocuri succesive (a) și interferența la receptor (b).

Totuși, deși facilă, utilizarea pauzei de transmisie între simboluri prezintă dezavantaje importante. Este vorba în primul rând despre faptul că lipsa semnalului în anumite porțiuni va duce la dificultăți de sincronizare la receptor. Această problemă este de exact aceeași natură cu aceea ridicată la codarea digitală a semnalului în banda de bază: perioadele lungi de semnal neschimbat (lipsa tranzițiilor) cauzează probleme de sincronizare a receptorului. Prin urmare, din punctul de vedere al receptorului, este preferabil ca el să primească permanent semnal, pentru că aceasta îl ajută la stabilirea începutului și sfârșitului fiecărui simbol OFDM. O a doua problemă pe care o ridică perioada de pauză în transmisie este aceea a egalizării. Într-adevăr, chiar dacă între două blocuri OFDM succesive nu vor mai exista interferențe în cazul utilizării intervalului de liniște, ele vor continua să existe în interiorul fiecărui bloc. Este vorba de această dată de IIS din interiorul unui bloc, interferență ce apare între simbolurile de date care compun un bloc OFDM. Dacă se consideră un canal liniar, atunci efectul pe care canalul îl are asupra semnalului transmis poate fi modelat prin operația de convoluție. În cazul realist al unui canal neideal, eșantioanele recepționate la un moment de timp t_k nu vor fi identice cu acelea emise, ci vor putea fi calculate ca o sumă ponderată de eșantioane anterior emise, ponderile fiind date de coeficienții răspunsului la impuls al canalului. Acest tip de efect se combate de obicei printr-un procedeu care se numește egalizare. Folosirea pauzei de transmisie nu facilitează efectuarea egalizării, de aceea este nevoie în acest caz de metode destul de complexe pentru a contracara interferența în interiorul blocurilor OFDM.

Alternativa a fost oferită de o idee simplă și ingenioasă: aceea a prefixului circular [Pel,Rui'80, Wei,Ebe'71, Hen,Tau'02]. Astfel, fiecare simbol OFDM "original" va fi extins cu o anumită durată, prin copierea ultimei porțiuni a simbolului la începutul acestuia. Aceasta metodă conferă un aspect de periodicitate semnalului, fapt ce nu doar facilitează sincronizarea, ci permite și egalizarea mai simplă a canalului. Formarea prefixului circular este arătată în figura 1.11. Astfel, se consideră un exemplu simplu, de transmisie a două simboluri OFDM consecutive, constituite din unde cosinusoidale defazate între ele, printr-un canal radio cu două căi de propagare. Ipotetic, asemenea simboluri OFDM pot fi obținute modulând o singură purtătoare cu simbolul "1", și punând pe "0" toți ceilalți biți din blocul de la

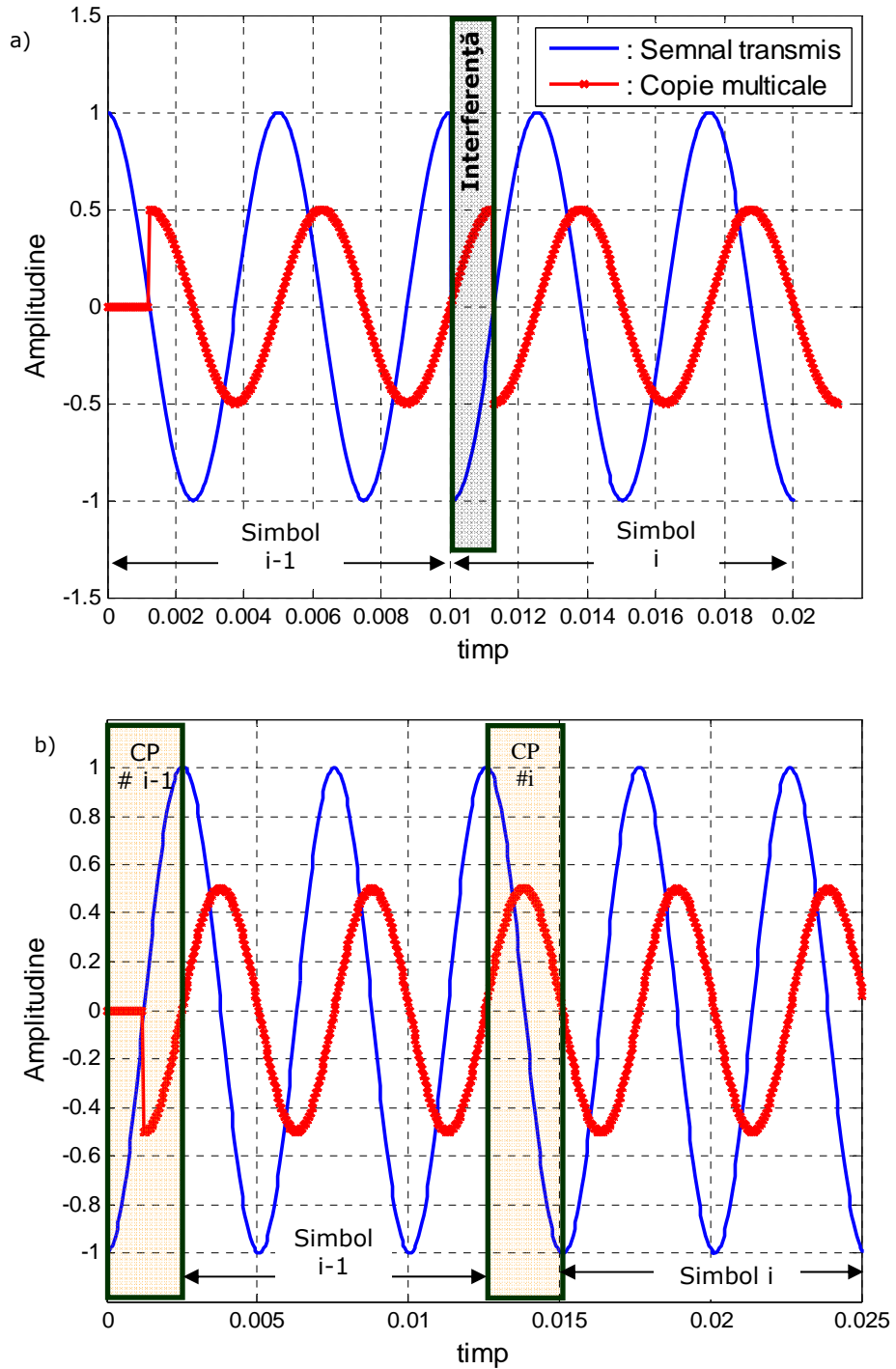


Fig. 1.11: Interferență inter-bloc din cauza propagării multcale(a), prefixul circular elimină această interferență (b).

intrarea modulatorului. Așa cum se observă (fig. 1.11a), la receptor semnalul ajunge nu doar pe calea directă ci și pe o cale întârziată și atenuată. Există, la începutul celui de-al doilea simbol, un interval pe durata căruia acesta este interferat de copia întârziată a simbolului precedent. În figura 1.11 b), simbolurile sunt extinse cu un prefix care are o durată egală cu un sfert din durata utilă a simbolului. Se observă că acest prefix circular este suficient pentru a absorbi propagarea multicale, evitându-se astfel interferența inter-bloc.

Întrucât, termenii de "bloc" și "simbol" OFDM se folosesc în mod alternativ, se întâlnește uneori, în contextul OFDM, afirmația că folosirea prefixului circular elimină interferența inter-simbol. Trebuie precizat însă că această afirmație se referă strict la simbolurile OFDM. Așa cum s-a explicat, un asemenea simbol, în digital, este compus din N eșantioane obținute prin aplicarea IFFT asupra simbolurilor de transmis. În interiorul unui bloc de N eșantioane însă, IIS nu este eliminată prin simpla folosire a prefixului circular. În aceste circumstanțe, valorile eșantioanelor obținute la ieșirea canalului vor fi afectate de către eșantioane precedente, dar care fac parte din același simbol OFDM. Acest tip de interferență continuă să existe, și el se regăsește în figura 1.11 prin faptul că fiecare cosinusoidă este interferată la recepție de o copie întârziată a ei însăși.

Cu toate că prefixul circular nu elimină IIS care există în interiorul fiecărui simbol OFDM, el facilitează combaterea acesteia. Astfel, este suficient ca demodulatorul FFT să fie urmat de un egalizor simplu de canal, pentru a elimina în întregime aceste interferențe. În paragraful următor se va explica modul în care folosirea prefixului circular influențează procedura de egalizare a canalului.

1.2.5.1 Egalizarea canalului cu ajutorul prefixului circular

Să considerăm în cele ce urmează o secvență de date de transmis $\{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$, în care fiecare simbol X_k este un număr complex, obținut prin mapearea biților inițiali pe constelația de modulație utilizată. Cele N simboluri din domeniul timp corespunzătoare simbolului OFDM, sunt calculate prin aplicarea Transformării Fourier Rapide Inverse, după cum ne indică relația 1.12. Informația este conținută de amplitudinea și faza simbolurilor complexe X_k . În continuare, ultimele L eșantioane compunând simbolul de transmis se copiază și se plasează în fața acestuia, compunând prefixul circular. Vectorul de transmis devine astfel $X_{cp} = \{X_{N-L+1}, X_{N-L+2}, \dots, X_{N-1}, X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$. Aceste eșantioane sunt convertite în semnal analogic, care, la rândul său este translatat la frecvența radio de transmisie de către un convertor de radio frecvență. Dacă se consideră modelul discret echivalent al canalului, acesta poate corespunde filtru FIR de ordinul L . În acest caz, răspunsul canalului în domeniul transformatei Z va fi:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n] \cdot z^{-n} \quad (1.13)$$

În cazul în care mediul de transmisie este un canal radio, este cunoscut caracterul său variabil în timp, răspunsul la impuls al acestuia depinzând de momentul în care impulsul este aplicat. Pentru a simplifica demonstrația care urmează, se poate face totuși supoziția că răspunsul la impuls al canalului este constant pe durata transmisiei unui simbol OFDM. Această ipoteză este realistă pentru cazul acelor

canale cunoscute în literatură sub numele de "canale cu fading plat" [Skl'97-1]. Pentru situația considerată, semnalul de la ieșirea canalului poate fi calculat folosind operatorul de convoluție:

$$y_{cp}[n] = x_{cp}[n] * h[n] \quad (1.14)$$

În relația (1.14), $x_{cp}[n]$ reprezintă eșantioanele care compun simbolul OFDM la care s-a adăugat prefix circular, $y_{cp}[n]$ este semnalul de la ieșirea canalului, iar $h[n]$ reprezintă răspunsul la impuls al acestuia. Suprimând cele L eșantioane ale prefixului circular, semnalul "util" (adică eșantioanele folosite în procedura de demodulare), semnalul obținut poate fi rescris sub forma:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] \quad (1.15)$$

unde " \circledast " este simbolul corespunzător operației de convoluție circulară (periodică). Relația (1.15) este extrem de importantă, deoarece convoluția circulară conservă suportul temporal al semnalului. În cazul nostru, cele N eșantioane ale semnalului transmis, trecute prin canal (convoluție cu răspunsul la impuls al canalului), vor genera la ieșirea canalului (după eliminarea prefixului circular) un bloc ("simbol OFDM") de aceeași lungime. Aceasta are drept rezultat posibilitatea de a separa, bloc-cu-bloc simbolurile OFDM recepționate, ele putând fi tratate independent de către demodulator.

Mai mult decât atât, caracterul periodic al convoluției, asociat cu folosirea Transformatei Fourier Discrete facilitează egalizarea canalului. Acest procedeu este necesar deoarece, pentru orice canal real, se poate pune în evidență caracterul său selectiv în frecvență. Selectivitatea în frecvență se manifestă prin aceea că diverse componente de frecvență ale semnalului de intrare sunt afectate într-un mod diferit de canal, ceea ce conduce la distorsionarea semnalului sosit la recepție. Este adevărat că, datorită naturii transmisiei paralele multi-purtătoare, acest fenomen are un impact mai mic decât în cazul unei transmisii seriale clasice, dar el va continua să existe și să producă un oarecare nivel de distorsiune. Atunci când folosim prefixul circular, acest efect se poate aproxima printr-un coeficient complex de multiplicare al fiecărei purtătoare, coeficient determinat de amplificarea și defazajul pe care canalul le introduce pentru fiecare subpurtătoare în parte. Pentru a compensa acest lucru, este foarte utilă proprietatea de periodicitate a convoluției, rezultată în urma inserării prefixului circular. Astfel, dacă se ține cont că $x[n] = IDFT\{X[k]\}$ și că modulatorul implementează algoritmul invers (DFT), se va putea scrie:

$$Y[k] = DFT\{IDFT\{X[k]\} \circledast h[n]\} \quad (1.16)$$

În acest context, o proprietate importantă este aceea că TFD aplicată unei convoluții circulare din domeniul timp conduce la multiplicare spectrelor semnalelor implicate:

$$Y[k] = DFT\{IDFT\{X[k]\}\} \cdot DFT\{h[n]\} = X[k] \cdot H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.17)$$

unde $H[k]$ este versiunea eșantionată a răspunsului în frecvență al canalului, eșantioane prelevate în punctele $\Omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{N}$. Relația (1.17) ne arată că este posibilă recuperarea simbolurilor transmise $X[k]$ la receptor, cu excepția unui coeficient de multiplicare caracteristic canalului, notat $H[k]$, și care diferă pentru valori k diferite. Astfel, egalizarea în domeniul frecvență constă într-o simplă

înmulțire a semnalului recepționat, cu inversul răspunsului în frecvență al canalului, corespunzător fiecărei subpurtătoare în parte:

$$\hat{X}[k] = Y[k] \cdot H^{-1}[k], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.18)$$

Acest tip de egalizare se numește egalizare în domeniul frecvență, deoarece ea se pune în practică după "retranslatarea" semnalului din domeniul timp în domeniul frecvență, în urma aplicării DFT la demodulator. De aici rezultă unul dintre motivele pentru care se preferă folosirea prefixului circular în locul unei perioade de pauză între blocuri. Această din urmă soluție nu ar conduce, din punct de vedere matematic la o convoluție circulară, prin urmare relația (1.18) nu ar mai fi valabilă, și în consecință egalizarea ar fi mai complicată.

Evident că explicația precedentă privind egalizarea se bazează pe un model simplificat. Astfel, egalizarea este "perfectă" doar dacă se cunoaște cu exactitate răspunsul în frecvență al canalului. În practică acest lucru se întâmplă arareori și trebuie ținut cont și de faptul că, având un caracter variabil, canalul își modifică comportamentul (și deci răspunsul în frecvență) de-a lungul timpului. Dificultatea aici este de a obține "în timp real" informații despre starea canalului, fapt ce implică metode elaborate de estimare și urmărire a acestui comportament.

Concluzia care poate fi trasă în urma celor prezentate este aceea că utilizarea unui prefix circular pentru transmisie (și suprimarea acestuia la recepție) elimină atât interferența inter-bloc (sau, echivalent, interferența între două simboluri OFDM) cât și interferența inter-canal (ICI, Inter-Channel Interference), deoarece valoarea simbolului recepționat pe o purtătoare nu depinde decât de simbolul transmis pe purtătoarea respectivă și de coeficientul complex al canalului la acea frecvență. Și în privința acestei ultime afirmații, lucrurile trebuie nuanțate deoarece în canalele radio mobile se manifestă fenomenul de deplasare Doppler, care poate conduce la pierderea ortogonalității purtătoarelor și drept consecință la apariția interferenței inter-canal.

Prefixul circular este benefic și din punct de vedere al sincronizării. Pentru ca demodulatorul să funcționeze corect, el trebuie să cunoască exact momentul de timp care corespunde începutului unui simbol OFDM. Faptul că, datorită inserării prefixului circular, semnalul capătă un aspect periodic, permite folosirea unor metode bazate pe autocorelație, care să ducă la determinarea corectă a momentului de început a simbolurilor OFDM.

Modelul matematic corespunzător transmisiei a M simboluri OFDM pe câte N subpurtătoare este descris de relația:

$$x(t) = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{l,k} \cdot e^{j2\pi f_k t} \cdot p(t - lT) \cdot e^{j2\pi f_c t} \quad (1.19)$$

unde X_k reprezintă simbolul de informație cu indexul k aparținând blocului OFDM cu indexul l , f_c este frecvența semnalului purtător și $f_k = f_0 + k \cdot \Delta f$ este frecvența subpurtătoarei cu indexul k , iar $p(t)$ reprezintă funcția formatoare de impulsuri. Ea poate să fie, așa cum s-a mai discutat, una rectangulară, sau poate să corespundă unui filtru formator de impulsuri de tip Nyquist. Această funcție se va dovedi importantă în momentul în care se va discuta localizarea timp-frecvență a diverselor metode multi-purtătoare.

2. UTILIZAREA UNDIȘOARELOR ÎN TRANSMISIILE DE DATE

2.1 Introducere

Aplicațiile teoriei funcțiilor wavelet ("undișoare") s-au răspândit în ultimii ani în multe domenii specifice legate de prelucrarea semnalelor. Ne referim aici la algoritmi de "denoising" (termen introdus chiar în legătură cu folosirea funcțiilor wavelet), compresie, segmentare a semnalelor uni-dimensionale și a diverselor tipuri de imagini, sau clasificare. Recent, unele proprietăți specifice familiilor de funcții wavelet, cum ar fi ortogonalitatea componentelor acestor familii sau capacitatea lor de a împărți planul timp-frecvență într-o manieră flexibilă au fost folosite și în aplicații de transmisii de date [Ahm'00]. Astfel, Jones și Dill [Jon,Dil'01] au pus în evidență relația dintre undișoara mamă a lui Meyer și familia de filtre rădăcină din cosinus ridicat. În [Lau'03] se arată că familiile de funcții wavelet satisfac criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol într-un sistem de transmisii de date. În concluzie, undișoarele pot fi folosite ca și formatoare de impulsuri, în locul filtrelor Nyquist clasice. Mai mult decât atât, lucrări ale ultimilor ani focalizate pe transmisiile multi-purtătoare [Olt,Naf'07, Rai'01, Kog,Kod'03, Lak,Nik'06] au pus în evidență faptul că unele dezavantaje ale tehnologiei OFDM pot fi contracarate folosind drept purtătoare funcții wavelet, în locul celor sinusoidale. Datorită faptului că aceste undișoare formează o familie ortogonală pe durata unui simbol de transmis, ele pot fi separate la recepție. În plus, față de purtătoarele sinusoidale din OFDM, undișoarele prezintă o serie de avantaje în ceea ce privește complexitatea redusă a implementării, flexibilitate și eficiență spectrală [Olt,Naf'07]. Ideea a fost extinsă și la pachete wavelet, care conferă transmisiei o eficiență spectrală sporită și o mai mare adaptabilitate la condițiile din canal [Jam,Mäh'05]. Pe parcursul acestui capitol se vor analiza avantajele pe care le poate aduce folosirea undișoarelor în diverse poziții ale unui lanț de transmisie. Ne vom referi aici la folosirea undișoarelor în locul filtrelor Nyquist, și, în contextul modulațiilor multi-purtătoare, la folosirea undișoarelor într-o transmisie multi-purtătoare bazată pe aceleași principii ca și OFDM.

2.2 O privire generală asupra funcțiilor wavelet

O abordare modernă a comunicațiilor de date privește canalul de transmisie ca fiind un plan timp-frecvență. Pe dimensiunea "frecvență" se poate identifica lățimea de bandă dedicată unei transmisii, iar în planul timp modalitatea în care resursele de transmisie (temporale) sunt alocate pentru transmisie. În conformitate cu principiul de incertitudine Heisenberg-Gabor, aplicat în teoria semnalelor, niciun semnal nu poate fi perfect localizat atât în domeniul timp, cât și în domeniul frecvență [Naf,Gor'95].

O familie de undișoare poate "acoperi" planul timp-frecvență într-o manieră eficientă. Astfel, o undișoară mamă are capacitatea de a genera o familie

ortonormală [Isa,Naf'98]. Această familie se obține prin translatarea în timp și scalarea undișoarei mamă ("wavelets mother"). Relația matematică este:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (2.1)$$

În relația de mai sus, variabilele de scară (s) și cea de poziționare pe axa timpului (τ) sunt variabile continue.

Pentru exemplificare este ilustrată undișoara mamă Symmlet la diverse scări (cu diverse grade de "dilatare") și cu diverse poziții pe axa timpului (fig. 2.1).

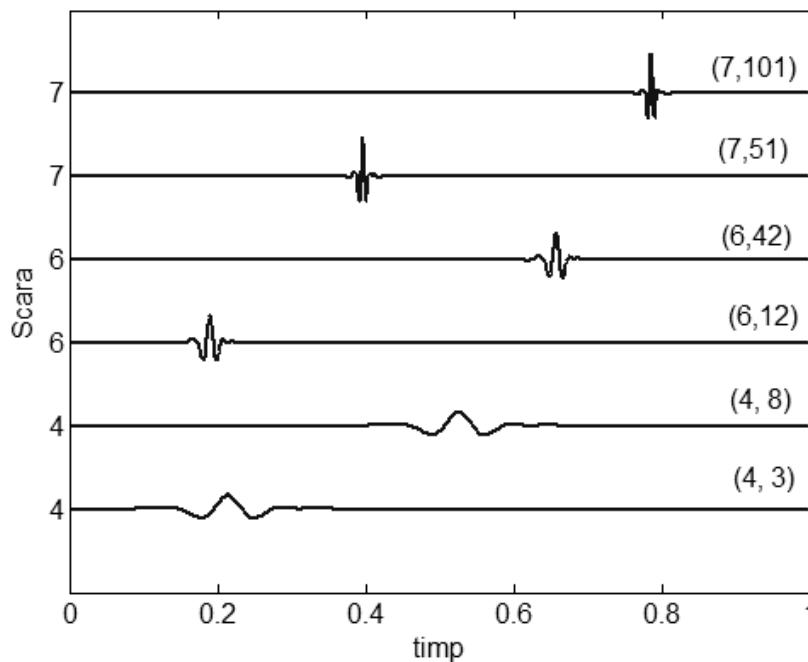


Fig.2.1 : Undișoara mamă Symmlet la diverse scări și locații pe axa timpului.

Undișoarele din partea de jos a figurii corespund unei scări de rezoluție temporală mai slabă, ele fiind dilatate în timp, și deci mai concentrate în frecvență. Pe măsură ce se "urcă" în scală, undișoarele sunt din ce în ce mai concentrate în timp și deci au o întindere în frecvență din ce în ce mai mare.

Folosind o asemenea bază ortonormală, planul timp-frecvență poate fi partajat într-o manieră flexibilă. În figura 2.2c este ilustrată modalitatea în care "atomii" timp-frecvență sunt definiți cu ajutorul funcțiilor wavelet. Se face în același timp o comparație cu modul în care planul timp-frecvență este "partajat" prin intermediul altor abordări, devenite deja clasice în teoria semnalelor. În primul caz (figura 2.2a), planul timp-frecvență este descompus în benzi verticale, situație care ar corespunde eșantionării ideale a unui semnal. În acest caz, eșantioanele au o localizare perfectă în domeniul timp, dar fiecare eșantion în parte are un spectru de frecvențe infinit. Baza de descompunere folosită în acest caz este constituită dintr-o familie de impulsuri Dirac deplasate $\{\delta(t - kT)\}$. O analogie cu ceea ce se întâmplă

În comunicațiile de date ne poate conduce la o asemănare cu principiul accesului multiplu cu diviziune în timp (TDMA): fiecărui utilizator i se alocă din totalitatea timpului de transmisie disponibil o anumită "fracțiune" (o bandă verticală a planului din fig. 2.2a). La polul opus (fig. 2.2b), avem familia de exponențiale complexe folosite în descompunerea în serie Fourier $\{exp(jk\omega_0 t)\}$. Semnalele care compun această bază au o localizare în frecvență perfectă (un impuls Dirac pe axa frecvențelor), dar durata lor ocupă întreaga axă a timpului. Figura 2.2b) ilustrează de fapt principiul accesului multiplu cu diviziune în frecvență (FDMA), în care, la un moment dat, mai mulți utilizatori pot transmite (recepționa) simultan, însă pe frecvențe diferite. Spre deosebire de cazurile amintite mai sus, undișoarele conduc la o rezoluție temporală bună la frecvențele înalte, și la o rezoluție în frecvență bună pentru frecvențele joase. Acest lucru este dezirabil pentru analiza semnalelor, deoarece frecvențele joase presupun o evoluție lentă a semnalului (deci nu se cere o acuratețe deosebită în domeniul timp), în timp ce frecvențele înalte se regăsesc în tranziții bruște în semnal, a căror "captare" este favorizată de o rezoluție temporală bună.

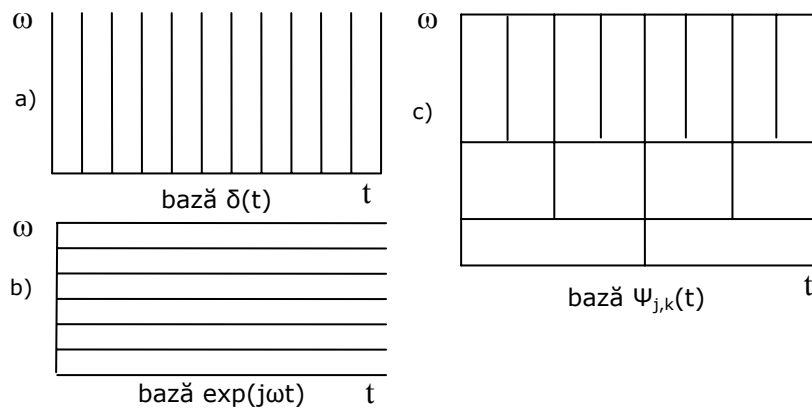


Fig. 2.2: Canalul de comunicație văzut ca un plan timp-frecvență.

Așa cum s-a discutat mai devreme, această modalitate de partajare a planului timp-frecvență poate fi obținută prin translatarea și scalarea pe axa timpului a unei funcții unice care se numește undișoară mamă, $\psi(t)$. Dacă se discretizează acum variabilele timp și scară din relația (2.1), se poate obține o versiune discretă de undișoară mamă, $\psi_{j,k}(t)$ (vezi relația 2.2). De remarcat aici că nu variabila timp este cea care conduce la versiunea discretizată a undișoarei, ci ceilalți doi parametri ai acesteia.

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} \cdot t - k\tau_0) \tag{2.2}$$

Pentru a se obține versiunea discretizată a familiei de undișoare, $\{\psi_{j,k}(t)\}$, relațiile folosite au fost: $s = s_0^j$ și $\tau = ks_0^j \tau_0$. O alegere des întâlnită pentru s_0 este $s_0 = 2$, care conduce la undișoarele folosite în așa numita Transformare Wavelet Diadică

(Dyadic Wavelet Transform). Dacă ne referim acum la un semnal în timp continuu $x(t)$, versiunea discretizată a transformării wavelet continue va fi:

$$DWT_x(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi_{j,k}^*(t) \cdot dt \quad (2.3)$$

Relația (2.3) definește de fapt produsul scalar între semnalul $x(t)$ și o funcție din familia $\{\psi_{j,k}(t)\}$. Ea se aseamănă cu relația ce permite calculul coeficienților Fourier ai unui semnal periodic, însă este o funcție de doi parametri: scară (j) și poziție pe axa timpului (k). Acesta este motivul pentru care relația (2.3) este uneori denumită "Wavelet Series Transform" [Pol'01]. Se remarcă, din relația (2.2), că incrementarea lui j conduce la scăderea rezoluției temporale. Daubechies [Dau'92] a arătat că, pentru ca să existe o funcție undișoară-mamă $\{\psi(t)\}$, este nevoie să existe o altă funcție, denumită funcție de scară și notată cu $\varphi(t)$. Versiunile scalate ale acestei funcții sunt $\varphi_j(t) = \varphi(2^{-j}t)$. Orice funcție wavelet de la scara j poate fi generată ca și o combinație liniară a funcțiilor de scară de la scara $j-1$. De exemplu, o undișoară mamă de la scara 0 poate fi scrisă astfel:

$$\psi_0(t) = \sum_k a_k \varphi(2t - k) \quad (2.4)$$

Un asemenea exemplu, dat pentru undișoara Haar este ilustrat în figura 2.3. Se observă cum undișoara mamă este o sumare ponderată a două funcții de scară "comprimare".

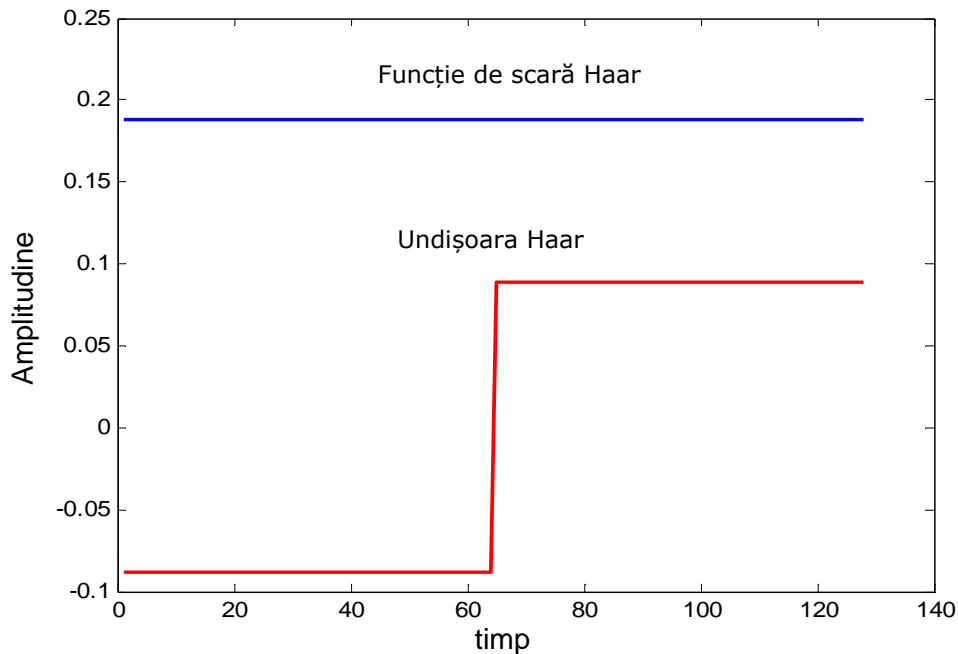


Fig. 2.3: Obținerea undișoarei mamă Haar din funcția de scară corespunzătoare.

2.3 Transformarea wavelet discretă

Pentru implementarea pe calculator a transformării wavelet indicată în relația (2.3) există o serie de constrângeri specifice. Principala rețineră manifestată față de versiunea continuă a transformării wavelet o constituie redundanța sa ridicată. Ca un exemplu concret, dacă dorim să aplicăm o transformare wavelet continuă în Matlab asupra unui semnal de intrare de N eșantioane, pe un număr de S scări, rezultatul final va fi o matrice de $N \cdot S$ numere (coeficienți wavelet), ceea ce face această transformare dificil de aplicat în multe situații practice. Transformarea Wavelet Discretă (DWT), pe de altă parte, oferă suficientă informație pentru analiza, respectiv sinteza semnalelor, și, în contextul acestei lucrări poate fi folosită în procedura de modulație multi-purtătoare.

Termenul de Transformare Wavelet Discretă este în strânsă legătură cu acela de analiză multi-rezoluție [Mal'09]. Ideea este aceeași care stă la baza transformării wavelet continue, respectiv obținerea unei reprezentări timp-scară a semnalului, de data aceasta însă folosind tehnici de filtrare digitală. În cazul transformării discrete este vorba de filtre cu diverse caracteristici care sunt folosite pentru a examina semnalul la diverse scări de descompunere. Folosirea algoritmului lui Mallat ne permite să "ocolim" o problemă importantă ridicată de calculul transformării wavelet. Astfel, în multe cazuri, nu se cunosc expresiile analitice ale undișoarelor și ale funcțiilor de scară. Totuși, calculul Transformării Wavelet Discrete este posibil, grație algoritmului lui Mallat [Mal'09], folosind bancuri de filtre ale căror coeficienți depind de undișoara-mamă. Așadar, semnalul este trecut printr-o serie de filtre trece-sus (FTS), care permit evidențierea frecvențelor înalte din semnal, și, pe de altă parte, printr-o serie de filtre trece-jos (FTJ) care permit analiza frecvențelor joase din semnal. Rezoluția semnalului (care este o măsură a nivelului de detaliu care poate fi observat în semnalul respectiv) este schimbată prin aceste operații de filtrare. Pe de altă parte, scara este modificată prin operații de sub-eșantionare (la analiză) respectiv supra-eșantionare (la sinteză). Subeșantionarea unui semnal corespunde reducerii ratei de eșantionare (coeficienții sunt localizați mai "rar" pe axa timpului) și se face prin înlăturarea unor eșantioane din semnalul de la o anumită rezoluție. Supraeșantionarea, pe de altă parte, corespunde creșterii ratei de eșantionare a semnalului prin adăugarea unor eșantioane în acesta. Coeficienții DWT astfel obținuți corespund unei eșantionări a transformării continue, eșantionare care se produce atât pentru variabila de scară cât și pentru cea de poziție, așa cum s-a arătat în secțiunea anterioară. Spre deosebire de ceea ce avem în relația (2.3), trebuie notat că într-o implementare pe calculator și semnalul de analizat va fi unul discretizat.

Schema de implementare a DWT directe este ilustrată în figura 2.4, ea fiind de fapt o ilustrare a algoritmului lui Mallat. Procedura începe prin filtrarea semnalului cu ajutorul unui filtru digital trece-jos, $g[n]$ care are lățimea de bandă $n/2$. Reamintim în acest context că frecvența maximă din spectrul unui semnal în timp discret este n , frecvență care ar corespunde jumătății frecvenței de eșantionare a unui semnal analogic generator. Dacă semnalul este de bandă limitată și eșantionarea respectă condițiile de reconstrucție, atunci întreg spectrul semnalului se va putea regăsi în banda $[0, f_e/2]$. Filtrarea efectuată corespunde efectuării unei operații de convoluție a semnalului cu răspunsul la impuls al acestui filtru. După trecerea semnalului prin filtru, are loc o decimare a ieșirii filtrului cu factorul 2, care nu duce la o pierdere de informație semnificativă, deoarece în acest moment banda

semnalului discret este de doar $n/2$, jumătate din banda originală. Scara semnalului este acum dublul celei originale, sau, în termeni mai apropiați de analiza multirezoluție, se poate spune că s-a obținut un anumit nivel de aproximare a semnalului.

De remarcat aici că filtrarea elimină doar componentele de înaltă frecvență, fără a duce la o modificare propriu-zisă a scării, care este realizată prin procesul de subeșantionare (decimare). Pe de altă parte, rezoluția semnalului este legată de cantitatea de informație pe care aceste o conține și este prin urmare afectată de către operația de filtrare. Simplificând lucrurile, se poate afirma că eliminându-se jumătate de bandă, s-a pierdut jumătate din informația pe care semnalul o conținea, deci că rezoluția s-a înjumătățit [Pol'01]. Pentru a avea o imagine completă trebuie notat că subeșantionarea nu diminuează rezoluția, deoarece operația anterioară de filtrare a condus la un semnal "supra-eșantionat", în care jumătate dintre eșantioane sunt redundante.

Procedura de filtrare și decimare poate fi exprimată de relația:

$$y[n] = \sum_k h[k]x[2n - k] \quad (2.5)$$

Odată acestea precizate, se va urmări în continuare, pas cu pas, modalitatea în care este calculată DWT. Trebuie ținut cont aici de faptul că DWT analizează semnalul în diverse benzi de frecvență cu diverse rezoluții, prin descompunerea acestuia în informație (coeficienți) de aproximare, respectiv de detaliu. În acest scop, DWT utilizează două seturi de filtre despre care s-a mai vorbit, care sunt asociate cu funcțiile de scară (în cazul FTJ) și cu undișoarele (în cazul FTS). Răspunsurile la impuls ale acestor filtre sunt $g[n]$, respectiv $h[n]$. Descompunerea semnalului în diverse subbenzi este obținută prin aceste operații succesive de filtrare trece jos și trece sus, ilustrate în relațiile (2.6).

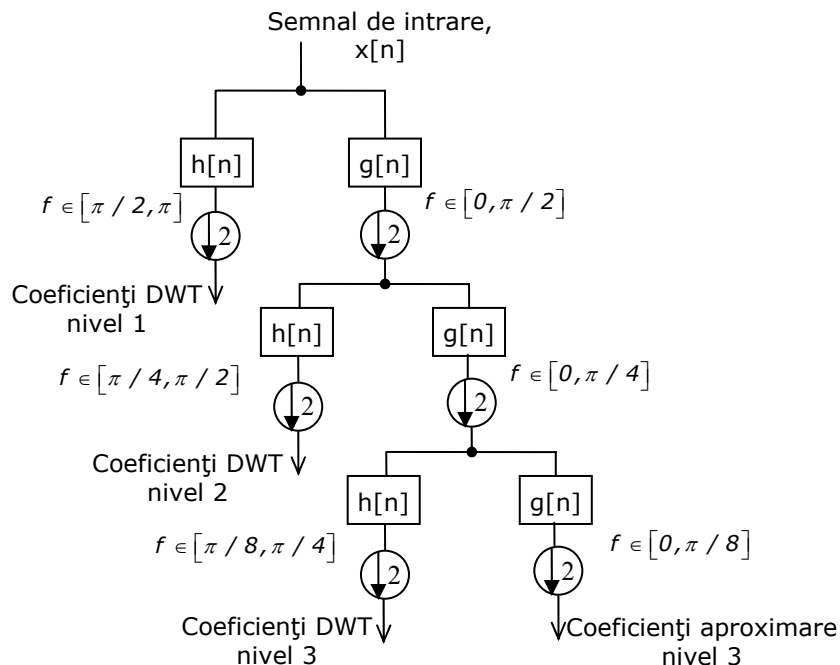


Fig. 2.4: Implementarea DWT folosind bancuri de filtre.

$$\begin{aligned} y_{TS}[n] &= \sum_k x[k]h[2n-k] \\ y_{TJ}[n] &= \sum_k x[k]g[2n-k] \end{aligned} \quad (2.6)$$

La fiecare iterație, rezoluția temporală devine mai slabă, iar cea în frecvență mai bună, așa cum ne arată procedura, deja explicată din fig. 2.4.

O proprietate foarte importantă a DWT este că răspunsurile la impuls ale filtrelor folosite nu sunt independente, ele fiind legate prin relația:

$$h[L-1-n] = (-1)^n g[n] \quad (2.7)$$

unde L reprezintă lungimea, în eșantioane, a răspunsului la impuls al filtrelor. Conversia de la caracteristica trece-jos la aceea trece-sus este furnizată de către factorul $(-1)^n$. Filtrele care satisfac relația (2.7) sunt denumite "filtre oglindite în cuadratură" (quadrature mirror filters).

Reconstrucția semnalului din coeficienți este facilă, deoarece folosirea acestor filtre duce la formarea unor baze ortonormale. Astfel, fiecare semnal poate fi văzut ca o combinație liniară a componentei sale trece-sus, respectiv trece-jos. La fiecare iterație a transformării inverse folosite în reconstrucție, semnalul este supraeșantionat și trecut prin filtrele de sinteză. Formula de reconstrucție, pentru fiecare nivel în parte este următoarea:

$$x[n] = \sum_k (y_{TS}[k]h[2k-n] + y_{TJ}[k]g[2k-n]) \quad (2.8)$$

O privire atentă asupra relației precedente ne arată că filtrele de reconstrucție folosite sunt asemănătoare celor de descompunere, fiind de fapt o versiune reflectată în timp a acestora:

$$\begin{aligned} h_1[n] &= h^*[-n] \\ g_1[n] &= g^*[-n] \end{aligned} \quad (2.9)$$

În relația (2.8) s-au înlocuit direct filtrele de sinteză cu expresia ce le leagă de filtrele de analiză. De notat aici că, date fiind operațiile de supra sau sub-eșantionare cu 2, o implementare facilă a transformării se poate face atunci când semnalul asupra căruia se aplică transformarea are un număr de eșantioane egal cu 2^L . În această situație se pot aplica cel mult L iterații ale transformării, deoarece la fiecare nivel de descompunere numărul coeficienților obținuți este de două ori mai mic decât la scara precedentă, ajungându-se în situația ca, dacă numărul de iterații este maxim, la scara cea mai brută de aproximare să avem un singur coeficient. Implementarea reconstrucției se exemplifică în figura 2.5, pentru 3 niveluri de descompunere. Filtrele de reconstrucție sunt notate cu g_1 , respectiv h_1 .

Dacă filtrele trece-jos și trece-sus sunt ideale, atunci poate fi realizată reconstrucția exactă. Cu toate că nu este posibilă implementarea practică a unor filtre ideale, în anumite condiții se pot defini filtre implementabile, care să permită reconstrucția exactă a semnalului. Unele dintre cele mai cunoscute asemenea filtre au fost introduse de către Ingrid Daubechies [Dau'92]. Interpretarea coeficienților rezultați în urma aplicării DWT poate fi uneori destul de dificilă. Vom insista însă asupra ei printr-un exemplu, datorită relevanței acestui aspect asupra subiectului principal al paragrafului curent, și anume transmisia de date cu ajutorul funcțiilor wavelet.

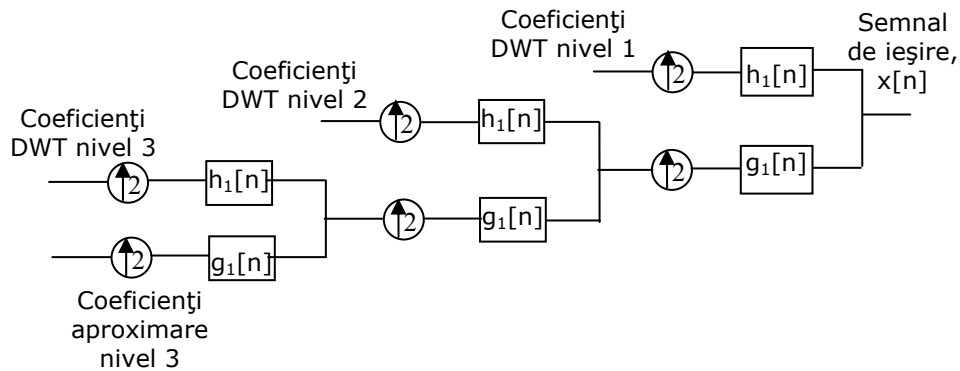


Fig. 2.5: Implementarea IDWT folosind bancuri de filtre.

Bazându-ne pe figurile 2.4 și 2.5, să presupunem că avem de-a face cu un semnal de 1024 eșantioane, eșantionat cu 10 MHz. Fiindcă este vorba despre această frecvență de eșantionare, cea mai mare frecvență a semnalului de analizat va fi aceea de 5 MHz. După prima iterație a algoritmului lui Mallat, se vor obține 512 eșantioane la ieșirea filtrului trece-sus, eșantioane denumite coeficienți wavelet la primul nivel. Ei reprezintă informația conținută în banda [2.5, 5] MHz. Pe de altă parte la ieșirea FTJ se obțin 512 coeficienți de aproximare, corespunzând benzii [0, 2.5] MHz, care sunt cei supuși în continuare descompunerii. Procedeeul se repetă succesiv asupra acestor coeficienți, obținându-se detaliile la cea de-a doua iterație și coeficienți de aproximare, iar la cea de-a treia iterație vom obține finalmente un set de alți 128 coeficienți de detaliu, respectiv aproximare. Acești din urmă coeficienți de aproximare vor conține informație din banda [0, 622.5] KHz. Rezultatul final al calculului DWT va fi astfel un vector de 1024 de coeficienți, concatenați astfel: $\{a_3(128), d_3(128), d_2(256), d_1(512)\}$. Se observă încă o dată că DWT nu este redundantă, celor 1024 de eșantioane de intrare corepunzându-le 1024 de coeficienți de ieșire. Rămân valide considerațiile anterioare: la fiecare iterație se reduce numărul de eșantioane (deci scade rezoluția temporală), dar se și înjumătățește banda (deci se îmbunătățește rezoluția în frecvență). În acest fel se realizează partajarea planului timp-frecvență în "atomii" prezentați în fig. 2.2.

2.4 Criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol și funcțiile wavelet

Ca o temă conexă transmisiei multi-purtătoare cu ajutorul funcțiilor wavelet, se va discuta în continuare despre folosirea undișoarelor ca și "formatoare de impulsuri", în locul filtrelor clasice de tip Nyquist. Pentru a avea o înțelegere mai bună a problemei, se va face întâi o revedere a importanței pe care criteriul lui Nyquist o are în transmisiile de date. Se va pleca în acest demers de la o schemă simplificată a unui lanț de transmisie de date în banda de bază, reprezentat în figura 2.6.

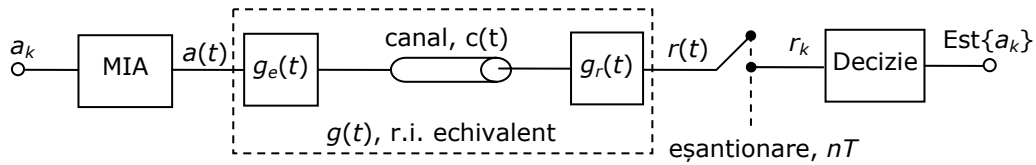


Fig. 2.6: Schema bloc a unui lanț de transmisie în banda de bază.

