



UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMIȘOARA

FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE

CONTRIBUȚII LA MODELAREA SISTEMELOR DE TRANSPORT DE GAZE NATURALE ȘI CONTROLUL AUTOMAT AL ACESTORA

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor inginer
la
Universitatea “Politehnica” din Timișoara
în domeniul Automatică
de către

Ing. Constantin-Dorin Bichiș

Conducător științific:

Referenți științifici:

prof.univ.dr.ing Toma-Leonida Dragomir

prof.univ.dr.ing Cornel Trifan

prof.univ.dr.ing. Laszlo David

conf.univ.dr.ing. Ioan Silea

Ziua susținerii tezei: 26.09.2009

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Automatică | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie | 8. Inginerie Industrială |
| 3. Energetică | 9. Inginerie Mecanică |
| 4. Ingineria Chimică | 10. Știința Calculatoarelor |
| 5. Inginerie Civilă | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 6. Inginerie Electrică | |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2009

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Departamentului de Automatică al Universității „Politehnica” din Timișoara.

Mulțumiri deosebite se cuvin conducătorului de doctorat prof. dr.ing. Toma Leonida Dragomir

Timișoara, septembrie 2009

Constantin-Dorin Bichiș

Familiei mele!

Bichiș, Constantin-Dorin

Contribuții la modelarea sistemelor de transport de gaze naturale și controlul automat al acestora

Teze de doctorat ale UPT, Seria 1, Nr. , Editura Politehnica, 2009, 267 pagini, 191 figuri, 5 tabele.

ISSN:

ISBN (10):; ISBN (13):

Cuvinte cheie:

model matematic, sistem de transport, ecuații diferențiale cu derivate parțiale, model de aproximare, diferențe finite, simulare numerică, control predictiv, optimizare pătratică, SIMULINK

Rezumat:

Eficientizarea activității de operare a unui sistem de transport de gaze naturale, concretizată prin reducerea costurilor de exploatare este problema majoră care preocupă atât pe operatorul de sistem cât și pe cercetătorii din domeniul gazier. În acest context, în cadrul acestei lucrări este realizată o investigație amănunțită a tuturor aspectele care țin atât de modelarea matematică și simularea numerică a procesului de curgere a gazelor naturale realizat la nivelul unui sistem de transport, cât și de implementarea unui sistem de reglare automată a procesului cu luarea în considerare a restricțiilor asupra mărimilor din proces impuse de limitările tehnologice.