Simbolurile de date de transmis, notate cu $\{a_k\}$ sunt trecute printr-un modulator de impulsuri în amplitudine (MIA) obținându-se semnalul $a(t)$:

$$a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT) \quad (2.10)$$

Modulatorul de impulsuri în amplitudine este o construcție imaginară (nu poate fi implementat în practică), dar el este extrem de folositor pentru modelarea matematică a sistemului de transmisie, așa cum se va vedea. De notat că simbolurile transmise sunt separate pe axa timpului cu intervalul T , denumit interval elementar alocat transmisiei unui simbol. Acest interval de timp poate fi considerat, din motive de simplitate, egal cu pasul de eșantionare folosit la receptor. Vom considera în continuare cazul cel mai simplu în care simbolurile de transmis a_k corespund unei secvențe bipolare echiprobabile, valorile posibile fiind 1 și -1.

Semnalul $a(t)$ este transmis printr-un canal cu răspunsul la impuls $g(t)$, care este un ansamblu format din filtrul de emisie, mediul de transmisie și filtrul de recepție. Răspunsul la impuls echivalent se poate calcula cu ajutorul convoluției:

$$g(t) = g_e(t) * c(t) * g_r(t) \quad (2.11)$$

Semnalul ajuns la receptor (înainte de eșantionare) va fi:

$$r(t) = a(t) * g(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \quad (2.12)$$

Receptorul eșantionează acest semnal cu pasul T , pentru efectuarea detecției simbolurilor transmise. Conform ecuației (2.12), valoarea celui de-al n -lea eșantion recepționat va fi:

$$r_n = r(nT) = \sum_k a_k g((n - k)T) = \dots + a_{n-1}g(T) + a_n g(0) + a_{n+1}g(-T) + \dots \quad (2.13)$$

După cum se observă din ecuația (2.13), semnalul ajuns la receptor este o sumă ponderată de răspunsuri la impuls ale canalului echivalent, ponderile fiind date de valoarea simbolurilor transmise. Dintre toți termenii care compun r_n , unul singur este "util" din punct de vedere al receptorului, și anume acela care este determinat de transmisia simbolului corespondent la emisie, adică a_n . Toți ceilalți termeni sunt denumiți termeni de interferență inter-simbol, deoarece ei conduc la situația în care simboluri anterior sau ulterior emise contribuie la valoarea eșantionului curent. În practică (pentru sisteme cauzale) există doar termenii din stânga ai relației (2.13), până la acela care îl conține pe a_n . Pentru ca IIS să fie nulă, condiția necesară, descrisă de criteriul I a lui Nyquist [Pro'95] este:

$$g(nT) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 0 \\ 0, & \text{daca } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Condiția este una logică, pentru că, întrucât nu putem impune nici un fel de constrângeri asupra simbolurilor a_k transmise (care sunt alese aleator), singura modalitate este da a transfera această constrângere asupra răspunsului la impuls al canalului echivalent. Acesta poate fi controlat prin filtrele de emisie și de recepție, chiar dacă răspunsul la impuls al mediului fizic de transmisie este unul dat. Procedura poate fi interpretată ca o egalizare a canalului.

Se poate observa că relația (2.14) condiționează răspunsul la impuls echivalent doar în punctele de eșantionare nT , și nu are nici într-un fel în vedere forma răspunsului $g(t)$ în afara acelor puncte. Cu alte cuvinte, dacă în punctele nT răspunsul la impuls echivalent al canalului trece prin 0, atunci IIS va fi nulă, cu condiția ca eșantionarea la recepție să fie perfect sincronizată, adică să aibă loc exact în punctele $t_n = nT$.

Revenind acum la $g(t)$, reamintim că expresia lui este dată de filtrul de emisie, de mediul fizic de transmisie și de filtrul de recepție. Se consideră în cele ce urmează un canal ideal pentru transmisia de date, pentru care $c(t) = \delta(t)$. Dacă această condiție nu este satisfăcută, se impune utilizarea unui filtru suplimentar la recepție care, împreună cu canalul să conducă înspre un răspuns cât mai aproape de cel ideal. Acest amănunt nu modifică în mod semnificativ natura problemei discutate. Filtrul de emisie $g_e(t)$ va fi numit, în contextul dat, filtru formator de impulsuri, iar cel de la recepție, $g_r(t)$ filtru adaptat la forma semnalului. Ambele denumiri sunt justificate, deoarece filtrul formator de emisie este cel ce dă o anumită formă semnalului transmis în canal, modificând impulsurile Dirac emise (cu referire la semnalul $a(t)$), iar cel de recepție poate fi construit astfel încât să elimine pe cât posibil zgomotul introdus de către mediul de transmisie (considerat de obicei zgomot alb gaussian). Aceste denumiri sintetizează de fapt și cele două mari probleme cu care ne confruntăm în transmisiile digitale: interferența inter-simbol și zgomotul. În ipotezele făcute, filtrul adaptat la forma semnalului va avea răspunsul la impuls $g_r(t) = g_e(T - t)$ [Pro'95], iar răspunsul echivalent al canalului va fi:

$$g(t) = g_e(t) * g_e(T - t) = \int_0^T g_e(\tau) \cdot g_e(t - T + \tau) d\tau = R_{g_e}(t - T) \quad (2.15)$$

În relația (2.15), cu $R_{g_e}(t)$ s-a notat funcția de autocorelație corepunzătoare filtrului de la emisie, $g_e(t)$. Ținând cont de relațiile (2.14) și (2.15), rezultă că în cazul folosirii filtrelor Nyquist, criteriul de interferență nulă inter-simbol poate fi pus sub forma:

$$R_{g_e}[n] = R_{g_e}(nT) = \delta[n] \quad (2.16)$$

În cele ce urmează se dă o demonstrație a faptului că orice funcție care generează baze ortonormale prin translație cu întregi satisface criteriul lui Nyquist de IIS nulă. Rezultatul va fi particularizat pentru funcțiile de tip undișoară – mamă.

2.4.1 Baze ortonormale pentru transmisii fără interferență inter-simbol

O familie de funcții $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ compune o bază Riesz dacă și numai dacă există două numere întregi pozitive astfel încât:

$$A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(x-k) \right|^2 dx \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 \quad (2.17)$$

Condiția poate fi rescrisă astfel:

$$0 \leq A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B \quad (2.18)$$

unde $G(\xi)$ are forma unei transformate Fourier a lui $g(x)$ [Mal'09]. Dacă se utilizează notația $A(\xi) = |G(\xi)|^2$, atunci termenul de mijloc din relația 2.18 poate fi scris:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(\xi + 2k\pi) \quad (2.19)$$

În conformitate cu relația ce leagă spectrul unui semnal eșantionat de acela al semnalului inițial [Naf,Gor'95], termenul din dreapta din relația 2.19 poate fi privit ca și spectru al unui semnal $a(x)$ eșantionat, pasul de eșantionare fiind egal cu 1. După cum se observă, $A(\xi)$ are dimensiunea unei densități spectrale de putere și astfel, conform teoremei Wiener-Hinchin, $a(x)$ poate fi privit ca și o funcție de intercorelație a lui g . Dacă se particularizează relația (2.18) pentru $A=B=1$ [Mal'09], atunci familia $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ devine o bază ortonormală. În acest caz, relația (2.18) se va transforma în:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.20)$$

Pentru că $|G(\xi)|^2$ reprezintă spectrul funcției de autocorelație eșantionate a lui $g(x)$, aplicarea transformării Fourier inverse va conduce la o relație similară cu (2.16), referitoare la primul criteriu a lui Nyquist. Acest lucru permite o concluzie foarte importantă, și anume: **orice funcție care generează familii ortonormale prin translație cu întregi satisface criteriul de interferență nulă a lui Nyquist.** Observația anterioară are un grad mare de generalitate și deschide noi perspective asupra modului în care pot fi alese filtrele formatoare de impulsuri.

2.4.2 Formarea impulsurilor cu ajutorul funcțiilor wavelet

O proprietate bine cunoscută a funcțiilor wavelet [Isa,Naf'98] este că ele pot genera baze ortogonale ale lui $L^2(\mathbb{R})$. Pentru ca această proprietate să fie validă este nevoie ca familia $\psi_{j,k}(t)$ să satisfacă pe de o parte condiția de ortogonalitate, iar pe de altă parte aceea de a constitui o bază completă. Pentru această din urmă condiție este nevoie ca orice semnal din $L^2(\mathbb{R})$ să poată fi scris ca și combinație liniară a funcțiilor din familia de undișoare. În contextul problemei vizate, ne interesează mai cu seamă prima proprietate, care din punct de vedere matematic poate fi formulată astfel:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{m,n} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{daca } j = m \text{ si } k = n \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (2.21)$$

Ca și un caz particular, proprietatea este valabilă și dacă ne restrângem la o singură scară de descompunere (adică dacă $j=m$ în ecuația 2.21). În această situație se poate afirma că familia ce se obține prin translatarea în timp a undișoarei mamă $\psi(t)$ și anume $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ reprezintă o familie ortonormală. În această situație, ținându-se cont de condiția (2.20), spectrul acestor funcții satisface relația:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.22)$$

Dacă se înlocuiește în relația (2.15) g_e cu ψ și se ține cont de semnificația relației precedente, se poate concluziona că funcția de autocorelație eșantionată a lui $\psi(t)$ va conduce la un impuls unitar, exact ca în relația (2.16):

$$R_{\psi}[n] = R_{\psi}(nT) = \delta[n] \quad (2.23)$$

Un exemplu grafic, generat cu ajutorul programului Matlab este prezentat în fig. 2.7 pentru undișoara Daubechies-12 (care de fapt corespunde undișoarei Daubechies cu 6 momente nule).

Această proprietate de ortogonalitate a unor versiuni translatare în timp ale unor funcții generate de o funcție unică este specifică și funcțiilor de scară $\phi(x)$, nu doar undișoarelor mamă. În consecință, în lanțul de transmisie ilustrat în figura 2.6, filtrul formator de impulsuri $g_e(t)$ poate fi înlocuit prin $\psi(t)$ sau $\phi(t)$, iar receptorul poate utiliza filtrul adaptat (relația 2.24):

$$g_r(t) = \psi(T-t) \quad (2.24)$$

Folosirea undișoarelor ca și formatoare de impulsuri este propusă în [Oli,Kum,Sad'05], lucrare care se focalizează pe eficiența spectrală a unui astfel de sistem.

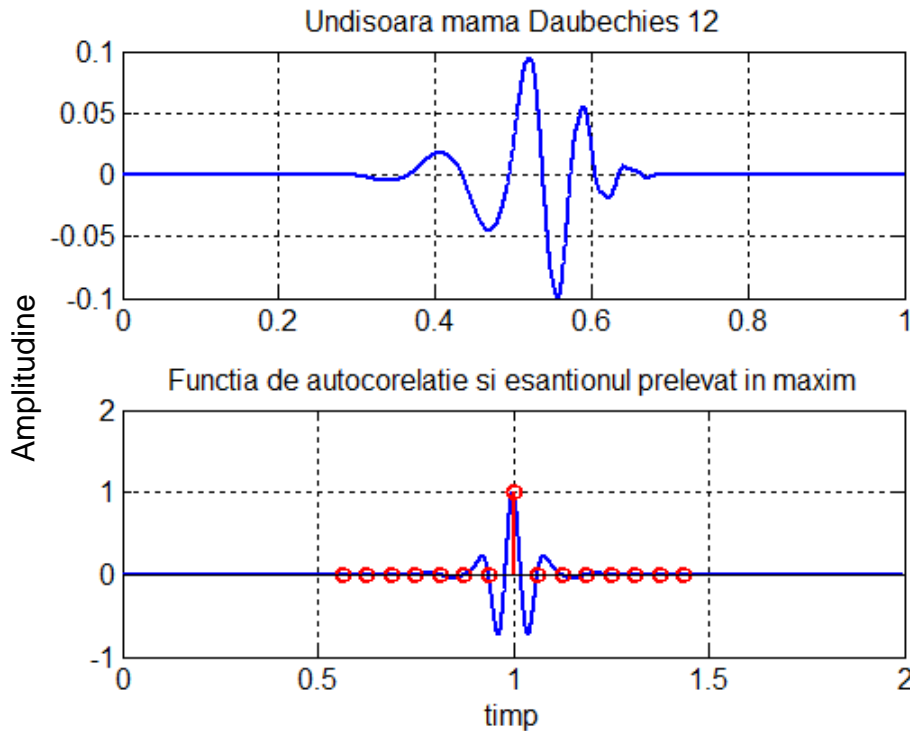


Fig. 2.7: Eșantionarea funcției de autocorelație a unei undișoare mamă.

2.5 Utilizarea undișoarelor în transmisiile multi-purtătoare

Așa cum s-a discutat în capitolul I, tehnica OFDM se bazează pe transmisia multi-purtătoare: mai multe fluxuri de date sunt transmise în paralel, folosind subpurtătoare care sunt ortogonale între ele. Ortogonalitatea este esențială, deoarece ea este cea care permite separarea subpurtătoarelor la receptor. În cazul OFDM, condiția de ortogonalitate este cea indicată de relația (1.9), separarea subpurtătoarelor fiind ilustrată în figura 1.8. Această modulație este implementată în practică cu ajutorul algoritmului FFT, algoritm rapid de calcul a DFT.

Legătura dintre OFDM-ul tradițional și acela bazat pe folosirea funcțiilor wavelet este dată de ortogonalitatea (în ambele cazuri) funcțiilor care vor fi folosite drept purtătoare. Condiția de ortogonalitate pentru familiile wavelet este dată în ecuația (2.21). Pentru a ne apropia de condițiile implicate de generarea pe calculator a undișoarelor, realizată în toolbox-ul Wavelab al programului Matlab, vom reformula definirea familiei de funcții wavelet dată de (2.2) astfel:

$$\psi_{j_m, k}(n) = 2^{j_m/2} \psi(2^{j_m} \cdot n - k \cdot 2^{-j_m} N) \quad (2.25)$$

În relația (2.25) N este numărul de eșantioane care compun undișoara, o putere întreagă a lui 2, iar j_m este notația utilizată pentru un factor de scară modificat. Sensul lui este invers celui dat de relația (2.2), deoarece, pe măsură ce j_m crește se obțin versiuni din ce în ce mai comprimate ale undișoarelor. Valoarea minimă a lui

j_m este 0, reliefând rezoluția cea mai slabă în domeniul timp (și cea mai bună în frecvență), iar cea maximă este $J = \log_2 N$, corespunzând celei mai bune rezoluții în domeniul timp. Astfel, pe o scară a timpului normalată la unitate, durata aproximativă a undișoarei va fi 2^{-j_m} . Cu n se notează indexul eșantionului generat, având valori între 0 și $N-1$, iar k reprezintă un număr întreg, indicând localizarea temporală a undișoarei. Așa cum se vede, deplasarea se face cu multipli de $N/2^{j_m}$.

Trebuie menționat că în literatură există puține referințe teoretice la familii de undișoare care să fie discrete după variabila timp, așa cum ne arată ecuația 2.25. Stephane Mallat [Mal'09] face referire la asemenea undișoare, dând și o formulă de calcul pentru numărul de eșantioane nenule al unei undișoare discrete de la o anumită scară. În general însă, când se dorește calculul DWT sau al IDWT, se folosește algoritmul lui Mallat, prezentat în extenso în subcapitolul anterior. Acest algoritm nu folosește direct undișoare mamă și funcții de scară discrete, ci doar filtrele oglindite în cuadratură. Totuși, toolboxul Wavelab permite definirea, prin eșantioane, a unor undișoare mamă și funcții de scară, pentru care nu există expresii analitice. Aceste funcții se generează în Wavelab aducând un impuls unitar la intrarea unei funcții de calcul a IDWT, și "citindu-se" apoi semnalul de ieșire. Cu scop pur explicativ, vom folosi aceste forme discretizate ale undișoarelor, și modalitățile aferente de generare a familiilor de undișoare și funcțiilor de scară, menționând că nu există demonstrații teoretice care să ne permită să stabilim legături fundamentate matematic între aceste undișoare discretizate și acelea continue în timp.

Se ilustrează în continuare principiul modulării și demodulării wavelet cu ajutorul unui exemplu: se generează 4 simboluri alternante pentru a fi transmise folosind metoda Wavelet OFDM (WOFDM): $\{+1, -1, +1, -1\}$. Purtătoarele folosite sunt din familia Daubechies-10 cu o durată de 128 de eșantioane și se lucrează la scara $j_m = 2$, adică factorul de "compresie temporală" a undișoarelor va fi 4. Simbolul obținut astfel, care se transmite prin canal, este arătat în figura 2.8

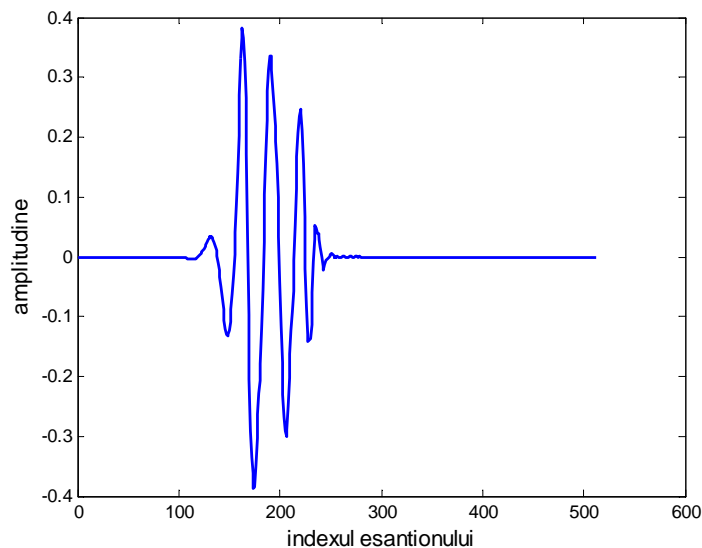


Fig. 2.8: Un simbol WOFDM.

În figura 2.9 se poate vedea cum acționează detectorul pentru a identifica simbolurile transmise: întâi multiplicare cu undișoara corespunzătoare, apoi integrarea semnalului pe durata de transmisie a unui simbol WOFDM. Acest mod de detecție corespunde de fapt aplicării transformării wavelet directe descrisă în relația (2.3).

Exemplul acesta este dat pentru o mai bună înțelegere a principiilor

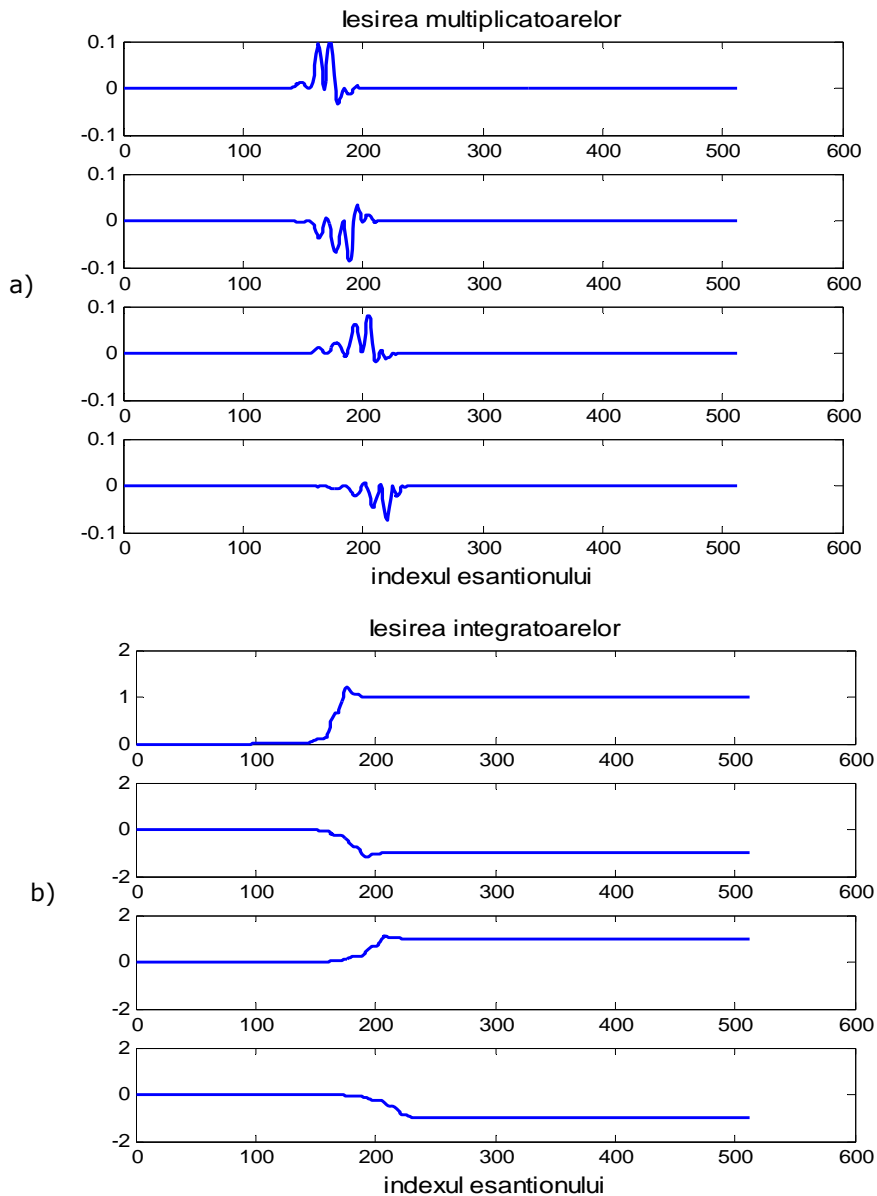


Fig.2.9: Demodularea simbolului WOFDM: ieșirea multiplicatorului (a) și a integratorului (b).

modulației WOFDM și a similitudinilor care există între principiile sale și acelea ale OFDM-ului clasic. În realitate, atât în implementarea modulatorului cât și a demodulatorului se recurge la bancuri de filtre, și nu la undișoare mamă sau funcții de scară. Se observă cum la ieșirile integratoarelor plasate pe ramurile (pe subpurtătoarele) pe care s-a transmis simbolul 1, semnalul are tendința de creștere, ajungând destul de rapid aproape de valoarea 1. Efectul este similar pentru ramurile 2 și 4, însă de data aceasta vom vorbi de valori negative. Eșantionarea conduce fără probleme la identificarea simbolurilor transmise.

Unul dintre punctele cheie ale modulației wavelet este că ea poate fi generată prin tehnici de procesare numerică de semnal, respectiv prin intermediul IDWT. În acest caz, semnalul transmis în canal va fi "sintetizat" (exact ca în cazul OFDM) cu ajutorul unor coeficienți wavelet, respectiv de scară. Astfel, datele de transmis pot fi privite ca fiind definite într-un domeniu transformat, exact cum se întâmplă și la tehnica OFDM. Pentru o mai bună înțelegere, vom da din nou un exemplu concret. Să presupunem că folosim undișoara Haar, și că semnalul $s(t)$ generat va fi aproximat pe calculator printr-unul având $N=16$ eșantioane. În acest caz vom avea $J=4$ și se vor folosi drept purtătoare undișoare Haar de la toate cele 4 scări disponibile (fig. 2.10). Așadar, simbolurile de transmis pot fi văzute ca și un coeficient wavelet ($w_{0,1}$) și unul de aproximare ($a_{0,1}$) pentru nivelul cel mai brut,

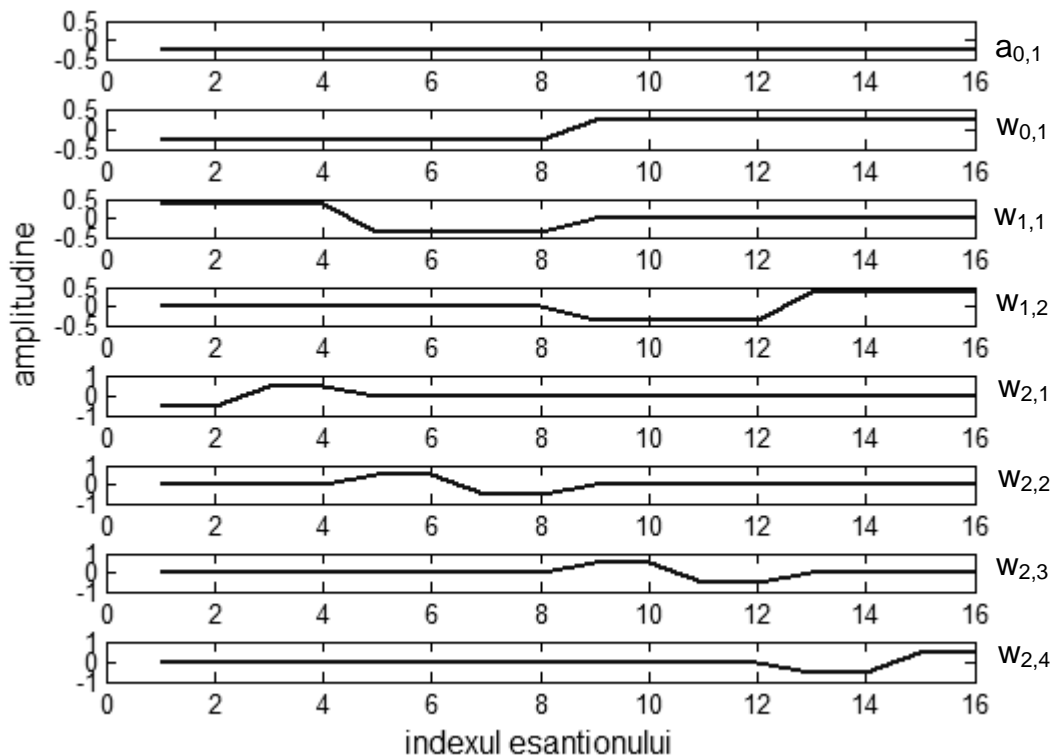


Fig. 2.10: Undișoarele de tip Haar folosite drept purtătoare în WOFDM.

doi coeficienți wavelet pentru $j_m = 1$ ($w_{1,1}$ și $w_{1,2}$), 4 coeficienți pentru $j_m = 2$ și 8 coeficienți pentru $j_m = 3$. Coeficientul de aproximare va modula funcția de scară $\varphi_0(t)$, cel wavelet de la scara cea mai brută va modula undișoara $\psi_0(t)$ ș.a.m.d. Toate aceste forme de undă adunate vor da simbolul WOFDM. O ilustrare grafică este dată în fig.2.10 (pentru a se păstra o rezoluție acceptabilă a reprezentării, s-au arătat doar undișoarele pentru $j_m=0,1$ și 2). La dreapta figurii se poate vedea semnificația fiecărui simbol care modulează undișoara de la scara respectivă, semnificație explicată anterior. Pentru a avea o reprezentare completă a procedurii, undișoarele arătate în fig.2.10 vor fi modulate cu o secvență de 8 simboluri de +1, respectiv -1, aleator alese. Semnalul rezultat (de transmis în canal) este ilustrat în fig.2.11.

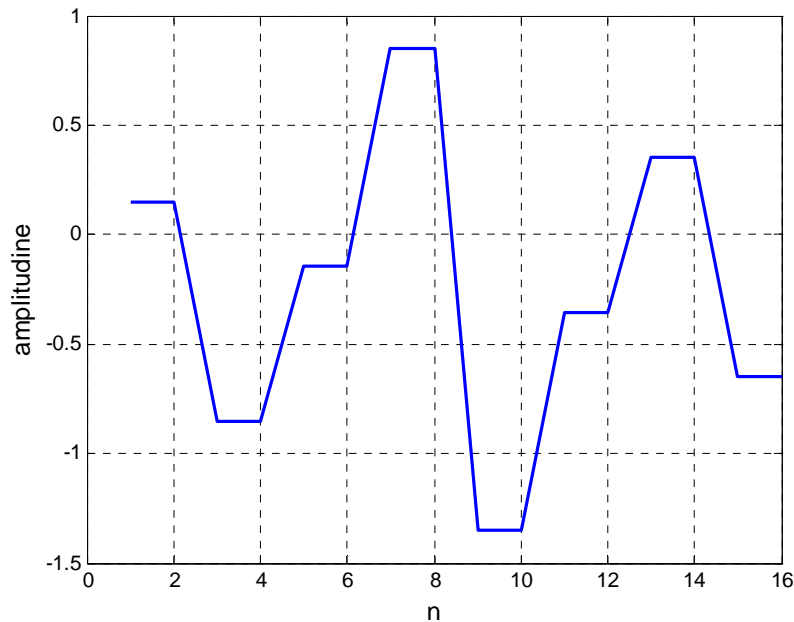


Fig. 2.11: Simbolul WOFDM obținut în urma modulației pe trei scări.

Nici punerea în practică a modulatorului (ca și aceea a demodulatorului), nu necesită în realitate a pașilor menționați anterior (generarea undișoarelor la diverse scări atât la emisie cât și la recepție, modularea, sumarea). Aceasta deoarece, pe de o parte modulatorul se implementează prin intermediul IDWT, iar demodulatorul prin intermediul algoritmului direct (DWT). Astfel, calculul IDWT la modulator, conduce la următoarea "construcție" a semnalului:

$$s(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{J-j}} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \varphi_{L,k}(t) \quad (2.26)$$

În relația (2.26) L reprezintă numărul de iterații pentru care este implementată transformarea (maxim J). În acest caz, vectorul de date de intrare va fi $[\{a_{L,k}\}, \{w_{L,k}\}, \{w_{L-1,k}\}, \dots, \{w_{1,k}\}]$. Implementarea este ilustrată în fig. 2.12.

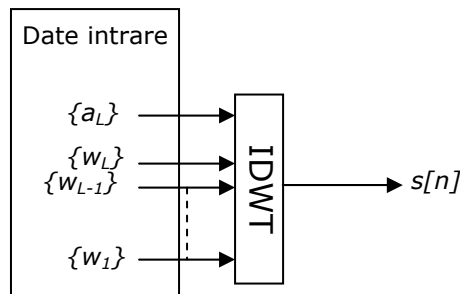


Fig. 2.12: Implementarea WOFDM cu ajutorul IDWT.

Blocul IDWT realizează operațiile de filtrare și supraeșantionare, descrise în capitolul 2.3, iar ieșirea va fi un semnal discret cu 2^J eșantioane.

Toate detaliile anterioare legate de implementarea tehnicii WOFDM ne indică similitățile conceptuale și practice cu OFDM-ul clasic. Chiar și faptul că modulatorul, respectiv demodulatorul, sunt implementate din nou în banda de bază, prin procesare de semnal (aplicând doar un alt algoritm) este un indiciu în plus al faptului că aceste metode partajază o bază teoretică și chiar practică asemănătoare. În consecință, modulația wavelet poate fi simulată folosind o schemă bloc asemănătoare cu aceea utilizată în cazul OFDM, schemă prezentată în fig. 2.13:

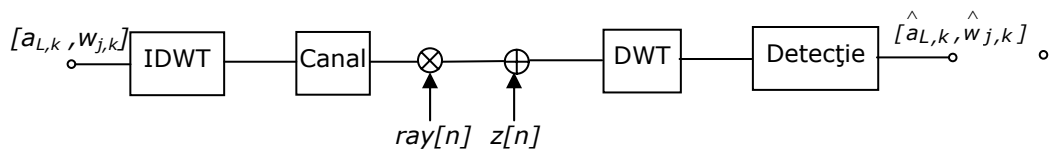


Fig. 2.13: Simularea transmisiei WOFDM.

De remarcat interpretarea datelor de intrare, văzute ca și coeficienți wavelet, respectiv de aproximare. De fapt, este vorba despre simbolurile care trebuie transmise, ce corespund schemei de modulație (constelației de semnal) folosite. Dacă este vorba despre modulații care transportă mai mult decât un bit per simbol (QPSK, 16 QAM etc.), atunci simbolurilor de transmis le vor corespunde numere complexe (vezi paragraful 1.2.1), și, în acest caz, trebuie lucrat pe două ramuri (una corespunzând componentei în fază, iar cealaltă componentei în cuadratură). Aceasta, deoarece spre deosebire de DFT, DWT este o transformare reală, și, în principiu, la intrarea blocului DWT ar trebui aduse numere reale, și nu complexe.

Blocului denumit "canal" în schema din fig. 2.13 îi corespunde o funcție de transfer ($H(z)$). În cazul cel mai simplu, $H(z)=1$, răspuns care nu influențează semnalul ce trece prin acest bloc. În acest caz, influența mediului de transmisie este determinată de două tipuri de zgomote. Secvența $z[n]$ corespunde în general situației unui zgomot alb, gaussian și de medie nulă. Secvența $ray[n]$ este distribuită Rayleigh, și prin intermediul ei se simulează variabilitatea în timp a canalului. În cazul în care $H(z)$ este diferit de 1, atunci se poate surprinde și caracterul selectiv în frecvență al mediului de transmisie folosit.

3. O COMPARAȚIE EXPERIMENTALĂ ÎNTRE OFDM ȘI WOFDM

Multiplexul ortogonal cu divizune de frecvență (OFDM) cunoaște o mare expansiune, fiind folosit actualmente într-un mare număr de tehnici de transmisie cu și fără fir, bazate pe standarde sau soluții-proprietar. Aceasta se întâmplă datorită avantajelor sale de necontestat, dintre care le reamintim pe cele mai importante: rezistență mare la fenomenul de interferență inter-simbol (datorită duratei mari a simbolurilor transmise), implementare fiabilă și puțin costisitoare bazată pe tehnici de prelucrare numerică de semnal (FFT), precum și egalizarea relativ simplă a canalului prin utilizarea unui prefix circular. În pofida succesului său actual, tehnica OFDM prezintă totuși și o serie de dezavantaje, care rămân chestiuni încă deschise îmbunătățirilor, și asupra cărora se focalizează la ora actuală eforturile de cercetare. Pentru a răspunde la întrebarea firească "De ce ar mai fi nevoie de o altă formă de modulație multi-purtătoare?" și a deschide o punte înspre modulația bazată pe funcții wavelet, se vor prezenta pe scurt în secțiunea următoare cele mai importante "puncte slabe" ale modulației OFDM.

3.1 Dezavantajele principale ale tehnicii OFDM

Vom începe aici cu problema sincronizării. Astfel, tehnica OFDM se dovedește a fi foarte sensibilă la erorile de sincronizare în timp și frecvență, care pot să apară la receptor față de emițător. Pentru a avea o idee cât mai clară despre aceste probleme, ele vor fi ilustrate prin exemple concrete (de calcul și grafice).

Să începem cu desincronizările în domeniul timp. Practic, o desincronizare în timp înseamnă că receptorul "se înșală" asupra începutului simbolului OFDM, și "citește" acest simbol cu un anumit decalaj. Dacă ne gândim acum la transmisia unui singur simbol OFDM, corespunzând șirului de date $X[k]$, fiecare simbol de date aparținând unei constelații de semnal de tip QAM, expresia semnalului transmis va fi:

$$x_t(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t} = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j\phi[k]} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t}, \quad (3.1)$$
$$t \in [0, T], k = 0, \dots, N-1$$

În relația de mai sus, Δf reprezintă separarea în frecvență dintre două frecvențe purtătoare folosite, iar T este durata simbolului OFDM. După cum se observă, informația este conținută în modulul și faza simbolului complex transmis, $X[k]$. Ignorând întârzierea de propagare a semnalului dintre emițător și receptor, zgomotul din canal precum și fenomenul de propagare multicanal, vom considera că receptorul are o eroare de sincronizare temporală δ_t față de emițător. Adică, receptorul va începe să "citească" cu δ_t secunde mai târziu decât ar trebui simbolul OFDM transmis. În această situație, semnalul recepționat, care este afectat de eroare de sincronizare, va fi:

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j\phi[k]} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot (t - \delta_t)} = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cdot e^{j(\phi[k] - \delta_t)} e^{jk \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot t}, \quad (3.2)$$

$$t \in [0, T], k = 0, \dots, N-1$$

După cum se observă, această eroare are drept consecință o modificare a fazei fiecărui simbol detectat cu cantitatea $2\pi\delta_t$, ceea ce poate conduce la interpretarea greșită a unui mare număr de simboluri $X[k]$ transmise [Kab'03]. De asemenea, această " rotație a fazei " poate fi introdusă și de către canal, nu doar de către receptor [Pol,Moe'95] Situația este ilustrată grafic pentru o modulație în figura 3.1, presupunând că emițătorul folosește modulația QPSK.

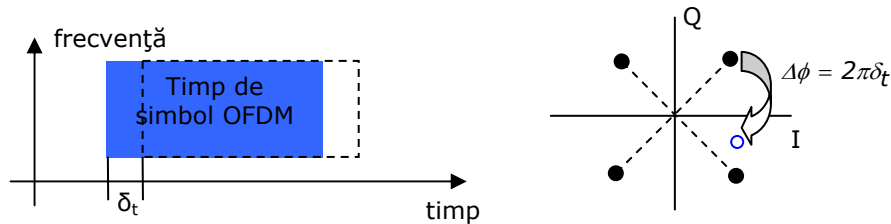


Fig. 3.1: Desincronizarea în timp și eroarea de detecție care apare din pricina acesteia.

Un al doilea tip de desincronizare este aceea în frecvență. Termenul folosit aici ar putea fi mai degrabă "deplasare a frecvenței" decât "desincronizare". În această situație, purtătoarele folosite își pierd ortogonalitatea, conducând la fenomenul de interferență inter-purtătoare, sau interferență inter-canal. Cauza principală a acestei deplasări o constituie efectul Doppler, care apare din pricina variabilității în timp a canalului radio. De asemenea, chiar și într-un canal invariant în timp, desincronizarea purtătoarei de la recepție față de cea de la emisie introduce un efect similar. Acest efect este mult mai supărător la transmisiile multi-purtătoare decât la acelea pe o singură purtătoare [Pol,Bla,Moe'95]. O ilustrare grafică a acestui tip de interferență este dată în fig. 3.2. Se ilustrează în această figură ce se întâmplă dacă subpurtătoarea aflată inițial la frecvența f_4 se deplasează pe axa frecvențelor cu cantitatea δ_f . Se observă că în acest caz, nu mai este satisfăcută proprietatea de ortogonalitate, ceea ce pe grafic se regăsește prin aceea că purtătoarele adiacente purtătoarei f_4 sunt interferate de către aceasta. Pe grafic s-a marcat explicit nivelul de interferență indus purtătoarei f_5 .

Fenomenul este cu atât mai nociv cu cât numărul de subpurtătoare folosite în transmisie va fi mai mare. Astfel, la o lățime de bandă dată, dublând numărul de subpurtătoare, se înjumătățește intervalul de frecvență ce le separă (Δf), și deci deplasarea frecvenței f_4 va avea un efect interferator mai pronunțat. Pentru un exemplu numeric concret, să spunem că în sistemul WiMAX, pentru 512 subpurtătoare folosite, la o lățime de bandă de 5MHz, separarea în frecvență a subpurtătoarelor va fi de cca. 10KHz. Dacă facem ipoteza că viteza de deplasare dintre emițător și receptor este de 100 km/h și că frecvența purtătoare folosită în transmisie este de 3.5GHz, atunci deplasarea Doppler va fi de 324Hz, ceea ce înseamnă relativ la spațierea purtătoarelor o eroare de peste 3%.

O altă problemă a modulației OFDM o reprezintă variabilitatea pronunțată a anvelopei sale [Dar,Tra'00, Kab'03,Dah,Par,Sko,Bem'07], care rezultă într-un raport putere de vârf/ putere medie ridicat. Pentru acest parametru se folosește adesea prescurtarea din limba engleză (PAPR=Peak to Average Power Ratio). PAPR se definește din punct de vedere matematic prin:

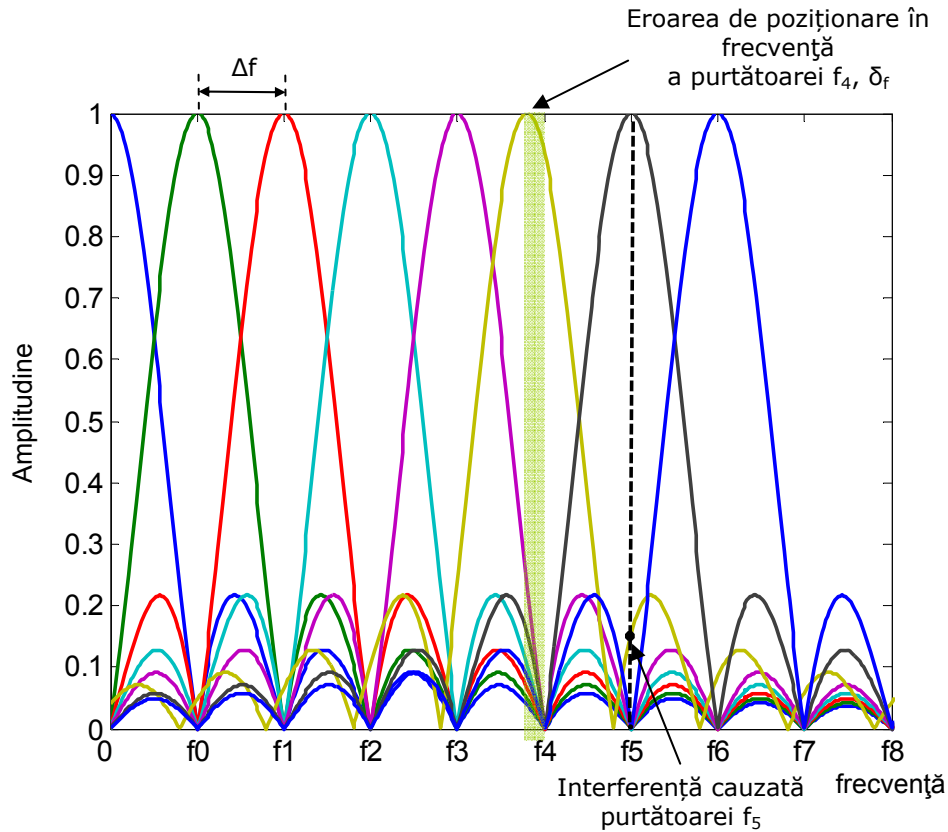


Fig. 3.2: Deplasarea de frecvență.

$$PAPR_x = \frac{P_{var f}}{P_{medie}} = \frac{|\max(x(t))|^2}{(RMS(x(t)))^2} \quad (3.3)$$

unde *RMS* este prescurtarea de la Root Mean Square, având semnificația unei valori efective a semnalului. Acest lucru îngreunează sarcina amplificatoarelor de putere folosite, care pot introduce efecte de neliniaritate. În figura 3.3 este dat un exemplu pentru o transmisie OFDM cu 8 purtătoare, simbolurile modulatorie corespunzând unei modulații BPSK. Pentru exemplul din figură, s-a obținut o valoare PAPR de 6.77:1, ceea ce în decibeli înseamnă 8.3 dB. Pentru a avea un grad de comparație, să notăm că această valoare este aproape egală cu valoarea medie a PAPR pentru modulația 128-QAM, și este cu 5dB mai mare decât aceea a unei transmisii BPSK pe o singură purtătoare (care nu folosește OFDM). Situația este explicabilă, la nivel intuitiv, prin aceea că semnalul OFDM este obținut prin sumarea unui mare număr de sinusoidale (în practică de ordinul sutelor) care sunt ortogonale între ele și care sunt "controlate" ca și amplitudine și fază inițială de către simbolurile de transmis (corespunzător constelației utilizate). Exemplul dat în figura 3.3 este simplificat din cel puțin două puncte de vedere: s-au folosit doar 8 purtătoare, și modulația utilizată a fost BPSK. Pentru alți parametri, valoarea PAPR (și așa mare) ar putea crește semnificativ.

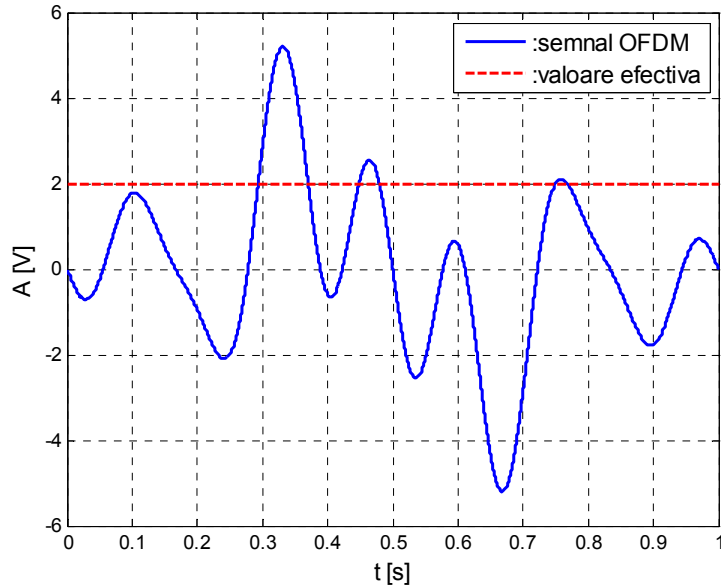


Fig. 3.3: Ilustrarea parametrului PAPR pentru o modulație OFDM.

Un alt dezavantaj al modulației OFDM este, dintr-un anumit punct de vedere, folosirea prefixului circular. Într-adevăr, în practică, asociem întotdeauna transmisia OFDM cu această noțiune de prefix circular. Dacă el facilitează egalizarea canalului și elimină interefrența între simbolurile OFDM (fiecare simbol OFDM putând astfel fi tratat ca un bloc independent, așa cum s-a discutat în cap. 1), prefixul are și un efect negativ evident. Astfel, el introduce o redundanță în informația transmisă. Întrucât datele de transmis se interpretează ca fiind definite în domeniul frecvență, putem spune că prefixul circular consumă în mod ineficient o anumită lățime de bandă. Cu cât fenomenul de propagare multicale este mai pronunțat, cu atât durata prefixului trebuie să fie mai mare, pentru a "absorbi" copiile semnalului ce ajung la receptor cu întârziere [Olt,Naf'03]. Durata prefixului circular este prin urmare un parametru care rezultă în urma planificării radio, și ea trebuie adaptată condițiilor concrete care țin de mediul de propagare. Spre exemplu, valorile propuse de standardul IEEE 802.16 pentru WiMAX sunt alese din mulțimea $\{1/4, 1/8, 1/16, 1/32\}$ [IEEE'04]. Valorile indicate se referă la durata prefixului circular (T_g) raportată la durata simbolului util (T), așa cum ne arată relația:

$$G = \frac{T_g}{T} \quad (3.4)$$

Introducerea prefixului poate fi văzută în două moduri: se păstrează durata totală a simbolului egală cu aceea când nu s-ar fi folosit prefixul circular, implicit diminuându-se durata simbolului util (se "apropie" eșantioanele în timp, ceea ce corespunde creșterii frecvenței de eșantionare), sau, păstrându-se aceeași frecvență de eșantionare, se adaugă prefixul circular la începutul simbolului, ceea ce conduce la creșterea duratei totale a simbolului transmis. Ambele situații diminuează corespunzător eficiența transmisiei.

Inserarea prefixului care conduce la creșterea frecvenței de eșantionare este ilustrată în fig. 3.4. Implicit, prin scăderea duratei simbolului util crește

corespunzător banda fiecărei purtătoare în parte, rezultatul fiind că, din cauza introducerii prefixului, pentru a menține debitul transmis la aceeași valoare, vom folosi o bandă de frecvențe mai largă. Pentru simularea ale cărei rezultate sunt arătate în această figură, cu $G=1/8$, frecvența de eșantionare folosită a fost de 40320 Hz în cazul fără prefix circular, respectiv 45360 Hz pentru cazul în care se folosește prefixul circular, ceea ce corespunde unei creșteri cu $1/8$ a lățimii de bandă necesare.

Există și situații în care prefixul circular nu conduce la eliminarea totală a interferenței inter-simboluri OFDM. Acest lucru se întâmplă atunci când durata răspunsului la impuls al canalului o depășește pe aceea a prefixului circular. În acest scenariu, trebuie utilizate tehnici suplimentare de ameliorare a canalului, cunoscute în limba engleză sub numele de "channel shortening".

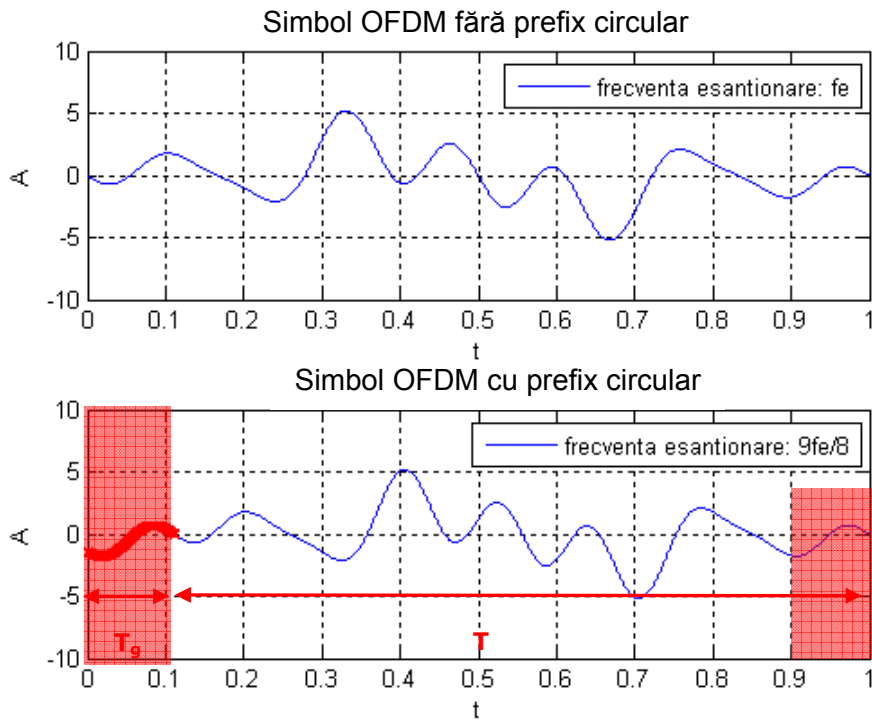


Fig. 3.4: Diminuarea eficienței transmisiei din cauza prefixului circular.

3.2 Avantajele utilizării undișoarelor în transmisiile multi-purtătoare

Așa cum s-a arătat în paragraful precedent, implementarea modulației multi-purtătoare bazată pe undișoare poate prezenta o serie de avantaje față de aceea bazată pe transformarea Fourier, și implicit pe exponențiale complexe.

O să începem cu problema eficienței spectrale a celor două tipuri de transmisii. Pentru a înțelege diferența între natura transmisiei OFDM și a celei WOFDM, trebuie analizate în detaliu cele două tipuri de abordări. Să presupunem că durata simbolului multi-purtătoare transmis prin canal este T , pentru ambele tipuri

de modulații. În această situație, reamintim că formula de calcul a unui simbol OFDM este de tipul:

$$x_{OFDM}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jk2\pi f_0 t} p_T(t) \quad (3.5)$$

În relația (3.5), $p_T(t)$ reprezintă o poartă rectangulară de durată T , de a cărei prezență este nevoie întrucât durată exponențialelor complexe folosite drept purtătoare în OFDM este infinită. Această poartă se deplasează pe axa timpului pe măsură ce se transmit noi simboluri OFDM, și tot ea este cea care conduce la spectrul de tip sinus cardinal specific purtătoarelor din OFDM.

Pe de altă parte, expresia unui simbol WOFDM este:

$$s(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{J-j}} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \varphi_{L,k}(t) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{J-j}} w_{j,k} \psi(2^{-j}t - k\tau_0) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \varphi_{L,k}(t) \quad (3.6)$$

În relația (3.6), $j=1$ reprezintă scara cea mai fină, unde se definesc undișoarele cele mai bine "localizate" pe axa timpului, iar pentru $j=L$ undișoarele sunt mai dispersate în timp, dar mai bine localizate în frecvență. Diferența fundamentală dintre semnalele definite în relațiile (3.5), respectiv (3.6) este că, spre deosebire de exponențialele complexe din primul caz, undișoarele au durate finite. Mai mult decât atât, această durată a undișoarelor purtătoare pe axa timpului este reglabilă prin intermediul factorului de scară j , într-un domeniu controlabil prin numărul de iterații L din (3.6). Astfel, dacă presupunem că pentru a transmite un simbol WOFDM se alocă în total T sec., atunci la fiecare scară, intervalul elementar alocat transmisiei simbolurilor de informație (notat în cele ce urmează T_j) va fi diferit, și anume:

$$T_j = \frac{T}{2^{J-j}}, \quad j = 0, \dots, J-1 \quad (3.7)$$

Astfel, dacă în cazul OFDM toate subpurtătoarele au același suport temporal, dat de către fereastra $P_T(t)$, în cazul undișoarelor nu e nevoie să se definească această fereastră, deoarece undișoarele se localizează pe axa timpului "prin ele însele". În acest caz nu mai este vorba despre un spectru ce se obține prin convoluția dintre un impuls în frecvență și un sinus cardinal (ca la OFDM), ci pur și simplu de spectre ale undișoarelor și funcțiilor de scară folosite. Fundamentul matematic al acestei diferențe este acela că exponențialele complexe (cum sunt cele folosite în OFDM) pot defini o bază ortogonală doar pentru semnale de durată finită, iar pentru a construi cu ajutorul lor baze ortogonale pentru spațiul $L^2(\mathbb{R})$ ele trebuie "limitate" ca durată de către o poartă temporală, așa cum arată relația (3.5). În schimb undișoarele, datorită "flexibilității" pe care le-o conferă dependența de cei doi factori (j - factor de scară, k - factor de poziție) au capacitatea de a construi o bază ortogonală pentru $L^2(\mathbb{R})$, fără alte restricții.

Mai mult decât atât, undișoarele satisfac criteriul lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol, asemănându-se, din acest punct de vedere, cu spectrele filtrelor din familia cosinus ridicat [Jon,Dil'01]. Datorită acestui fapt, un simbol de transmisie poate fi reprezentat printr-o formă de undă de durată mult mai mare decât intervalul elementar dedicat transmisiei simbolului respectiv, cu prețul "suprapunerii" pe axa

timpului a formelor de undă care reprezintă simboluri consecutive [Jam,Măh'05, Ahm'00]. Aceasta conduce la descreștere mai bruscă a densității spectrale de putere, decât la sinusul cardinal din OFDM, unde lobi laterali sunt relativ importanți ca și energie. Se poate deci afirma că semnalul WOFDM se "încadrează" mai bine în banda dedicată și generează interferențe în benzile laterale mai puțin importante decât în cazul semnalului OFDM. În sistemele OFDM, pentru a suplini rejecția insuficientă a benzilor adiacente, se pot folosi formatoarele de semnal $p(t)$ care să nu corespundă unor impulsuri dreptunghiulare, ci unor filtre de tip cosinus ridicat, ceea ce implică însă o complexitate mai mare și un cost de implementare crescut al sistemului. Mai mult decât atât, în general, ca măsură necesară pentru evitarea interferenței cu benzile adiacente, se folosesc așa numite "purtătoare de gardă". De exemplu, în tehnologia WiMAX care folosește OFDM la nivelul fizic, un număr important de purtătoare de la marginile benzii sunt păstrate ca și subpurtătoare de gardă, ele nefiind modulate (de exemplu 91 purtătoare de gardă în transmisia WiMAX cu 512 subpurtătoare)

Pentru a ilustra avantajul eficienței spectrale la WOFDM, se dă cu titlu de exemplu forma de undă a subpurtătoarelor folosite în cele două sisteme, respectiv densitățile spectrale de putere asociate (fig. 3.5 și 3.6). Graficele sunt trasate pentru undișoara mamă Daubechies-20 (care are 10 momente nule). Aceasta este undișoara cu cea mai mare "întindere" temporală dintre cele din familia Daubechies (la un nivel de rezoluție fixat). De notat aici că durata unei undișoare "purtătoare" la o anumită scară este superioară intervalului T_j alocat transmisiei unui simbol la scara respectivă. Ne găsim din nou într-o situație similară aceleia în care se folosesc filtre formatoare de impulsuri de tip cosinus ridicat (formele de undă corespunzătoare transmisiei a două simboluri consecutive se suprapun în timp, fără a genera însă IIS). Reamintim că, în cazul modulației OFDM, noțiunea de "scară" nu are sens, și durata "de semnalizare" este identică duratei purtătoare.

În figura 3.7, se prezintă, cu titlu de exemplu comparativ, densitatea spectrală de putere a două semnale, unul corespunzător OFDM și celălalt corespunzător WOFDM (undișoara Daubechies-10) cu 16 purtătoare. Se observă că atenuarea lobilor adiacenți benzii este, în exemplul dat cu peste 10 dB mai mare în cazul folosirii undișoarelor, ceea ce confirmă concluzia din [Olt,Naf'07].

Mai mult decât atât, în sistemele de tip OFDM folosirea prefixului circular ridică și ea o problemă din punct de vedere al eficienței spectrale. Problema nu se regăsește în sistemul WOFDM, unde nu se folosește un prefix circular. De notat că, în cazurile practice, durata prefixului circular este aleasă în funcție de condițiile de propagare ale unde radio, ea fiind o anumită fracție din durata simbolului util. De exemplu, în cazul rețelelor WiMAX, raportul dintre durata prefixului circular și aceea a simbolului

OFDM util poate fi aleasă din setul de valori $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right\}$. Inserarea prefixului

circular reduce, în cazul OFDM eficiența de utilizare a benzii de transmisie.

Toate observațiile anterioare arată că folosirea undișoarelor poate conduce la o utilizare mai eficientă a benzii de frecvență, ceea ce este un avantaj important în sistemele utilizate în practică. Acesta este unul dintre argumentele care fac ca metodele de transmisie multi-purtătoare bazate pe undișoare să constituie o opțiune atractivă pentru sisteme de transmisie fără fir [Rai'01] sau transmisie de date pe liniile de alimentare cu tensiune [Aba,Tor'05, Kog,Kod'03, Bai,Mug'09].

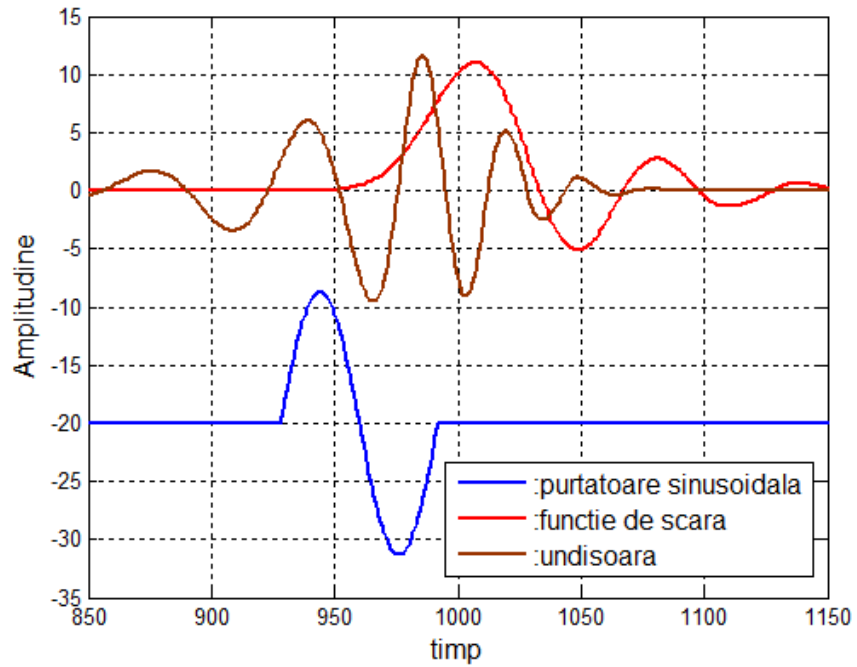


Fig. 3.5: Exemple de formă de undă ale purtătoarelor din WOFDM, comparativ cu OFDM.

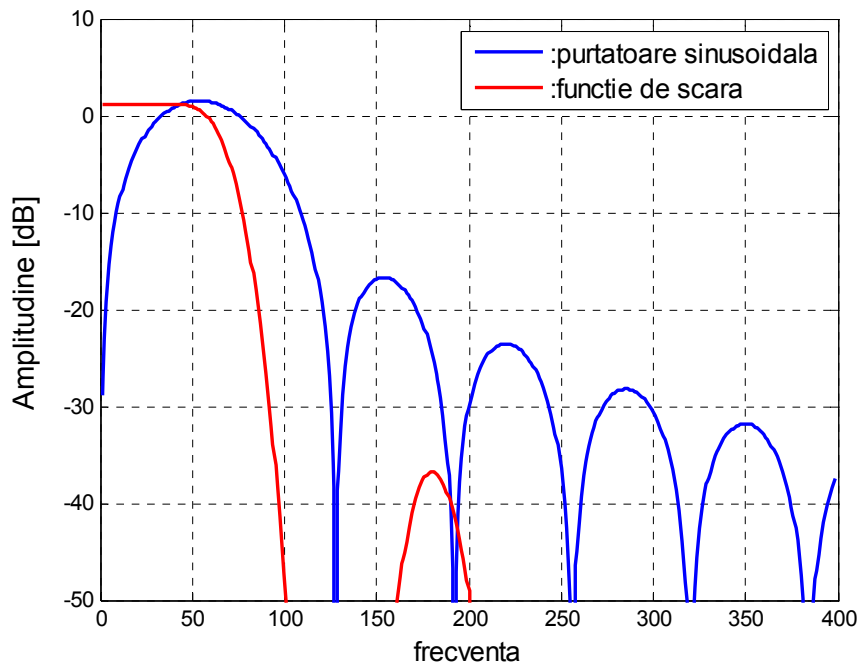


Fig. 3.6: Densități spectrale de putere (purtătoare sinusoidală și funcție de scară).

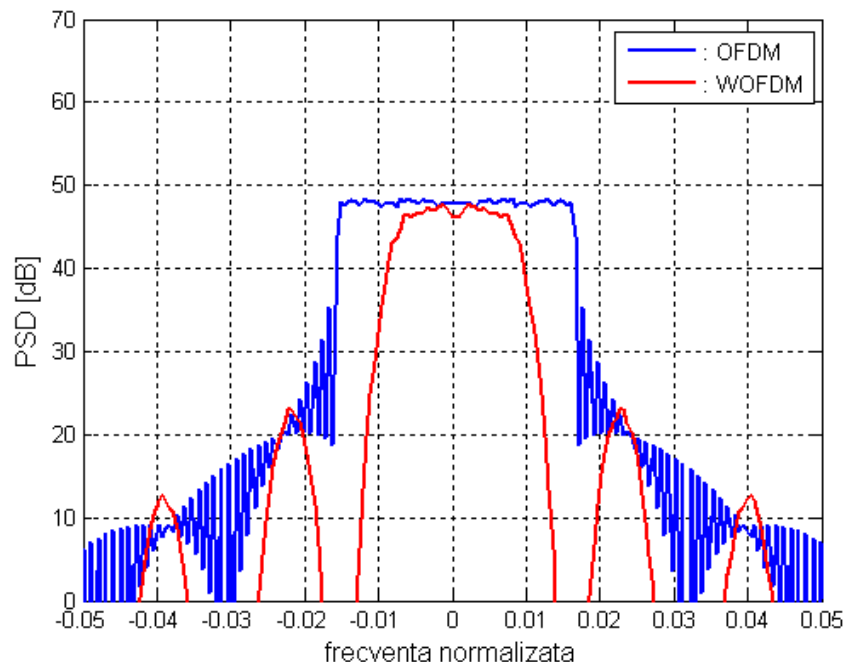


Fig.3.7: Analiză comparativă a Densităților Spectrale de Putere pentru tehnicile OFDM și WOFDM.

Un al doilea termen de comparație între cele două tehnici se va referi la complexitatea de implementare a lanțului de transmisie. Ambele metode au avantajul că atât modulatorul cât și demodulatorul se pot implementa prin software, cu ajutorul procesoarelor numerice de semnal, utilizând algoritmi rapizi de calcul. Astfel, așa cum s-a mai menționat de-a lungul prezentei lucrări, punctul cheie al modulatorului OFDM este Transformata Fourier Discretă, iar cel al modulatorului WOFDM este Transformarea Wavelet Discretă. Trebuie totuși spus că folosirea acestor transformări pentru implementarea modulatorului și demodulatorului cu purtătoare multiple nu este decât o opțiune, orice variantă de implementare care satisface bazele teoretice ale acestor metode fiind acceptabilă. Dacă în cazul OFDM, larga majoritate a sistemelor din practică se bazează pe algoritmul FFT, pentru WOFDM metoda de implementare însăși este un subiect de cercetare. Așadar, în afară de folosirea algoritmului lui Mallat și calculul DWT, există și alte metode bazate tot pe bancuri de filtre [Sen, Jos, Pra'09], care pot genera un semnal multi-purtătoare pe bază de undișoare. Totuși, cea mai simplă construcție a modulatorului rămâne aceea bazată pe algoritmi menționați și pe calculul unor transformări discrete, și analiza care urmează ia în considerare aceste implementări.

Așdar, în cazul OFDM, pentru calculul TFD se folosește algoritmul FFT. Astfel, la intrarea procesorului FFT avem N numere complexe (în cazul general), iar la ieșire vom regăsi tot N numere complexe. În acest caz, complexitatea de calcul (ca și număr de operații) este de ordinul $N \cdot \log_2 N$ [Pro'95]. În cazul Transformării Wavelet Discrete se folosește algoritmul lui Mallat [Mal'09], bazat pe operații succesive de filtrare și subeșantionare (fig. 2.4). În cazul algoritmului lui Mallat, complexitatea depinde de numărul de coeficienți K ai filtrelor folosite în

descompunere. Limita superioară a complexității de calcul poate fi exprimată ca și $2KN$ în această situație. Cazurile în care complexitatea de calcul a DWT este inferioară celei a FFT sunt sintetizate în relația (3.8):

$$2K \leq \log_2 N \quad (3.8)$$

Într-o transmisie multi-purtătoare, numărul de subpurtătoare este, în mod uzual, destul de mare încadrându-se de obicei între 256 și 2048. Întrucât lungimea filtrelor folosite este legată de numărul de momente nule (p) ale undișoarelor, vom spune că în cazul DWT complexitatea de calcul este proporțională cu numărul de momente nule ale undișoarelor folosite. În această situație, există o serie de undișoare care satisfac relația (3.8), conducând la o complexitate de calcul mai mică în cazul DWT, sau comparabilă cu aceea a FFT. Este vorba despre undișoarele Haar, Daubechies-4, Daubechies-6, Symmlet-4, Symmlet-5, Symmlet-6, Coiflet-1, Coiflet-2 sau Coiflet-3. Notățiile folosite (parametrul numeric ce urmează numelui undișoarei) corespund celor din biblioteca de funcții Wavelab, ce conține aplicații Matlab dedicate undișoarelor [Buc,Don'05]. Toate aceste undișoare sunt alegeri uzuale și facile (filtrele sunt deja cunoscute) atât pentru implementarea practică cât și pentru simularea pe calculator a transmisiei WOFDM.

Mai mult decât atât, în ceea ce privește complexitatea comparativă a celor două metode, ea mai poate fi analizată și dintr-un alt punct de vedere. Algoritmii FFT lucrează în principiu cu numere complexe (atât intrarea cât și ieșirea sunt complexe). În simularea pe calculator a unui lanț de transmisie, calculul cu numere complexe ridică dificultăți suplimentare (zgomotul ce afectează semnalul trebuie să fie la rândul său complex, detecția se complică etc.). De asemenea, există implementări practice în care se preferă ca semnalul de la ieșirea modulatorului să fie unul real, și nu complex, cum se întâmplă de exemplu în cazul Discrete Multi-Tone, versiune a OFDM ce se folosește în sistemele ADSL [Bin'00]. Dacă dorim ca semnalul ce se generează de către modulator să fie unul real, atunci la intrarea modulatorului IFFT valorile celor N eșantioane de intrare trebuie "aranjate" într-un anumit fel, și anume:

$$X[k] = X^*[N - k + 2], \quad k = 2, \dots, N/2 \quad (3.9)$$

În relația (3.9), cu N notăm numărul total de eșantioane care compun un bloc de transmis. Valorile $X[1]$ și $X[N/2+1]$ se aleg ca și numere reale. Aceste constrângeri impun efectuarea unui număr suplimentar de operații, înainte de aducerea secvenței de transmis la intrarea modulatorului. Astfel, dacă ne dorim o ieșire reală a modulatorului, este posibil să compunem secvența de date de lungime N de la intrare plecând de la $N/2$ simboluri reale utile și calculând celelalte simboluri cu ajutorul formulei (3.9), ceea ce ar conduce însă la o diminuare cu 50% a eficienței de transmisie (întrucât jumătate din eșantioanele de intrare nu reprezintă date utile, ci sunt folosite doar pentru a "forța" o ieșire reală a algoritmului IFFT). O altă alegere este să compunem $N/2$ numere complexe din N numere reale (simbolurile de transmis), jumătate dintre simboluri constituind partea reală a secvenței nou formate, iar cealaltă jumătate partea imaginară. Celelalte $N/2$ numere complexe vor fi calculate apoi conform relației (3.9). În această ipoteză, semnalul care va fi transmis prin canal va fi unul real. Întrucât acest semnal va fi perturbat de către un zgomot, valorile eșantioanelor de la intrarea demodulatorului FFT nu vor fi identice cu acelea de la ieșirea modulatorului IFFT. Este prin urmare foarte plauzibil ca la demodulator, aplicarea FFT asupra secvenței de date recepționate să conducă la un rezultat complex, ceea ce ridică noi probleme la detecție.

În cazul DWT, avem avantajul că filtrele folosite sunt reale. Prin urmare, o secvență de N eșantioane reale de la intrare va determina la ieșire tot N eșantioane reale. Toate problemele ridicate de natura complexă a FFT sunt astfel eliminate.

Sintetizând cele enumerate mai sus, din punctul de vedere strict al complexității de calcul la modulație/demodulare, cele două tehnici oferă performanțe comparabile. În schimb, în situația în care se impune transmitia unui semnal real, OFDM ridică probleme suplimentare, ceea ce conduce în mod direct la o complexitate superioară celei a WOFDM. O măsură cantitativă care să sprijine afirmația anterioară este dată în figura 3.8. Este vorba despre timpii de simulare a unei transmisii de 10000 de blocuri a câte 1024 de simboluri fiecare (incluzând detecția simbolurilor). Simbolurile sunt numere bipolare echiprobabile (+1 și -1), iar zgomotul considerat este de tipul AWGN. În cazul transmisiei OFDM se va forța obținerea unui semnal real, după metoda descrisă anterior. Detecția se face pe baza părții reale a simbolurilor de la ieșirea modulatorului FFT. Simulările sunt executate pe un calculator cu procesor Intel Celeron de 1.7 GHz, cu 640 MB de memorie RAM, folosind programul Matlab. În cazul transmisiei WOFDM se aplică una, respectiv 4 iterații ale transformatei în modulator. Se observă clar că sistemul OFDM clasic necesită un timp de simulare de cca. 3 ori mai mare decât transmitia WOFDM. Această diferență este dată în primul rând de etapele suplimentare impuse de constrângerea ca semnalul să fie real, etape prezentate anterior. În al doilea rând, în cazul în care se folosește undișoara Haar, filtrele având doar doi coeficienți, complexitatea de calcul a transformării DWT este mai mică decât aceea a FFT. Rezultatele de simulare arată însă diferențe nesemnificative ca valoare între timpii de calcul în cazul folosirii undișoarei Haar, respectiv Daubechies-10. În ceea ce privește neajunsurile pe care le implică faptul că modulatorul din OFDM lucrează cu intrări și ieșiri complexe, trebuie totuși spus că, în unele situații acesta se poate

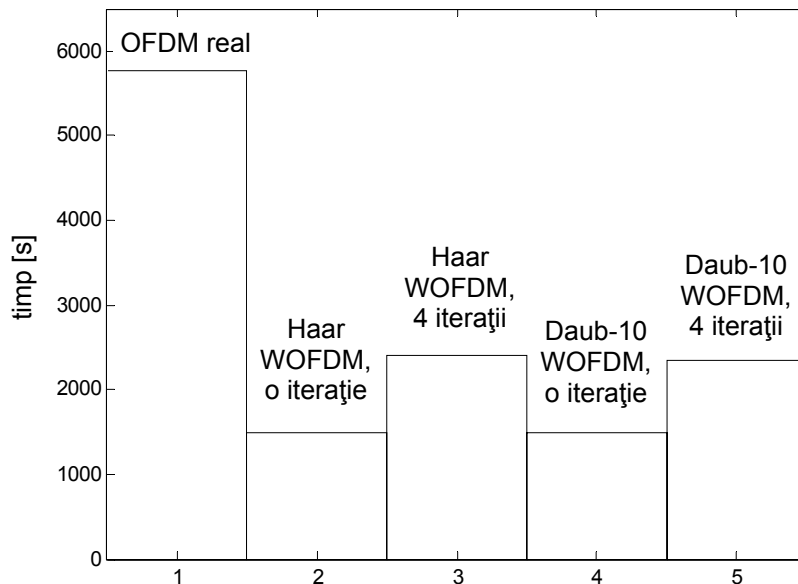


Fig.3.8: Comparație între duratele de simulare pentru transmitia OFDM, respectiv WOFDM.

transforma într-un avantaj. Astfel, dacă dorim să transmitem datele folosind modulări în banda de bază ce transmit mai mult decât un bit/simbol (de exemplu QPSK, 16 QAM, etc.), simbolurilor de modulație le vor corespunde numere complexe, conform mapării grupurilor de biți pe constelația de semnal respectivă. În această situație, aplicarea IFFT asupra acestor numere este comodă, pe când în cazul IDWT va trebui să lucrăm pe două ramuri distincte, pentru componentele în fază și respectiv în cuadratură.

3.2.1 Analiza comparativă a performanțelor BER în cazul OFDM și WOFDM

Evaluarea performanțelor unui sistem de transmisie de date are printre parametrii cei mai importanți rata erorii de bit (BER). Prin urmare, o analiză comparativă a tehnicilor OFDM și WOFDM trebuie să aibă în vedere și această măsură. În general, erorile apar la recepție din mai multe cauze: zgomotul din canal, zgomotul propriu al receptorului, erori de sincronizare în timp sau frecvență, caracterul selectiv în frecvență și/sau variabil în timp al mediului de transmisie.

Cazul cel mai simplu, considerat cel mai adesea, este acela în care răspunsul canalului este ideal (răspunsul său la impuls fiind un impuls Dirac), iar erorile la recepție apar exclusiv din pricina unui zgomot aditiv, alb și gaussian, care se suprapune peste semnalul util. Referindu-ne la figura 2.13, acest zgomot este notat cu $z(n)$. Performanța BER a unei transmisii WOFDM, respectiv OFDM într-un canal de tip AWGN este redată în figura 3.9.

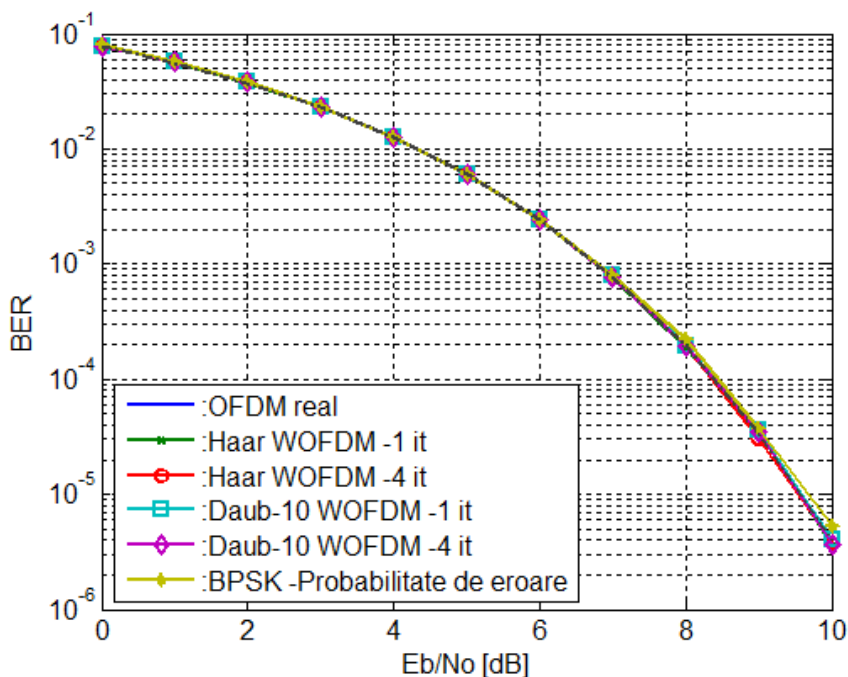


Fig.3.9: Performanța BER a OFDM, respectiv WOFDM în canale AWGN.

Pentru modulația WOFDM se simulează mai multe cazuri, în care se modifică numărul de iterații ale DWT și IDWT pe de o parte, respectiv undișoara mamă folosită în calculul transformatei, pe de altă parte. În ambele cazuri se consideră transmisia unor blocuri de câte 1024 de simboluri, ceea ce corespunde unui număr egal de subpurtătoare folosite în transmisie. Două concluzii importante se desprind din această figură. În primul rând, se observă că cele două tehnici multi-purtătoare vizate prezintă rezultate similare în canalul AWGN și identice cu cele ale modulației BPSK, lucru confirmat și în [Man,Bel'01]. În al doilea rând, în cazul modulației WOFDM, rezultatele nu depind de parametrii testați (numărul de iterații și undișoara mamă folosită în calculul DWT).

3.2.1.1 Modelarea canalelor radio cu fading plat

Așa cum s-a discutat într-un paragraf anterior, tehnicile multi-purtătoare și-au găsit o largă aplicabilitate în transmisii pe canale radio. Aceste canale se constituie în medii dificile de transmisie, din pricina celor două caracteristici esențiale pe care le au: selectivitate în frecvență și variabilitate în timp. Din primul punct de vedere, canalele se clasifică în canale cu fading plat, respectiv selectiv, iar din cel de al doilea în canale cu fading lent, respectiv rapid [SKl'97-1]. Următoarele simulări ilustrate în această teză vor încerca să ia în considerare ambele efecte pe care le introduce canalul radio.

Cazul cel mai simplu este acela în care se consideră canalul cu fading plat. Acest efect se simulează de cele mai multe prin multiplicarea semnalului util cu o secvență distribuită conform densității de probabilitate de tip Rayleigh ($ray[n]$, fig.2.13). Această densitate de probabilitate este descrisă în relația (3.10).

$$pdf(x|\sigma) = \frac{x \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (3.10)$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții, din figura 3.10, se face pentru $\sigma^2 = \frac{1}{2}$.

Alegerea făcută pentru σ^2 nu este una întâmplătoare. Pentru a explica această alegere vom face din nou apel la lanțul de transmisie din figura 2.13. Dacă notăm cu $s[n]$ semnalul de la ieșirea modulatorului și ignorăm efectul blocului numit "canal", atunci semnalul de la intrarea în demodulatorului DWT poate fi exprimat ca:

$$r[n] = s[n] \cdot ray[n] + z[n] \quad (3.11)$$

Așa cum s-a discutat deja, în evaluarea performanțelor unui sistem de transmisie, curba BER ocupă un loc important. Această curbă este trasată de obicei în funcție de raportul semnal/zgomot (RSZ) din canal. Termenul de "Raport Semnal pe Zgomot" este definit în literatură pentru situațiile în care unicul efect asupra unui semnal este adăugarea unui zgomot alb Gaussian ($z[n]$ din relația (3.11)). El măsoară raportul dintre puterea semnalului util și aceea a zgomotului. Facem în continuare supoziția că atât semnalul, cât și zgomotul sunt de medie nulă. În această situație, raportul semnal pe zgomot se calculează în simulări ca:

$$RSZ = \frac{var\{s\}}{var\{z\}} \quad (3.12)$$

unde prin "var" notăm dispersia secvențelor respective.

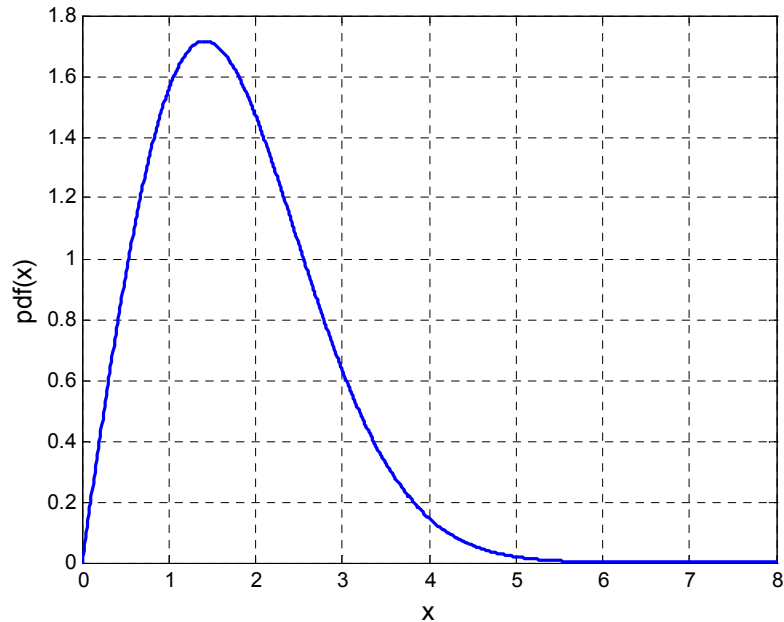


Fig.3.10: Densitatea de probabilitate de tip Rayleigh.

Dacă se ia însă în considerare și efectul multiplicativ al secvenței Rayleigh, așa cum se face în relația (3.11), atunci devine discutabil conceptul de "semnal util", întrucât semnalul peste care se adaugă zgomotul $z[n]$ este deja alterat prin multiplicarea cu secvența distribuită Rayleigh. În consecință, pentru a putea menține relevanța și semnificația conceptului de "Raport Semnal pe Zgomot", este nevoie ca numărătorul relației (3.12) să nu fie afectat de multiplicarea din relația (3.11), sau cu alte cuvinte:

$$\text{var}\{s \cdot \text{ray}\} = \text{var}\{s\} \quad (3.13)$$

Se demonstrează în Anexa I că această condiție este satisfăcută dacă în relația de definiție a densității de probabilitate a variabilei Rayleigh se alege $\sigma^2 = \frac{1}{2}$.

Acestea fiind precizate, să spunem că simularea pe calculator a distribuției Rayleigh nu este dificilă. Astfel, se arată în literatură [Mar,Nic'97] că modulul unei secvențe Gaussiene complexe (notat cu R în relația (3.14)), cu densitate de putere constantă, este distribuit Rayleigh:

$$R = |x + j \cdot y| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.14)$$

În relația (3.14), x și y sunt realizări particulare ale unor procese aleatoare independente, X și Y , cu densitate de probabilitate gaussiană, medii statistice nule și dispersii identice. Dacă procesele aleatoare corespunzătoare au și o repartitie de putere constantă, atunci fiecare dintre ele poate corespunde unui "zgomot alb".

În simularea comportamentului canalului radio nu este însă suficient să modelăm doar din punct de vedere statistic proprietățile secvenței $\text{ray}[n]$. Pentru a se surprinde natura evoluției în timp a canalului, este nevoie ca eșantioanele generate să prezinte o anumită corelație, spre deosebire de acelea folosite în (3.14), unde autocorelația secvenței R va fi dată de un impuls Dirac. Densitatea spectrală

de putere a acestei secvențe trebuie să urmeze forma cunoscută în literatură sub numele de "Jakes Spectrum" [SkI'97-1]. Acest spectru surprinde caracterul variabil în timp al canalului radio, prin intermediul unui parametru care se numește deplasare de frecvență Doppler, care reprezintă diferența dintre frecvența unei sinusoide emise și frecvența aceleiași sinusoide, ajunsă la receptor. Deplasarea Doppler maximă se poate calcula cu formula:

$$f_d = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{c} \cdot f_C \quad (3.15)$$

unde V reprezintă viteza radială de deplasare relativă dintre emițător și receptor, λ este lungimea de undă pe care se face transmisia, c fiind viteza luminii, iar f_C frecvența sinusoidei emise. Pentru a avea o imagine asupra valorilor pe care acest parametru le-ar putea lua în practică, vom da un exemplu. Astfel, la o viteză de 60 km/h, cu transmisie pe frecvența purtătoare 2.5 GHz, deplasarea Doppler maximă este de 138 Hz. De cele mai multe ori, în simulări se folosește o versiune normalată a acestui parametru, normarea făcându-se cu frecvența de eșantionare:

$$f_m = f_d \cdot T_s = \frac{f_d}{f_s} \quad (3.16)$$

Revenind la proprietățile spectrale ale secvenței de fading, densitatea spectrală de putere a acesteia poate fi exprimată prin formula:

$$S(\nu) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{f_d}\right)^2}}, \quad \text{pentru } |\nu| \leq f_d \quad (3.17)$$

În relația (3.17), cu variabila ν s-a notat deplasarea Doppler, limitată de valoarea maximă f_d dată de relația (3.15). Pentru exemplul numeric prezentat anterior ($f_d = 138 \text{ Hz}$), se prezintă spectrul lui Jakes descris de (3.17), în fig. 3.11. Se observă că, la valoarea $\nu = f_d$, densitatea spectrală de putere tinde la ∞ . Este prin urmare clar că un asemenea spectru nu poate fi generat ca atare pentru modelarea comportamentului canalului radio, ci doar aproximări ale sale. Există numeroase abordări în literatură pentru aproximarea proprietăților spectrale ale secvențelor Rayleigh folosite în simularea canalelor radio, bazate pe metoda sumei de oscilatoare [Pop,Bea'01], pe filtrarea unei secvențe cu densitate spectrală constantă [You,Bea'00, Loo,Sec'91], sau pe un model auto-regresiv [Bad,Bea'05]. De remarcat în legătură cu spectrul din figura 3.11 este faptul că el surprinde de fapt simultan două fenomene specifice transmisiilor radio printr-un mediu mobil: deplasarea Doppler și fenomenul de propagare multicale. Astfel, acest spectru se obține dacă la intrarea într-un asemenea canal se transmite o undă sinusoidală, a cărei reprezentare în frecvență este un impuls Dirac. Această undă se propagă pe căi multiple, fiecărei căi corepunzându-i o anumită deplasare Doppler (de unde rezultă "împrăștierea spectrală" a sinusoidei).

Din punctul de vedere al caracterului variabil în timp al canalului distingem două situații: canale lent-variabile, respectiv canale rapid-variabile în timp. Clasificarea se face în funcție de parametrul f_d prin intermediul unei alte mărimi legate de acesta, și anume timpul de coerență al canalului. Intuitiv, acest timp de coerență este intervalul de timp pe durata căruia comportamentul canalului radio nu se modifică semnificativ. El este legat de nivelul de corelație care există între răspunsurile la impuls ale canalului măsurate în două momente de timp diferite.

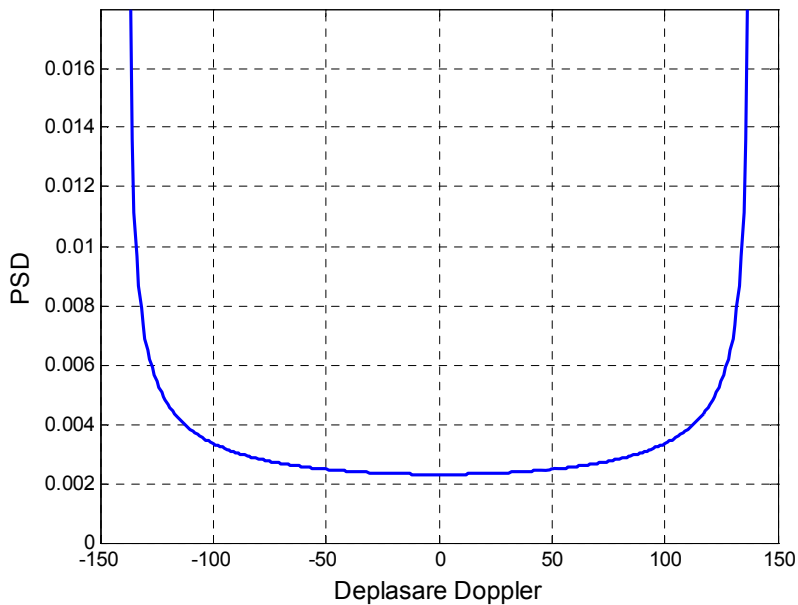


Fig. 3.11: Densitate spectrală de putere a eșantioanelor de fading (spectrul lui Jakes).

Timpul de coerență se poate calcula în mai multe feluri, o măsură des întâlnită fiind [Skl'97-1]:

$$T_C = \frac{0.423}{f_d} \quad (3.18)$$

Pentru valoarea deplasării Doppler calculată anterior, timpul de coerență al canalului este 3.06 msec. Dacă durata simbolurilor transmise este comparabilă sau mai mare decât această valoare, atunci canalul se consideră rapid variabil în timp, deoarece răspunsul său se modifică pe durata de transmisie a unui singur simbol. În aceste situații problema estimării "în timp real" a canalului devine stringentă, întrucât caracteristicile acestuia se schimbă foarte rapid. În transmisiile multi-purtătoare, unde durata simbolului este mai mare (aceasta fiind de fapt esența acestui tip de transmisii), scenariul de fading rapid variabil în timp este foarte plauzibil. De fapt, acesta este principalul factor care limitează superior numărul de purtătoare folosite în transmisie, întrucât creșterea acestui număr determină și creșterea duratei simbolurilor [Bin'90, Chi'94].

3.2.1.2 Performanțele transmisiilor multi-purtătoare în canale cu fading plat de tip Rayleigh

În situația canalelor cu fading plat, semnalul de la intrarea demodulatorului DWT se obține conform relației (3.11). Canalul este neselectiv în frecvență (plat), în schimb este variabil în timp. În cele ce urmează, cele două metode multi-purtătoare sunt comparate din punctul de vedere al performanței BER. Schema de simulare este cea din figura 2.13. Un tablou complet al parametrilor de simulare este dat în tabelul 3.1, iar câteva rezultate de simulare sunt arătate în figura 3.12.