CUPRINS

| | |
|---|------------|
| Notații, abrevieri, acronime | 1 |
| Lista de figuri | 7 |
| Lista de tabele | 14 |
| 1. Problematika automatizării sistemelor de transport de gaze naturale | 15 |
| 1.1. Introducere | 15 |
| 1.2. Elemente structurale referitoare la sistemele de transport | 15 |
| 1.3. Problematika conducerii unui sistem de transport | 17 |
| 1.4. Aspecte privind automatizarea nodurilor tehnologice ale sistemului | 20 |
| de transport | |
| 1.5. Aspecte privind automatizarea stațiilor de reglare și măsurare | 25 |
| gaze naturale | |
| 1.6. Conceptul de sistem SCADA | 30 |
| 1.7. Problematika și obiectivele tezei | 32 |
| 2. Modelul continuu al procesului de curgere al gazului natural | 42 |
| prin conductele de transport | |
| 2.1. Generalități | 42 |
| 2.2. Aspecte mecanice ale curgerii fluidelor | 43 |
| 2.3. Aspecte cinematice ale curgerii fluidelor | 50 |
| 2.4. Aspectele termodinamice ale curgerii fluidelor | 54 |
| 2.5. Ecuațiile curgerii laminare a fluidelor vâscoase | 57 |
| 2.5.1. Ecuația continuității | 57 |
| 2.5.2. Ecuația mișcării | 59 |
| 2.5.3. Ecuația energiei | 60 |
| 2.6. Caracteristicile procesului de curgere a gazelor reale | 63 |
| 2.7. Modelul continuu al curgerii gazului natural printr-o conductă | 69 |
| de transport | |
| 3. Metode analitice și numerice utilizate pentru studiul procesului | 72 |
| de curgere descris prin modele continue | |
| 3.1. Generalități | 72 |
| 3.2. Simplificarea modelului curgerii | 73 |
| 3.3. Regimul staționar al procesului de curgere printr-un tronson | 77 |
| orizontal de conductă | |
| 3.4. Aspecte de regim tranzitoriu ale procesului de curgere | 82 |
| 3.5. Metode numerice, bazate pe diferențe finite, pentru rezolvarea | 90 |
| (simularea) numerică a modelului continuu al procesului de curgere | |
| 3.5.1. Descrierea problemei de simulare numerică din punct | 90 |
| de vedere sistemic | |
| 3.5.2. Aspecte de bază privind aplicarea metodelor de rezolvare | 92 |
| numerică bazate pe diferențe finite | |
| 3.5.3. O abordare sistemică a problemei convergenței metodei | 94 |
| numerice bazate pe diferențe finite | |
| 3.6. Metoda Runge-Kutta-Chebyshev | 101 |
| 3.6.1. Aplicabilitatea metodelor numerice cu diferențe finite | 101 |
| în cazul sistemelor ecuații diferențiale inflexibile | |
| 3.6.2. Utilitatea creșterii limitei de stabilitate a metodelor numerice | 104 |
| cu diferențe finite | |
| 3.6.3. Algoritm de calcul al metodei Runge-Kutta-Chebyshev | 106 |
| 3.7. Concluzii..... | 109 |
| 4. Modele de aproximare a procesului de curgere a gazului natural | 112 |
| prin conductele de transport | |
| 4.1. Generalități | 112 |
| 4.2. Simularea numerică a procesului de curgere al gazului natural | 112 |
| printr-un tronson de conductă folosind modele de aproximare | |

| | | |
|--------|--|------------|