PARAMETRI DE SIMULARE		
Emitător		
Parametru	Implementare	Observații
Simboluri transmise	+1 și -1 (echiprobabil).	În cazul OFDM simbolurile se "formează" astfel încât să conducă la o ieșire reală.
Dimensiunea blocului	$N=1024$	Coincide cu numărul de subpurtătoare.
Număr de blocuri transmise	$N_b=10000$	
Modulator în cazul OFDM	IFFT	Ieșire reală.
Modulator în cazul WOFDM	IDWT	Folosește algoritmul lui Mallat.
Undișoara mamă	Haar, Daubechies-10	Se aplică doar în cazul metodei WOFDM.
Număr de iterații al transformării	$n_{it}=1, 4$	
Canal		
Parametru	Implementare	Observații
E_b/N_0	Între 0 și 20 dB	
Tip fading	Plat, variabil în timp	Toate copiile semnalului ajung la receptor pe durata unui simbol.
Deplasare Doppler normalizată maximă	$f_m=0.001, 0.005, 0.01, 0.05$	Timpul de coerență $T_C \in [84.6T_S, 4230T_S]$
Receptor		
Parametru	Implementare	Observații
Demodulator	FFT/DWT	În cazul OFDM, din cauza zgomotului secvența de la ieșirea FFT va fi complexă.
Detectie	Comparare cu pragul.	Pentru OFDM, detectia se va face doar pe baza părții reale a semnalului.

Tabel 3.1: Parametrii de simulare a modulațiilor ortogonale în canale cu fading plat.

Câteva observații interesante se desprind din figura 3.12. În primul rând, se vede că transmisia WOFDM prezintă performanțe mai bune decât OFDM pentru toate cazurile luate în considerare. Diferențele sunt remarcabile mai ales la valori mari ale deplasării Doppler, unde WOFDM cu undișoara Haar oferă un câștig de peste 10 dB față de transmisia OFDM. Acest lucru ne arată că folosirea undișoarelor în locul purtătoarelor sinusoidale conduce la o rezistență mai bună la variabilitatea temporală a canalului. Există câteva explicații care pot fi date în acest context. S-a văzut în paragraful precedent că folosirea undișoarelor are drept consecință o atenuare mai pronunțată a lobilor spectrali laterali, față de cazul OFDM cu sinusoidale limitate în timp de o poartă temporală dreptunghiulară. În plus, în OFDM ortogonalitatea purtătoarelor este condiționată de localizarea spectrală a acestora exact la frecvențele cerute. Ori, tocmai această poziționare este cea care este afectată puternic de fenomenul de împrăștiere Doppler. În plus dacă la OFDM fiecare

dintre cele N purtătoare folosite este localizată în frecvență într-o bandă diferită, lucrurile nu stau la fel în cazul WOFDM. În această situație, subpurtătoarele de la o anumită scară vor avea practic exact același spectru de putere, diferența între ele fiind dată doar de localizarea lor pe axa timpului, care se regăsește în spectrul de fază al acestor undișoare. Toate aceste observații arată că în cazul undișoarelor, poziționarea pe axa frecvențelor și forma spectrului acestora nu sunt atât de critice precum în cazul exponențialelor complexe din OFDM. Prin urmare un efect de tipul împrăștierii Doppler, dat de variabilitatea temporală a canalului, afectează mai mult transmisia multi-purtătoare bazată pe sinusoidă decât aceea bazată pe undișoare. Consecința acestor proprietăți se regăsește în mod evident în figura 3.12, unde Haar-WOFDM, în cel mai defavorabil caz considerat ($f_m = 0.05$) are performanțe mai bune decât OFDM-ul clasic în cel mai favorabil caz (deplasare Doppler foarte mică, $f_m = 0.001$).

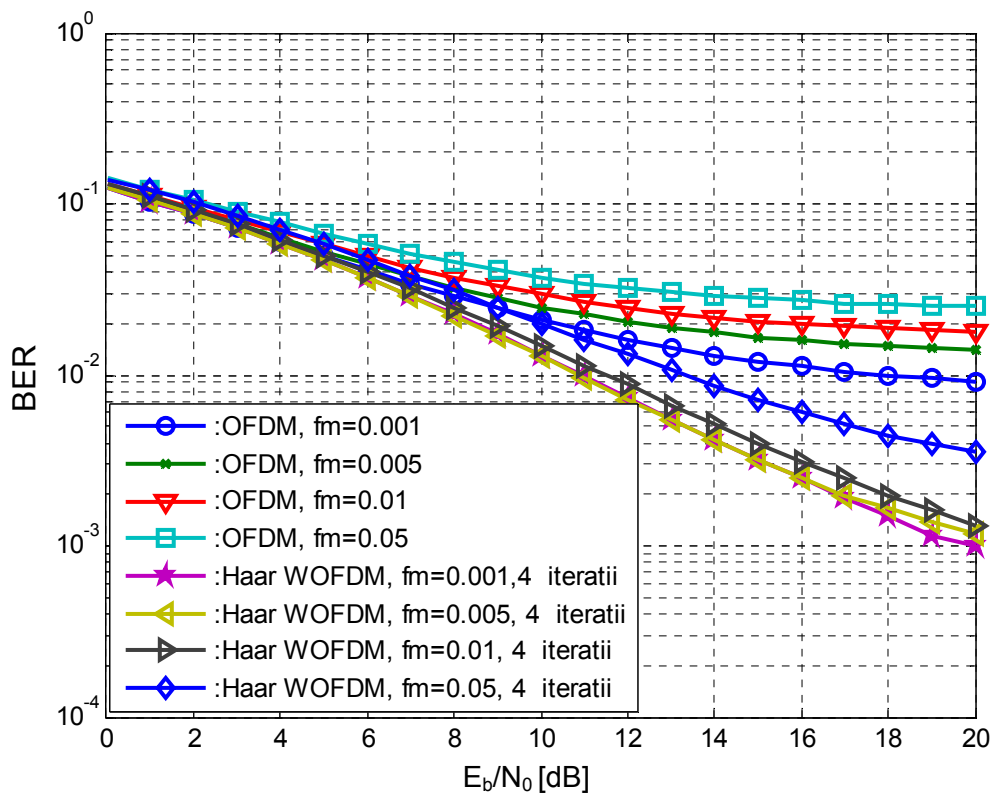


Fig. 3.12: Comparație între OFDM și Haar - WOFDM cu 4 iterații.

Se separă în continuare cele două cazuri (fading rapid respectiv fading lent) și se studiază mai în detaliu în cele ce urmează. De data aceasta rezultatele simulărilor sunt redade pentru o altă undișoară, și anume Daubechies-10. Înainte de a trece la rezultatele propriu-zise, trebuie să expunem câteva considerații asupra termenilor de "fading rapid", respectiv "fading lent", în contextul transmisiilor multi-

purtătoare. Astfel, clasificarea canalului în cele două categorii se face, așa cum am menționat, în funcție de relația de ordine care există între timpul de coerență al canalului și durata simbolurilor transmise. Caracteristica intrinsecă a modulațiilor multi-purtătoare este durata mare a simbolurilor: fiecare simbol de date dintre cele N aduse la intrarea modulatorului IDWT/IFFT contribuie la "compoziția" fiecăruia din cele N eșantioane de la ieșire (deși afirmația trebuie nuanțată în cazul metodei WOFDM). În acest caz, detecția se face pe baza unui bloc de N eșantioane, și în consecință, conceptul de "fading rapid/lent" își redefinește sensul, urmând să ne raportăm la durata simbolurilor OFDM/WOFDM, și nu la aceea a simbolurilor "seriale" inițiale. În cazul simulărilor făcute în prezenta lucrare, se consideră $N=1024$. Cel mai simplu mod de a ne raporta la parametrii f_m și T_C este acela în care considerăm că durata totală a unui simbol transmis este de $T=1024T_s$, unde T_s are un dublu înțeles: durata unui simbol serial, respectiv pas de eșantionare. Exprimându-l pe f_d din relația (3.16) în funcție de f_m , se poate calcula că, pentru domeniul de valori ale lui f_m luat în considerare ($f_m \in (0.001, \dots, 0.05)$), timpul de coerență al canalului se încadrează în domeniul:

$$T_C \in [84.6T_s, 4230T_s] \quad (3.26)$$

Raportându-ne la durata unui simbol multi-purtătoare ($T=1024T_s$), putem concluziona că pentru cazurile $f_m=0.001$ și $f_m=0.005$ ne aflăm într-un scenariu de fading lent variabil în timp, iar pentru celelalte două valori sunt îndeplinite condițiile de fading rapid variabil în timp. De exemplu, în cel mai defavorabil caz, timpul de coerență al canalului este de peste 10 ori mai mic decât durata simbolului multi-purtătoare transmis.

Acestea fiind spuse, proprietatea de rezistență mai mare a metodei WOFDM față de variabilitatea temporală a canalului rămâne validă și este întărită și pentru alte tipuri de undișoare (Daubechies-10). În figura 3.13 se arată performanța BER a celor două metode, când canalul variază lent în timp. Două concluzii pot fi trase din figura 3.13: WOFDM are o rată a erorii mai mică (aproape 10dB câștig la un BER de 0.01) și este mai puțin sensibil la deplasarea Doppler. Se vede că nu există diferențe semnificative în ceea ce privește valoarea BER în cazul WOFDM pentru cele două deplasări Doppler considerate. În figura 3.14, comportamentul celor două tehnici este evaluat pentru valori mai mari ale împrăștierii Doppler (cazul de fading rapid variabil în timp). Câștigul WOFDM este chiar mai mare de această dată (cca 12 dB la $f_m=0.01$, pentru un BER de 1.5%). Observațiile de mai sus sunt sprijinite și în acest caz, cu mențiunea că de această dată se observă o degradare a performanței BER și la WOFDM, pentru $f_m=0.05$ față de cazul $f_m=0.01$.

Din punct de vedere matematic, performanțele globale mai bune ale modulației WOFDM își găsesc un suport în localizarea timp-frecvență a purtătoarelor folosite. O comparație a localizării timp-frecvență în cazul celor două metode considerate va fi făcută în cele ce urmează.

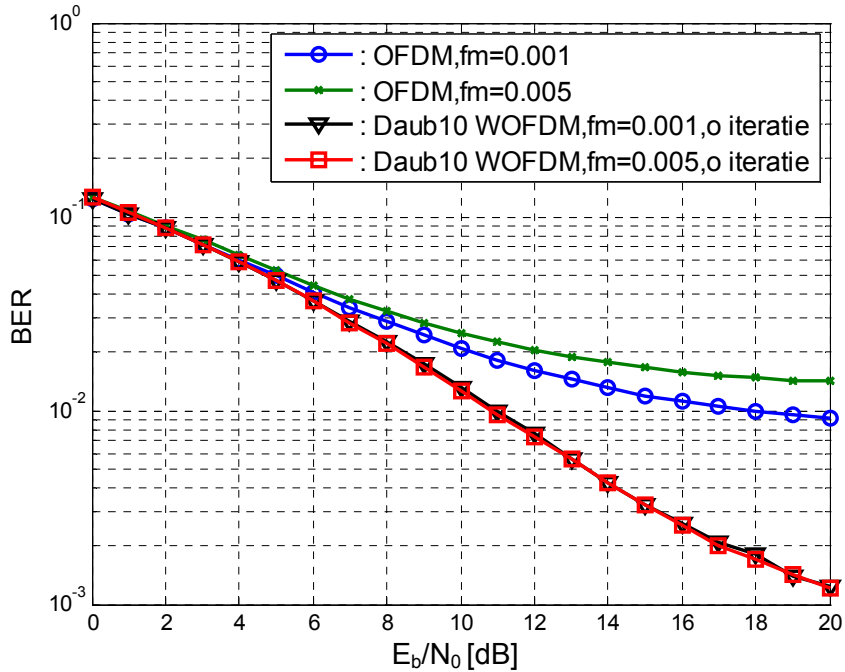


Fig. 3.13: Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading lent.

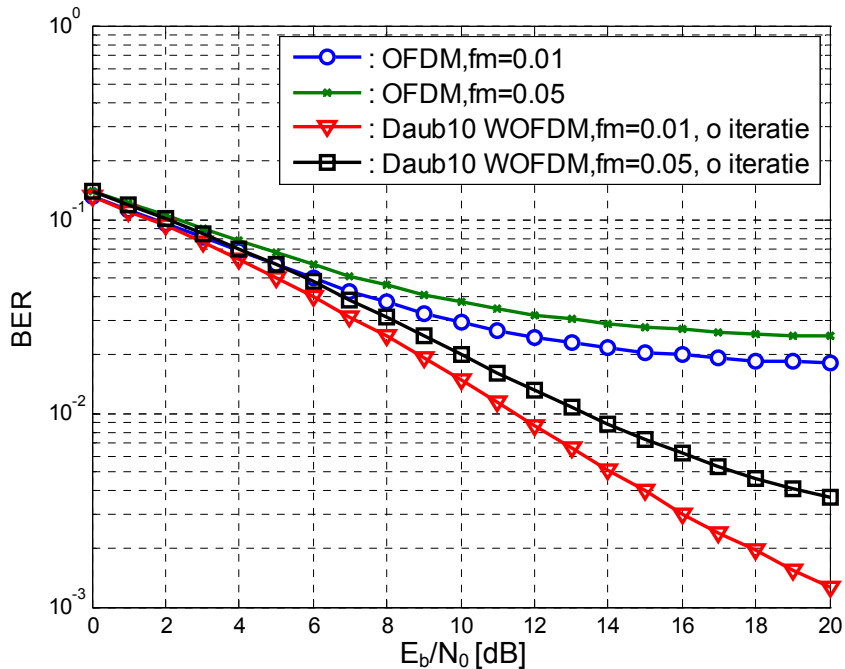


Fig. 3.14: Comparație între OFDM și Daubechies-10 WOFDM în condiții de fading rapid.

3.3 Localizarea timp-frecvență a bazelor folosite în modulațiile ortogonale

Tehnicile de transmisie comparate în acest capitol pot fi încadrate în categoria modulațiilor ortogonale. O asemenea abordare presupune "compunerea" semnalului ce urmează a fi transmis, folosind o bază ortonormală a spațiului $L^2(\mathbb{R})$. Această bază va fi notată, în cele ce urmează, cu $\{x_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, iar formula de sinteză a semnalului este dată în relația (3.19):

$$s(t) = \sum_k a_k x_k(t) \quad (3.19)$$

Conform relației (3.19), fiecare simbol de transmis, a_k , va modula o purtătoare $x_k(t)$, care aparține unei baze ortonormale de semnale. În această accepțiune, termenul "purtătoare" își generalizează înțelesul. Dacă de obicei asociam acest termen unui semnal sinusoidal de înaltă frecvență, sau, uneori, unuia dreptunghiular, de data aceasta ne putem imagina drept purtătoare orice semnale care constituie o bază ortonormală. În cazul unei transmisii printr-un canal radio, termenul "purtătoare" folosit în contextul modulațiilor ortogonale nu se mai referă neaparat la acea undă sinusoidală de înaltă frecvență care este modulată cu datele de transmis. Ea continuă bineînțeles să existe, dar modulația ortogonală "multi-purtătoare" este realizată în banda de bază, anterior modulației clasice, iar semnalele $x_k(t)$ sunt adeseori denumite "subpurtătoare". O altă deosebire de nuanță față de termenii folosiți uzual în teoria prelucrării semnalelor și a descompunerilor ortonormale este că, dacă într-o analiză de semnal folosind baze ortonormale coeficienții a_k se calculează prin proiectarea semnalului pe baza ortonormală, într-o modulație multi-purtătoare formularea problemei este inversă. Astfel, coeficienții a_k se cunosc, ei fiind de fapt simbolurile de transmis, iar semnalul rezultă printr-o operație de sinteză.

Conform relației (3.19), semnalul care este transmis poate fi văzut ca o sumă ponderată de subpurtătoare ortogonale, "ponderea" fiecărei subpurtătoare în compoziția semnalului de la ieșirea modulatorului fiind un coeficient complex ce reprezintă de fapt simbolul ce urmează a fi transmis. Marele avantaj al unei abordări multi-purtătoare este robustețea foarte mare a unei asemenea tehnici față de efectele negative pe care le introduce mediul de transmisie, și mai ales față de Interferența Inter-Simbol, robustețe dată de către durata mare a simbolurilor transmise. Practic, în loc să se transmită prin forme de undă individuale fiecare simbol de date a_k în parte, mai multe asemenea simboluri se transmit simultan (sau "în paralel") prin intermediul unei forme de undă compuse, de durată mai lungă, și notată în ecuația (3.19) cu $s(t)$. În cazul unui canal radio, dacă durata simbolului rezultat este semnificativ mai mare decât împrăștierea întârzierilor de propagare multi-cale, atunci efectul negativ al IIS asupra performanțelor transmisiei va fi mult diminuat.

Așa cum s-a discutat deja în acest capitol, ortogonalitatea purtătoarelor este foarte importantă. Faptul că acestea sunt alese dintr-o bază ortonormală, permite ca descompunerea indicată în relația (3.19) să nu fie redundantă și, pe de altă parte, permite coeficienților a_k să nu fie corelați, ceea ce coincide cu ce se întâmplă într-o

transmisie de date în care simbolurile generate de sursă sunt aleatoare. Tot datorită ortogonalității purtătoarelor, proprietățile de distanță ale schemei de codare nu vor fi afectate prin procedura de modulare [Flo,Ala,Ber'95]. Această proprietate este extrem de importantă pentru canale AWGN, unde performanța unei scheme de codare depinde în mod direct de distanța Euclidiană dintre cuvintele de cod. Nu în ultimul rând, ortogonalitatea purtătoarelor permite demodularea corectă a simbolurilor transmise. Din punct de vedere matematic, simbolul transmis pe purtătoarea cu indexul k poate fi regăsit prin intermediul unui produs scalar dintre semnalul recepționat (în mod ideal același cu semnalul emis) și purtătoarea cu același index, k :

$$a_k = \langle s(t), x_k(t) \rangle \quad (3.20)$$

Într-un canal real însă, semnalul recepționat nu va fi însă niciodată identic aceluia emis. Fenomenele care au loc în cazul transmisiei printr-un canal radio conduc însă la "dispersia" în timp și frecvență a semnalului. Dispersia în timp a semnalului apare din pricina selectivității în frecvență a canalului radio, iar cea în frecvență este cauzată de împrăștierea Doppler. Rădăcinile fizice ale acestor efecte sunt propagarea multi-cale pe de o parte, și modificarea parametrilor canalului din pricina mișcării emițătorului/receptorului sau a apariției temporare a diverse obiecte/obstacole pe căile de propagare a undei, pe de altă parte.

Soluția cea mai bună, care poate să contracareze aceste influențe negative, este, în mod intuitiv, aceea ca subpurtătoarele folosite să aibă o localizare în timp și frecvență "adaptată" la cea a canalului însuși. Măsurile obiective ale localizării în timp, respectiv frecvență pentru un semnal, sunt dispersia în timp, respectiv în frecvență [Naf,Gor'95].

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}, \text{ și } \sigma_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.21)$$

Rădăcinile pătrate ale acestor măsuri se numesc durată, respectiv bandă efectivă. Definierea lor în această manieră folosește ipoteza simplificatoare că așa numitul "centru energetic" al semnalelor respective este 0, atât în timp, cât și în frecvență. Conform relației de incertitudine Heisenberg-Gabor, produsul lor este mărginit inferior [Fla'98]:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

Semnificația inecuației (3.22) este că nu există semnale pentru care localizarea timp-frecvență să fie oricât de bună. În general, dacă un semnal este bine localizat în timp, atunci el este slab localizat în frecvență și viceversa. O valoare mică a acestui produs ne indică un "compromis" bun în ceea ce privește localizarea în timp și în frecvență, a unui semnal. În contextul modulațiilor ortogonale folosite în transmisia pe canale radio, așa cum s-a expus deja, este important ca purtătoarele să fie bine localizate atât în timp, cât și în frecvență.

3.3.1 Modelarea matematică a modulațiilor ortogonale

În vederea studiului localizării timp-frecvență, este utilă o modelare matematică precisă a celor două tipuri de modulații ortogonale studiate, adică OFDM și WOFDM. Astfel, presupunând implementarea unei modulații WOFDM, vom relua relația (3.6) într-o formă mai precisă:

În vederea studiului localizării timp-frecvență, este utilă o modelare matematică precisă a celor două tipuri de modulații ortogonale studiate, adică OFDM și WOFDM. Astfel, presupunând implementarea unei modulații WOFDM, vom relua relația (3.6) într-o formă mai precisă:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{J-j}} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \phi_{L,k}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{2^{J-j}} w_{j,k} \psi(2^{-j}t - k2^j T_S) + \sum_{k=1}^{2^{J-L}} a_{L,k} \phi(2^{-L}t - k2^L T_S) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Reamintim că, în ecuația (3.23), J reprezintă numărul maxim de iterații IDWT (aflat, în practică, sub constrângerea numărului de eșantioane din secvența de intrare), L reprezintă numărul de iterații efectuate, în timp ce cu T_S notăm intervalul de timp asociat transmisiei unui simbol elementar, generat de către sursă. Pentru simplitatea expunerii, el poate fi considerat egal cu pasul de eșantionare pe care trebuie să îl folosim în implementarea pe calculator a relației (3.23). Practic, semnalul $s(t)$ reprezintă un singur simbol WOFDM, fiind transmis pentru un interval de timp egal cu $2^J \cdot T_S$, după care începe transmisia următorului simbol, ce corespunde unui nou bloc de date adus la intrarea modulatorului WOFDM.

În cazul modulației OFDM, semnalul generat poate fi scris ca și:

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} w_{m\omega_0, nt_0}(t) \quad (3.24)$$

unde elementele bazei ortonormale sunt funcțiile:

$$w_{m\omega_0, nt_0} = p_{t_0}(t - nt_0) \cdot e^{jm\omega_0 t} \quad (3.25)$$

În relația precedentă, t_0 este durata unui simbol OFDM, și ea poate fi considerată egală cu MT_S , unde M este numărul de simboluri adus la intrarea modulatorului (simboluri generate de către sursă și grupate în prealabil în blocuri de dimensiune M). Pentru asigurarea ortogonalității purtătoarelor, se impune constrângerea $\omega_0 \cdot t_0 = 2\pi$.

Semnalul $p_{t_0}(t - nt_0)$ reprezintă o poartă dreptunghiulară, de durată t_0 care are rolul de a "încadra" din punct de vedere temporal purtătoarele în durata de emisie a unui simbol OFDM. Aceasta este de fapt una dintre diferențele majore între bazele ortogonale folosite în cele două modulații comparate: undișoarele din WOFDM au durată finită și "reglabilă" prin intermediul factorului de scară, în timp ce exponențialele complexe sunt de durată infinită, și devin finite ca și durată în urma multiplicării lor cu o "fereastră temporală". Aceste detalii dau de altfel diferențele în ceea ce privește localizarea timp-frecvență a semnalelor folosite drept purtătoare în modulațiile ortogonale.

3.3.2 Localizarea timp-frecvență

Conform ecuației (3.24), localizarea timp-frecvență a semnalului OFDM depinde de localizarea bazei ortonormale folosite în acest caz, $w_{m\omega_0, nt_0}(t)$, și implicit de fereastra temporală $p_{t_0}(t)$. Modelul descris prin ecuațiile (3.24) și (3.25) întrunește condițiile teoremei Balian-Low [Ben, Hei, Wal'94]. Interpretarea acestei teoreme în contextul problemei studiate este următoarea:

Orice bază ortonormală a $L^2(\mathbb{R})$ de forma celei indicate în relația (3.25) va avea fie banda efectivă, fie durata efectivă infinită, prin urmare valoarea produsului $\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2$ va fi infinită.

De obicei, modulatorul OFDM (și implicit relația (3.24)) este implementat prin intermediul IDFT, așa cum s-a văzut în paragraful 3.2. În acest caz, se folosește de regulă o fereastră $p(t)$ dreptunghiulară. Dat fiind că transformata Fourier a unui impuls dreptunghiular conduce la un spectru de tip sinus cardinal, care se întinde de la $-\infty$ la $+\infty$ pe axa frecvențelor, putem concluziona că localizarea în frecvență a funcțiilor ce compun baza ortogonală folosită în OFDM este extrem de slabă, sau, mai precis, $\sigma_\omega^2 = \infty$ (Anexa 2). În consecință, unul dintre dezavantajele majore ale tehnicii OFDM este localizarea slabă în frecvență a semnalului. În practică, acest dezavantaj se regăsește în principal prin aceea că lobii spectrali laterali (din afara benzii de interes) prezintă atenuări insuficient de mari, putând astfel produce interferențe în benzile adiacente. Tot localizarea slabă în frecvență este una dintre cauzele pentru care tehnica OFDM este sensibilă la variabilitatea în timp a canalului, legată direct de deplasarea Doppler.

În conformitate cu relația (3.23), localizarea timp-frecvență a semnalului WOFDM depinde de valorile benzii, respectiv duratei efective a semnalelor ce compun baza ortogonală, adică $\{\psi_{j,k}(t)\}$, respectiv $\{\varphi_{L,k}(t)\}$. În cele ce urmează, pentru simplificarea demonstrațiilor, vom folosi o notație identică pentru funcțiile de scară și undișoare, și anume $\alpha_j(t)$, j reprezentând indicii de scară. În problema studiată, parametrul de translație, k , nu este important, el neinfluențând în vreun fel banda sau durata efectivă a semnalului.

În ceea ce privește localizarea purtătoarelor undișoare din WOFDM, poate fi arătat prin calcul direct (Anexa 2) că localizarea timp-frecvență a oricărei undișoare α_j este identică localizării undișoarei mamă. Acest lucru se întâmplă deoarece:

$$\alpha_j \sigma_t^2 = 2^{2j} \cdot \alpha \sigma_t^2 \quad \text{și} \quad \alpha_j \sigma_\omega^2 = 2^{-2j} \cdot \alpha \sigma_\omega^2 \quad (3.26)$$

Reiese clar din relația (3.26), că localizarea timp-frecvență nu depinde de scară:

$$\alpha_j \sigma_t^2 \cdot \alpha_j \sigma_\omega^2 = \alpha \sigma_t^2 \cdot \alpha \sigma_\omega^2 \quad (3.27)$$

Relația (3.27) este una intuitivă. Astfel, creșterea indexului de scară j conduce la undișoare care sunt din ce în ce mai dilatate în timp. Dată fiind dualitatea domeniilor timp și frecvență, aceasta se regăsește și într-o "concentrare" corespunzătoare a spectrului. Tot referitor la relația (3.27), ea este deosebit de utilă, întrucât ne arată că studiul localizării timp-frecvență a undișoarelor și funcțiilor de scară folosite în

WOFDM poate fi făcut independent de scara de transmisie, în ciuda faptului că, așa cum reiese din relația (3.23), această tehnică realizează transmisia pe scări multiple.

Dincolo de aceste considerente generale, se impune precizarea că realizarea unui calcul numeric precis al produsului $_{\alpha}\sigma_t^2 \cdot _{\alpha}\sigma_{\omega}^2$ nu este o sarcină simplă. Principala dificultate întâlnită o constituie aceea că, în majoritatea cazurilor, nu cunoaștem expresia analitică a undișoarelor, respectiv funcțiilor de scară folosite în WOFDM. În toate simulările ale căror rezultate sunt comentate în acest capitol, dar și în cele viitoare, s-au folosit cu precădere undișoare din familia Daubechies, dar și alte undișoare (Symmlet, Coiflet etc). Punctul comun al acestora este acela că, în ciuda faptului că nu cunoaștem expresia analitică a undișoarelor respective, putem folosi algoritmul lui Mallat și filtre cu coeficienți cunoscuți pentru calculul IDWT.

În ciuda impedimentului amintit, abordarea noastră va pleca de la două cazuri particulare și va generaliza rezultatele obținute, speculând faptul că dorim mai degrabă o comparație a localizării timp-frecvență a celor două modulații ortogonale (OFDM și WOFDM), decât un calcul numeric exact al produsului $_{\alpha}\sigma_t^2 \cdot _{\alpha}\sigma_{\omega}^2$ pentru fiecare undișoară în parte.

Analiza noastră se va concentra în cele ce urmează asupra undișoarelor din familia Daubechies. Vom începe cu undișoara Haar, care este uneori denumită în literatură Daubechies-2. Undișoara Haar poate fi așadar văzută ca un caz particular de undișoară Daubechies, având un singur moment nul. Pentru această undișoară se cunoaște expresia analitică atât a funcției de scară, cât și a undișoarei-mamă:

$$\varphi_H(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1) \text{ și } \psi_H(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, 1/2) \\ -1, t \in [1/2, 1) \end{cases} \quad (3.28)$$

Aplicând asupra acestei undișoare relațiile (3.21), se pot obține, prin calcul direct (Anexa 2), evaluări numerice ale localizării în timp, respectiv în frecvență (tabel 3.2). Rezultatele redate în tabel pentru undișoara Haar sunt departe de a surprinde. Se știe că această undișoară este foarte bine localizată în timp (fapt ce reiese și din formulele (3.28)), având un suport compact și o formă rectangulară. Această formă rectangulară de durată finită ne conduce imediat și înspre ideea că suportul în frecvență al undișoarei Haar este infinit, ceea ce afectează în mod decisiv localizarea și durata efectivă a undișoarei Haar este infinit. Rezultatul este identic celui obținut pentru OFDM, însă motivul este unul complementar: de data aceasta nu localizarea în timp, ci aceea în frecvență este dezavantajul major al "purtătoarei".

Un exemplu de la polul opus este dat prin undișoara de tip sinus cardinal [Mal'09]:

$$\varphi_{sc}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{\pi t}{2} \text{ și } \psi_{sc}(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t} \quad (3.29)$$

Undișoara sinus cardinal are un număr infinit de momente nule, și întindere infinită pe axa timpului. În domeniul frecvență, ea are spectrul corespunzător unui filtru trece-bandă ideal, iar funcția de scară corespunde unui filtru trece-jos ideal. Date fiind aceste considerații, rezultatele din tabelul 3.2 pentru undișoara sinus cardinal (calculul complet în Anexa 2) sunt cele așteptate: localizarea timp-frecvență este infinită, din cauza întinderii infinite pe axa timpului și în ciuda faptului că localizarea în frecvență este foarte bună.

Tipul undișoarei	Durată efectivă a funcției de scară	Bandă efectivă a funcției de scară	Durată efectivă a undișoarei mamă	Bandă efectivă a undișoarei mamă
Haar	$\frac{H}{\varphi} \sigma_t^2 = \frac{1}{3}$	$\frac{H}{\varphi} \sigma_\omega^2 = \infty$	$\frac{H}{\psi} \sigma_t^2 = \frac{1}{3}$	$\frac{H}{\psi} \sigma_\omega^2 = \infty$
Sinc	$\frac{sc}{\varphi} \sigma_t^2 = \infty$	$\frac{sc}{\varphi} \sigma_\omega^2 = \frac{\pi^3}{12}$	$\frac{sc}{\varphi} \sigma_t^2 = \infty$	$\frac{sc}{\psi} \sigma_\omega^2 = \frac{14\pi^3}{3}$

Tabel 3.2: Localizarea timp frecvență a undișoarelor Haar și sinus cardinal.

Funcțiile pentru care s-au calculat banda și durata efectivă (tabelul 3.2) pot fi privite ca și cazuri extreme ale unui șir de funcții de scară, respectiv undișoară-mamă din familia Daubechies. Funcțiile ce compun șirul au o localizare temporală mai slabă decât Haar, și localizare în frecvență mai slabă decât aceea a undișoarei sinus cardinal, dar conduc totuși la un compromis mai bun al localizării timp-frecvență, întrucât produsul dintre banda și durata lor efectivă are valori finite. Această din urmă afirmație va fi demonstrată în cele ce urmează, pentru undișoarele din familia Daubechies [Olt,Isa'09].

Să considerăm așadar undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies [Dau'92]. Acestea pot fi privite ca un șir de funcții, indexat după numărul de momente nule N , index care, așa cum s-a văzut, este egal cu 1 pentru undișoara Haar și cu ∞ pentru undișoara sinus cardinal. În literatură [Mal'09], se dau în general filtrele care corespund implementării transformării wavelet pentru undișoare Daubechies cu până la 10 momente nule. Toate undișoarele din acest șir (mai puțin sinus cardinal) au suport temporal compact, notat în cele ce urmează prin intervalul $[m_N, M_N]$, iar durata lor este direct proporțională cu N , acesta fiind și motivul pentru care suportul lor depinde de indicele N . Prin urmare, durata lor efectivă este mărginită superior, așa cum rezultă din relația (3.30):

$$\alpha_{Dau}^N \sigma_t^2 = \int_{m_N}^{M_N} t^2 N \alpha_{Dau}^2(t) dt < \max \{ N \alpha_{Dau}^2(t) \} \int_{m_N}^{M_N} t^2 dt = \frac{M_N^3 - m_N^3}{3} \cdot \max \{ N \alpha_{Dau}^2(t) \} \quad (3.30)$$

Relația (3.30) ne arată practic că, pentru toate undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies, durata efectivă este finită, și ne dă o margine superioară a acestei durate.

Funcțiile studiate aici au o proprietate remarcabilă [Att,Pas,Isa'07]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \alpha_{Dau}(t) = \alpha_{sc}(t) \quad (3.31)$$

Relația (3.31) întărește ideea că undișoarele din familia Daubechies pot fi privite ca un șir de funcții indexat după N , care are drept limită când $N \rightarrow \infty$ undișoara sinus cardinal. Această proprietate este utilă și în calcularea benzii efective a acestor undișoare. Astfel, putem scrie că:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \alpha_{\omega}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| \mathfrak{F} \{ N \alpha_{Dau}(t) \}(\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| \mathfrak{F} \{ \alpha_{sc}(t) \}(\omega) \right|^2 d\omega = \frac{sc}{\alpha} \sigma_{\omega}^2 \quad (3.32)$$

Notația \mathfrak{F} indică transformarea Fourier a semnalului. Din relația (3.32), putem trage o concluzie foarte importantă: șirul benzilor efective ale undișoarelor din familia Daubechies descrește monoton cu N și are limită finită, dată de banda efectivă a undișoarei sinus cardinal. În consecință, șirul este mărginit superior, adică toate benzile efective asociate șirului sunt finite.

Sintetizând cele spuse mai sus, s-a subliniat în acest paragraf că duratele efective ale undișoarelor din familia Daubechies sunt finite (și am calculat și o margine superioară acestei durate), și, pe de altă parte s-a demonstrat că și benzile efective ale acestora sunt finite. Prin urmare, produsul $\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2$ este finit, indiferent la care undișoară din familia Daubechies ne referim. Putem afirma în consecință, că localizarea bazei ortogonale folosită în WOFDM (atunci când undișoarele sunt din familia Daubechies) este superioară aceleia din OFDM. Consecințele practice ale unei asemenea afirmații se vor vedea în capitolele 4 și 5.

3.3.3 Simularea numerică a calculului localizării timp-frecvență pentru undișoarele din familia Daubechies

Așa cum s-a discutat în paragraful precedent, un calcul analitic al valorii benzii și duratei efective a unei undișoare este dificil, necunoscându-se expresiile matematice asociate undișoarelor mamă și funcțiilor de scară. Pentru implementarea Transformării Wavelet Discrete (atât directă cât și inversă), se folosește algoritmul lui Mallat [Mal'09]. Utilizând biblioteca gratuită de funcții Wavelab care rulează sub Matlab [Buc,Don'05], se pot genera forme de undă care să simuleze undișoare din diverse familii. Pentru aceasta, la intrarea algoritmului de calcul IDWT se aduce un impuls unitar, iar ieșirea va fi ori undișoara mamă, ori funcția de scară considerată, în funcție de poziția în vectorul de intrare a impulsului unitar (dacă el este "văzut" de algoritmul de calcul ca și coeficient de aproximare sau de detaliu). Odată generate formele de undă, banda și durata efectivă se aproximează prin intermediul unui calcul numeric, în care integralele din ecuația (3.21) sunt approximate prin sume. Deoarece se consideră pasul de eșantionare $T_S = 1$, suportul de frecvență pentru transformatele Fourier ale undișoarelor va fi $(-0.5, 0.5)$. Valorile calculate pentru banda și durata efectivă vor fi normate prin maximele lor, astfel încât, în cele din urmă, atât σ_t cât și σ_ω vor avea valori subunitare. Rezultatele obținute folosind procedura descrisă mai sus sunt redată în figurile (3.15-3.17). Astfel, în figura 3.15 a) avem durata efectivă a undișoarelor Daubechies, iar în 3.15 b) se reprezintă aceeași mărime, pentru funcțiile de scară. Se observă, așa cum era de așteptat, o creștere monotonă a duratei efective, a cărei valoare maximă se atinge pentru undișoara Daubechies-20, care are 10 momente nule. Variația cu numărul de momente nule a duratei efective este destul de rapidă. Astfel, durata efectivă a undișoarei-mamă Daubechies-20 este de 6.66 de ori mai mare decât aceea a undișoarei Daubechies-4, iar în cazul funcțiilor de scară, acest raport este de 3.23. Însemnătatea observațiilor precedente se va vedea în capitolul viitor, unde se studiază în detaliu transmisia WOFDM prin canale cu fading plat, dar variabile în timp. Practic, creșterea duratei efective a undișoarelor "purtătoare" va influența negativ performanța BER, întrucât undișoarele cu durată efectivă mare sunt mai puternic afectate de timpul de coerență al canalului. În figura 3.16 se arată banda efectivă pentru undișoarele și funcțiile de scară

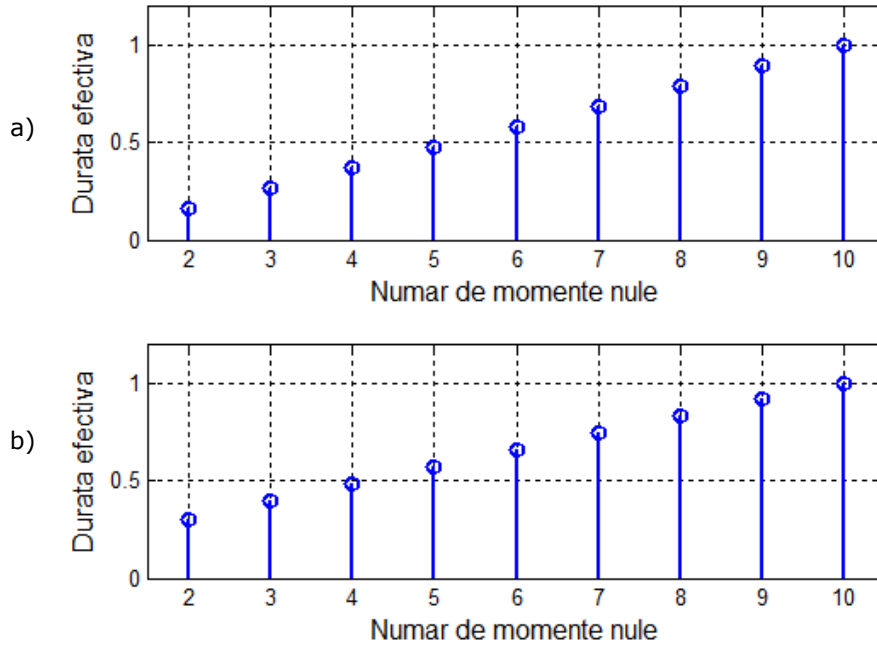


Fig. 3.15: Durata efectivă a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies. Valorile sunt normate la unitate.

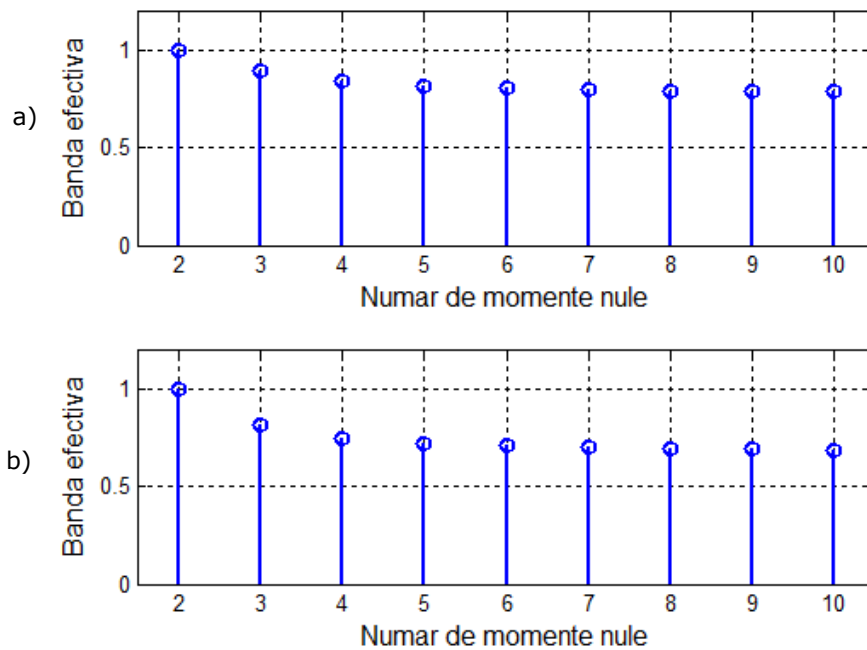


Fig. 3.16: Durata efectivă a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies. Valorile sunt normate la unitate.

Daubechies. Se observă din nou o evoluție monotonă, de data aceasta descrescătoare, în raport cu numărul de momente nule, N . Acest lucru este normal, întrucât undișoarele bine localizate în timp (N mic) sunt slab localizate în frecvență, și viceversa. De data aceasta, "viteza" de variație a benzii efective este mai mică decât în cazul duratei efective. Intuitiv, acest lucru este explicabil prin aceea că, așa cum s-a discutat în acest paragraf, localizarea în frecvență devine foarte bună abia atunci când numărul de momente nule tinde la infinit, adică pentru undișoara de tip sinus cardinal. Numeric, putem spune că banda efectivă a undișoarei Daubechies-20 este de 1.28 ori mai mică decât aceea a undișoarei Daubechies-4. În cazul funcțiilor de scară, acest raport este de 1.47. Din nou, importanța acestui tip de evoluție va fi pusă în evidență într-un capitol viitor (cap. V), unde se va vedea că o bandă efectivă mai mică a undișoarelor va fi o premiză favorabilă în cazul canalelor selective în frecvență

Dat fiind faptul că, în gama studiată (referindu-ne aici la parametrul N), ritmul de creștere a duratei efective este clar superior aceluia de descreștere a benzii efective, prima măsură își va pune în mod decisiv amprenta asupra "compromisului" de localizare timp-frecvență. Așadar, în figura 3.17, produsul dintre banda și durata efectivă va fi monoton crescător cu N .

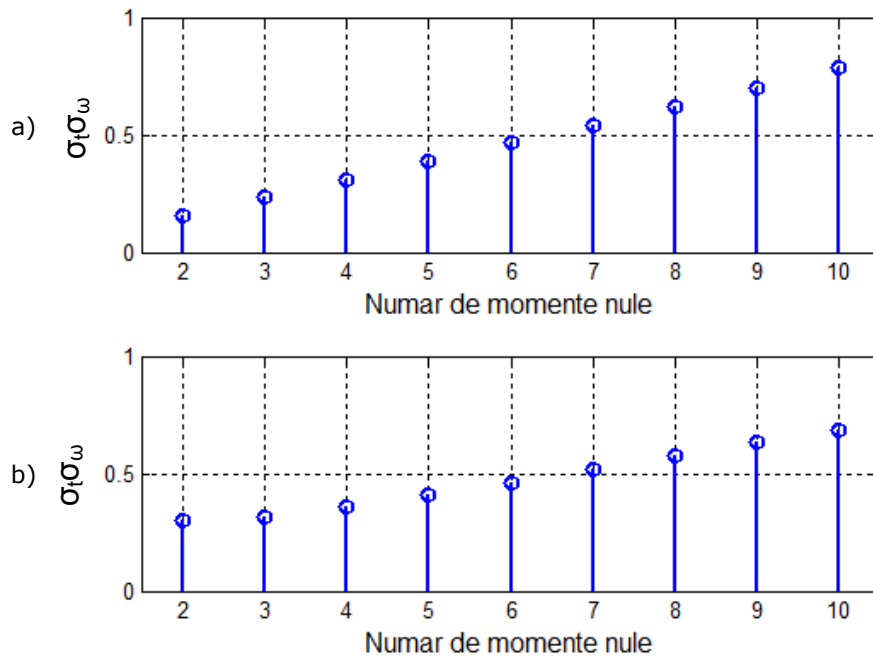


Fig. 3.17: Localizarea timp-frecvență (produsul $\sigma_t \sigma_\omega$) a undișoarelor (a) și a funcțiilor de scară (b) din familia Daubechies.

3.4 Transmisii multi-purtătoare asociate cu turbo-coduri

În orice sistem de transmisie întâlnit în practică, datele se codează înainte de a fi transmise prin canal. Acest lucru permite receptorului să detecteze și să corecteze erorile pe care mediul de transmisie le introduce, și permite reducerea BER până la valori acceptabile pentru un sistem de transmisie. Unul dintre cele mai puternice instrumente de codare folosit actualmente este constituit de turbo-coduri [Ber,Gla'93]. Acestea sunt utilizate la scară largă în sistemele de transmisie prin satelit, în sistemele de comunicații celulare (de ex. Wideband Code Division Multiple Acces), etc. O versiune de turbo cod o constituie turbo-codurile multi-binare [Dou,Ber'05], care sunt construite prin concatenarea paralelă a două coduri convoluționale binare recursive (Recursive Systematic Convolutional, RSC) bazate pe registre liniare de deplasare cu reacție cu intrări multiple (r intrări). Și aceste turbo-coduri duo-binare și-au găsit o gamă mare de aplicabilitate, ele fiind folosite în sistemul DVB precum și în standardul IEEE 802.16 pentru tehnologia WiMAX.

În timp ce pentru versiunea turbo-codată a OFDM există numeroase referințe bibliografice [Bur,Whi'99, Bah,Sal'02], combinația dintre OFDM și turbo-coduri fiind folosită la scară largă, o asociere a turbo-codurilor cu tehnica WOFDM nu este extensiv prezentată în literatură. Acolo unde există [Zha,Zha'03], rezultatele obținute sunt promițătoare și ne arată că o asemenea asociere trebuie studiată mai în detaliu. Prin urmare, plecând de la schema din figura 2.13, se adaugă în lanțul de transmisie un bloc care realizează codarea, respectiv decodarea semnalului. Lanțul de transmisie pe baza căruia se efectuează simulările ale căror rezultate vor fi discutate în continuare este ilustrat în fig. 3.18.

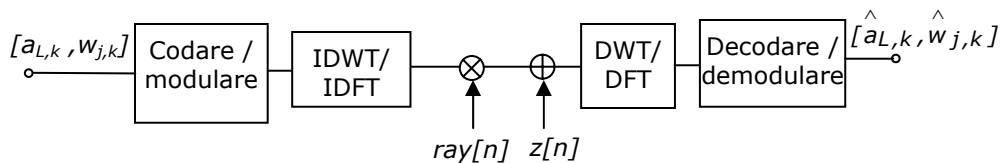


Fig. 3.18: Implementarea modulației WOFDM asociată cu turbo-codul duo-bină.

Parametrii utilizați pentru realizarea simulărilor sunt sintetizați în tabelul 3.3. Astfel, datele de transmis, generate de către o sursă aleatoare, vor fi trecute prin blocul de codare, și apoi mapate pe simboluri complexe, conform constelației de modulare alese. Întrucât în simulări se lucrează cu o modulație BPSK, șirul binar de la ieșirea codorului este transformat într-o succesiune de simboluri bipolare echiprobabile. Modularea este făcută cu ajutorul blocului IDWT, sau IDFT în cazul în care se dorește simularea transmisiei OFDM. Datele sunt apoi trecute prin canal (efectul multiplicativ dat de variabila distribuită Rayleigh, și cel aditiv dat de către zgomotul alb). La receptor sunt realizate operațiile complementare: decodare și demodulare. De notat că decodorul lucrează cu o intrare "soft", adică la intrarea sa nu sunt aduse valori binare sau bipolare (de ex. +1 și -1), ci valori "analogice" ale eșantioanelor sosite la recepție, alterate de trecerea prin canal, asupra cărora nu s-a luat în prealabil o decizie de tip binar. Decodorul încorporează un detector, care, după efectuarea unui anumit număr de iterații ale algoritmului de decodare va lua decizia asupra simbolului transmis. În cele din urmă, pentru evaluarea erorii, se folosesc măsurile clasice, adică BER și FER.

Parametru	VARIANTĂ ALEASĂ
Configurația turbo-codului	Paralel
Codul component	Cod RSC cu memorie 3
Rata codului	1/2
Puncturare	NU
Modulare	BPSK
Sisteme	OFDM cu ieșire reală WOFDM, o iterație, cu undișoarele mamă Haar, Daubechies-12, Symmlet-6, Coiflet-3 N=1024 purtătoare
Canal	Fading plat, distribuit Rayleigh fm=0.05
Interleaver	S-interleaver, S=9
Lungimea blocului de date codat	2 x 256 = 512 biți
Algoritm de decodare	MaxLogMAP
Numărul de iterații	15 iterații cu un criteriu de oprire bazat pe distribuția APP (A Posteriori Probability).
Număr de blocuri transmise	Invers proporțional cu logaritmul erorii

Tabel 3.3: Parametrii folosiți pentru simularea transmisiei WOFDM codate.

Simulările transmisiei multi-purtătoare turbo-codate au urmat două direcții: în primul rând s-a dorit re-evaluarea comparației dintre performanțele OFDM și WOFDM, de data aceasta prin prisma codării, iar în cel de al doilea rând s-a dorit a se vedea dacă, și în ce măsură, există diferențe între performanțele BER obținute prin folosirea unor undișoare diferite. În primul set de simulări, s-a considerat cazul mai simplu, al unui canal AWGN, în care singurul efect ce afectează semnalul transmis este un zgomot alb, aditiv.

Rezultatele obținute (fig. 3.19) confirmă concluziile rezultate în cazul transmisiei necodate, și anume că, pentru transmisia în canale AWGN, nu există diferențe în ceea ce privește performanța celor două metode comparate [Olt,Kov,Balt,Cam'08].

Performanța BER pentru toate sistemele testate (descrise în tabelul 3.3), în cazul unui canal cu fading plat de tip Rayleigh, este ilustrată în figura 3.19. Din figura 3.19 se desprind două concluzii. În primul rând, toate versiunile de WOFDM conduc la performanțe mai bune decât în cazul OFDM, câștigul fiind de aproximativ 0.3 dB, pentru un BER de 0.0002. A doua observație este că nu există diferențe

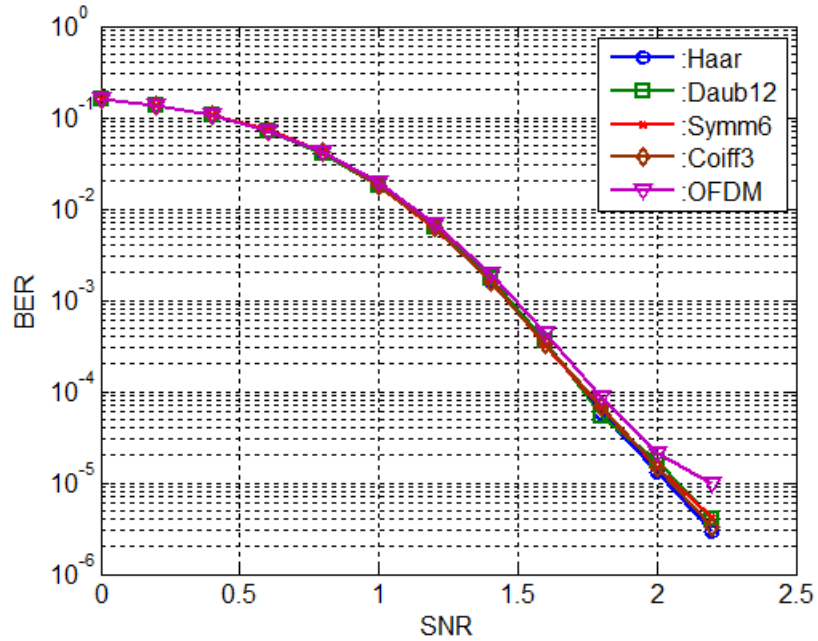


Fig. 3.19: Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale AWGN.

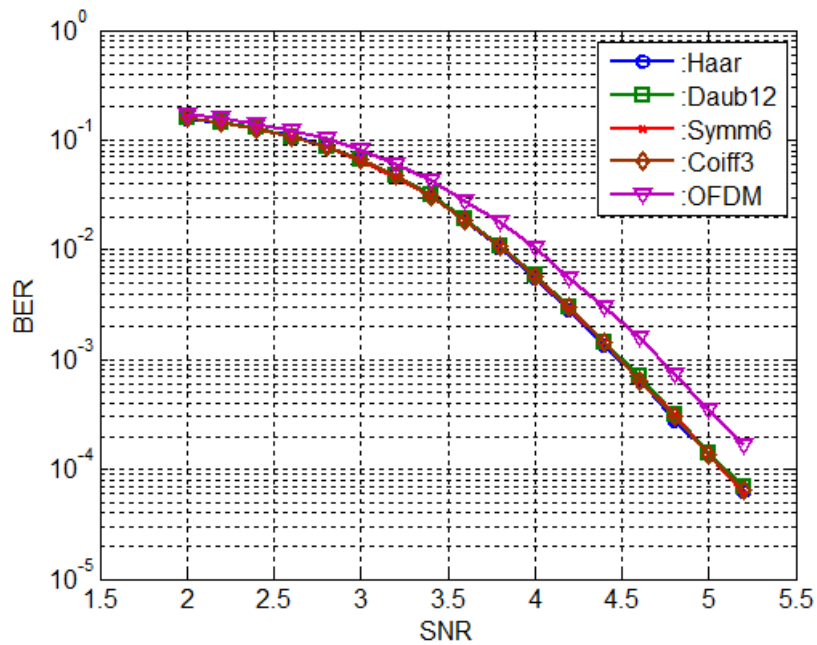


Fig. 3.20: Performanța BER a transmisiilor WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-binar, în canale cu fading plat.

semnificative în ceea ce privește performanța BER a diverselor versiuni de WOFDM (care folosesc diverse undișoare mamă). Aceste concluzii sunt verificate și din punctul de vedere al ratei erorii pe cadru, ilustrată în figura 3.21. De data aceasta, diferența între OFDM și WOFDM este mai redusă. Se observă și în acest caz suprapunerea curbelor de performanță corespunzătoare diverselor versiuni de WOFDM.

Ca o remarcă generală se poate observa că, așa cum era de așteptat, introducerea turbo-codurilor în lanțul de transmisie permite obținerea unor câștiguri extrem de importante, de ordinul zecilor de dB, comparativ cu transmisia necodată.

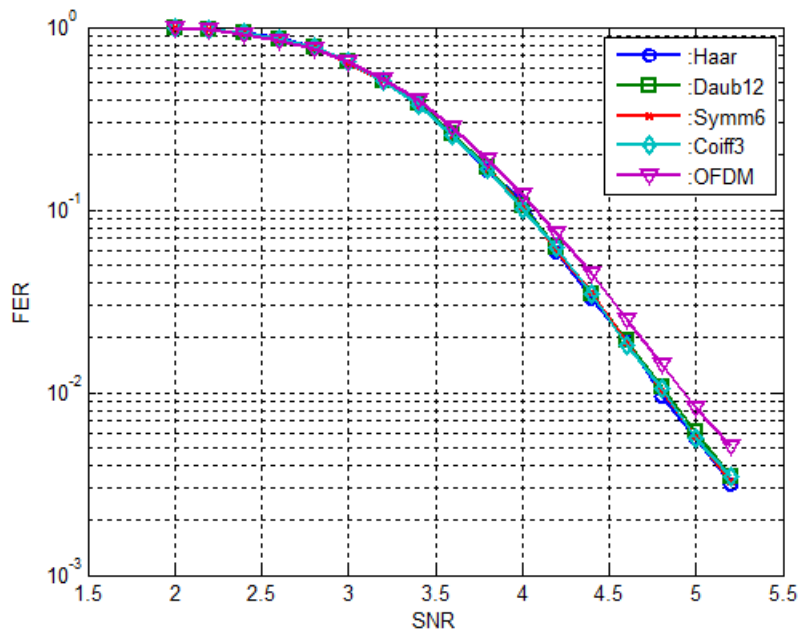


Fig. 3.21: Performanța FER a transmisiei WOFDM/OFDM codate cu un turbo-cod multi-bin, în canale cu fading plat.

4. STUDIUL PERFORMANTELOR WOFDM ÎN CANALE CU FADING PLAT

Dacă până acum am privit comparativ transmisia OFDM clasică și cea bazată pe undișoare, în acest capitol se va realiza o analiză mai amănunțită a tehnicii WOFDM. Din motive deja conturate, care vor deveni și mai clare în cele ce urmează, o analiză pertinentă a performanțelor WOFDM poate fi făcută identificând două cazuri diferite: canale cu fading plat, respectiv cu fading selectiv în frecvență. În acest capitol ne vom referi la primul caz.

Așa cum s-a explicat în capitolul anterior, modulatorul și demodulatorul din WOFDM se bazează pe calculul transformării wavelet discrete, folosindu-se algoritmul lui Mallat. Există doi parametri care trebuie luați în considerare în acest calcul: undișoara mamă folosită (care se regăsește direct în coeficienții filtrelor g și h , fig. 2.4) și numărul de iterații al transformatei. S-a explicat că, din considerente practice, acest număr de iterații este limitat la valoarea $J = \log_2 N$.

Se studiază experimental, în cele ce urmează, care este influența acestor parametri în cazul transmisiei WOFDM prin canale cu fading plat, variabile în timp.

4.1 Alegerea undișoarelor folosite ca și purtătoare în WOFDM

Vom începe cu influența undișoarei mamă folosite în calculul DWT asupra performanțelor BER ale transmisiei. Există câteva familii de undișoare bine-cunoscute și utilizate adesea pentru calculul DWT [Mal'09]. Ne putem referi aici la undișoarele Haar, Daubechies, Coiflet și Symmlet. Toate aceste undișoare au avantajul că filtrele digitale cu ajutorul cărora se implementează algoritmul lui Mallat sunt cunoscute. În simulări s-a folosit din nou bibliotecă de funcții Wavelab, sub mediul de programare Matlab [Buc,Don'05], unde se definesc aceste filtre și există funcții de calcul direct al DWT și IDWT cu ajutorul lor. Pentru toate aceste undișoare mai există un parametru de luat în calcul, și anume numărul de momente nule al undișoarei mamă. În principiu, cu cât acest număr este mai mare cu atât undișoara mamă va fi mai întinsă în timp și mai concentrată în frecvență. În prezenta lucrare s-au efectuat simulări pentru câteva tipuri de undișoare și pentru o gamă largă de opțiuni în ceea ce privește numărul de momente nule al fiecăreia. Pentru a avea o imagine globală a simulărilor efectuate, parametrii implicați sunt ilustrați în tabelul 4.1. Parametrul numeric care însoțește numele undișoarelor este legat de numărul de momente nule, nefiind însă exact valoarea acestuia. Semnificația în fiecare caz este explicată în documentele descriptive ale bibliotecii de funcții Wavelab, fiind însă suficient să amintim că între numărul de momente nule al undișoarelor și acest parametru există o relație de direct-proportionalitate. În contextul rezultatelor care urmează, prezintă interes relația dintre parametrul p și suportul temporal al undișoarei. Deși nu există o relație care să le lege direct, Mallat [Mal'09] afirmă că pentru undișoarele ortogonale cu p momente nule, suportul temporal al acestora este de cel puțin $2p-1$.

PARAMETRI DE SIMULARE		
Emitător		
Parametru	Implementare	Observații
Simboluri transmise	+1 și -1 (echiprobabil).	
Dimensiunea blocului	$N=1024$	Coincide cu numărul de subpurtătoare.
Număr de blocuri transmise	$N_b=10000$	
Modulator	IDWT	Folosește algoritmul lui Mallat.
Undișoara mamă	Haar, Daubechies- 4,8,12,16 și 20, Coiflet- 1,2 , 3, 4 și 5, Symmlet- 4, 6, 8,10	Indexul ce urmează undișoara este legat de numărul de momente nule.
Număr de iterații al transformării	$n_{it}=1, 4$	Prin natura implementării, n_{it} este identic cu numărul de scări pe care se face transmisia.
Canal		
Parametru	Implementare	Observații
E_b/N_0	Între 0 și 20 dB	În cazul asocierii cu turbo-codurile, domeniul este de la 0 la 2 dB
Tip fading	Plat, variabil în timp	Toate copiile semnalului ajung la receptor pe durata unui simbol.
Deplasare Doppler normalizată maximă	$f_m= 0.005, 0.05$	Timpul de coerență $T_C \in [84.6T_S, 846T_S]$
Receptor		
Parametru	Implementare	Observații
Demodulator	DWT	
Deteție	Comparare cu pragul.	

Tabel 4.1: Parametrii de simulare a transmisiei WOFDM în canale cu fading plat.

Se spune că o undișoară $\psi(t)$ are p momente nule dacă ea satisface condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \text{ pentru } 0 \leq k < p \quad (4.1)$$

Se va trece în continuare la ilustrarea rezultatelor de simulare obținute și la discuții pe marginea acestora. Primul obiectiv al simulărilor este acela de a determina gradul de relevanță al tipului de undișoară mamă ales pentru transmisie. Se alege în acest scop câte o undișoară mamă din fiecare familie listată în tabelul 4.1 și se calculează performanța BER a transmisiei. În primele experimente, în modulator și demodulator se realizează o singură iterație a algoritmului de calcul al IDWT.

Rezultatele sunt prezentate în figurile 4.1 și 4.2, pentru două valori diferite ale deplasării Doppler maxime.

Cele două figuri ne arată tipare de comportament diferite pentru cele două cazuri considerate. Astfel, în cazul variației mai rapide a canalului ($f_m = 0.05$, fig. 4.1), cel mai bun rezultat este cel obținut atunci când se folosește undișoara Haar, urmat de undișoarele Coiflet și Symmlet (rezultate similare), iar rezultatul cel mai slab se obține pentru undișoara Daubechies-12. Se vede că diferențierea performanțelor poate fi pusă în evidență doar la valori mari ale raportului semnal pe zgomot ($E_b / N_0 > 10 \text{ dB}$), adică acolo unde se presupune că principala sursă a erorilor o constituie variația în timp a canalului, măsurată prin valoarea maximă a deplasării Doppler. Câștigul oferit de undișoara Haar față de Daubechies 12 este de peste 3dB, la o rată a erorii de 0.5%. Ipoteza pe care o avansăm în această direcție este aceea că, având suportul temporal cel mai compact, undișoara Haar este și cea mai rezistentă la variabilitatea în timp a canalului.

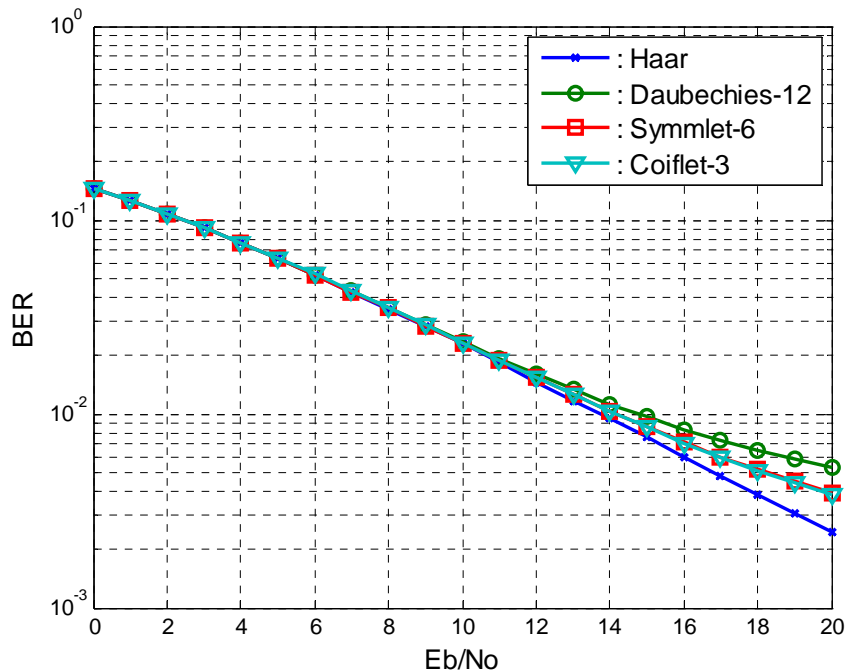


Fig.4.1: Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă, o singura iteratie IDWT și $f_m=0.05$.

Pe de altă parte, dacă avem un canal ce variază lent în timp (de 10 ori mai lent în exemplul considerat, fig. 4.2), ne apropiem deja de cazul unui canal AWGN. Astfel, performanțele obținute sunt identice pentru toate undișoarele testate. Să ne amintim că în exemplele considerate, transmisia s-a făcut pe o singură scară, iar durata simbolurilor ($2T_S$) este mult mai mică decât timpul de coerență al canalului.

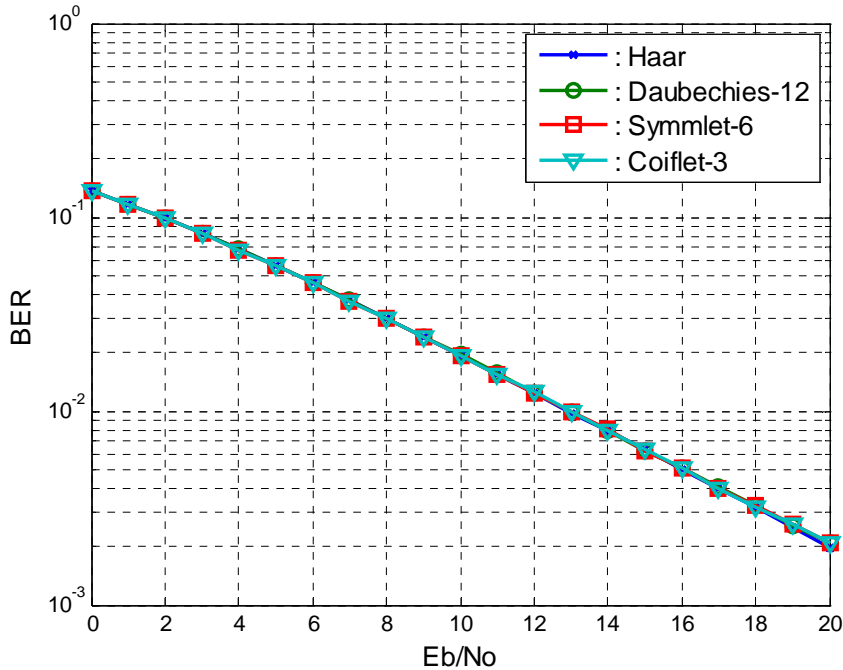


Fig.4.2: Performanțele WOFDM cu diverse undișoare mamă, o iterație IDWT și $f_m=0.005$.

4.1.1 Explicarea rezultatului superior al undișoarei Haar

Pentru a da o explicație rezultatului superior al undișoarei Haar, în raport cu toate celelalte undișoare testate, ne vom referi la un scenariu simplu, în care modulatorul IDWT este implementat folosind o singură iterație a algoritmului lui Mallat. Particularizând figura 2.5 (pentru o singură iterație), obținem schema de implementare a modulaturii din fig. 4.3.

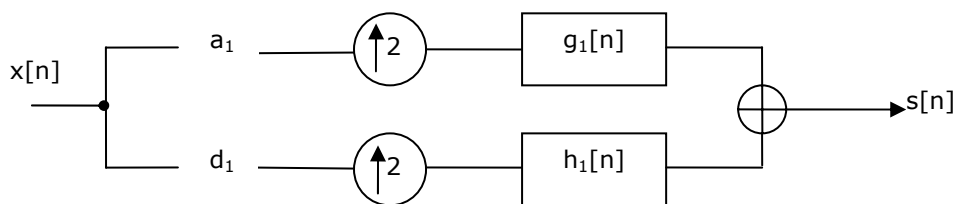


Fig. 4.3: Implementarea modulaturii IDWT cu o singură iterație.

Dacă presupunem că semnalul de intrare $x[n]$ are N eșantioane, atunci prima jumătate a lor vor constitui coeficienții de aproximare (notați cu a_1), iar cea de a doua jumătate pot fi interpretați ca și coeficienții de detaliu (d_1). Pentru simplificarea notațiilor vom renunța în cele ce urmează la indicele 1, omisiune posibilă întrucât avem o singură iterație a algoritmului. În acest caz, $g_1[n]$ și $h_1[n]$

vor fi răspunsurile la impuls ale filtrelor de sinteză, primul fiind un filtru trece-jos, iar cel de al doilea un filtru trece sus. Aceste răspunsuri sunt:

$$\begin{aligned} g_1[n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n] + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n-1] \\ h_1[n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n] - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta[n-1] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ținând cont de supraeșantionarea cu 2 la care sunt supuși coeficienții de detaliu d și cei de aproximare a , se poate exprima semnalul transmis $s[n]$ folosind formula:

$$s[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \left[\frac{n}{2} \right] + d \left[\frac{n}{2} \right] \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \left[\frac{n-1}{2} \right] - d \left[\frac{n-1}{2} \right] \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \left[\frac{n}{2} \right] + d \left[\frac{n}{2} \right] \right), & \text{daca } n \text{ par} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \left[\frac{n-1}{2} \right] - d \left[\frac{n-1}{2} \right] \right), & \text{daca } n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.3)$$

Dacă ne referim acum la funcționarea demodulatorului, rolul acestuia este de a identifica corect secvența de coeficienți de aproximare, respectiv de detaliu. Demodulatorul este bazat pe transformarea directă, DWT. Aceasta constă de fapt în filtrarea semnalului recepționat, $r[n]$, folosind de data aceasta filtrele de analiză, având răspunsurile la impuls g , respectiv h . Modul în care ele acționează se întrevede foarte simplu și din relația 4.3. Dacă se consideră canalul ideal, atunci semnalul ajuns la demodulator, $r[n]$ va fi identic cu acela emis în canal, $s[n]$. Luând acum două simboluri succesive recepționate, $r[2k]$ și $r[2k+1]$, și ținând cont de scalarea cu $1/\sqrt{2}$ introdusă de filtrele din receptor, se observă din (4.3) că:

$$\begin{cases} r[2k] + r[2k+1] = a[k] \\ r[2k] - r[2k+1] = d[k] \end{cases} \quad (4.4)$$

Prin urmare, printr-o simplă scădere, respectiv, adunare a două eșantioane succesive sosite la recepție se pot identifica corect simbolurile transmise, adică detaliile și aproximările ce compun vectorul de date inițial, $x[n]$. Reformulând ideea precedentă, în ciuda faptului că este vorba despre o modulație multi-purtătoare, fiecare simbol de la recepție depinde doar de două simboluri seriale emise. La nivel intuitiv, observația precedentă ne permite deja să concluzionăm că, în această situație, variabilitatea în timp a canalului nu va avea un efect puternic asupra performanțelor transmisiei. O analiză mai riguroasă va fi făcută în cele ce urmează. Trecând la scenariul de simulare ales, să ne amintim că semnalul $r[n]$ ajuns la receptor este distorsionat atât de secvența distribuită Rayleigh ($ray[n]$) cât și de zgomotul aditiv $z[n]$:

$$r[n] = s[n] \cdot ray[n] + z[n] \quad (4.5)$$

Întrucât scopul nostru este să arătăm că undișoara Haar este mai rezistentă la împrăștierea Doppler indusă de caracterul variant în timp al canalului (și simulată prin intermediul secvenței $ray[n]$), vom neglija în cele ce urmează efectul zgomotului aditiv, și vom considera că singurul efect de distorsiune asupra semnalului util este indus de către $ray[n]$. Considerând acum două simboluri succesive, la fel ca în relația 4.4, o estimată a simbolului emis $a_{est}[k]$ poate fi făcută pe baza relației:

$$a_d[k] = s[2k] \cdot ray[2k] + s[2k+1] \cdot ray[2k+1] \quad (4.6)$$

Raportându-ne la tipul de transmisie utilizată, să remarcăm că o decizie asupra simbolului $a[k]$ poate fi luată pe baza semnalului eșantionului $a_d[k]$:

$$a_{est}(k) = \begin{cases} 1, & \text{daca } a_d[k] \geq 0 \\ -1, & \text{daca } a_d[k] < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Probabilitatea de eroare este:

$$P_e = P(a_{est}[k] \neq a[k]) = P(a_{est}[k] = 1 | a[k] = -1) + P(a_{est}[k] = -1 | a[k] = 1) \quad (4.8)$$

Luând acum unul dintre cei doi termeni care compun membrul drept al ecuației precedente, și ținând cont de relația (4.2), putem reformula astfel:

$$\begin{aligned} P(a_{est}[k] = -1 | a[k] = 1) &= P(a_d[k] < 0 | a[k] = 1) = \\ &= P\left(\frac{a[k] + d[k]}{\sqrt{2}} ray[2k] + \frac{a[k] - d[k]}{\sqrt{2}} ray[2k + 1] < 0 | a[k] = 1\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Reamintim că $ray[k]$ este o secvență distribuită Rayleigh și că, așa cum ne arată funcția densitate de probabilitate redată în figura 3.10, eșantioanele acestei secvențe pot lua doar valori pozitive. Să considerăm în continuare că $d[k]=1$. În această situație, probabilitatea din ecuația 4.9 se poate scrie:

$$P_1 = P(\sqrt{2} ray[2k] < 0) \quad (4.10)$$

Ori, această probabilitate este nulă. Dacă $d[k]=-1$, revenim la exact același gen de problemă. Concluzionăm în acest context că probabilitatea ca demodulatorul să conducă la o decizie incorectă în cazul transmisiei unui simbol de "1" este zero. Reamintim că se pleacă de la ipoteza că singurul efect de distorsiune asupra semnalului util este dat de către secvența distribuită Rayleigh, și ignorăm prezența zgomotului alb.

Către exact același tip de raționament ne conduce și scenariul în care se presupune transmisia unui simbol negativ ($a[k]=-1$). În această situație, concluzia importantă la care se ajunge este că, dacă am presupune un canal fără zgomot aditiv, fadingul variabil în timp nu introduce erori, indiferent cât de mare este împrăștierea Doppler, atunci când se folosește undișoara Haar și o singură iterație a transformatei. Concluzia teoretică este sprijinită de simulări, care ne arată că BER=0, în cazul menționat (fig. 4.4).

În cazurile practice vom avea mereu un zgomot aditiv care perturbă semnalul. Totuși, rezultatul precedent ne arată că undișoara Haar, folosită într-o modulație WOFDM este foarte rezistentă la erorile pe care le introduce variabilitatea în timp a canalului. Comparativ cu celelalte undișoare, pentru care se raportează rezultate în figurile 4.1 și 4.2, să notăm că filtrele folosite în implementare au nu mai puțin de 18 coeficienți nenuli în cazul Coiflet și 12 coeficienți nenuli pentru celelalte undișoare. Aceasta înseamnă că fiecare simbol recepționat va depinde de un număr mult mai mare de simboluri consecutive, context în care probabilitatea de eroare crește. Pentru a avea o imagine globală, să observăm că fiecare eșantion emis în canal este o sumă ponderată de coeficienți de aproximare și detaliu, din vectorul de date de la intrare. Pe de altă parte, trecerea prin demodulatorul DWT reconstituie acești coeficienți printr-o sumă ponderată de eșantioane din semnalul de la intrare. O eroare se produce atunci când semnul acestei sume este diferit de cel pe care ar trebui să îl "impună" simbolurile de intrare (coeficienți de aproximare și detaliu). În cazul transformării Haar este vorba despre doar două eșantioane consecutive, dar numărul acesta este cu mult mai mare în cazul tuturor celorlalte undișoare. Înmulțirea acestor eșantioane cu secvența de fading poate conduce la apariția unor erori chiar și în lipsa zgomotului aditiv, dacă ne referim la un alt tip de filtru decât Haar, și la mai mult de o singură iterație a transformării. Acest lucru rezultă și din figura 4.4.

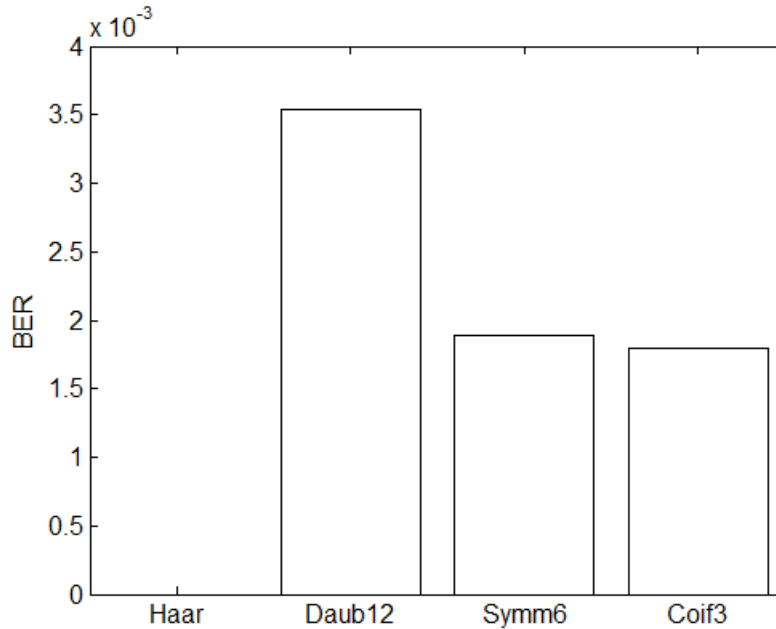


Fig. 4.4: Performanța BER pentru diverse undișoare, într-un canal variant în timp ($f_m=0.05$), fără zgomot AWGN, o singură iterație IDWT.

4.1.2 Influența numărului de momente nule

Se poate merge mai departe cu analiza undișoarelor folosite, luând de data aceasta în considerare un alt parametru al transmisiei, și anume numărul de momente nule [Mal'09]. Referitor la influența numărului de momente nule (fig. 4.5), ea este evidentă în cazul undișoarelor din familia Daubechies (se produc de două ori mai multe erori când se folosește undișoara Daubechies-20 față de undișoara Daubechies-4 pentru E_b/N_0), confirmând că undișoarele mai bine localizate în timp conduc la performanțe mai bune în cazul transmisiei printr-un canal variabil în timp cu fading plat. Aceeași tendință poate fi observată în cazul tuturor familiilor de undișoare prezentate, dar cu rezultate mai puțin pregnante. Evoluția BER în raport cu E_b/N_0 este arătată în figura 4.5, pentru undișoarele din familia Daubechies.

O selecție a rezultatelor obținute pentru toate undișoarele este arătată în tabelul 4.2. Ca o remarcă importantă, tabelul 4.2 confirmă atât afirmațiile precedente, cât și acelea din paragraful anterior (rezultate mai bune atunci când se folosesc undișoarele mai bine localizate în timp). Performanța cea mai bună la un anumită valoare a raportului E_b/N_0 este marcată prin intermediul unui fundal colorat. Se observă din tabel că, atunci când principala sursă de erori este zgomotul din canal, nu există diferențe de performanță semnificative, indiferent care este undișoara considerată și numărul de momente nule asociat. Această diferențiere devine însă importantă la valori mari ale parametrului E_b/N_0 , unde se poate presupune că ponderea cea mai importantă a erorilor este dată de modificarea în timp a parametrilor canalului, și deci de deplasarea Doppler maximă. Astfel,

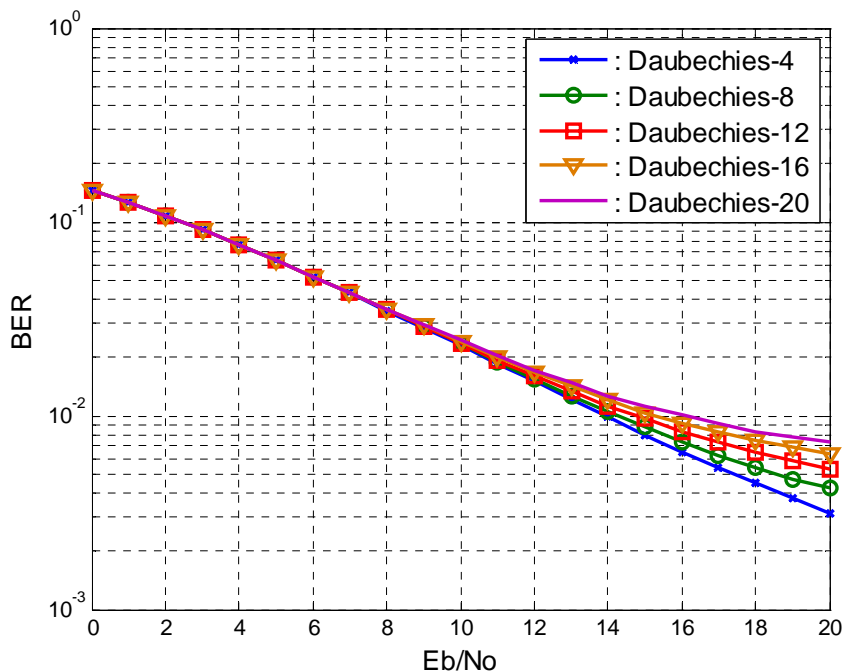


Fig. 4.5: Performanța BER pentru diverse undisoare din familia Daubechies, într-un canal variant în timp ($f_m=0.05$), cu o singură iterație IDWT.

E_b/N_0	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Haar	0.1455	0.1074	0.0764	0.0523	0.0348	0.0229	0.0146	0.0095	0.0060	0.0038	0.0024
Daub-4	0.1454	0.1075	0.0762	0.0522	0.0349	0.0229	0.0150	0.0098	0.0065	0.0044	0.0035
Daub-8	0.1455	0.1073	0.0761	0.0522	0.0351	0.0234	0.0155	0.0104	0.0073	0.0053	0.0042
Daub-12	0.1453	0.1073	0.0760	0.0523	0.0353	0.0237	0.0161	0.0111	0.0083	0.0064	0.0053
Daub-16	0.1453	0.1071	0.0761	0.0523	0.0355	0.0241	0.0167	0.0121	0.0092	0.0074	0.0063
Daub-20	0.1453	0.1071	0.0760	0.0523	0.0356	0.0245	0.0172	0.0127	0.0100	0.0083	0.0072
Symm-4	0.1454	0.1074	0.0762	0.0523	0.0349	0.0231	0.0152	0.0100	0.0068	0.0047	0.0035
Symm-6	0.1454	0.1074	0.0763	0.0523	0.0350	0.0232	0.0153	0.0103	0.0072	0.0051	0.0039
Symm-8	0.1455	0.1074	0.0760	0.0523	0.0352	0.0233	0.0156	0.0106	0.0075	0.0055	0.0043
Symm-10	0.1453	0.1071	0.0760	0.0522	0.0352	0.0234	0.0158	0.0108	0.0077	0.0058	0.0047
Coif-1	0.1454	0.1077	0.0761	0.0520	0.0350	0.0231	0.0152	0.0101	0.0068	0.0048	0.0035
Coif-2	0.1454	0.1072	0.0763	0.0524	0.0349	0.02309	0.0152	0.0100	0.0067	0.0047	0.0034
Coif-3	0.1453	0.1072	0.0763	0.0524	0.0351	0.0232	0.0153	0.0104	0.0070	0.0050	0.0038
Coif-4	0.1453	0.1075	0.0761	0.0522	0.0351	0.0233	0.0156	0.0105	0.0073	0.0054	0.0041
Coif-5	0.1454	0.1075	0.07611	0.0521	0.0352	0.0234	0.0156	0.0108	0.0076	0.0057	0.0045

Tabel 4.2: Selecție a performanței BER pentru $f_m=0.05$ și o singură iterație IDWT.

undișoara Haar începe să devină constant cea mai bună alegere începând cu $E_b/N_0=8$ dB.

Mai trebuie notate aici încă două aspecte. Pe de o parte, există o influență a numărului de momente nule și în cazul în care se folosesc 4 iterații ale transformatei, dar diferențele sunt mai puțin evidente. Pe de altă parte, dacă deplasarea Doppler este de zece ori mai mică decât în cazurile ilustrate în tabelul 4.2, performanța diverselor undișoare nu mai depinde practic de numărul de momente nule. Aceasta deoarece, faptul că parametrii canalului se modifică lent în timp face ca localizarea temporală a purtătoarelor să nu mai aibă un impact notabil.

4.2 Influența numărului de iterații ale IDWT asupra performanțelor transmisiei

Se va studia în continuare influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei. În acest scop, pentru toate undișoarele testate, se va face o comparație între performanța BER atunci când se implementează o singură iterație a transformatei față de situația când se vor implementa patru iterații. Rezultatele sunt arătate în figurile 4.6 (pentru $f_m=0.05$) și 4.7 (pentru $f_m=0.005$). În acest sens se observă o pierdere de peste 3 dB, pentru toate undișoarele testate, atunci când creștem numărul de iterații ale transformatei din modulator. În schimb, în figura 4.7, atunci când considerăm o deplasare Doppler de 10 ori mai mică, nu mai există diferențe semnificative nici între undișoare, nici în funcție de numărul de iterații. Acest lucru ne confirmă ideea că degradarea performanței BER odată cu creșterea numărului de iterații este determinată în primul rând de către variabilitatea în timp a canalului radio. Referindu-ne la implementarea dată în figura 4.3 și la cazul cel mai simplu, reprezentat de undișoara Haar, dacă dorim introducerea încă a unei iterații, expresia semnalului $s[n]$ transmis în canal se va complica. Fiecare eșantion din semnalul $s[n]$ va depinde de mai mulți coeficienți din semnalul de intrare, față de cazul cu o singură iterație. În cazul cel mai simplu, când mai adăugăm încă o iterație a transformatei pentru undișoara Haar, valoarea unui eșantion din secvența $s[n]$ va fi dependentă de un coeficient de aproximare corepunzând iterației 2, și doi coeficienți de detaliu (unul din iterația 2 și unul din iterația 1). Scenariul se complică dacă vom mări în continuare numărul de iterații. În cazul undișoarei Haar, se poate stabili că la calculul fiecărui eșantion din semnalul transmis în canal contribuie $n_{it}+1$ simboluri de intrare. Acesta este cazul cel mai favorabil, dar pentru filtrele de lungimi mai mari, numărul de simboluri de intrare de care depinde un singur eșantion al semnalului de ieșire va crește. În general, se poate stabili următoarea relație:

$$n_t = (n_{it} + 1) \frac{L_{filt}}{2} \quad (4.11)$$

unde n_t indică numărul de eșantioane din semnalul de intrare care contribuie la compoziția unui eșantion din semnalul de ieșire, iar n_{it} este numărul de iterații ale transformatei.

Privind lucrurile dintr-un alt punct de vedere, ceea ce caracterizează implementarea WOFDM este faptul că durata simbolurilor transmise la fiecare scară (la fiecare iterație) este diferită. Astfel, la scara cea mai fină (după o singură iterație) avem undișoarele purtătoare cele mai compacte în timp, și acolo se transmit cele mai multe simboluri (jumătate din numărul total de simboluri).

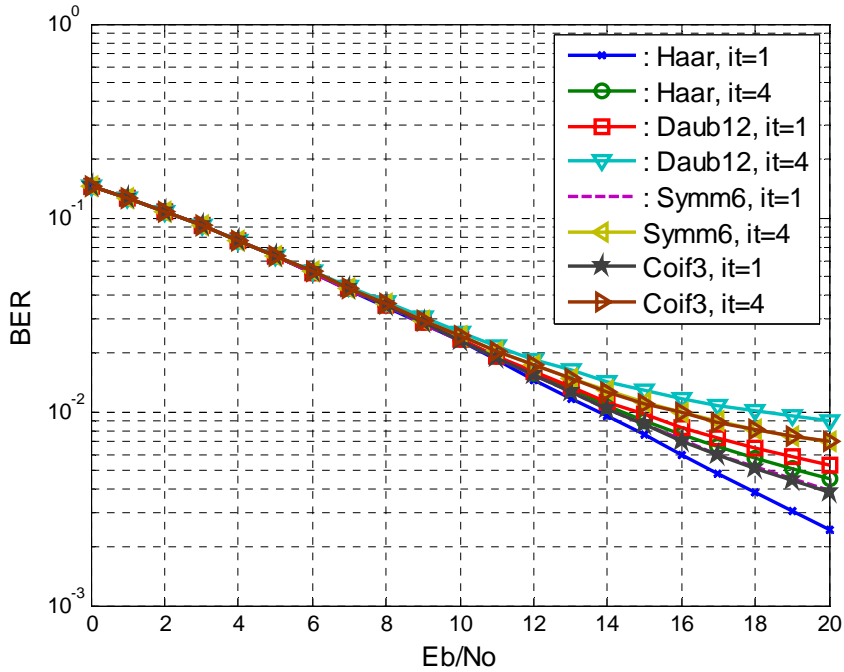


Fig. 4.6: Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei, $f_m=0.05$.

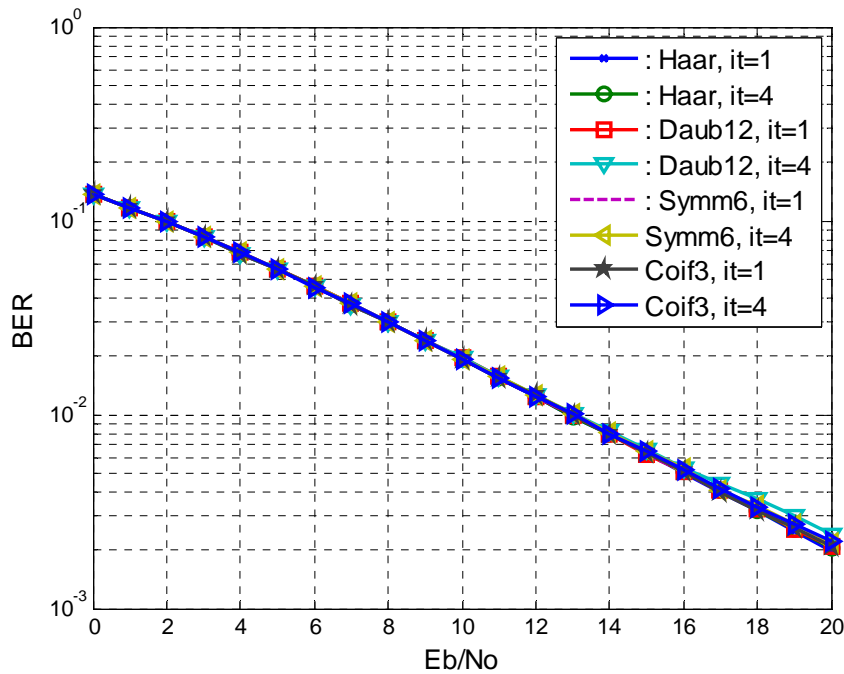


Fig. 4.7: Influența numărului de iterații IDWT asupra performanțelor transmisiei, $f_m=0.005$.