| 4.2.1. | Construirea modelelor de aproximare | 112 |
| 4.2.2. | Exemplu de simulare numerică a procesului de curgere printr-un tronson de conductă prin folosirea unui model de aproximare | 120 |
| 4.2.3. | O analiză a erorilor de simulare numerică a procesului de curgere folosind reprezentări sistemice p1Q2 ale modelelor matematice simplificate | 129 |
| 4.3. | Un model sistemic al unui tronson de conductă | 132 |
| 4.3.1. | Deducerea unui model de aproximare liniar cu parametri concentrați, invariant în timp, prin folosirea unei reprezentări sistemice p1Q2 simplificate | 132 |
| 4.3.2. | Erorile rezultate prin folosirea unui model de aproximare sistemic în simulările numerice | 136 |
| 4.3.3. | Deducerea unei relații estimative de calcul a duratei regimului tranzitoriu | 138 |
| 4.3.4. | Modele de aproximare liniare, invariante în timp având la bază realizări sistemice p1p2 sau Q1Q2 | 141 |
| 4.4. | Problema stabilității unui model sistemic discret al procesului de curgere printr-un sistem de transport | 145 |
| 4.5. | Validarea experimentală a modelului curgerii | 154 |
| 4.5.1. | Studiul de caz 1 | 155 |
| 4.5.2. | Studiul de caz 2 | 157 |
| 4.5.3. | Studiul de caz 3 | 160 |
| 4.5.4. | Studiul de caz 4 | 162 |
| 4.5.5. | Studiul de caz 5 | 167 |
| 4.6. | Concluzii | 169 |
| 5. | Problematika implementării unui algoritm de reglare automată a dinamicii unui sistem de transport de gaze naturale | 171 |
| 5.1. | Generalități | 171 |
| 5.2. | Aspecte matematice ale problemelor de optimizare | 172 |
| 5.3. | Problema de optimizare pătratică cu restricții lineare | 175 |
| 5.4. | Problema controlului optimal linear cu orizont de predicție fixat | 180 |
| 5.5. | Implementarea algoritmului de control optimal cu orizont de predicție fixat a dinamicii presiunii de ieșire a unui tronson de conductă alimentat de la o sursă de gaze | 188 |
| 5.6. | Problematika controlului dinamicii presiunilor de ieșire ale unui sistem de transport de gaze naturale | 205 |
| 5.7. | Concluzii | 220 |
| 6. | Concluzii, contribuții și direcții de studiu | 222 |
| 6.1. | Concluzii finale | 222 |
| 6.2. | Contribuții personale | 225 |
| 6.3. | Direcții viitoare de studiu | 227 |
| | Anexe | 229 |
| A.1. | Elemente de teoria câmpurilor | 229 |
| A.2. | Ecuatii diferențiale ordinare cu condiții limită inițiale și finale | 232 |
| A.3. | Caracteristicile ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale cvasiliniare și neomogene | 233 |
| A.4. | Tipuri de matrici și teoreme importante referitoare la structura matricilor sistemelor de ecuații inflexibile | 238 |
| A.5. | Simularea numerică a modelelor de aproximare ale procesului de curgere folosind mediul de lucru MATLAB | 239 |
| A.6. | Simularea numerică a algoritmului de control predictiv bazat pe model folosind mediul de lucru MATLAB | 252 |
| | Bibliografie | 258 |
| | Index | 265 |

Notații, abrevieri, acronime

| | |
|---------------------------------------|---|
| a | unghi de înclinare de la orizontală tronson de conductă |
| $\{a_{dir_i} / i = 1, 2, 3\}$ | cosinuşii directori ai unui segment |
| \underline{a}_{eg} | vectorul restricțiilor liniare de tip egalitate |
| $\underline{\beta}_{ineg}$ | vectorul restricțiilor liniare de tip inegalitate |
| β_{stab} | limită de stabilitate |
| γ | multiplicator Lagrange asociat restricțiilor liniare de tip egalitate |
| δ_{ga} | densitate relativă a gazului față de aer |
| Δt | pasul de discretizare temporală |
| Δx | pasul de discretizare spațială |
| $\varepsilon(\varphi)$ | eroarea relativă în calculul mărimii φ |
| ε_l | variația relativă a lungimii l a corpului |
| ε_{tr} | eroarea de trunchiere |
| $\underline{\eta}$ | vector perturbații aditive |
| λ | factor de pierderi hidraulice / factor de frecare |
| λ_{ct} | coeficientul de transfer termic prin conducție |
| λ_{vp} | valoare proprie |
| $\lambda_{vp}(\underline{A})$ | spectrul matricei \underline{A} (mulțimea tuturor valorilor proprii) |
| $ \lambda_{vp} _{max}(\underline{A})$ | raza spectrală a spectrului matricei \underline{A} |
| λ_{Fan} | coeficient Fanning |
| μ | coeficient dinamic de viscozitate |
| μ_p | coeficientul lui Poisson |
| ρ | densitate |
| ρ_R | densitatea în condiții de referință |
| $\rho_{spec}(\underline{\Phi})$ | raza spectrală a matricei $\underline{\Phi}$ |
| σ | suprafață exterioară corp |
| τ | coeficient de variație cu temperatura a factorului de abatere Z |
| T_{pk} | constanta de timp a modului „ k ” de comportament dinamic |
| \hat{t} | tensiune într-un punct |
| ω | multiplicator Lagrange asociat restricțiilor liniare de tip inegalitate |
| a | acelerație |
| $\{a_{ef_{ij}} / i, j = 1, 2, 3\}$ | coeficienți de deformare |