În a doua iterație, undișoarele purtătoare, ca și simbolurile de transmis au un suport temporal dublu, și în acest caz ele vor fi modulate de doar jumătate din numărul de simboluri de la prima iterație. Procesul continuă în aceeași manieră până când se atinge numărul de iterații dorit. Acest mod de a vedea lucrurile ne-a condus înspre ideea că acele scări unde durata simbolurilor este mai mică ar trebui să prezinte mai puține erori decât acelea în care simbolurile transmise sunt de durată mai mare. Supoziția a fost avansată în [Bel,Man'02, Man'01] pentru o transmisie multi-rată și rezultatele obținute au fost folosite și pentru identificarea canalului.

Pentru verificarea acestei idei, datele transmise pe fiecare set de purtătoare au fost utilizate pentru a calcula o rată a erorii de bit parțială pe fiecare scară [Olt'08-1]. În figurile 4.8 și 4.9 avem performanța BER a transmisiei, la diverse scări de descompunere, pentru undișoara Haar. Putem observa din cele două figuri că, în timp ce numărul de erori nu variază semnificativ cu scara de transmisie în situația în care deplasarea Doppler este mică (fig. 4.8), lucrurile se schimbă atunci când creștem de 10 ori valoarea acestui parametru (fig. 4.9). Într-o oarecare măsură, explicația pentru aceste rezultate o putem găsi în relația (3.26), care ne arată valorile între care se încadrează timpul de coerență al canalului. Astfel, pentru $f_m=0.005$ timpul de coerență al canalului este de 84 de ori mai mare decât durata unui simbol serial. În această situație, chiar și la scara a 4-a de transmisie (după 4 iterații) durata simbolurilor ($16T_s$) este de peste 5 ori mai mică decât timpul de coerență al canalului.

În cel de al doilea caz luat în considerare (fig. 4.9), avem $T_c=8.46T_s$. Aceasta ne arată că simboluri cu durată egală cu acest timp se transmit începând cu a treia iterație, durata simbolurilor fiind chiar dublă la cea de a patra iterație.

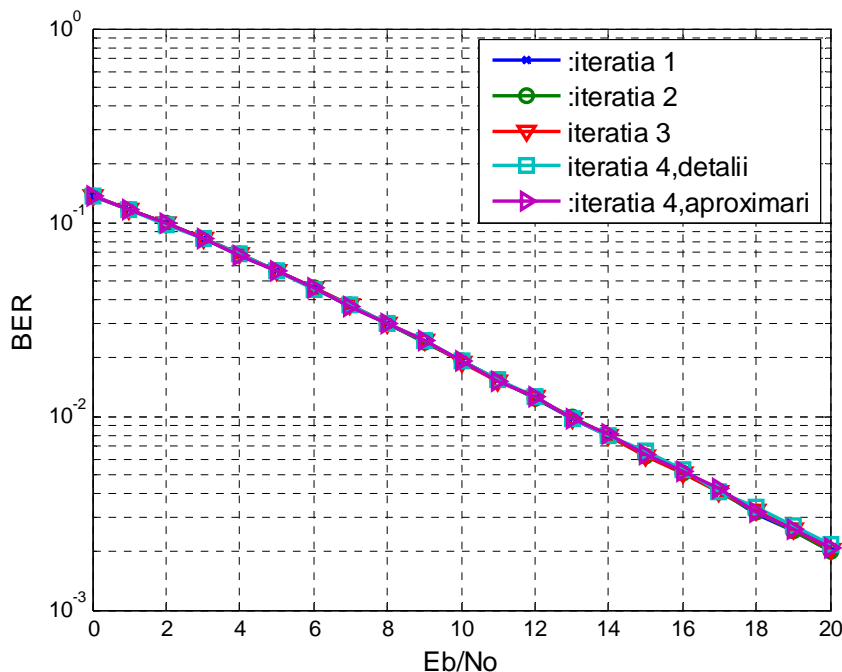
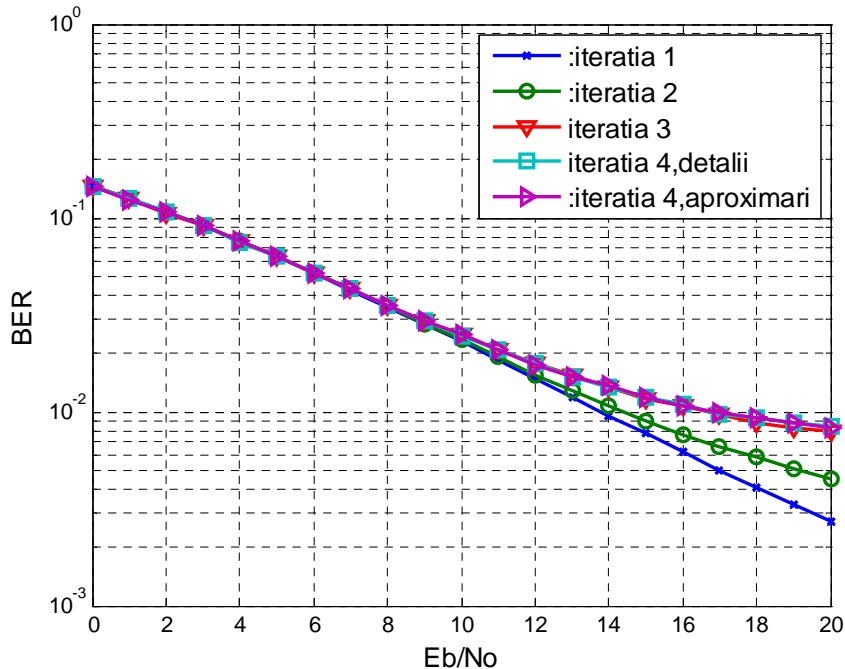


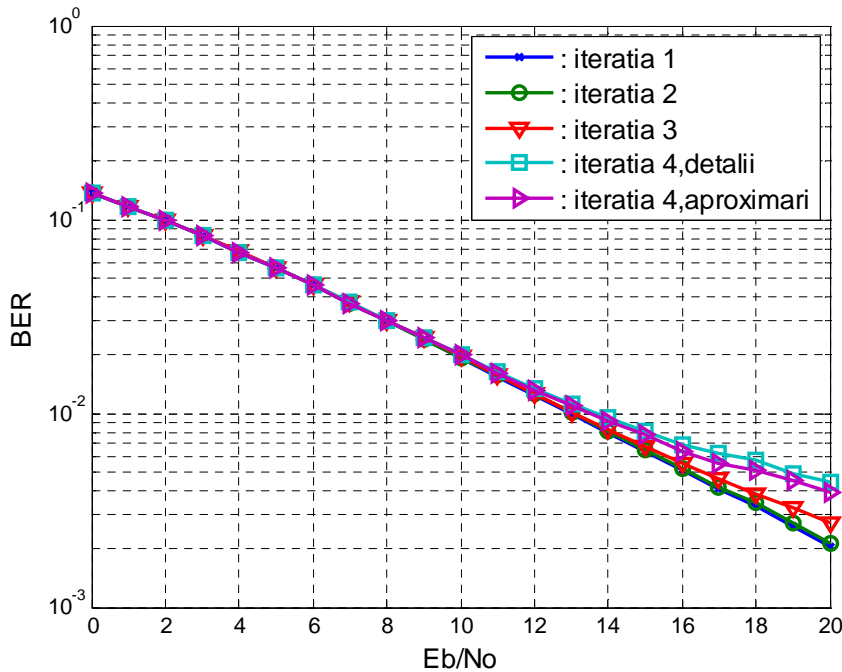
Fig. 4.8: Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.005$, undișoara Haar.

Fig. 4.9: Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.05$, undișoara Haar.

Este prin urmare firesc ca în acest caz, semnalul, mai ales cel de la scările corespunzătoare mai multor iterații, să fie puternic afectat de variabilitatea în timp a canalului radio [Olt'08-2]. Astfel, la iterația 4 observăm pierderi de peste 5dB față de prima iterație, pierderi care se regăsesc și la celelalte undișoare testate. O altă observație este că, în acest ultim caz, diferențele între undișoare încep să fie notabile mai ales la valori E_b/N_0 suficient de mari (peste 10 dB), adică acolo unde principala sursă a erorilor este variabilitatea în timp a canalului.

Pe de altă parte, referindu-ne din nou la figura 4.8, independența BER de scara la care se face transmisia este, dincolo de timpul de coerență mare al canalului, și rodul folosirii unei undișoare foarte compacte în timp. Dacă "purtătoarele" folosite au în schimb un suport temporal mai extins, se vor putea observa diferențe în ceea ce privește rata erorii pe fiecare scară. Aceste diferențe nu sunt la fel de însemnate ca și în cazul canalului mai rapid variabil în timp, dar ele confirmă dependența care există între suportul temporal al undișoarelor și performanțele transmisiei. În figura 4.10, se poate observa rata erorii la diverse scări de transmisie, pentru canalul lent variabil în timp și undișoara Daubechies-12.

Pentru a putea sintetiza mai bine toate aceste observații, se vor reprezenta statistici ale erorilor observate în cazul a 4 undișoare testate, aceleași care au fost folosite și în experimentele precedente (fig. 4.6 și 4.7). De data aceasta, vom calcula o creștere procentuală a ratei erorii de la o scară la alta [Olt,Naf'09]. Pentru aceasta, creșterea procentuală a BER (CPB) de la scara j , față de scara $j-1$ se poate calcula conform formulei:

Fig. 4.10: Performanța BER pe cele 4 scări, $f_m=0.005$, undișoara Daubechies-12.

$$CPB(j) = \frac{BER(j) - BER(j-1)}{BER(j)} \quad (4.12)$$

În relația (4.12), cu $BER(j)$ am notat rata erorii de bit "parțială" de la scara j . Așa cum se observă, parametrul CPB nu depinde de E_b/N_0 , valoarea sa putând fi calculată doar odată ce fixăm o valoare pentru acest raport. Cu cât acest parametru ia valori mai mari, cu atât tranziția de la o scară de transmisie la alta conduce la apariția mai multor erori, dată fiind creșterea duratei simbolurilor transmise, coroborată cu timpul de coerență al canalului. În cazul în care un asemenea efect nu este pronunțat vom obține valori mici ale CPB, și chiar negative, dacă la scara j erorile sunt mai mici decât la scara $j-1$.

Vom începe cu cazul care pune cel mai bine în evidență evoluția BER de la o scară la alta, și anume acela în care $f_m = 0.05$, iar $E_b/N_0 = 20 \text{ dB}$. Pe de o parte, alegerea valorii maxime pentru f_m pune în evidență caracterul variabil în timp al canalului, iar pe de altă parte valoarea ridicată a E_b/N_0 reduce efectul zgomotului aditiv, dându-i primei caracteristici ponderea cea mai însemnată în apariția erorilor.

Statistica creșterii BER de la o scară la alta a IDWT este ilustrată în figura 4.11. Reamintim că fiecare iterație de calcul a IDWT conduce la definirea unei noi scări de transmisie, deci, în contextul dat, cei doi termeni au același înțeles. Se observă din fig. 4.11 că, pentru toate undișoarele testate, se verifică observațiile anterioare. Cea mai mare creștere procentuală a erorii se manifestă în general de la scara 1 la scara 2 (65% pentru undișoara Haar și peste 90% pentru celelalte undișoare). Creșterea procentuală a erorii între iterația 2 și iterația 3 se manifestă

cel mai pregnant la undișoara Haar (aproape 75%), în timp ce la alte undișoare impactul este de cca 50%. Explicația rezidă în faptul că, pentru această undișoară, care este cea mai scurtă dintre cele testate, durata temporală a purtătoarei devine comparabilă cu timpul de coerență al canalului abia când se trece de la scara 2 la scara 3, în timp ce pentru celelalte undișoare, mai dilatate în timp, variabilitatea canalului influențează puternic performanțele transmisiei începând de la scara 2.

Concluziile anterioare sunt sprijinite și de rezultatele experimentale obținute la $f_m=0.005$ (fig. 4.12). De data aceasta impactul cel mai important al modificării scării se manifestă la trecerea de la iterația 3 la iterația 4, când rata erorii crește cu cel puțin 50% la toate undișoarele testate. Excepție face undișoara Haar, care este cel mai puțin afectată de modificare scării, atât datorită localizării sale temporale bune, cât și datorită timpului de coerență relativ mare al canalului. O analiză globală a valorilor absolute ale CPB ne arată totuși că, în acest caz, impactul modificării scării de transmisie este mai puțin pregnant decât în cazul precedent, când canalul este mai rapid variant în timp.

Pe de altă parte, nu există o influență notabilă a modificării scării de transmisie atunci când canalul este zgomotos (fig. 4.13). Astfel, între scări diferite variația BER este sub 1%, ea neavând un model monoton, cum s-a putut evidenția în figurile precedente. Acest comportament este normal, deoarece la $E_b/N_0=0$ dB, se poate afirma că principala cauză a erorilor este zgomotul, și nu variabilitatea în timp a canalului.

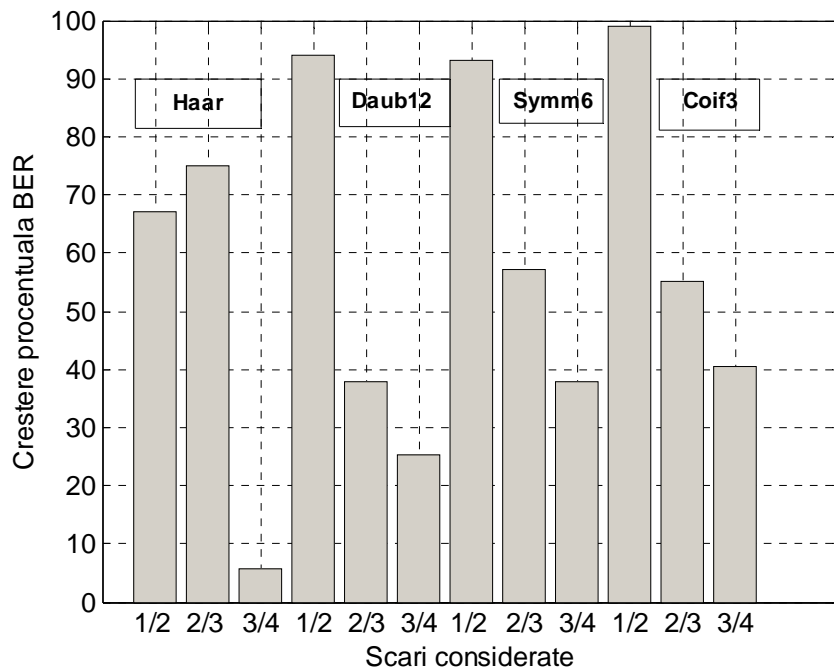


Fig. 4.11: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=20$ dB și $f_m=0.05$.

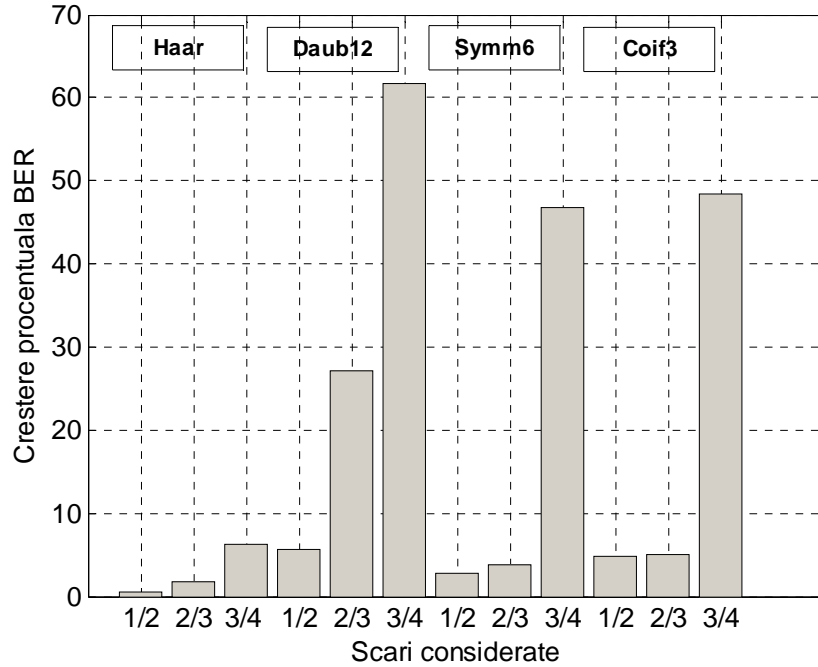


Fig. 4.12: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=20\text{dB}$ și $f_m=0.005$.

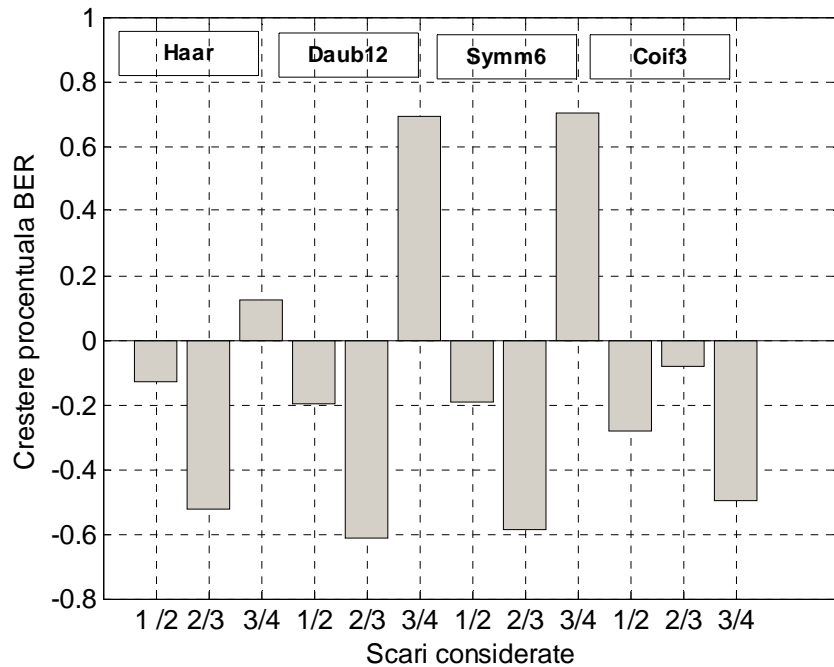


Fig. 4.13: Creșterea procentuală BER de la o scară la alta, la $E_b/N_0=0\text{dB}$ și $f_m=0.05$.

5. STUDIUL PERFORMANTELOR WOFDM ÎN CANALE CU FADING SELECTIV ÎN FRECVENȚĂ

Variabilitatea în timp a canalului nu este singurul efect care afectează transmisia de date prin canalul radio. Într-adevăr, în multe situații, acesta poate fi considerat și selectiv în frecvență. Selectivitatea în frecvență a canalului își are rădăcina în fenomenul de propagare multicală. Astfel, canalul se consideră selectiv în frecvență dacă împrăștierea întârzierilor copiilor de semnal sosite la recepție depășește durata unui simbol serial [Skl'97-1]. Întrucât scopul acestui capitol este să analizeze performanța BER a modulației WOFDM pentru canale care sunt selective în frecvență, se vor discuta în cele ce urmează principiile de bază ale modelării acestor tipuri de canale.

5.1 Considerații privind modelarea canalelor variabile în timp și selective în frecvență

Modelul echivalent în timp discret al unui canal radio care este atât variant în timp cât și selectiv în frecvență poate fi descris prin ecuația:

$$h[n, k] = \sum_{k=0}^{N_t-1} R_{n,k} \delta[n-k] \quad (5.1)$$

În ecuația de mai sus, s-a notat cu N_t numărul total de trasee "rezolvabile" la receptor. Dacă se considera coeficienții $R_{n,k}$ ca fiind determinați, atunci relația 5.1 ar corespunde exact ecuației unui filtru digital cu răspuns finit la impuls. Răspunsul la impuls al canalului radio are însă o natură stohastică, dată de variabilitatea sa în timp. Coeficienții $R_{n,k}$ pot fi exprimați ca și $\sqrt{P_k} ray_k[n]$, P_k reprezentând puterea celei de-a k-a căi de propagare, iar $ray_k[n]$ este o realizare a un proces aleator, având densitatea de probabilitate de tip Rayleigh și densitate spectrală de putere de tip Jakes (vezi paragraful 3.2.1.1). Un asemenea canal este pur fluctuant, neexistând o componentă de semnal deterministă corespunzătoare "liniei de vizibilitate" dintre emițător și receptor.

Dacă se consideră că semnalul de transmis este $s[n]$, atunci semnalul recepționat poate fi scris ca și:

$$r[n] = \sum_{k=0}^{N_t-1} R_{n,k} s[n-k] = \sum_{k=0}^{N_t-1} \sqrt{P_k} ray_k[n] s[n-k] \quad (5.2)$$

Relația (5.2) este practic aceeași cu relația (3.19), din capitolul 3. Ea poate fi văzută ca un echivalent discret al transmisiei în timp continuu. În acest ultim caz, semnalul recepționat va fi:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_t-1} R_k(t)s(t-\tau_k) = \sum_{k=0}^{N_t-1} \sqrt{P_k} ray_k(t)s(t-\tau_k) \quad (5.3)$$

Într-un asemenea model al canalului, este foarte importantă definirea unei mărimi care să măsoare dispersia temporală pe care canalul o introduce asupra semnalului:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\overline{\tau^2} - (\overline{\tau})^2} \quad (5.4)$$

Mărimea calculată în relația (5.4) se numește împrăștierea întârzierilor (sau împrăștierea de propagare multicale), iar pătratul ei este cunoscut în literatură ca și "dispersia întârzierilor de propagare multicale". Mărimea notată cu $\overline{\tau}$ reprezintă întârzierea medie în exces, definită ca și:

$$\overline{\tau} = \frac{\sum_{k=0}^{N_t-1} P_k \cdot \tau_k}{\sum_{k=0}^{N_t-1} P_k} \quad (5.5)$$

În ecuația precedentă, P_k reprezintă puterea medie a celei de a k-a componente a semnalului care ajunge la receptor. În modelul simplificat folosit în această teză, se poate afirma că:

$$P_k = E\{R_k^2(t)s^2(t-\tau_k)\} = E\{P_k ray_k^2(t)s^2(t-\tau_k)\} = P_k E\{ray_k^2(t)s^2(t-\tau_k)\} \quad (5.6)$$

Pe de altă parte, $\overline{\tau^2}$ poate fi interpretat ca o "durată efectivă" a răspunsului la impuls al canalului. Mai precis, acest parametru este de fapt momentul de ordinul 2 al profilului putere-întârziere $P(\tau)$ care caracterizează canalul:

$$\overline{\tau^2} = \frac{\sum_{k=0}^{N_t-1} P_k \cdot \tau_k^2}{\sum_{k=0}^{N_t-1} P_k} \quad (5.7)$$

La fel ca și la canalul cu fading plat, trebuie avută în vedere păstrarea semnificației noțiunii de raport semnal pe zgomot. Astfel, puterea medie a semnalului ajuns la receptor se va considera egală cu aceea a semnalului "util" emis. Pentru aceasta, condiția care se impune este:

$$\sum_{k=0}^{N_t-1} P_k = 1 \quad (5.8)$$

Unul dintre modelele de canal cu fading selectiv în frecvență definite în literatură este acela cu două căi ("two-ray channel model") [Rap'01]. În această situație, $N_t = 2$. Făcând apel la modelul discret al canalului, să notăm că întârzierile τ_k vor fi definite ca multipli întregi a duratei de simbol, T_s . Întodeauna se consideră că întârzierea primei căi

este 0, iar întârzierea celui de al doilea traseu se măsoară relativ la prima cale de propagare.

Un asemenea model de canal vine în întâmpinarea simulării comunicațiilor de bandă largă, atunci când durata simbolurilor transmise este scurtă, iar propagarea multicală conduce la recepția la receptor la versiuni ale semnalului care sunt decalate cu mai multe durate de simbol [Rap'01]. El nu se raportează atât la valorile absolute ale puterilor celor două căi de propagare, cât la ponderea fiecărei căi în compoziția semnalului recepționat. Prin modificarea întârzierii celei de a doua căi, τ_1 , se poate obține un domeniu larg de valori pentru împrăștierea întârzierilor de propagare multi-cale, σ_τ . În practică, aceste valori sunt dependente de o serie de parametri și variază într-un domeniu larg. Să spunem că, în general, este vorba de valori de ordinul nano-secundelor pentru medii suburbane, și al micro-secundelor pentru medii urbane. Pentru simularea pe calculator, este util să exprimăm σ_τ în funcție de durata unui simbol serial ce este adus la intrarea modulatorului IDWT. Aceasta se realizează printr-o operație de normare, descrisă de relația (5.9):

$$\sigma_{\tau n} = \frac{\sigma_\tau}{T_S} \quad (5.9)$$

Trebuie reamintit că, pe lângă timpul alocat transmisiei unui simbol serial, T_S poate fi interpretat și ca pas de eșantionare. În continuare, se prezintă în tabelul 5.1 o listă cu valori ale parametrului $\sigma_{\tau n}$, pentru diverse cazuri care vor fi simulate. Tabelul 5.1 vine în completarea parametrilor de simulare din tabelul 4.1. Valorile listate au fost obținute prin calcul direct, conform relației (5.4).

$\tau_1 = T_S$		$\tau_1 = 2T_S$		$\tau_1 = 4T_S$		$\tau_1 = 8T_S$		$\tau_1 = 16T_S$	
P_1/P_2 [dB]	$\sigma_{\tau n}$	P_1/P_2 [dB]	$\sigma_{\tau n}$	P_1/P_2 [dB]	$\sigma_{\tau n}$	P_1/P_2 [dB]	$\sigma_{\tau n}$	P_1/P_2 [dB]	$\sigma_{\tau n}$
0	0.5	0	1	0	2	0	4	0	8
3	0.47	3	0.94	3	1.88	3	3.77	3	7.54
10	0.28	10	0.57	10	1.15	10	2.30	10	4.6

Tabelul 5.1: Valorile împrăștierii multicală în diverse cazuri de simulare.

Lanțul de simulare care utilizează acest model de canal este redat în figura 5.1.

Dacă se consideră cazul cel mai "favorabil" al canalului cu două căi, atunci $\tau_1 = T_S$, iar canalul se comportă ca un filtru trece-jos, care are atenuare infinită la frecvența egală cu jumătatea frecvenței de eșantionare (adică la limita superioară a benzii considerate). Acest răspuns este redat în figura 5.2, deoarece el este relevant pentru explicarea performanțelor transmisiei WOFDM. Să notăm că pentru a putea trasa un asemenea "răspuns în frecvență" al canalului, am recurs la o simplificare, ignorând caracterul variabil în timp al acestuia, simulat prin secvențele multiplicative $ray_k[n]$, care sunt generate în mod independent. Dacă întârzierea τ_1 rămâne constantă, dar puterea celei de a doua căi scade, se menține caracterul de tip trece-jos al canalului, dar atenuarea maximă introdusă nu va mai fi infinită.

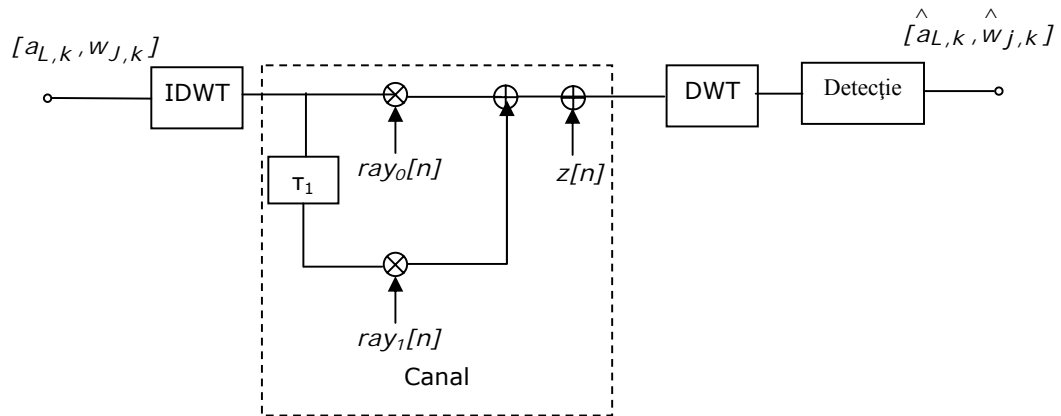


Fig. 5.1: Schemă de transmisie WOFDM prin canal cu fading selectiv în frecvență.

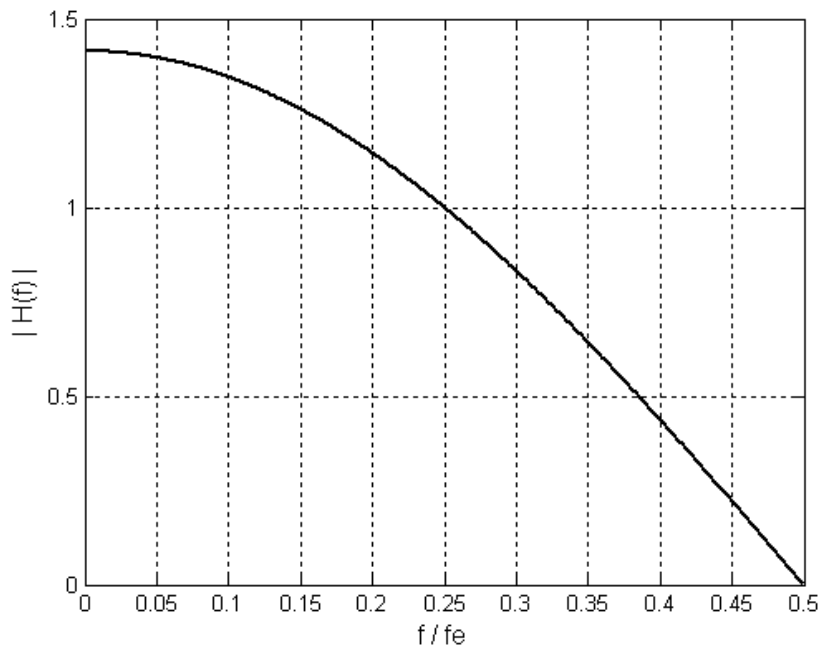


Fig. 5.2: Modulul răspunsului în frecvență al canalului cu două căi de propagare de puteri egale, pentru $\tau_1 = T_s$.

Pe de altă parte, dacă modificăm întârzierea celei de a doua căi, atunci forma răspunsului în frecvență se modifică. Astfel, răspunsul în frecvență al canalului va avea un număr de minime egal cu jumătate din întârzierea relativă a cei de a doua căi. Dacă puterea acesteia este egală cu puterea primei căi, aceste minime vor corepunde din nou, unor atenuări infinite. În figura 5.3 se redă răspunsul în frecvență al canalului pentru $\tau_1 = 4T_S$, și putere de 10 ori mai mare a căii directe față de cea reflectată. Analiza figurilor prezentate ne poate permite să tragem câteva concluzii interesante, care stabilesc o legătură între răspunsul în frecvență al canalului și proprietățile intrinseci ale unei transmisii WOFDM.

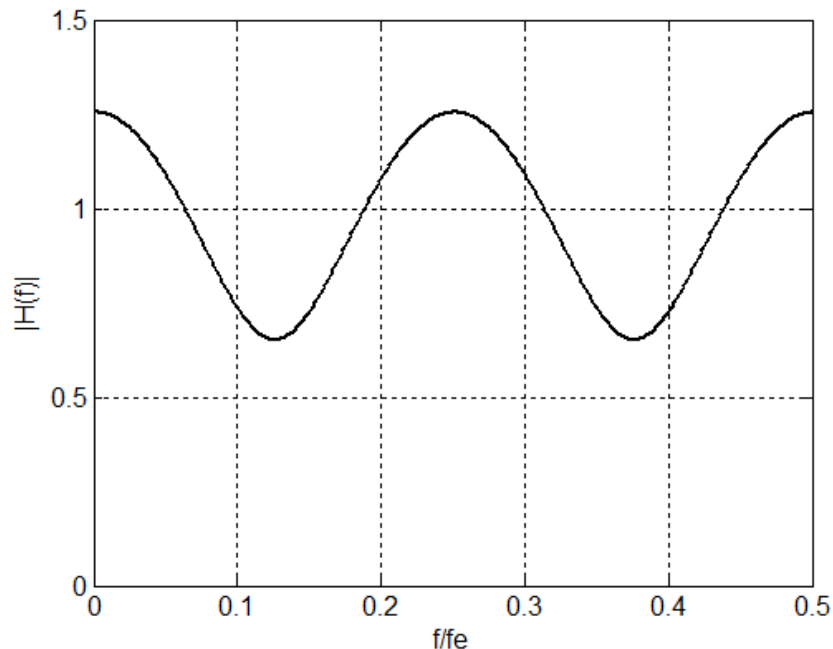


Fig. 5.3: Modulul răspunsului în frecvență al canalului cu $P_1/P_2=10\text{dB}$ și $\tau_1=4T_S$.

Există câteva mecanisme care trebuie discutate, și care vor conduce la apariția unor erori la detecție. Pe de o parte, selectivitatea în frecvență a canalului este, în sine, o sursă de erori, dacă nu se realizează egalizarea. Pe de altă parte, la anumite frecvențe, avem atenuări foarte mari introduse de către canal. Întrucât semnalul WOFDM este transmis în benzi multiple, este lesne de intuit că acele benzi de transmisie în care canalul introduce atenuări importante vor fi cele mai afectate de erori. Nu în ultimul rând, o altă cauză a erorilor o constituie faptul că parametrii canalului se modifică în timp, întrucât, așa cum am văzut și în capitolul precedent, avem de a face cu canale variabile în timp.

5.2 Performanța BER globală a transmisiei WOFDM prin canale selective în frecvență

Se analizează, în cele ce urmează, performanța BER a transmisiei WOFDM prin canale care sunt atât selective în frecvență, cât și variabile în timp. Simulările se bazează strict pe lanțul de transmisie din figura 5.1, și iau în considerare parametrii din tabelele 4.1 și 5.1. Astfel, nu se realizează niciun fel de egalizare sau codare, care ar îmbunătăți semnificativ performanțele transmisiei.

În contextul canalelor selective în frecvență, se consideră de interes modul în care diversele benzi de frecvență folosite în transmisia WOFDM sunt afectate de către canal. Acesta este motivul pentru care se insistă asupra transmisiei pe mai multe scări, care se regăsește în cazul de față prin efectuarea a 4 iterații ale algoritmului lui Mallat în modulatorul IDWT.

În figura 5.4 este ilustrată performanța transmisiei WOFDM pentru undișoarele Haar și Daubechies-20, pentru două valori ale raportului între puterile celor două componente de semnal care ajung la recepție. Aceste undișoare au fost alese din cauza faptului că localizarea lor timp-frecvență este substanțial diferită. Se știe că undișoara Haar este foarte bine localizată în timp, dar slab localizată în frecvență, pe când undișoara Daubechies-20 are proprietăți complementare.

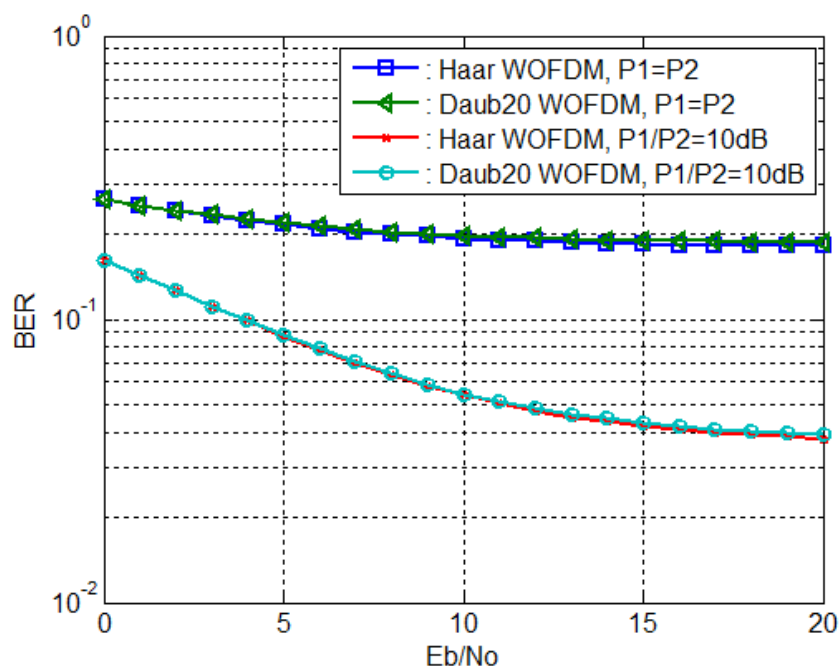


Fig. 5.4: Performanța BER a transmisiei WOFDM în canale cu două căi de propagare, $\tau_1=1$ și $f_m=0.005$.

Din figura 5.4 se desprind câteva concluzii. Se observă în primul rând că nu există diferențe notabile între cele două undișoare testate, în ceea ce privește curbele BER. Așa cum era de așteptat, dacă scade puterea celei de a doua căi (care este de fapt calea ce produce interferență la recepție), rezultatele cunosc o ameliorare, însă continuă să indice erori de bit de ordinul câtorva procente. Aceleași observații generale rămân valabile și pentru canale în care întârzierea relativă a celei de a doua căi crește, cu mențiunea că rata erorii atinge valori și mai mari decât în cazurile precedente. Influența deplasării Doppler normalizate este arătată în figura 5.5, pentru undișoara Daubechies-8. Se poate remarca faptul că, în condițiile în care avem puteri egale ale celor două căi, principala cauză a erorilor o constituie selectivitatea în frecvență a canalului, astfel încât nu există diferențe notabile pentru cele două valori ale deplasării Doppler maxime considerate. O influență a acestui parametru poate fi pusă în evidență doar atunci când IIS se manifestă mai slab, datorită reducerii de 10 ori a puterii celei de a doua căi. În acest caz, se observă o performanță superioară în cazul $f_m = 0.005$, dar diferențele nu sunt nici de această dată spectaculoase.

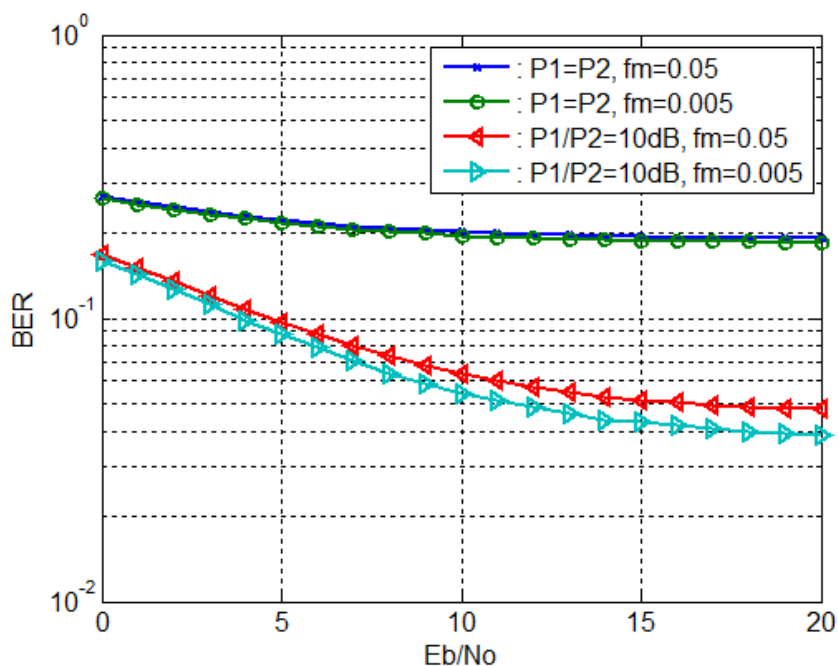


Fig. 5.5: Influența variabilității în timp a canalului asupra performanței BER, într-un canal cu două căi, $\tau_1=1$.

Toate rezultatele prezentate anterior ilustrează performanțe BER slabe. Există câteva motive care justifică aceste rezultate. În practică, un sistem de transmisie utilizează întotdeauna egalizoare (dacă este cazul), precum și coduri corectoare de erori. În contextul acestei discuții, s-a arătat în paragraful 3.3.4 că asocierea WOFDM cu

turbo-codurile produce îmbunătățiri remarcabile ale performanței BER. Mai mult decât atât, există metode care pot compensa deplasarea Doppler, reducând efectele negative ale acesteia. Niciunul dintre aceste mecanisme nu este luat în considerare în simulările ale căror rezultate au fost prezentate, ceea ce explică valoarea mare a ratei erorii de bit. Scopul acestui studiu nu este însă atât de a face o analiză cantitativă, cât una calitativă. Se urmărește în această lucrare punerea în evidență a unor tendințe, ce pot fi exploatate într-un sistem de transmisie practic, care să conțină toate blocurile amintite mai sus. Din acest punct de vedere, concluzii foarte interesante vor putea fi extrase dacă se face o analiză a modului cum canalul afectează diversele scări (benzi) de transmisie.

5.3 Repartiția erorilor pe scările de transmisie WOFDM

Acest subcapitol reprezintă, într-o anumită măsură, un corespondent al paragrafului 4.2, de data aceasta analiza făcându-se pentru canale care sunt selective în frecvență. Reamintim că, după fiecare iterație a algoritmului DWT, numărul de coeficienți se înjumătățește (prin operația de decimare cu 2), dar ei ocupă același interval (durată) pe axa timpului, dată fiind natura timp-scară a transformării wavelet. Întrucât, în cazul transmisiei WOFDM, vectorul de date de transmisie poate fi privit ca o secvență de coeficienți de detaliu la diverse niveluri, a căror "durată" este diferită de la un nivel la altul, și coeficienți de aproximare la nivelul de rezoluție cel mai slab, putem interpreta această tehnică ca o metodă de transmisie multi-rată, sau multi-scară.

Așadar, simbolurile de date generate de către sursă trebuie grupate astfel încât ele să reprezinte coeficienți de detaliu de la diverse scări și coeficienți de aproximare de la scara de rezoluție temporală cea mai slabă, coeficienți ce "alimentează" modulatorul IDWT. În formula ce definește "sinteza" simbolurilor WOFDM (2.26), se descrie matematic modularea unor purtătoare care au, după iterația cu indexul j , forma $\psi(t/2^j)$, ceea ce corespunde, în spectru, unei transformate Fourier de forma

$\mathfrak{F}\psi(2^j \cdot f)$. Pentru o mai bună înțelegere a problemei, vom da un exemplu de reprezentare a unui bloc de date de 8 simboluri și de poziționare în spectru a "purtătoarelor" (undisoarelor) care sunt modulate de către aceste simboluri (fig. 5.6). În fig. 5.6, cu f_s se notează frecvența de eșantionare. De asemenea, se consideră 3 niveluri de iterație IDWT, și, din motive de claritate a reprezentării, se ignoră coeficienții de aproximare, cu banda aferentă. Respectând scalarea axei timpului dată în figura 5.6, observăm că durata unui simbol transmis la scara 1 este de 200 (simbolurile ce se transmit aici sunt 1,-1,-1,1), la scara 2 durata este dublă (aici transmitem doar două simboluri, 1 și -1), ș.a.m.d. Reprezentările din figura 5.6, coroborate cu cele ce ilustrează răspunsul în frecvență al canalului (fig. 5.2 și 5.3) ne vor ajuta să înțelegem și să explicăm rezultatele care vor fi obținute.

Experimentele care vor fi redată în continuare se axează pe două direcții de interes principale. În primul rând, se va urmări modul în care evoluează rata erorii de bit la diverse scări (în diverse benzi) de transmisie, și modul cum este această evoluție legată de parametrii canalului, și în particular de împrăștierea întârzierilor $\sigma_{\tau D}$. Cel de al

doilea obiectiv este acela de a arăta modul în care alegerea unei anumite undișoare folosită în transmisie poate influența performanța BER.