| | |
|-------------------------|---|
| A | secțiune transversală |
| A_{def} | matricea tensorului deformărilor |
| A_{eg} | matricea coeficienților restricțiilor liniare de tip egalitate |
| ANM | agenția națională meteorologică |
| $\{b_{itj}/i,j=1,2,3\}$ | coeficienții vitezelor de deformare |
| B_{ineg} | matricea coeficienților restricțiilor liniare de tip inegalitate |
| B_{vit} | matricea tensorului vitezelor de deformare |
| B_{trons} | zestre tronson de conductă |
| c | viteză sunet |
| C_p | căldură specifică gaz la presiune constantă |
| C_v | căldură specifică gaz la volum constant |
| cond | numărul de condiționare numerică |
| C_{Euler} | costul de rezolvare al metodei Euler |
| C_{gaz} | constantă specifică de calcul a viscozității gazului |
| C_p | capacitate termică gaz la presiune constantă |
| C_{pon} | vector ponderi a funcției criteriu |
| C_{RKC} | costul de rezolvare al metodei Runge-Kutta-Chebyshev |
| C_v | capacitate termică gaz la volum constant |
| Cr | criteriu de încadrare curgere turbulentă |
| CF | condiții finale |
| CH4-AH | detector concentrație metan |
| CI | condiții inițiale |
| d_{adm} | direcție admisibilă pentru problema de optimizare |
| D | diametru interior tronson de conductă |
| $D(L, t_{final})$ | domeniul spațio-temporal al procesului de curgere |
| $\{e_i / i = 1, 2, 3\}$ | versorii sistemului de coordonate carteziene $Ox_1x_2x_3$ |
| $e(\underline{y})$ | vectorul erorii de ieșire |
| E_{cin} | energia cinetică |
| E_{eg} | mulțimea indicilor restricțiilor de tip egalitate |
| E_{met} | eroare metodă numerică |
| E_{pot} | energia potențială |
| E_Y | modulul de elasticitate al lui Young |
| EV | electroventil de protecție |
| \underline{f} | vector intensitate câmp forțe |
| \underline{F} | vector forță |
| Fg | filtru gaz |
| F_{N_p, M_c} | funcție obiectiv a problemei de control optimal linear cu orizont de predicție fixat |
| FQI | debitmetru gaze cu indicare locală |
| FT | traductor electronic de debit |
| g | acelerația gravitațională |
| h | nivel, înălțime corp |
| H_{enp} | entalpie |

| | |
|------------------------------------|--|
| H_{pon} | matrice ponderare a funcției criteriu |
| $H(f, \underline{x})$ | matricea Hessian a funcției $f(\underline{x})$ |
| HMI | interfață grafic utilizator uman |
| I_n | matricea unitate cu n linii și n coloane |
| I_{ineg} | mulțimea indicilor restricțiilor de tip inegalitate |
| IG | încălzitor tehnologic gaze |
| $J_{\underline{u}, \underline{x}}$ | Jacobianul mărimii \underline{u} funcție de \underline{x} |
| k_a | rugozitate interioară absolută |
| k_L | coeficient de transfer termic prin conducție |
| K | calorifer |
| Kn | numărul Knudsen |
| K_{norm} | matrice de normalizare mărimi model matematic |
| K_U^* | matricea de câștig a legii de comandă optimale |
| l | lungime corp |
| l_{pm} | lungimea liberului parcurs molecular |
| L | lungime tronson de conductă |
| L_e | lungime echivalentă tronson de conductă |
| L_{dim} | o dimensiune a corpului |
| L_{lagr} | funcția Lagrangean |
| L_{mec} | lucru mecanic al forțelor de presiune |
| L_{sup} | lucrul mecanic al forțelor de suprafață |
| LCH | dispozitiv mecanic de evacuare lichide din SPG |
| LIAH | releu electric de nivel maxim-minim |
| LSL | releu de nivel minim |
| m_{mat} | masă corp material |
| M_0 | modelul matematic complet al curgerii unidimensionale |
| M_1, M_2, M_3 | modele matematice simplificate a curgerii unidimensionale |
| M_{misc} | vector moment de mișcare |
| M_{act} | servomotor de acționare |
| M_c | lungime orizont de control |
| M_{dink} | modul „k” de comportament dinamic |
| n_{sup} | vectorul normalei la suprafața exterioară a unui corp, într-un punct |
| $N_\epsilon(\underline{x})$ | vecinătate a punctului \underline{x} |
| Ni | nodul „i” tehnologic |
| N_p | lungime orizont de predicție |
| $Ox_1x_2x_3$ | sistem de coordonate carteziane |
| $\{Ox_i / i = 1, 2, 3\}$ | axă „i” sistem de coordonate cartezian |
| p | presiune statică |
| p_{cr} | presiune critică gaz |
| p_{red} | presiunea redusă |
| p_R | presiunea stării de referință termodinamice |
| P_F | matrice ponderare stare finală a funcției obiectiv F_{N_p, M_c} |
| P_{rcr} | pompă recirculare |
| PAH | releu de presiune maximă |

| | |
|-------------------|--|
| PC | regulator de presiune |
| PDIAH | manometru diferențial indicator |
| PI | manometru indicator |
| PLC | automat programabil |
| PSH | dispozitiv de siguranță la suprapresiune |
| PSHL | dispozitiv de siguranță la sub și suprapresiune |
| PT | traductor electronic de temperatură |
| PTZ | corector debit în presiune, temperatură și factor de abatere |
| q_{ct} | flux termic prin conducție |
| Q | debit masic |
| Q_{ψ} | fluxul hidrodinamic al mărimii ψ |
| Q_{ct} | căldură (schimbată prin conducție termică) |
| \underline{Q}_F | matrice ponderare eroare de ieșire a funcției obiectiv F_{N_p, M_c} |
| Q_v | debit volumic |
| Q_{vR} | debit volumic în condiții de referință |
| Q_{visc} | energia mecanică transformată în căldură ca urmare a forțelor de viscozitate |
| ri | robinet instrumentație |
| \underline{r} | vector de poziție |
| r_r | rugozitate interioară relativă |
| t_{tx} | constanta rețelei de discretizare spațio-temporale |
| R | robinet manevră |
| Ra | robinet izolare circuit agent termic IG |
| Re | numărul Reynolds |
| \underline{R}_F | matrice ponderare abatere de comandă a funcției obiectiv F_{N_p, M_c} |
| Rg | robinet izolare circuit alimentare cu gaze arzător IG |
| R_p | constanta generală specifică a gazului |
| RKC | metodă numerică Runge-Kutta-Chebyshev |
| RTU | unitate telecomandată de control |
| $s_{\Delta h}$ | parametru de elevație |
| S_{entrp} | entropie specifică |
| S_{con} | mulțime convexă pe care se caută minimul unei funcții |
| S_{entrp} | entropie |
| $sign(\varphi)$ | semnul mărimii φ |
| SCADA | sistem control supervizat și achiziție date de la distanță |
| SCG | stație comprimare gaze |
| SCV | stație comandă vane |
| SPG | separator impurități lichide |
| SRM | stație reglare și măsurare gaze |
| STG(i) | sistemul „i” de transport de gaze |
| SDG(j) | sistemul „i” de distribuție de gaze |
| t | timp |
| t_{final} | timp final de simulare numerică |
| t_{prp} | timp de propagare a undei de presiune cu viteza sunetului |
| t_{stat} | timp de propagare în regim staționar |
| T | temperatură |

| | |
|--------------------------|--|
| \hat{T} | matricea tensorului tensiunilor într-un punct |
| T_{contr} | orizontul de control |
| T_{cr} | temperatura critică gaz |
| T_{Chk} | polinomul Chebyshev de prima speță și ordin k |
| T_{ired} | temperatura redusă gaze |
| T_{pred} | orizontul de predicție |
| T_{red} | temperatura inversă redusă gaze |
| T_R | temperatura stării de referințe termodinamice |
| TC | regulator de temperatură de tip „tot-puțin-nimic” |
| TI | termometru indicator |
| TSH | element de reglare de tip „tot-nimic” |
| TT | traductor electronic de temperatură |
| \underline{u} | vector mărimi de intrare model sistemic liniar / liniarizat |
| \underline{u}_{dep} | deplasare |
| u_{int} | energie internă specifică |
| U_{int} | energie internă |
| v | viteză |
| V | volum |
| W_{luc} | mulțimea de lucru a restricțiilor active |
| x | coordonata direcțională |
| \underline{x} | poziția unui punct în sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ |
| \underline{X} | vector mărimi de stare model |
| \underline{X}^* | stare optimă |
| \underline{y} | vector ieșiri model sistemic liniar / liniarizat |
| z | elevație tronson de conductă |
| Z | factorul de abatere de la comportamentul gazelor perfecte al unui gaz real / factor de compresibilitate |
| ZSL | senzor poziție minim |
| ZSH | senzor poziție maxim |
| w | grosime corp |
| $O_{m \times n}$ | matricea nulă cu m linii și n coloane |
| φ_r | valoarea reglată a mărimii φ |
| φ_{ik} | componenta de pe linia „ i ” și coloana „ k ” a unei matrici |
| $\varphi_{j,k}^s$ | valoarea mărimii $\varphi(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t)$ caracteristică procesului de curgere desfășurat prin tronsonului „ s ” al sistemului de transport |
| φ_i | componenta „ i ” a unui vector |
| φ_{medie} | valoarea medie a mărimii φ calculată printr-o formulă de mediere |
| φ_M | valoare medie a mărimii φ caracteristică unui regim staționar al procesului de curgere |
| φ_{ref} | valoare de referință a mărimii φ |
| φ_{stat} | valoare de regim staționar a mărimii φ |
| $\dot{\varphi}$ | derivata de ordinul 1 a funcției φ |