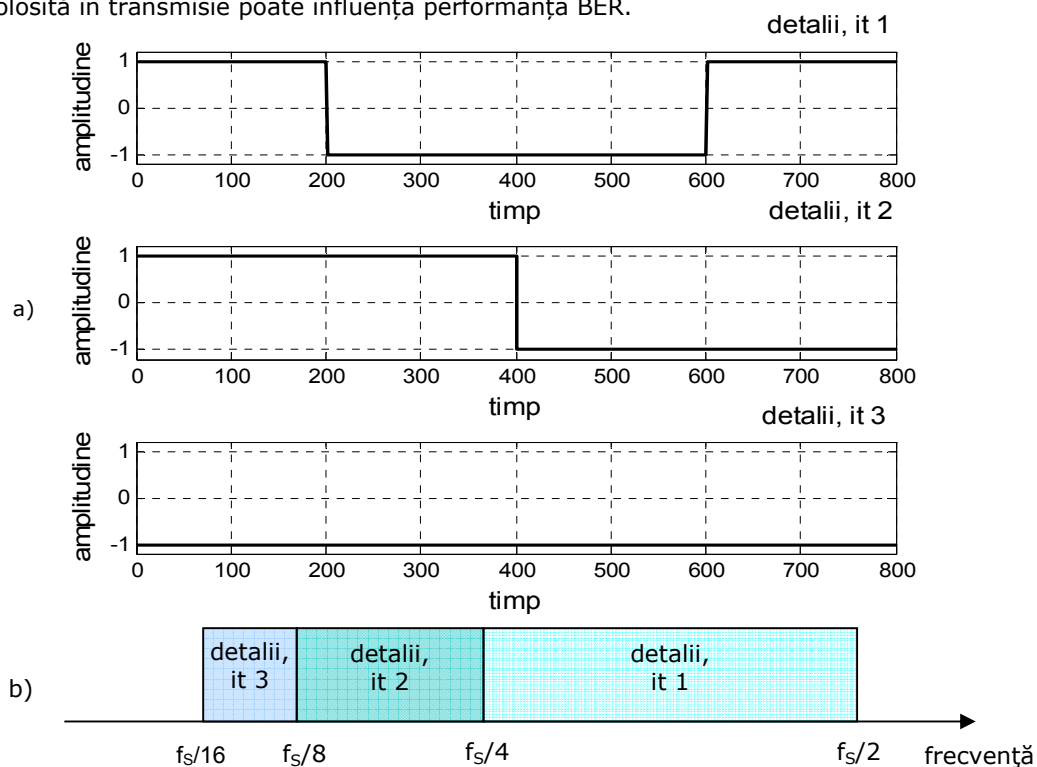


Fig. 5.6: Simbolurile transmise la diverse scări (a) și benzile de frecvență prin care se transmit (b).

5.3.1 Performanța BER a transmisiei WOFDM la diverse scări de transmisie

Întrucât scopul acestui paragraf este acela de a arăta legătura care există între scara la care se transmit simbolurile și performanța BER, și nu de a pune în evidență diferențele care există între diverse undișoare, rezultatele comentate în cele ce urmează se vor referi doar la undișoara Daubechies-8. Am ales această undișoară, deoarece ea asigură o localizare temporală și frecvențială "medie", situată între extremele Haar și Daubechies-20, discutate în paragraful anterior. Rezultatele și concluziile se regăsesc însă și pentru celelalte undișoare testate.

Reamintim pentru început că, în cazul canalului plat în frecvență dar variabil în timp, principala sursă a erorilor este cea din urmă caracteristică. Astfel, s-a arătat în paragraful 4.2, că performanța BER descrește după fiecare iterație IDWT, din cauza duratei mai mari a simbolurilor transmise, care devine comparabilă la un moment dat

cu timpul de coerență al canalului. Se va vedea, în cele ce urmează, că lucrurile se schimbă în cazul transmisiei prin canale care au un caracter selectiv în frecvență.

Pentru a se putea surprinde modul în care performanța BER a transmisiei depinde de scara utilizată, s-au calculat, din nou, valori BER parțiale, pentru fiecare scară în parte. Precizăm aici că, date fiind proprietățile transmisiei WOFDM, cea mai mare pondere în rata globală a erorii de bit o are banda de frecvențe corespunzătoare primei iterații IDWT, pe unde se transmit jumătate din numărul total de simboluri ale sursei. La a doua iterație avem un sfert din numărul de simboluri, și în fine, după cea de a patra iterație se transmit doar 1/16 din numărul total de simboluri, printr-o porțiune echivalentă din totalul benzii alocate transmisiei.

Evoluția BER la diverse scări de transmisie este arătată în figurile 5.7-5.9, pentru o întârziere a celei de a doua căi de 1, 2 și respectiv 4 simboluri. Se remarcă în fig. 5.7 o îmbunătățire consistentă a performanțelor, pe măsură ce creștem numărul de iterații. Astfel, de departe, rezultatul cel mai slab îl obținem pentru transmisia la scara 1 (coeficienți de detaliu după prima iterație IDWT). În acest caz, peste 30% din simboluri sunt detectate incorect, și curba BER descrește foarte lent cu raportul E_b/N_0 . Performanțe ceva mai bune se obțin la scara 2, dar curba BER nu coboară sub 10%. La scara 3, observăm în schimb o îmbunătățire considerabilă, la valori mari E_b/N_0 având de 10 ori mai puține erori decât la scara precedentă. Această tendință se manifestă și pentru ultima scară de transmisie, acolo unde rata de simbol este cea mai mică (simbolurile au durata cea mai mare), cu un câștig de peste 10 dB pentru o valoare BER de 1%, față de scara 3.

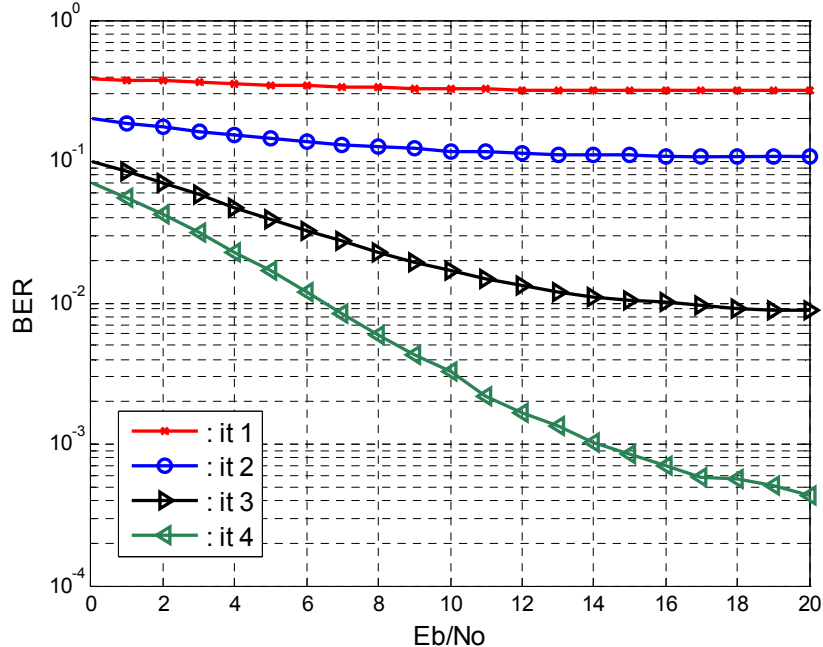


Fig. 5.7: Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu puteri egale ale celor două căi, $\sigma_m=0.5$ ($\tau_1=T_s$) și $f_m=0.005$.

Rezultatele mult mai slabe de la primele scări de transmisie au câteva explicații.

Simulările în acest caz au fost făcute pentru o împrăștiere a întârzierilor egală cu jumătate din timpul alocat transmisiei unui simbol serial, adică $\sigma_r = \frac{T_S}{2}$. Reamintim

că simbolurile transmise la scara 1 au durata $T_1 = 2T_S$, iar cele de la scara 2 au durată dublă. Prin urmare, la aceste scări, împrăștierea întârzierilor are durată comparabilă (aceleși ordin de mărime) cu aceea a simbolurilor transmise, ceea ce explică de ce aceste scări sunt cel mai puternic afectate de IIS. O altă explicație poate fi dată analizând transmisia în domeniul frecvenței. Răspunsul în frecvență al canalului utilizat în simulările ale căror rezultate sunt redată în figura 5.7 este asemănător cu acela al unui filtru trece-jos, care la o frecvență egală cu jumătatea frecvenței de eșantionare introduce o atenuare infinită. Ori, banda utilizată pentru transmisia detaliilor de la scara 1 este tocmai $[f_S/4, f_S/2]$, așadar tocmai porțiunea cea mai "dificilă" a spectrului alocat (fig. 5.2). Acest lucru explică performanța BER foarte slabă de la scara 1. Pe măsură ce ne îndreptăm spre marginea inferioară a benzii, nu doar că atenuarea introdusă de canal nu mai este la fel de mare, dar și banda utilizată este mai îngustă, prin urmare selectivitatea în frecvență a canalului are efecte mai puțin pronunțate, conducând la scăderea BER.

Întrucât rata erorii are o valoare foarte mare la scara 1, și acolo sunt transmise jumătate din simbolurile de date, trebuie spus că, din păcate, performanțele net mai bune de la scările superioare nu contribuie substanțial la îmbunătățirea globală a BER, ceea ce explică descreșterea lentă a curbei BER globale, din figurile 5.4 și 5.5. Dacă se ignoră prima scară de transmisie, curba BER calculată doar pe scările 2-4 are în domeniul de valori E_b/N_0 considerat o evoluție descrescătoare, de la 15% ($E_b/N_0 = 0$ dB) la 5% (la $E_b/N_0 = 20$ dB), adică performanțele se apropie foarte mult de cazul $P_1 / P_2 = 10$ dB (fig. 5.4), ceea ce înseamnă un câștig important, al cărui preț însă, este reducerea cu 50% a eficienței de transmisie (din 1024 de simboluri transmise, doar 512 sunt folosite pentru detecție). Mai departe, se poate imagina chiar un sistem de codare adaptivă, în care, la acele scări unde erorile sunt numeroase să se folosească o rată mică codare, iar la scările cu mai puține erori, codul să fie mai eficient.

Dacă creștem întârzierea celei de a doua căi, rezultatele cele mai slabe se obțin de data aceasta la scara 2 (fig. 5.8). Rezultatul acesta este în consonanță cu cazul precedent, adică scara cea mai puternic influențată de IIS este aceea la care întârzierea celei de a doua căi este egală cu jumătate din durata simbolurilor transmise la scara respectivă. Reamintim că, în acest ultim caz, simbolurile de la scara 2 au durata $T_2 = 4T_S$. Rezultatele de la scara 1 sunt și ele foarte slabe, conducând la o curbă BER aproape independentă de raportul E_b/N_0 . Prima scară cu rezultate ceva mai bune este scara 3 (aici avem un raport de aproape un ordin de mărime între împrăștierea întârzierilor și durata simbolurilor), dar în continuare rata erorii este de cca. 10%, la valoarea $E_b/N_0 = 20$ dB. O îmbunătățire notabilă a performanței se înregistrează abia la scara a 4-a de transmisie, cu un câștig de 20dB la un BER de 10%, față de scara 3.

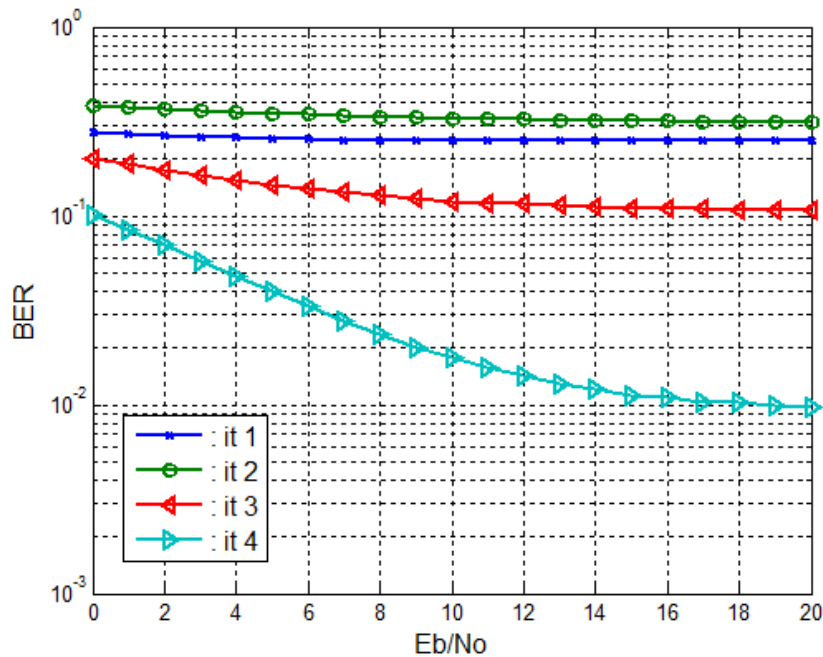


Fig. 5.8: Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu puteri egale ale celor două căi, $\sigma_{\tau}=1$ ($\tau_1=2\tau_s$) și $f_m=0.005$.

În figura 5.9, experimentul precedent este reluat, pentru un canal în care creștem întârzierea celei de a doua căi, care devine egală cu durata a 4 simboluri seriale. De data aceasta se vor reda curbele BER pentru $P_1/P_2 = 10$ dB. Se observă cum, în nota observațiilor precedente, scara cea mai afectată de IIS devine cea de a treia, pentru care se obțin rezultatele cele mai slabe. Aceasta confirmă cazurile precedente, deoarece din nou avem performanța cea mai slabă la acea scară la care durata simbolurilor transmise este egală cu de două ori întârzierea relativă a celei de a doua căi. Analizând răspunsul în frecvență al canalului (fig. 5.3), se constată că, în cazul de față, simbolurile de la scara 3 sunt transmise printr-o porțiune mai puțin "favorabilă" a benzii, unde intervin atenuări importante ale semnalului, date de răspunsul în frecvență al canalului. În schimb, pentru scările 1 și 2, rezultatele sunt practic similare, iar scara cea mai puțin afectată de IIS se dovedește din nou a fi scara 4. Toate aceste tendințe se regăsesc și în cazul în care puterile celor două căi sunt egale, cu mențiunea că numărul erorilor crește la fiecare scară comparativ cu cazul analizat.

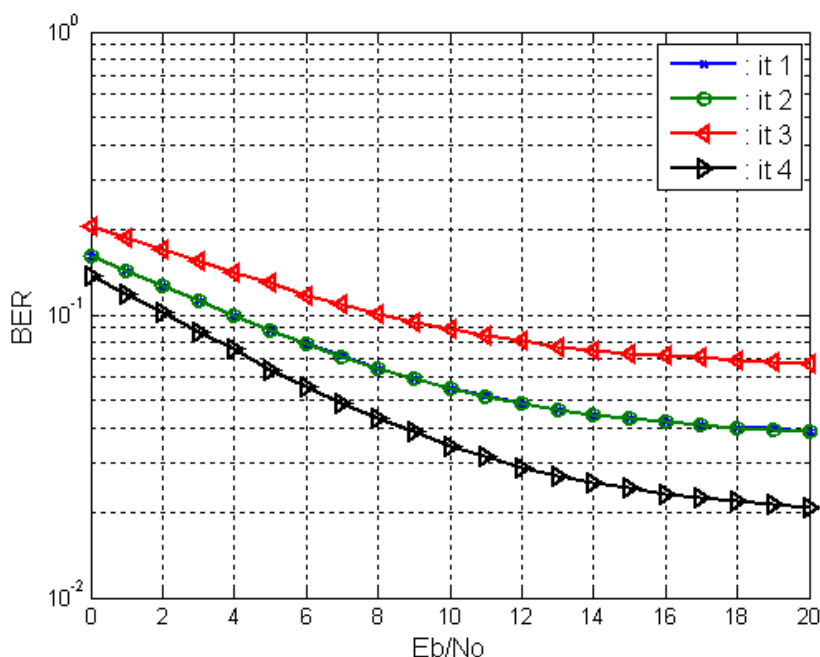


Fig. 5.9: Curbe BER parțiale pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu două căi, $P_1/P_2=10$ dB, $\sigma_{\tau}=1.15$ ($\tau_1=4T_S$) și $f_m=0.005$.

În toate cazurile precedente, s-a reprezentat performanța BER la diverse scări, modificând raportul E_b/N_0 . În cele ce urmează, se va urmări evoluția ratei erorilor în funcție de parametrul σ_{τ} , care este direct legat de întârzierea relativă a celei de a doua căi, păstrându-se un raport E_b/N_0 constant. O asemenea abordare va arăta modul cum IIS și împrăștierea Doppler introduse de către canal influențează erorile la diverse scări de transmisie WOFDM, în condițiile în care zgomotul din canal este neglijabil. Pentru aceasta se fixează un raport $E_b/N_0 = 50$ dB, fapt ce ne va permite să ne focalizăm asupra influenței celorlalte două fenomene, care sunt de fapt principala sursă a erorilor într-o transmisie pe un canal radio.

În fig. 5.10, se arată evoluția BER pentru cazul în care puterile celor două căi de semnal sunt egale, variindu-se doar întârzierea relativă a celei de a doua căi. Analiza curbelor din figura 5.10 dezvăluie câteva concluzii interesante. Astfel, se observă că pentru o întârziere redusă a celei de a doua căi de propagare ($\sigma_{\tau} < 2$, deci $\tau_1 < 4T_S$), performanțele cele mai bune sunt obținute la scările 3 și 4, unde durata simbolurilor transmise este semnificativ mai mare decât împrăștierea de propagare multivale. Pentru valori mai mari ale acestui parametru, practic nu mai există diferențe de performanță între cele 4 scări de transmisie, curbele BER de la toate scările încadrându-și evoluția între 30% și 20%, deoarece IIS influențează puternic toate cele 4 scări de transmisie.

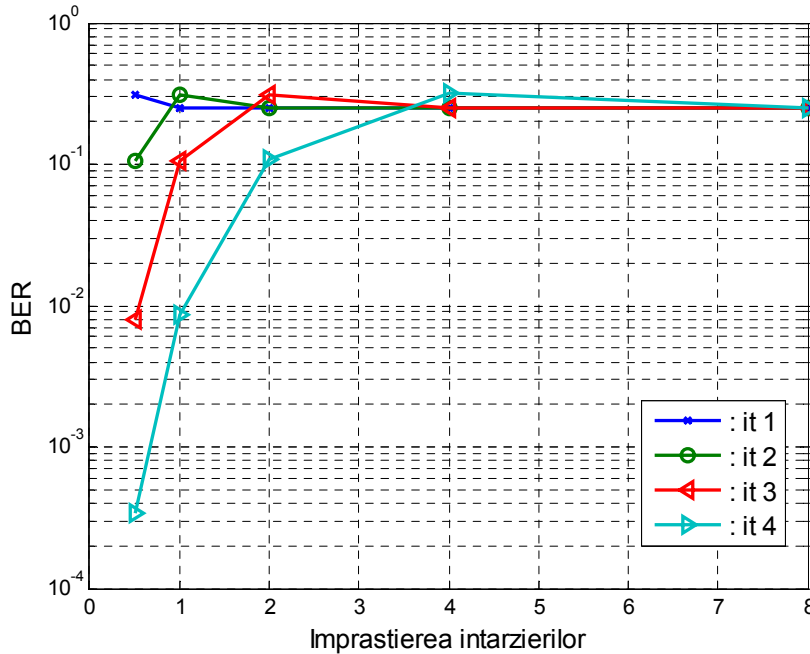


Fig. 5.10: Evoluția BER în funcție de σ_m pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cudouă căi de puteri egale și $f_m=0.005$.

Aceasta demonstrează odată în plus că, în cazul considerat, principala sură a erorilor este fenomenul de IIS.

O altă observație interesantă este aceea că, de fiecare dată numărul maxim de erori al unei scări apare exact la acea scară j unde $\sigma_{\tau} = \frac{T_S(j)}{4} = \frac{2^j T_S}{4}$, unde $T_S(j)$ reprezintă durata simbolurilor transmise la scara j . În cazul de față, în care puterea celor două căi este egală, aceasta corespunde unei întârzieri a celei de a doua căi egală cu jumătate din durata simbolurilor transmise la o anumită scară, adică: $\tau_1 = \frac{T_S(j)}{2}$.

După atingerea numărului maxim de erori la valoarea $\sigma_{\tau n}$ corespunzătoare, curba BER intră, la fiecare scară, într-o evoluție lent descrescătoare. Acest lucru ne conduce înspre ideea că, într-o transmisie WOFDM, scara cea mai afectată de IIS într-un anumit canal poate fi ori ignorată (nefolosită în transmisie), ori codată cu un cod capabil să corecteze o parte din erorile introduse de către canal. Observația aceasta confirmă rezultatele raportate în [Man'01] pentru o transmisie multi-scară redundantă (unde se transmit aceleași simboluri la fiecare scară), iar demodularea poate fi făcută folosind una sau mai multe versiuni recepționate ale simbolurilor, în funcție de canal.

Reamintim că rezultatele din figura 5.10 cuprind pe axa Ox valori ale parametrului $\sigma_{\tau n}$ obținute într-un canal în care puterea celor două căi este egală, dar în

care se modifică întârzierea celei de a doua căi. Analizând tabelul 5.1, se poate vedea că, menținând constantă întârzierea celei de a doua căi, dar diminuându-i puterea, se obțin valori "intermediare" ale împrăstierii de propagare multicale. O reprezentare a evoluției BER în funcție de toate aceste valori ne arată o evoluție mai detaliată a curbei BER, decât cea din figura 5.10. Astfel, în figura 5.11 se poate vedea evoluția BER în funcție de parametrul $\sigma_{\tau n}$, luându-se în considerare toate valorile acestuia rezultate din tabelul 5.1, pentru scările de transmisie 3 și 4.

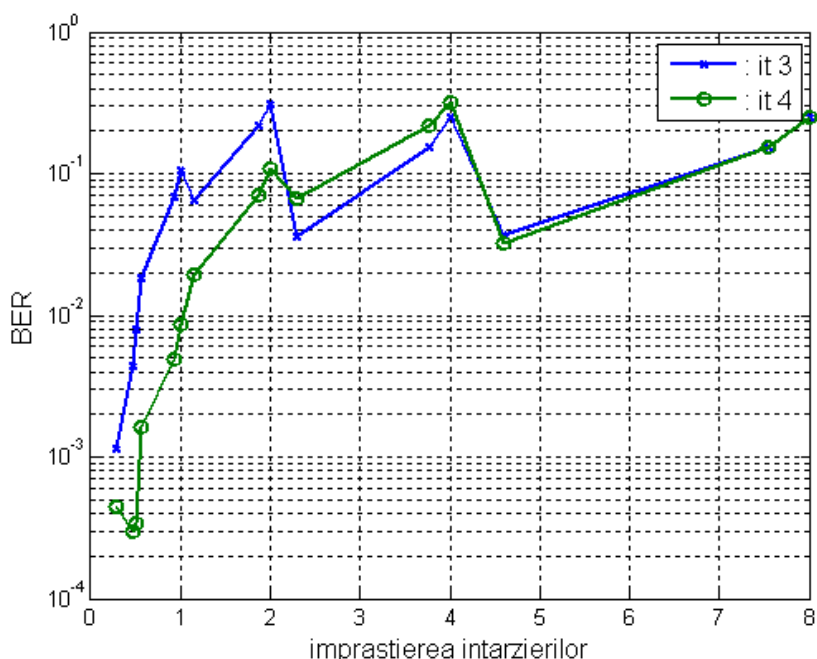


Fig. 5.11: Evoluția BER în funcție de $\sigma_{\tau n}$ pe fiecare scară de transmisie WOFDM cu Daubechies-8, pentru un canal cu parametrii τ_1 și P_1/P_2 variabili, și $f_m=0.005$.

Astfel, la scara 3, după o creștere monotonă a BER până la $\sigma_{\tau n} = 1$ ($P_1/P_2 = 0$ dB și $\tau_1 = 2T_S$), are loc o îmbunătățire a BER în următorul punct unde a fost calculată rata erorii ($\sigma_{\tau n} = 1.15$, obținut pentru $P_1/P_2 = 10$ dB și $\tau_1 = 4T_S$, conform tabelului 5.1), și același tip de evoluție se obține și în jurul punctului $\sigma_{\tau n} = 2$. Acest lucru ne arată că, reducerea semnificativă a puterii căii de interferență "compensează" creșterea întârzierii relative a celei de a doua căi de propagare. Astfel, pentru exemplul discutat, deși s-a dublat întârzierea de propagare a celei de a doua căi, faptul că puterea ei s-a diminuat de 10 ori conduce la o valoare mai redusă a BER, în ciuda creșterii valorii parametrului

$\sigma_{\tau n}$. Pentru simbolurile transmise pe scara 4, acest tip de comportament se manifestă începând cu $\sigma_{\tau n} = 2$, confirmând concluziile precedente.

Dacă creștem valoarea deplasării Doppler maxime normalizate de 10 ori ($f_m = 0.05$), curbele BER în funcție de $\sigma_{\tau n}$ au aceleași particularități ca și cele discutate pentru $f_m = 0.005$ (fig. 5.12). Totuși, mai ales pentru acele scări unde durata simbolurilor transmise este mare, se poate observa la valori mici ale $\sigma_{\tau n}$ o degradare notabilă a performanțelor odată cu creșterea valorii parametrului f_m . Acest lucru poate fi explicat prin faptul că aceste scări sunt cele mai afectate de variabilitatea în timp a canalului. Ori, această caracteristică predomină ca și motiv al erorilor atât timp cât împrăștierea de propagare multicanal este mică (deci influență redusă a IIS), determinând degradarea BER față de cazul $f_m = 0.005$.

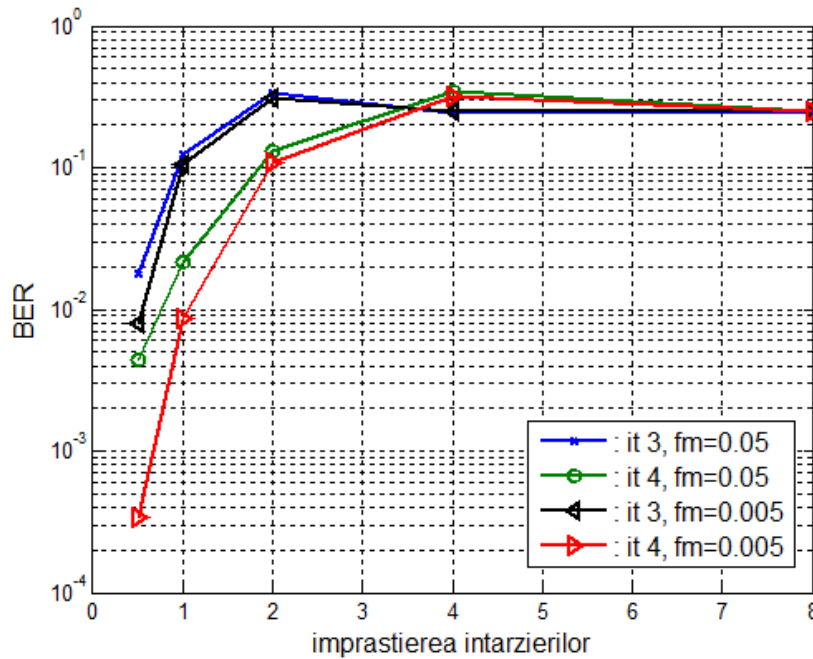


Fig. 5.12: Influența deplasării Doppler asupra BER în condițiile unui canal cu două căi de propagare de puteri egale și întârziere variabilă a celei de a doua căi.

5.3.2 Alegerea undișoarei mamă folosită într-o transmisie WOFDM prin canale selective în frecvență

S-a arătat în paragraful 5.2 că valoarea BER "globală" (calculată folosind toate simbolurile unui bloc WOFDM) nu este influențată semnificativ de alegerea undișoarei mamă. Această afirmație trebuie însă nuanțată. Reamintim că principala cauză a acestui comportament este numărul foarte mare de erori care apare după prima iterație IDWT, și influența covârșitoare a acestei scări asupra performanței BER globale. Dacă însă realizăm o analiză mai detaliată, la fiecare scară, a evoluției BER, analiză de tipul aceleia făcute în paragraful precedent, vom vedea că există totuși scări la care alegerea undișoarei mamă are influențe notabile asupra performanței BER la scara respectivă.

Pe de altă parte, s-a arătat în capitolul IV că, în cazul canalelor variabile în timp dar plate, este indicat să folosim undișoare care sunt bine localizate în timp și să implementăm doar o iterație în modulatorul IDWT. Ultima recomandare a fost deja infirmată în cazul canalelor selective în frecvență, în cazul cărora curbele BER au o evoluție pozitivă pe măsură ce creștem numărul de iterații, adică atunci când transmisia WOFDM se face pe mai multe scări. Vom vedea în cele ce urmează în ce măsură prima recomandare care a fost făcută în cazul canalelor plate (folosirea undișoarelor cu localizare temporală bună), rămâne validă și în canale selective în frecvență.

Pentru a ne putea focaliza asupra selectivității în frecvență, în detrimentul variabilității în timp a canalului, s-a fixat pentru următoarele simulări o valoare a deplasării Doppler maxime de $f_m = 0.005$. Undișoarele alese sunt Haar și Daubechies-20. S-au considerat de asemenea puteri egale pe cele două căi de propagare a semnalului. În figura 5.13 se pot vizualiza curbele BER parțiale obținute în cazul celor două undișoare, la scările 1 și 2. Așa cum era de așteptat, date fiind observațiile rezultate din figurile 5.7-5.9, valorile BER sunt ridicate, și, după cum se observă în figură, curbele BER pentru cele două undișoare sunt apropiate una de cealaltă. La scara 1 undișoara Haar conduce la obținerea unor performanțe mai bune, dar pentru ambele undișoare, între 30% și 40% din simboluri sunt detectate în mod eronat. La scara 2 în schimb, undișoara Daubechies-20 are performanțe superioare, dar rata erorii continuă să fie ridicată. Practic, putem spune că aceste scări sunt puternic afectate de selectivitatea în frecvență a canalului, iar alegerea undișoarei mamă nu prezintă nicio relevanță.

La scările 3 și 4 de transmisie se poate observa însă o diferențiere netă a celor două undișoare, din punctul de vedere al performanțelor transmisiei WOFDM (fig. 5.14). Astfel, undișoara Daubechies-20 conduce la scara 3 la performanțe egale cu acelea obținute prin folosirea undișoarei Haar la scara cea mai puțin afectată de erori (scara 4). Mai mult decât atât, la această ultimă scară, pentru a atinge o rată a erorii de 0.6%, avem nevoie de o valoare E_b/N_0 de 20 dB în cazul undișoarei Haar, și cu aproape 12 dB mai puțin pentru undișoara Daubechies-20. Acest lucru ne arată că, în cazul transmisiei prin canale selective în frecvență, și mai ales la acele scări care nu sunt afectate de erori într-o manieră drastică (și unde nu se poate face o diferențiere elocventă), undișoarele cu localizare mai bună în frecvență (Daubechies-20 în exemplul nostru), sunt mai puțin afectate de către selectivitatea în frecvență a canalului.

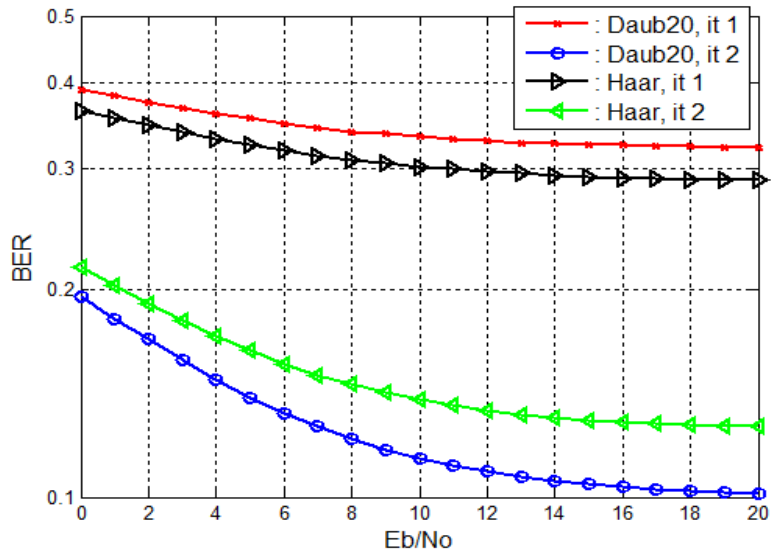


Fig. 5.13: Comparație între curbele BER parțiale la scările 1 și 2 pentru undișoarele Haar și Daubechies-20. $\sigma_m=0.5$, $f_m=0.005$.

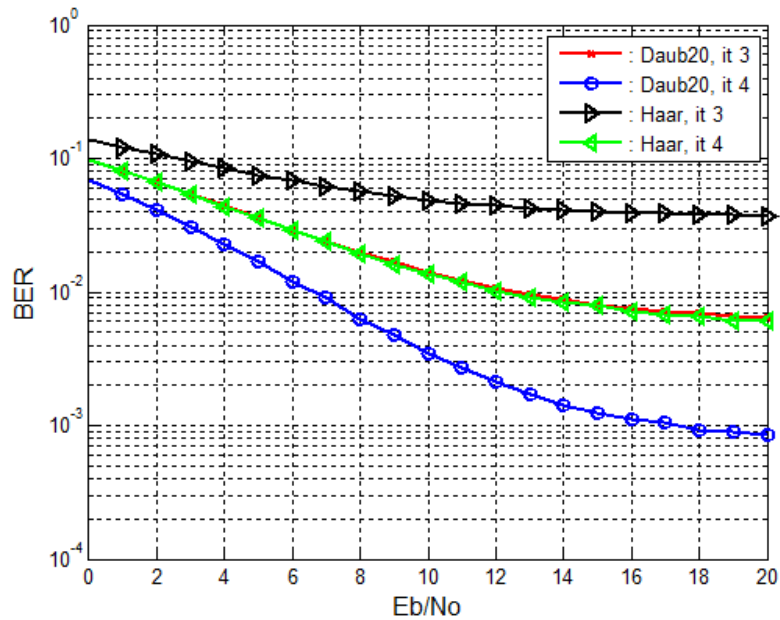


Fig. 5.14: Comparație între curbele BER parțiale la scările 3 și 4 pentru undișoarele Haar și Daubechies-20, $\sigma_m=0.5$, $f_m=0.005$.

Diferența clară dintre cele două undișoare comparate este cauzată mai ales de performanțele slabe ale undișoarei Haar. Așa cum se arată în paragraful 3.3, dintre toate undișoarele din familia Daubechies, aceasta este singura a cărei bandă efectivă este infinită. Dacă în canale cu fading plat, variabile în timp, localizarea excelentă în timp a undișoarei Haar conducea la rezultate foarte bune, iar spectrul său cu întindere infinită nu avea un impact notabil, de data aceasta, din cauza selectivității în frecvență a canalului, localizarea slabă în frecvență a undișoarei Haar are exact efectul contrar, conducând la performanțe slabe.

În simularea canalului radio nu putem izola cele două aspecte: variabilitatea în timp și selectivitatea în frecvență. Așa cum rezultă din toate rezultatele prezentate în acest capitol, "ponderea" mai mare în rata erorilor precum și influența mai importantă asupra performanței transmisiei o are cea de a doua caracteristică amintită. Rezultatele arătate în figura 5.15 încearcă să surprindă simultan ambele efecte și influența pe care ele o au asupra performanței BER. Astfel, se redau curbele BER la scara a 4-a de transmisie pentru câteva undișoare din familia Daubechies, pentru o valoare a deplasării Doppler de $f_m = 0.05$. Parametrii de simulare au fost astfel aleși încât să pună în evidență și efectul variabilității în timp a canalului. Astfel, canalul este rapid variabil în timp, iar curbele BER sunt arătate pentru acea scară la care durata simbolurilor este cea mai mare, deci efectul variabilității temporale a canalului este cel mai pronunțat.

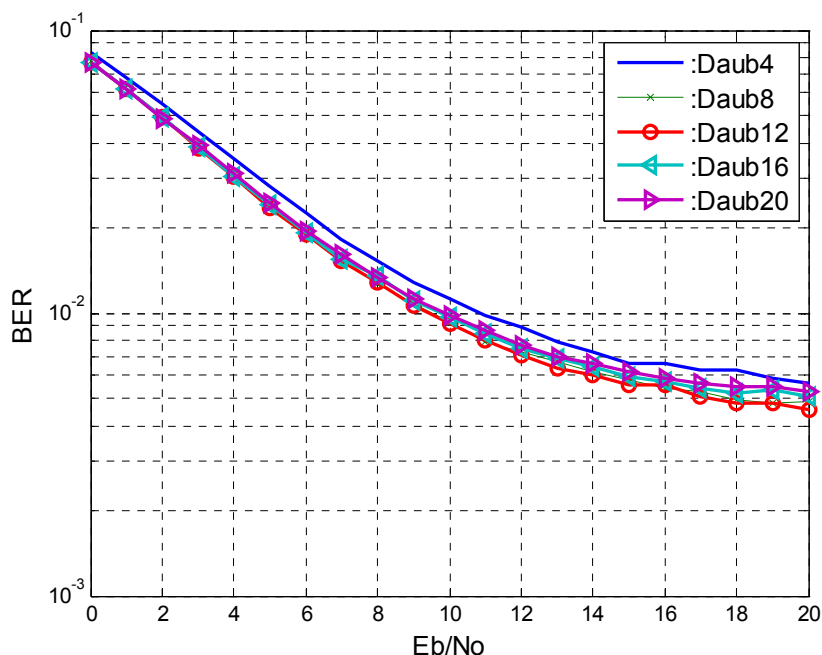


Fig. 5.15: Performanța BER la scara 4 de transmisie pentru diverse undișoare din familia Daubechies, pentru o transmisie printr-un canal cu două căi de puteri egale, cu $\sigma_m=0.5$ și $f_m=0.05$.

Chiar dacă avem curbe BER apropiate, se poate pune în evidență că rezultatele cele mai slabe sunt obținute folosindu-se undișoarele "extreme" (Daubechies-4 și Daubechies-20), în timp ce performanța cea mai bună este asigurată de către undișoarele Daubechies-8 și Daubechies-12. Aceste rezultate, aparent surprinzătoare pot fi explicate prin aceea că undișoarele Daubechies-8 și Daubechies-12 oferă un "compromis" mai bun în ceea ce privește localizarea lor în planul timp-frecvență.

În nota acestei idei, sintetizând rezultatele prezentate în capitolele 4 și 5, s-a observat că:

- în canale în care se manifestă doar variabilitate în timp performanțele cele mai bune sunt obținute folosind undișoare cu localizare temporală bună.
- în canalele în care apar căi multiple, efectul predominant asupra transmisiei este produs de către aceste căi multiple, care introduc selectivitate în frecvență și IIS. În această situație este bine ca undișoarele să fie cât mai bine localizate în frecvență.
- în situația în care canalul se comportă astfel încât și variabilitatea în timp a canalului se regăsește cu o contribuție importantă în rata erorilor, performanțele diverselor undișoare sunt apropiate, dar o îmbunătățire a BER este asigurată de către acele undișoare care oferă cel mai avantajos compromis al "localizării timp-frecvență".

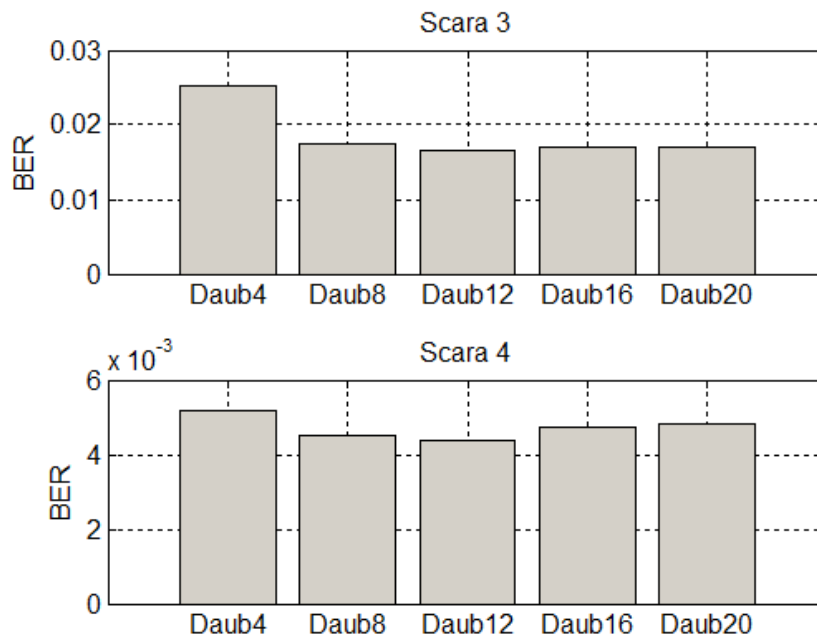


Fig. 5.16: Performanța BER a undișoarelor din familia Daubechies la scările 3 și 4, pentru o transmisie printr-un canal cu două căi de puteri egale, cu $E_b/N_0=50\text{dB}$, $f_m=0.05$ și $\sigma_m=0.5$.

Pentru justificarea acestei ultime afirmații, vom încerca să surprindem efectul cumulat al celor două tipuri de distorsiuni într-un canal în care zgomotul este neglijabil. Pentru aceasta se fixează E_b/N_0 la 50dB, și se simulează transmisia WOFDM pentru câteva undișoare din familia Daubechies. Performanțele BER la scările de transmisie 3 și 4 sunt arătate în figura 5.16. În ciuda faptului că numărul de erori continuă să fie apropiat la cele 4 scări, se observă că, atât la scara 3 cât și la scara 4, undișoara Daubechies-12 conduce la cele mai bune performanțe, în timp ce performanțele cele mai slabe sunt obținute atunci când se utilizează undișoara Daubechies-20, și, mai ales, Daubechies-4. Astfel, la scara 3, undișoara Daubechies-12 conduce la o rată a erorilor cu 2% mai mică față de Daubechies-20 și cu 34% mai bună decât undișoara Daubechies-4. La scara 4, cele două proporții sunt de 8%, respectiv 15%.

6. CONTRIBUȚII LA OPTIMIZAREA TRANSMISIEI PE CANALE RADIO FOLOSIND UNDIȘOARE

6.1 Contribuții originale din teză

- **6.1.1**

Scopul urmărit în lucrare este o transmisie de calitate foarte bună prin canale radio, care prezintă variabilitate în timp și selectivitate în frecvență. Am făcut un studiu și o analiză detaliată a utilizării undișoarelor în transmisia de date, și mai ales în cazul modulației cu purtătoare multiple, comparând metoda WOFDM cu o modulație ortogonală multi-purtătoare bine cunoscută și utilizată în numeroase aplicații, și anume OFDM.

- **6.1.2**

În **paragraful 2.4.1** am demonstrat că **undișoarele, ca și caz particular al funcțiilor ce generează baze ortonormale prin translație cu întregi, pot fi folosite ca și forme de undă ce satisfac criteriul I al lui Nyquist de interferență nulă inter-simbol.**

- **6.1.3**

În **paragraful 3.2 se compară, prin simulări, performanța BER a transmisiei WOFDM cu aceea a OFDM, în cazul unui canal cu fading plat.** Pentru acest tip de canale, se manifestă doar variabilitatea în timp a canalului, răspunsul în frecvență al acestuia putând fi considerat neselectiv. În acest caz, prima concluzie care poate fi extrasă este că **modulația ortogonală bazată pe undișoare (WOFDM) este mult mai robustă față de variabilitatea în timp a canalului decât abordarea tradițională (OFDM), în care se folosesc drept purtătoare exponențiale complexe de durată finită.** Explicația poate fi dată din câteva perspective. În primul rând, însuși principiul OFDM are la bază ortogonalitatea purtătoarelor, cunoscându-se că pierderea acestora poate duce la diminuarea semnificativă a performanțelor transmisiei (creșterea BER). Fundamentul ortogonalității în OFDM este poziționarea riguroasă pe axa frecvențelor a spectrelor purtătoarelor multiple. Ori, tocmai această poziționare este afectată de către variabilitatea în timp a canalului, ducând la pierderea ortogonalității, cu toate efectele negative aferente. Prin comparație, în WOFDM ortogonalitatea purtătoarelor are mai degrabă o natură duală, dată de către Transformarea Wavelet aplicată în modulator și demodulator. În acest caz, ortogonalitatea se bazează atât pe poziția purtătoarelor în timp, cât și în frecvență. Variabilitatea în timp a canalului nu are, de această dată, efecte la fel de puternice. O explicație conexă a robusteții mai mari a WOFDM în canale cu fading plat poate fi dată raportându-ne exclusiv la dimensiunea temporală a transmisiei. Astfel, în OFDM toate simbolurile transmise pe purtătoarele multiple au durată egală, egală la rândul ei cu durata unui simbol OFDM. Pe de altă parte în WOFDM (sub forma implementată în această lucrare), durata simbolurilor transmise se modifică de la scară la scară, ea atingând durata totală a simbolului transmis doar dacă se implementează toate iterațiile de calcul IDWT. Ori, se cunoaște că, în general, în canale variabile în timp, se recomandă o transmisie în care durata simbolurilor să fie cât mai mică, astfel încât ea să rămână semnificativ inferioară timpului de coerență al canalului. Această condiție este mai bine

îndeplinită de către o transmisie WOFDM, decât în cazul OFDM. Legat tot de cele două modulații ortogonale, au fost menționate în teză și alte avantaje ale implementării WOFDM: datele de intrare și de ieșire sunt reale, modalitatea de partajare a resurselor este mai flexibilă, în timp ce complexitatea de implementare este comparabilă cu OFDM, iar, în anumite situații, atenuarea benzilor adiacente spectrului alocat este mai puternică.

- **6.1.4**

În paragraful 3.3 am demonstrat că localizarea timp-frecvență a undișoarelor este, în general, mai bună decât aceea a exponențialelor complexe de durată finită, ceea ce constituie un puternic suport teoretic pentru rezultatele experimentale comentate anterior.

- **6.1.5**

În paragraful 3.4, simulările efectuate au condus la concluzia că, asociind cele două tipuri de transmisie multi-purtătoare cu turbo-coduri multi-binare, WOFDM are performanțe BER superioare OFDM, dar câștigul este, în acest caz, mult mai mic decât în cazul transmisiilor necodate.