| | |
|--------------------------|--|
| $\ddot{\varphi}$ | derivata de ordinul 2 a funcției φ |
| $\tilde{\varphi}$ | mărime normalizată |
| $\bar{\varphi}$ | mărime liniarizată |
| $\hat{\varphi}$ | valoarea estimată a mărimii φ |
| Ψ | mărime scalară |
| $\underline{\Psi}$ | mărime vectorială sau matriceală |
| $\ \underline{\Psi}\ $ | modulul (norma) mărimii vectoriale $\underline{\Psi}$ |
| $\underline{\Psi}^t$ | transpusa mărimii vectoriale / matriceale $\underline{\Psi}$ |
| $\underline{\Psi}_{prm}$ | matrice parametri model liniar / liniarizat |
| $\underline{\Psi}_{aug}$ | matrice augmentată |
| $\underline{\Psi}_{com}$ | matrice coeficienți relații liniare scrise sub o formă compactă |
| φ^k | ridicarea la puterea „k” a mărimii φ |
| $\varphi(s)$ | mărimea φ caracteristică procesului de curgere desfășurat prin tronsonul de conductă de indice „s” |

Listă de figuri

| | | |
|-----|---|------------|
| 1. | Fig. 1.2.1. Schema de principiu a unui sistem de transport gaze naturale | 16 |
| 2. | Fig. 1.3.1. Structură de sistem de sistem de transport | 19 |
| 3. | Fig. 1.4.1. Tronson de conductă | 21 |
| 4. | Fig. 1.4.2. Curbă de evoluție debit gaz funcție de temperatura mediului ambiant | 21 |
| 5. | Fig. 1.4.3. Distribuții staționare de presiune | 22 |
| 6. | Fig. 1.4.4. Evoluția în timp a presiunii de ieșire p_2 | 23 |
| 7. | Fig. 1.4.5. Schema tehnologică de implementare a modelului de conducere predictivă | 24 |
| 8. | Fig. 1.5.1. Schemă de stație de reglare și măsurare gaze naturale | 27 |
| 9. | Fig. 1.6.1. Structură de sistem SCADA | 31 |
| 10. | Fig. 1.7.1. Structură de control convențională / structură de control predictiv bazată pe model | 39 |
| 11. | Fig. 2.2.1. Bară de material elastic supusă acțiunii unei forțe exterioare | 44 |
| 12. | Fig. 2.2.2. Deformarea liniară a particulei de mediu fluid | 45 |
| 13. | Fig. 2.2.3. Deformarea unei particule paralelipipedice de mediu fluid | 46 |
| 14. | Fig. 2.2.4. Evaluarea stării de tensiune dintr-un punct al unui corp material | 47 |
| 15. | Fig. 2.2.5. Corp material de volum V și suprafață exterioară σ | 48 |
| 16. | Fig. 2.2.6. Mișcarea laminară a unui fluid vâscos între două plăci paralele | 49 |
| 17. | Fig. 2.3.1. Reprezentarea curgerii într-un sistem de coordonate cartezian | 50 |
| 18. | Fig. 2.3.2. Tub de curent | 53 |
| 19. | Fig. 2.4.1. Particulă de fluid de volum V și suprafață exterioară σ | 56 |
| 20. | Fig. 2.6.1. Profiluri de curgere viteză | 65 |
| 21. | Fig. 2.6.2. Diagrama Moody | 66 |
| 22. | Fig. 2.6.4. Valorile rugozității absolute echivalente pentru diferite tipuri de materiale | 67 |
| 23. | Fig. 2.7.1. Tronson de conductă | 70 |
| 24. | Fig. 3.2.1. Tronson de conductă | 73 |
| 25. | Fig. 3.3.1. Tronson orizontal de conductă | 77 |
| 26. | Fig. 3.5.1. Realizare sistemică $p1Q2T1$ | 91 |
| 27. | Fig. 3.6.1. Organigrama metodei Runge-Kutta-Chebyshev | 110 |
| 28. | Fig. 4.2.1.a. Distribuție staționară normalizată de presiune | 121 |
| 29. | Fig. 4.2.1.b. Distribuție staționară normalizată de debit | 121 |
| 30. | Fig. 4.2.1.c. Distribuție staționară normalizată de temperatură | 122 |
| 31. | Fig. 4.2.2. Distribuție staționară normalizată de temperatură folosind un număr mai mare de puncte de discretizare spațială | 122 |
| 32. | Fig. 4.2.3. Valorile proprii ale matricii A_{prm} | 122 |
| 33. | Fig. 4.2.4.a. Dependența părții reale a valorii proprii maxime a matricii A_{prm} pe durata simulării numerice | 123 |
| 34. | Fig. 4.2.4.b. Dependența părții reale a valorii proprii minime a matricii A_{prm} pe durata simulării numerice | 123 |
| 35. | Fig. 4.2.4.c. Dependența numărului de condiționare pe durata simulării numerice | 124 |
| 36. | Fig. 4.2.5.a. Distribuția spațio-temporală a presiunii normalizate | 124 |