- **6.1.6**

În capitolul 4, am studiat influența parametrilor transmisiei WOFDM asupra performanțelor acestora în canale variabile în timp, cu fading plat. În urma simulărilor efectuate a rezultat că alegerea parametrilor transmisiei poate avea o influență notabilă asupra BER. Astfel, s-a constatat că, **undișoarele mai bine localizate în timp conduc la rezultate superioare, ele fiind mai puțin afectate de către variabilitatea canalului (paragraful 4.1).** În consecință, dintre toate undișoarele testate, **undișoara Haar a condus, de departe, la obținerea celor mai bune rezultate. Un suport teoretic al acestui rezultat este dat în paragraful 4.1.1, unde s-a demonstrat că, în cazul folosirii undișoarei Haar și a efectuării unei singure iterații IDWT în modulator, probabilitatea teoretică de eroare în canale cu fading plat este nulă, dacă se ignoră alte tipuri de zgomote (de exemplu AWGN).**

- **6.1.7**

În paragraful 4.2, am studiat influența numărului de iterații IDWT asupra performanței BER a transmisiei. Dat fiind că, odată cu creșterea numărului de iterații, durata simbolurilor transmise la fiecare scară WOFDM crește și ea, s-a constatat că **performanțele cele mai bune se obțin dacă numărul de iterații este minim (o singură iterație IDWT).** Pentru a întări concluziile prezentate, studiul a fost aprofundat prin calculul unor măsuri ale erorilor la fiecare scară de transmisie din WOFDM, calcul ce a confirmat observația precedentă.

- **6.1.8**

În capitolul 5 am analizat, prin intermediul simulărilor, performanța BER a transmisiei WOFDM în cazul canalelor cu fading selectiv în frecvență. Performanța BER globală este, în acest caz, mult mai slabă decât în cazul canalelor cu fading plat, ea fiind practic independentă atât de undișoara-mamă, cât și de numărul de iterații IDWT, așa cum s-a arătat **în paragraful 5.2.**

- **6.1.9**

În paragraful 5.3.1 am studiat modul în care selectivitatea în frecvență a canalului afectează diversele benzi de transmisie din WOFDM. Se constată că **numărul cel mai mare de erori apare la acea scară de transmisie, unde durata simbolurilor transmise are același ordin de mărime cu împrăștierea de propagare multicale.** Din analiza efectuată rezultă că scara cea mai afectată de erori este aceea pentru care durata simbolurilor de la scara respectivă este egală cu jumătate din împrăștierea întârzierilor multi-cale. Dacă se consideră cazul cel mai

puțin "defavorabil", în care întârzierea căii ce produce IIS este egală cu durata unui singur simbol serial, vom putea observa exact contrariul efectelor din cazul canalelor cu fading plat: după fiecare iterație a modulatorului, se îmbunătățește performanța BER. Așadar, **în transmisia WOFDM prin canale care sunt selective în frecvență, este recomandabil să implementăm cât mai multe iterații în modulatorul IDWT.**

- **6.1.10**

În paragraful 5.3.2 am arătat că, în cazul canalelor selective în frecvență, undișoarele cu suport temporal mai extins, deci mai bine localizate în frecvență, conduc la rezultate mai bune, mai ales la anumite scări de transmisie. În general, putem însă vorbi despre un "compromis timp-frecvență": atunci când ambele efecte ale canalului se fac simțite deopotrivă, undișoarele care oferă un compromis cât mai bun în ceea ce privește localizarea timp-frecvență (valoare cât mai mică a produsului durată efectivă-bandă efectivă) conduc la rezultate mai bune decât undișoarele care excelează prin localizarea în timp sau cea în frecvență, dar sunt deficitare la capitolul complementar.

6.2 Perspectivele utilizării WOFDM

Există câteva direcții în care poate fi continuată munca începută în această teză. Astfel, utilizarea pachetelor de funcții wavelet deschide un cadru și mai flexibil în ceea ce privește folosirea resurselor canalului. Practic, înlocuind funcțiile wavelet cu pachete wavelet, granularitatea de partajare a resurselor în canal este mai fină, și permite utilizarea mai eficientă a acestuia.

O altă direcție de studiu este cea care va permite utilizarea eficientă a cunoașterii modului în care diversele scări de transmisie din WOFDM sunt afectate de erori. Astfel, s-a arătat în această teză că, atât în cazul canalului plat cât și a celui selectiv în frecvență, rata erorii de bit poate varia semnificativ de la o scară la alta, această variație având loc în funcție atât de parametrii canalului (împrăștiere Doppler, împrăștiere de propagare multicale) cât și de aceia ai modulatorului (undișoara mamă folosită). Cunoașterea modului în care canalul afectează diferitele scări de transmisie din WOFDM va permite adaptarea schemei de modulare și ratei de codare în funcție de această informație. În toate sistemele moderne de transmisie prin canale radio, asemenea mecanisme există deja, ele fiind cunoscute sub numele de "modulare și codare adaptivă", sau "adaptarea legăturii". De exemplu, din simulările efectuate a reieșit cu claritate că, într-o transmisie prin canale selective în frecvență, anumite scări sunt puternic afectate de erori (de obicei scara 1 și scara 2). Dacă în sistemul de transmisie se introduce o codare de canal adaptivă, aceste scări vor putea fi codate cu un cod puternic, ceea ce ar reduce semnificativ rata globală a erorii de bit.

Îmbunătățirea detectorului folosit în receptor este un alt obiectiv de studiu. În această teză, ca și tip de modulare în banda de bază se folosește BPSK, iar detectorul constă într-o simplă evaluare a semnelor eşantionului recepționat (comparare cu pragul). O asemenea abordare este optimă doar într-un caz simplificat, în care transmisia este afectată numai de zgomot alb aditiv, și, pe de altă parte ea nu ține cont în nici un fel de folosirea transformării wavelet în demodulator. În această direcție, un pas înainte ar fi să se țină cont de proprietățile statistice ale tuturor semnalelor nedorite din canal (zgomot alb aditiv, zgomot multiplicativ de tip Rayleigh) pe de o parte, și să se folosească în mod avantajos

117 Contribuții la optimizarea transmisiei pe canale radio, folosind undișoare - 6

utilizarea transformării wavelet în demodulator, pe de altă parte. Se știe că această transformare este adeseori folosită în aplicații de denoising, și există premisele ca proprietățile ce permit utilizarea ei în aceste aplicații să poată fi folosite și în detecția din WOFDM.

BIBLIOGRAFIE

- [Bah,Sal'02] A. Bahai, B. Saltzberg, "Multicarrier Digital Communications, Theory and Applications of OFDM", Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [Bin'90] J. A. C. Bingham, "Multicarrier modulation for data transmission: an idea whose time has come", IEEE Communications Magazine, pag. 5-14, mai 1990.
- [Cim'85] L. Cimini, "Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing", IEEE Transactions on Communications, Volume: 33, Issue: 7, iulie 1985, pag. 665-675.
- [ETSI'00] ETSI, "Digital Video Broadcasting (DVB);OFDM modulation for microwave digital terrestrial television", released in 2000, ETSI publication download area, disponibil online la: <http://pda.etsi.org/pda/AQuery.asp> .
- [IEEE'03]: IEEE Standards Association, "Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications, High-speed Physical Layer in the 5 GHz Band", Supplement to 802.11a 1999, iunie 2003, disponibil on-line la: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.11a-1999.pdf> .
- [IEEE'04], IEEE Standards Association, "IEEE Standard for Local and metropolitan area networks Part 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems", 2004, disponibil on-line la: <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.16-2004.pdf> .
- [Fur,Ahs'09] B. Furht, S. Ahson și alții, "Long Term Evolution – 3 GPP Radio and Cellular Technology", CRC Press, 2009.
- [Fla'04], Flarion Technologies, "FLASH-OFDM for 450MHz: Advanced Mobile Broadband Solution for 450MHz Operators", noiembrie 2004, disponibil on-line la: <http://whitepapers.silicon.com/0,39024759,60131016p,00.htm> .
- [Bin'00]: J. A. C. Bingham, "ADSL, VDSL and Multicarrier Modulation", Wiley Interscience, noiembrie 2000.
- [Lam, Hub'00]J. Lampe, J. Huber, "Bandwidth Efficient Power Line Communications Based on OFDM", International Journal of Electronics, vol. 54, 2000.
- [Kat'01] M. Katayama, "Introduction to Robust, Reliable and High-Speed Power Line Communication Systems", IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E-84A, Nr. 12, pag. 2958-2965, decembrie 2001.
- [Fis,Hub'96] R. Fischer , J. Huber, "A New Loading Algorithm for Discrete Multitone Transmission", Proceedings of GLOBECOM'96, London, pag. 724-728, noiembrie 1996.
- [Son'00] R. V. Sonalkar, "An efficient bit-loading algorithm for DMT applications", IEEE Comm. Letters, vol. 4, no. 3, martie 2000, pag. 80-82.
- [Hay'94] S. Haykin, "Communication systems", New York Wiley, 1994.
- [Won,Che,Let,Mur'99] C. Y. Wong, R. S. Cheng, K. B. Letaief, R. D. Murch, "Multiuser OFDM with adaptive subcarrier, bit, and power allocation" IEEE JSAC, vol. 17, no. 10, octombrie 1999, pag. 1747-1757.
- [Olt'04]** M.Oltean, "An Introduction to Orthogonal Frequency Division Multiplexing", Analele Universitatii din Oradea -2004, Fascicola Electrotehnica, Sectiunea Electronica, pag 180-185.
- [Skl'97-1] B. Sklar, "Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems –part I: Characterization", IEEE Communications Magazine, vol. 35, no. 7, pag. 136 - 146, iulie 1997.

- [Skl'97-2] B. Sklar, "Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems -part II: Mitigation", IEEE Communications Magazine, vol. 35, no. 9, pag. 148 - 155, septembrie 1997.
- [Wei,Ebe'71] S.B. Weinstein și P.M. Ebert, "Data transmission by frequency division multiplexing, using the discrete Fourier transform", IEEE Transactions on Communications, COM 19(5), octombrie 1971, pag. 628-634.
- [Muq,Cou'00] B. Muquet, M. de Courville; P. Dunamel; G. Giannakis, "OFDM with trailing zeros versus OFDM with cyclic prefix: links, comparisons and application to the HiperLAN/2 system", Proceedings of IEEE International Conference in Communications, vol. 2, pag. 1049-1053, iunie 2000.
- [Pel,Rui'80] A. Peled și A. Ruiz, "Frequency domain data transmission using reduced computational complexity algorithms", Proceedings of ICASSP, 1980, pag. 964 - 967.
- [Hen,Tau'02] W. Henkel, G. Tauböck, P. Öding, "The cyclic prefix of OFDM/DMT - an analysis", Proceedings of the International Zürich Seminar on Broadband Communications, Zürich, Switzerland, pag. 22.1- 22.3, februarie 2002.
- [Ahm'00] N. Ahmed, Thesis for the degree of Master of Science, "Joint Detection for Orthogonal Frequency Division Multiplexing", Rice University, USA, aprilie 2000, disponibil on-line la:
<http://scholarship.rice.edu/bitstream/handle/1911/19657/Ahm2000Apr2JointDetec.PDF?sequence=1>
- [Jon,Dil'01] .W. Jones and J.C. Dill, "The square root raised cosine wavelet and its relation to the Meyer functions", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, pag. 248-251, January 2001.
- [Lau'03] A.P.T. Lau, Technical Report, "Nyquist's first criterion and pulse shaping using wavelets", Stanford University, November 2003, disponibil on-line la:
<http://www.stanford.edu/~alanlau/wavelet.pdf> .
- [Olt,Naf'07] M. Oltean, M. Nafornita, "Efficient Pulse Shaping and Robust Data Transmission Using Wavelets", Proceedings of the third IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing, WISP 2007, Alcalá de Henares, Spain, octombrie 2007, pag. 43-48.
- [Rai'01] Rainmaker Technologies Inc., "RM Wavelet Based (WOFDM) PHY Proposal for 802.16.3", 2001, disponibil on-line la:
http://www.ieee802.org/16/tg3/contrib/802163c-01_12.pdf .
- [Kog,Kod'03] H. Koga, T. Kodama, N. Konishi, "High-speed Power Line Communication System based on Wavelet OFDM", Proceedings of the 7th International Symposium on Power Line Communications and its Applications, Kyoto, Japan, Martie 2003, pag. 226-231.
- [Lak,Nik'06] M. K. Lakshmanan, H. Nikookar, "A Review of Wavelets for Digital Wireless Communication", Springer Netherlands, Volume 37, No. 3-4, mai, 2006.
- [Jam,Mäh'05] A. Jamin, P. Mähönen, "Wavelet Packet Modulation for Wireless Communications", Wireless Communications & Mobile computing Journal, Vol. 5, Issue 2, Martie 2005, pag. 1-18.
- [Naf,Gor'95] I. Nafornită, C. Gordan, A. Isar, "Semnale, Circuite și Sisteme", Editura "Politehnica", Timișoara, 1995.
- [Isa,Naf'98] A. Isar, I. Nafornită, "Reprezentări timp-frecvență", Editura "Politehnica", Timișoara, 1998.
- [Pol'01], R. Polikar, "The Engineer's Ultimate Guide to Wavelet Analysis: the Wavelet Tutorial", ianuarie 2001, disponibil on-line la:
<http://users.rowan.edu/~polikar/wavelets/wttutorial.html> .
- [Dau'92] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM, 1992.

- [Mal'09] S. Mallat, "A wavelet tour of signal processing (third edition)", Academic Press, 2009.
- [Pro'95] J.G.. Proakis, "Digital Communications, 3rd Edition", McGraw-Hill Book Co., 1995.
- [Oli,Kum,Sad'05] J. Oliver, R. Santha Selva Kumari, V. Sadasivam, "Wavelets for improving spectral efficiency in a digital communication system", Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications (ICCIMA'05), pag. 198-203, august 2005.
- [Kab'03] L.D. Kabulepa, "OFDM Basics for Wireless Communications", 2003, disponibil on line la:
www.mes.tu-darmstadt.de/lectures/winter/vlsi_comms/download/chap2_OFDM_basics.pdf
- [Pol,Moe'95] T. Pollet, M. Moeneclaey, "Synchronizability of OFDM signals", Proceedings of GLOBECOM 1995, vol. 3, pag. 2054-2058.
- [Pol,Bla,Moe'95] T. Pollet, M. van Bladel, M. Moeneclaey, "BER sensitivity of OFDM systems to carrier frequency offset and Wiener phase noise", IEEE Transactions on Communications, Vol. 43, Issue 234, pag. 191-193.
- [Dar,Tra'00] D. Dardari, V. Tralli, A. Vaccari; "A Theoretical Characterization of Nonlinear Distortion Effects in OFDM Systems", IEEE Transactions on Communications, Vol. 48, No. 10, octombrie, 2000.
- [Dah,Par,Sko,Bem'07] E. Dahlman, S. Parkvall, J. Sköld, P. Beming, "3G Evolution: HSPA and LTE for mobile broadband", Elsevier Press, 2007.
- [Olt,Naf'03]** M. Oltean, M. Nafornită, "The Cyclic Prefix Length Influence on OFDM-Transmission BER", Buletinul Științific al Universității "Politehnica" Timișoara, Seria Electronică și Telecomunicații, Tom 48-62, Fascicola 2, 2003, pag. 26-29.
- [Aba,Tor'05] J. Abad, L. Torres, J. Riveiro, "OFDM and Wavelets Performance Comparison in Power Line Channels", Proceedings of International Symposium on Power Line Communications and Its Applications, 2005, pag. 341 - 345.
- [Bai,Mug'09] S. Baid, M. Junaid Mughal, "Multirate signal processing techniques for high speed communication over power lines", IEEE Communications Magazine, ianuarie 2009, pag. 70-76.
- [Sen,Jos,Pra'09] S. Sengar, S. Joshi, S.Prasad, "Transceiver design and performance analysis of space-time coded Fractal modulation", propus spre publicare în Wireless Personal Communications Journal, Springer Netherlands, 2009 (în curs de recenzare).
- [Buc,Don'05] J. Buckheit, D. Donoho, "Wavelab Architecture", disponibil pe web la: http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/Wavelab_850/WaveArch.pdf , decembrie 2005.
- [Man,Bel'01] M. J. Manglani, A. E. Bell, "Wavelet Modulation Performance in Gaussian and Rayleigh Fading Channels" , Proceedings of MILCOM 2001, McLean, VA, octombrie 2001, pag. 845 - 849.
- [Mar,Nic'97] I. Marghescu, S. Nicolaescu, N. Coțanis, "Comunicații Mobile Terestre", Ed. Tehnică București, 1997.
- [Pop,Bea'01] M. Pop, N. Beaulieu, "Limitations of Sum-of-Sinusoids Fading Channel Simulators", IEEE Transactions on Communications, Vol. 49, No. 4, aprilie 2001, pag. 699 - 708.
- [You,Bea'00] D. Young, N. Beaulieu, "The Generation of Correlated Rayleigh Random Variates by Inverse Discrete Fourier Transform", IEEE Transactions On Communications, Vol. 48, No. 7, July 2000, pag. 1114 - 1127.

- [Loo,Sec'91] C. Loo, N. Secord, "Computer Models for Fading Channels with Application to Digital Transmissions", IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 40, No. 4, noiembrie 2001, pag. 700 – 703.
- [Bad,Bea'05] K. Baddour, N. Beaulieu, "Autoregressive Modeling for Fading Channel Simulation", IEEE Transactions On Wireless Communications, Vol. 4, No. 4, iulie 2005, pag. 1650 -1662.
- [Chi'94] A. Chini, "Multicarrier Modulation in Frequency Selective Fading Channels", Ph.D. Thesis, Carleton University, Ottawa, Canada, 1994.
- [Olt'07]** M. Oltean, "Wavelet OFDM Performance in Flat Fading Channels", Buletinul Științific al UPT, Seria Electronică și Telecomunicații, Tom 52 (66), Fascicola 2, 2007, pag. 3-8.
- [Olt'07-1]** M. Oltean, "Wavelet modulation performance in fading conditions", Lucrările sesiunii de comunicări științifice Doctor ETc, Sept. 2007, Timișoara, ISBN: 978-973-625-494-9, pag. 13-18.
- [Flo,Ala,Ber'95] B. Le Floch, M. Allard, C. Berrou, "Coded orthogonal frequency division multiplex", Proceedings of the IEEE, vol. 83, no.6, iunie 1995, pag. 982-986.
- [Fla'98] P. Flandrin, "Temps-fréquence, 2^e édition", Hermes Science Publications,1998.
- [Ben,Hei,Wal'94] J. Benedetto, C. Heil, D. Walnut, "Differentiation and the Balian-Low Theorem" Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 1, Nr. 4,1998, pag. 355-402.
- [Olt,Isa'09]** M. Oltean, A. Isar, "On the time-frequency localization of the wavelet signals, with application to orthogonal modulations", Proceedings of ISSCS'09, Iași, Iulie 2009, pag.173-177.
- [Att,Pas,Isa'07]A.M. Atto, D. Pastor, A. Isar, "On the statistical decorrelation of the wavelet packet coefficients of a band-limited wide-sense stationary random process", Signal Processing, Elsevier, vol. 87, Issue 10, octombrie 2007, pag. 2320-2335.
- [Ber,Gla'93] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajashima, "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes", Proceedings of ICC'93, Geneva, Switzerland, mai 1993, pag. 1064-1070.
- [Dou,Ber'05] C. Douillard, C. Berrou, "Turbo Codes With Rate- $m/(m+1)$ Constituent Convolutional Codes", IEEE Transactions on Communications, Vol. 53, No. 10, octombrie 2005, pag.1630-1638.
- [Bur,Whi'99] A.G. Burr, G.P. White, "Performance of Turbo-coded OFDM", IEE Colloquium on Turbo-codes in Digital Broadcasting, 1999, pag. 8.1-8.8.
- [Zha,Zha'03] H. Zhang, F. Zhao, D. Yuan, M. Jiang, "Performance of Turbo Code on WOFDM system on Rayleigh fading channels", 14th IEEE Proceedings on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, PIMRC, 7-10 septembrie 2003, vol.2, pag. 1570- 1573.
- [Olt,Kov,Balt,Câm'08]** M. Oltean, M. Kovaci, H. Baltă, A. Câmpeanu, "Multi Binary Turbo Coded WOFDM Performance in Flat Fading Channels", Acta Technica Napocensis, Electronics and Telecommunications, vol. 29, nr. 3, 2008, pag. 9-14.
- [Bel,Man'02] A. Bell, M. Manglani, "Wavelet Modulation in Rayleigh Fading Channels: Improved Performance and Channel Identification", Proceedings of ICASSP 2002, pag. 2813 – 2816.
- [Olt'08]** M. Oltean, "In depth analysis of wavelet modulation performance in flat fading channels: choosing the wavelets mother", Buletinul Științific al UPT, Seria Electronică și Telecomunicații, Tom 53 (67), 2008, pag. 167-172.

[Olt'08-1] M. Oltean, "A study of the multi-scale WOFDM transmission in time variant channels", International Journal of Communications, Issue1, Vol. 2, Decembrie 2008, pag. 96-105.

[Olt'08-2] M. Oltean, "On the Wavelet OFDM Performance in Time-Variant Channels: Choosing the number of DWT Iterations", Recent Advances in Data Communications, Networks, Computers, Proceedings of WSEAS Conference DNCOCO'08, Bucuresti, noiembrie 2008, pag. 85-90.

[Olt,Naf'09] M. Oltean, M. Naforniță, "Errors per Scale Statistics for a Wavelet OFDM transmission in Flat Fading Channels", Proceedings of WISP'09, Budapesta, August 2009, pag. 119-124.

[Rap'01] T.S. Rappaport, "Wireless Communications, principles and practice", Prentice Hall, 2001.

[Man'01] M. Manglani, "Wavelet Modulation in Gaussian and Rayleigh Fading Channels", Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, disponibil on-line la: <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-08072001-093853/unrestricted/etdset.pdf> , 2001.

[Isa,Isa'04] D. Isar, A. Isar, "Filtre", Ed. Politehnica Timișoara, 2004.

ANEXA 1

Se pune problema simulării pe calculator a unei transmisii printr-un canal radio. În această situație, semnalul util $s[n]$ este alterat de o secvență multiplicativă $ray[n]$, a cărei histogramă aproximează o densitate de probabilitate de tip Rayleigh, și de o secvență aditivă $z[n]$ cu densitate de probabilitate Gaussiană. Toate acestea pot fi privite ca și realizări particulare ale unor procese aleatoare având proprietățile statistice amintite. Făcând presupunerea staționarității și ergodicității acestor procese, secvențele pot fi privite ca niște variabile aleatoare.

Semnalul ajuns la recepție poate fi astfel considerat ca fiind un rezultat al unor operații de înmulțire și adunare între variabile aleatoare:

$$r[n] = s[n] \cdot ray[n] + z[n] \quad (A1.1)$$

Pentru canalele cu zgomot alb, gaussian, aditiv și de medie nulă se definește raportul semnal pe zgomot, ca fiind raportul dintre puterea semnalului util și puterea zgomotului. Considerând și că secvența utilă este o secvență bipolară de + și -1, cu probabilități egale de apariție, raportul semnal pe zgomot poate fi exprimat ca:

$$RSZ = \frac{var(s)}{var(z)} \quad (A1.2)$$

Unde prin "var" se notează varianța variabilelor aleatoare. Pentru a putea discuta despre RSZ și în cazul existenței efectului multiplicativ de tip Rayleigh este nevoie ca, după multiplicarea semnalului util cu secvența distribuită Rayleigh, puterea medie a semnalului trebuie să se conserve. Această condiție se formulează ca:

$$var(s \cdot ray) = var(s) \quad (A1.3)$$

Varianța produsului a două variabile aleatoare se poate exprima ca:

$$var(s \cdot ray) = var(s) \cdot var(ray) + \overline{s}^2 var(ray) + \overline{ray}^2 var(s) \quad (A1.4)$$

unde prin \overline{x} notăm media variabilei aleatoare x .

Pentru cazul distribuției de tip Rayleigh, densitatea de probabilitate se exprimă ca:

$$pdf(x|\sigma) = \frac{x \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (A1.5)$$

În acest caz:

$\overline{ray} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $var(ray) = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2$ și presupunând o valoare oarecare pentru varianța

secvenței s , $var(s) = x$, putem obține prin înlocuirea acestora în (A1.4):

$$x = x \cdot \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 + x \cdot \sigma^2 \frac{\pi}{2} \quad (A1.6)$$

În ecuația precedentă am ținut cont de faptul că semnalul util este de medie nulă. Prin identificare de termeni în (A1.6), se obține:

$$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 + \sigma^2 \frac{\pi}{2} = 1 \quad (A1.7)$$

Această condiție este satisfăcută atunci când $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ în ecuația (A1.5). În general, aceasta este valoarea care se alege în cazul simulării pe calculator a canalelor radio, deoarece ea permite reutilizarea noțiunii de raport semnal pe zgomot într-un cadru mai larg decât acela al canalului AWGN.

ANEXA 2

1. Localizarea în planul timp-frecvență a undișoarelor de la scara j , $\psi_j(t)$, respectiv a funcției de scară de la scara j , $\varphi_j(t)$ este identică cu localizarea timp-frecvență a undișoarei mamă $\psi(t)$, respectiv a funcției de scară $\varphi(t)$. Consecința directă este că localizarea timp-frecvență a purtătoarelor din WOFDM este independentă de scară.

Demonstrația pentru funcția de scară este identică aceleia pentru undișoare-mamă. De aceea, vom nota undișoara (funcția de scară) folosind o notație unică, generică, $\alpha(t)$.

Calculul duratei efective

$$\alpha_j \sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \alpha_j^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 2^{-j} \alpha^2(2^{-j} \tau) d\tau \quad (\text{A 2.1})$$

Dacă se face substituția: $u = 2^{-j} \tau$, obținem:

$$\alpha_j \sigma_t^2 = 2^{2j} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \alpha^2(u) du = 2^{2j} \cdot \alpha \sigma_t^2 \quad (\text{A 2.2})$$

Calculul benzii efective

$$\alpha_j \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| \mathfrak{F}\{\alpha_j(t)\}(\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left| \mathfrak{F}\alpha_j(\omega) \right|^2 d\omega \quad (\text{A 2.3})$$

Unde $\mathfrak{F}\alpha_j(\omega)$ este transformata Fourier a funcției $\alpha_j(t)$. Putem scrie mai departe:

$$\mathfrak{F}\alpha_j(\omega) = \mathfrak{F}\left\{2^{-j/2} \alpha\left(2^{-j}t\right)\right\}(\omega) = 2^{-j/2} \cdot 2^j \mathfrak{F}\{\alpha(t)\}(2^j \omega) \quad (\text{A 2.4})$$

Înlocuind (A 2.4) în (A 2.3), găsim că:

$$\alpha_j \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot 2^j \left| \mathfrak{F}\{\alpha(t)\}(2^j \omega) \right|^2 d\omega \quad (\text{A 2.5})$$

Făcând substituția $2^j \omega = u$, vom avea:

$$\alpha_j \sigma_\omega^2 = 2^{-2j} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \left| \mathfrak{F}\{\alpha(t)\}(u) \right|^2 du = 2^{-2j} \cdot \alpha \sigma_\omega^2 \quad (\text{A 2.6})$$

Ținând cont de relațiile (2.2) și (2.6), se poate spune că:

$$\alpha_j \sigma_t^2 \cdot \alpha_j \sigma_\omega^2 = \alpha \sigma_t^2 \cdot \alpha \sigma_\omega^2 \quad (\text{A 2.7})$$

Conform relației (A 2.7), localizarea timp-frecvență a undișoarelor și a funcțiilor de scară, indicată prin produsul $\alpha \sigma_t^2 \cdot \alpha \sigma_\omega^2$ nu depinde de scară.

2. Dorim să calculăm valorile σ_t^2 și σ_ω^2 pentru undișoara Haar, sinus cardinal și pentru undișoarele din familia Daubechies cu număr finit de momente nule. Aceste calcule explică rezultatele redade sintetic în Tabelul 3.3.

Funcția de scară Haar

În acest caz, $\varphi(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$. Vom avea așadar:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |\varphi(t)|^2 \cdot dt = \int_0^1 t^2 = \frac{1}{3} \quad (\text{A 2.8})$$

Pentru calculul benzii efective, avem nevoie de spectrul corespunzător funcției de scară Haar. Dată fiind forma simplă a funcției $\varphi(t)$, acest spectru poate fi calculat foarte rapid, folosind formula de definiție a transformatei Fourier. El este:

$$\mathfrak{T}\{\varphi(t)\}(\omega) = \mathfrak{T}_\varphi(\omega) = 2 \cdot e^{-j\omega/2} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} \quad (\text{A 2.9})$$

Vom avea în continuare:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathfrak{T}_\varphi(\omega)|^2 d\omega = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega) d\omega \quad (\text{A 2.10})$$

Această integrală pe interval infinit poate fi descompusă într-o sumă de integrale pe intervale finite. Folosind și formula trigonometrică $\sin^2(\omega) = \frac{1 - \cos(2\omega)}{2}$, vom putea rescrie relația (A 2.10) astfel:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\omega) d\omega = \\ &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega \Big|_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} (\cos 2\omega) d\omega \end{aligned} \quad (\text{A 2.11})$$

Se observă rapid că, în relația (2.11) prima sumă este infinită. Pentru cea de a doua sumă, făcând substituția $u = 2\omega$, vom constata că toți termenii săi (toate integralele) sunt nule. Prin urmare, am dovedit că:

$$\sigma_\omega^2 = \infty \quad (\text{A 2.12})$$

Ținând cont de relațiile (A 2.8) și (A 2.12), am dovedit că, în cazul funcției de scară Haar, avem:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 = \infty \quad (\text{A 2.13})$$

Undișoara mamă Haar

Expresia analitică a undișoarei mamă Haar este:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (\text{A 2.14})$$

Durata efectivă poate fi calculată ca și:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |\psi(t)|^2 \cdot dt = \int_0^1 t^2 = \frac{1}{3} \quad (\text{A 2.15})$$

Transformata Fourier a undișoarei Haar se va nota în continuare cu $\mathfrak{F}_\psi(\omega)$. Aplicând formula de calcul a transformării Fourier avem:

$$\mathfrak{F}_\psi(\omega) = \int_0^{1/2} e^{-j\omega t} dt - \int_{1/2}^1 e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A 2.16})$$

Integralele din relația (A 2.16) pot fi calculate direct. Efectuând acest calcul și prelucrând expresia obținută, se ajunge pentru spectrul undișoarei mamă Haar la expresia:

$$\mathfrak{F}_\psi(\omega) = \frac{4j \cdot \sin^2 \frac{\omega}{4}}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad (\text{A 2.17})$$

Aplicând formula de calcul pentru banda efectivă, obținem:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathfrak{F}_\psi(\omega)|^2 d\omega = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^4 \frac{\omega}{4} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right)^2 d\omega \quad (\text{A 2.18})$$

Ridicând la pătrat expresia de sub integrală și separând ulterior integrala în trei părți, corepunzătoare termenilor obținuți, vom avea:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{\omega}{2} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega \quad (\text{A 2.18})$$

Se observă că primul și cel de al treilea termen al sumei sunt infiniți, iar cel de al doilea este nul (demonstrația a fost făcută la funcția de scară). Prin urmare, am demonstrat că, în cazul undișoarei-mamă de tip Haar, avem:

$$\sigma_\omega^2 = \infty \quad (\text{A 2.19})$$

Ținând cont de relațiile (A 2.19) și (A 2.15), vom avea:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 = \infty \quad (\text{A 2.20})$$

Funcția de scară de tip sinus cardinal

Această funcție se definește ca:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \text{sinc} \frac{\pi t}{2} \quad (\text{A 2.21})$$

Durata efectivă este:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |\varphi(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi t}{2} dt \quad (\text{A 2.22})$$

Făcând substituția $u = \frac{\pi t}{2}$, integrala (A 2.22) devine:

$$\sigma_t^2 = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \operatorname{sinc}^2 u \cdot du = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 u \cdot du \quad (\text{A 2.23})$$

Această integrală este identică celeia obținută în (A 2.10). S-a arătat atunci că valoarea ei este infinită. Așadar, am arătat că, pentru funcția de scară de tip sinus cardinal avem:

$$\sigma_t^2 = \infty \quad (\text{A 2.24})$$

Transformata Fourier a funcției definite în (A 2.21) este cunoscută, fiind vorba de o "poartă în frecvență":

$$\mathfrak{T}_{\varphi}(\omega) = P_{\pi/2}(\omega) = \sigma\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{A 2.25})$$

Aplicând formula de calcul pentru banda efectivă, și ținând cont de (A 2.25), se poate scrie:

$$\sigma_{\omega}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathfrak{T}_{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega^2 d\omega = \frac{\pi^3}{12} \quad (\text{A 2.26})$$

Întrucât banda efectivă este finită, iar durata efectivă este infinită, putem scrie:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 = \infty \quad (\text{A 2.27})$$

Undișoara de tip sinus cardinal

Expresia acesteia este: $\psi(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}$. Aplicând formula de calcul a duratei efective, obținem:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |\psi(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)^2 dt \quad (\text{A 2.28})$$

Efectuând operația de ridicare la pătrat din integrala (A 2.28) și aplicând formule de transformare a produsului de funcții trigonometrice în sumă, ajungem la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos(4\pi t)}{2} + \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2} + \cos(3\pi t) - \cos(\pi t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \cos(\pi t) - \frac{\cos(2\pi t)}{2} + \cos(3\pi t) - \frac{\cos(4\pi t)}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A 2.29})$$

Dacă despărțim integrala în 4 integrale corepunzătoare termenilor care apar în (A 2.29), vom constata că una dintre cele 4 integrale va avea valoare infinită (cea care corespunde constantei "1"), în timp ce toate integralele funcțiilor trigonometrice vor conduce la valori finite, așa cum s-a demonstrat pentru primul caz studiat în această

anexă (funcția de scară Haar). Prin urmare, durata efectivă a unui asemenea semnal va fi, la rândul său, infinită:

$$\sigma_t^2 = \infty \quad (\text{A 2.30})$$

Așadar, la fel ca și în toate cazurile considerate până acum, obținem:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 = \infty \quad (\text{A 2.31})$$

3. Pentru undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies, cu număr finit de momente nule, $N \geq 2$ s-a făcut afirmația (paragraful 3.3) că atât banda, cât și durata efectivă au valori finite. Dorim să stabilim, în această anexă niște limite superioare ale acestor mărimi.

Durata efectivă pentru undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies

Se cunoaște [Dau'92] că toate undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies au suport temporal compact. Altfel spus:

Oricare ar fi $N \geq 2$ finit, există două valori t_1 și t_2 , astfel încât $\alpha(t) = 0$ pentru $t \notin [t_1, t_2]$.

$\alpha(t)$ este o notație generică, ea referindu-se atât la undișoara mamă, cât și la funcția de scară.

Conform definiției benzii efective, avem:

$$\sigma_t^2 = \int_{t_1}^{t_2} t^2 \alpha^2(t) dt \quad (\text{A 2.32})$$

Dar semnalul $\alpha^2(t)$ este mărginit. Fie M valoarea maximă a acestui semnal. Maximizând $\alpha(t)$ obținem:

$$\sigma_t^2 \leq M \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{M}{3} (t_2^3 - t_1^3) \quad (\text{A 2.33})$$

Este clar, conform relației (A 2.33), că valoarea σ_t^2 este limitată superior pentru undișoarele din familia Daubechies considerate. Prin urmare, durata efectivă a acestora este finită.

Banda efectivă pentru undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies

Vom începe cu localizarea în frecvență a funcțiilor de scară. În ciuda faptului că nu cunoaștem expresia lor analitică, putem utiliza o proprietate interesantă a spectrului acestora, notat în cele ce urmează cu $\mathfrak{F}_\varphi(\omega)$ [Isa, Naf'98]:

$$\mathfrak{F}_\varphi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_d \left\{ m_0 \right\} \left(\frac{\omega}{2^k} \right) \quad (\text{A 2.34})$$

În relația (3.24), cu \mathfrak{F}_d s-a notat Transformarea Fourier Discretă a secvenței $m_0[n]$. Aceasta secvență reprezintă de fapt coeficienții FTJ utilizat în algoritmul lui

Mallat pentru calculul DWT. În cele ce urmează vom nota funcția $\mathfrak{I}_d \left\{ \frac{m_0}{\sqrt{2}} \right\}(\omega)$ cu $M_0(\omega)$. Conform [Isa,Isa'04], putem afirma că:

$$M_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \leq H\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A 2.35})$$

unde:

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \pi \\ 2 - \frac{\omega}{\pi}, & \pi \leq \omega \leq 2\pi \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (\text{A 2.36})$$

În figura A1, se prezintă caracteristicile de frecvență pentru $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$ și $H\left(\frac{\omega}{4}\right)$, cu titlu ajutător.

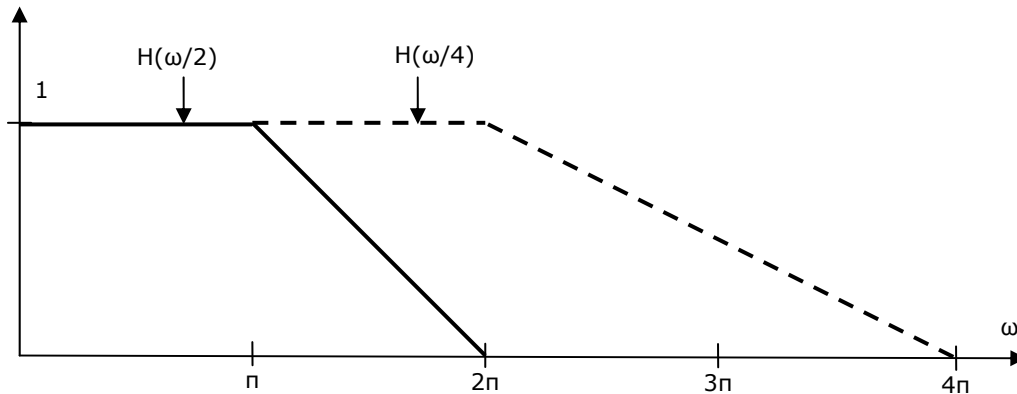


Fig. A 2.1: Caracteristicile de frecvență ale filtrelor $H(\omega)$

Utilizând relațiile (A 2.34) și (A 2.35), se poate scrie:

$$\mathfrak{I}_\varphi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} M_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \leq \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (\text{A 2.37})$$

Dar, produsul din partea dreaptă a relației (A 2.37) este egal chiar cu $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Așa cum se observă din figura (A 2.1), această funcție are suportul de frecvență cel mai compact dintre toate funcțiile ce intervin ca factori în produsul din relația (A 2.37). În consecință, produsul acestor funcții va fi nenul tot în intervalul $[0, 2\pi]$, și, mai mult decât atât, va fi egal chiar cu $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Așadar, relația (A 2.37) poate fi rescrisă ca:

$$\mathfrak{I}_\varphi(\omega) \leq H\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A 2.38})$$

În consecință, folosind formula de definiție pentru banda efectivă, obținem:

$$\sigma_{\omega}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\mathfrak{F}_{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega \quad (\text{A 2.39})$$

Dacă ținem cont de relația (A 2.36), vom avea:

$$\sigma_{\omega}^2 \leq \int_0^{\pi} \omega^2 d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} \omega^2 \left(2 - \frac{\omega}{\pi}\right)^2 d\omega \quad (\text{A 2.40})$$

Integralele (A 2.40) pot fi calculate simplu. În urma efectuării acestui calcul, obținem:

$$\sigma_{\omega}^2 \leq \frac{4\pi^3}{5} \quad (\text{A 2.41})$$

Așadar, am stabilit o limită superioară a benzii efective pentru funcțiile de scară din familia Daubechies. În continuare, vom realiza același tip de calcul pentru undișoarele din familia Daubechies. Vom folosi notația $\mathfrak{F}_{\psi}(\omega)$ pentru transformarea Fourier a undișoarei-mamă, $\psi(t)$. Aceasta poate fi exprimată ca și:

$$\mathfrak{F}_{\psi}(\omega) = \mathfrak{F}_d\{m_1\}\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} M_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (\text{A 2.42})$$

Pentru simplificarea expresiilor, vom nota $\mathfrak{F}_d\left\{\frac{m_1}{\sqrt{2}}\right\}(\omega)$ cu $M_1(\omega)$. Se cunoaște că [Isa,Naf'98]:

$$M_1(\omega) = e^{-j\omega} \cdot M_0^*(\omega + \pi) \quad (\text{A 2.43})$$

Așadar, în caracteristica de modul vom avea:

$$|M_1(\omega)| = |M_0(\omega + \pi)| \quad (\text{A 2.44})$$

Ținând cont de faptul că $M_0(\omega) \leq H(\omega)$, și ținând cont de (A 2.44), putem scrie că:

$$|M_1(\omega)| \leq H_{TB}(\omega) \quad (\text{A 2.45})$$

unde: $H_{TB}(\omega) = H(\omega + \pi)$ Caracteristica de frecvență corespunzătoare funcției $|H_{TB}(\omega)|$ este redată în figura (A 2.2).

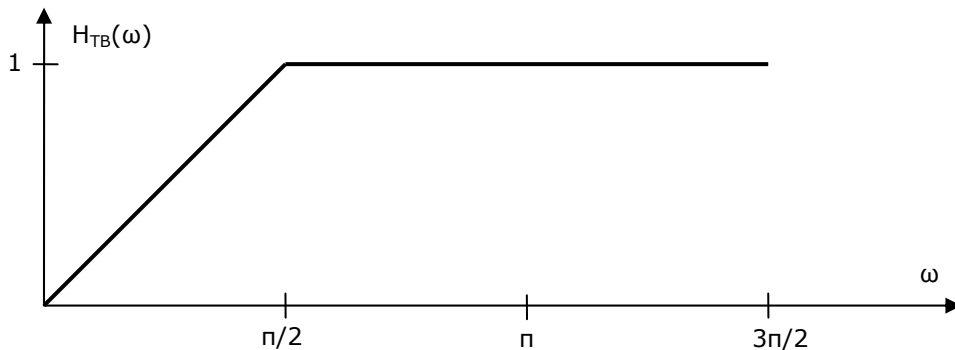


Fig. A 2.2: Caracteristica de frecvență a filtrului $H(\omega+\pi)$.

Așa cum rezultă și din fig. A 2.1, avem:

$$\prod_{k=2}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = 1, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (\text{A 2.46})$$

Ținând seama de relația (A 2.46), rezultă că, în acest interval, se poate scrie:

$$|\mathfrak{I}_{\psi}(\omega)| \leq H_{TB}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \omega \in [\pi, 2\pi] \\ \frac{\omega}{\pi}, & \omega \in [0, \pi] \end{cases} \quad (\text{A 2.47})$$

În consecință:

$$\sigma_{\omega}^2 \leq \int_0^{2\pi} \omega^2 H_{TB}\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = \int_0^{\pi} \frac{\omega^3}{\pi} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} \omega^2 d\omega \quad (\text{A 2.48})$$

Integrala (2.48) poate fi calculată simplu. Rezultatul final ne conduce la o limită superioară a benzii efective a undișoarelor din familia Daubechies:

$$\sigma_{\omega}^2 \leq \frac{31}{12} \pi^3 \quad (\text{A 2.49})$$

Ca o concluzie a analizei făcute, s-a arătat că pentru toate undișoarele și funcțiile de scară din familia Daubechies cu număr de momente nule $N \geq 2$, avem atât durată efectivă, cât și bandă efectivă finită. Mai mult, s-au stabilit prin calcul niște limite superioare pentru aceste valori.

Banda și durată efectivă a purtătoarelor din OFDM

Reamintim că forma bazei ortonormale folosite în OFDM este:

$$w(t) = p_{t_0}(t) \cdot e^{jm\omega_0 t} \quad (\text{A 2.50})$$

unde $p_{t_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq t_0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$. Pentru ortogonalitatea purtătoarelor, trebuie satisfăcută

condiția $\omega_0 \cdot t_0 = 2\pi$. Durata efectivă poate fi calculată ca:

$$\sigma_t^2 = \int_0^{t_0} t^2 |p_{t_0}(t) e^{jm\omega_0 t}|^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{t_0} = \frac{t_0^3}{3} \quad (\text{A 2.51})$$

Transformata Fourier a funcțiilor $w(t)$ este:

$$W(\omega) = P(\omega - m\omega_0) \quad (\text{A 2.52})$$

unde funcția din membrul drept reprezintă spectrul funcției $p(t)$. Acest spectru poate fi luat din tabele. Astfel vom obține:

$$W(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega - m\omega_0) \frac{t_0}{2}}{\omega - m\omega_0} e^{-j(\omega - m\omega_0) \frac{t_0}{2}} \quad (\text{A 2.53})$$

În relația (A 2.53), $m\omega_0$ ne indică poziția, pe axa frecvențelor, a sinusului cardinal ce corespunde purtătoarelor din OFDM. Banda efectivă a tuturor purtătoarelor din OFDM este identică și independentă de această poziție. Prin urmare, pentru simplificarea calculului, putem considera cazul particular $m = 0$.

Cunoscându-se expresia spectrului funcțiilor ce compun baza ortonormală din OFDM, și aplicând simplificarea indicată mai sus, banda efectivă poate fi calculată folosind formula de definiție:

$$\sigma_{\omega}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |W(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\omega t_0}{2} d\omega \quad (\text{A 2.54})$$

Această integrală este de tipul aceleia calculată deja în (A 2.10), unde s-a arătat că ea conduce la o bandă efectivă infinită:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_{\omega}^2 = \infty \quad (\text{A 2.55})$$