| | | |
|-----|---|------------|
| 37. | Fig. 4.2.5.b. Distribuția spațio-temporală a debitului normalizate | 124 |
| 38. | Fig. 4.2.5.c. Distribuția spațio-temporală temperaturii normalizate | 124 |
| 39. | Fig. 4.2.6.a. Evoluția în timp a presiunii normalizate din nodul de ieșire | 125 |
| 40. | Fig. 4.2.6.b. Evoluția în timp a debitului normalizat din nodul de intrare | 125 |
| 41. | Fig. 4.2.6.c. Evoluția în timp a temperaturii normalizate din nodul de ieșire | 125 |
| 42. | Fig. 4.2.7.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp | 126 |
| 43. | Fig. 4.2.7.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp | 126 |
| 44. | Fig. 4.2.8.a. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu amplitudini diferite, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la aceeași valoare a acesteia | 126 |
| 45. | Fig. 4.2.8.b. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu aceeași amplitudine, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la valori diferite ale acesteia | 126 |
| 46. | Fig. 4.2.8.c. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu aceeași amplitudine, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la aceeași valoare a acesteia dar pentru valori diferite ale debitului staționar inițial | 127 |
| 47. | Fig. 4.2.9.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul a) | 128 |
| 48. | Fig. 4.2.9.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul b) | 128 |
| 49. | Fig. 4.2.10.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul a) | 128 |
| 50. | Fig. 4.2.10.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul b) | 128 |
| 51. | Fig. 4.2.11.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul a) | 131 |
| 52. | Fig. 4.2.11.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul a) | 131 |
| 53. | Fig. 4.2.12.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul b) | 131 |
| 54. | Fig. 4.2.12.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul b) | 131 |
| 55. | Fig. 4.3.1. Realizare sistemică p1Q2 | 132 |
| 56. | Fig. 4.3.1.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp | 137 |
| 57. | Fig. 4.3.1.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp | 137 |
| 58. | Fig. 4.3.2.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate | 138 |
| 59. | Fig. 4.3.2.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat | 138 |
| 60. | Fig. 4.3.3. Discretizarea spațială în 3 puncte a unui tronson de conductă | 139 |
| 61. | Fig. 4.3.4. Determinarea timpului de stabilizare a folosind curba de evoluție dinamică în timp a presiunii de ieșire din tronson cauzată de variația treaptă a presiunii de intrare | 141 |
| 62. | Fig. 4.3.4.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp | 143 |
| 63. | Fig. 4.3.4.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp | 143 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 64. | Fig. 4.4.1. Structură de sistem de transport cu figurarea punctelor de discretizare spațială | 148 |
| 65. | Fig. 4.5.1. Tronson de conductă folosit pentru determinări experimentale | 154 |
| 66. | Fig. 4.5.1.a. Subsistemul de transport pentru studiul de caz 1 | 155 |
| 67. | Fig. 4.5.1.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 1 | 157 |
| 68. | Fig. 4.5.1.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 1 | 157 |
| 69. | Fig. 4.5.2.a. Subsistemul de transport pentru studiul de caz 2 | 157 |
| 70. | Fig. 4.5.2.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru prima fază a studiului de caz 2 | 159 |
| 71. | Fig. 4.5.2.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru prima fază a studiului de caz 2 | 159 |
| 72. | Fig. 4.5.2.d. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru faza a doua a studiului de caz 2 | 160 |
| 73. | Fig. 4.5.2.e. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru faza a doua a studiului de caz 2 | 160 |
| 74. | Fig. 4.5.2.f. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru faza a treia a studiului de caz 2 | 160 |
| 75. | Fig. 4.5.2.g. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru faza a treia a studiului de caz 2 | 160 |
| 76. | Fig. 4.5.3.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 3 | 161 |
| 77. | Fig. 4.5.3.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 3 | 162 |
| 78. | Fig. 4.5.3.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 3 | 162 |
| 79. | Fig. 4.5.4.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 4 | 162 |
| 80. | Fig. 4.5.4.b. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pentru studiul de caz 4 | 163 |
| 81. | Fig. 4.5.4.c. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pentru studiul de caz 4 | 163 |
| 82. | Fig. 4.5.4.d. Presiunea medie a tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 163 |
| 83. | Fig. 4.5.4.e. Debitul măsurat la ieșirea tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 163 |
| 84. | Fig. 4.5.4.f. Factorul de abatere mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 164 |
| 85. | Fig. 4.5.4.g. Factorul de pierderi de presiune mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 164 |
| 86. | Fig. 4.5.4.h. Numărul Reynolds mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 165 |
| 87. | Fig.4.5.4.i. Rugozitatea absolută medie pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar | 165 |
| 88. | Fig. 4.5.4.j. Variația diferenței pătratelor presiunilor de la capetele tronsonului de conductă cu pătratul debitului transportat prin tronsonul de conductă | 166 |
| 89. | Fig. 4.5.4.k. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 4 | 167 |
| 90. | Fig.4.5.4.l. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 4 | 167 |
| 91. | Fig. 4.5.5.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 5 | 167 |

| | | |
|------|---|-----|
| 92. | Fig. 4.5.5.b. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 168 |
| 93. | Fig. 4.5.5.c. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 168 |
| 94. | Fig. 4.5.5.d. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 168 |
| 95. | Fig. 4.5.5.e. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 168 |
| 96. | Fig. 4.5.5.h. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 169 |
| 97. | Fig. 4.5.5.i. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 169 |
| 98. | Fig. 4.5.5.f. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 169 |
| 99. | Fig. 4.5.5.g. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5 | 169 |
| 100. | Fig. 5.1.1. Principiul tehnicilor de control predictiv bazate pe model | 172 |
| 101. | Fig. 5.4.1. Regulator predictiv bazat pe model cu reacție după starea procesului | 187 |
| 102. | Fig. 5.4.2. Regulator predictiv bazat pe model cu observator de stare și perturbație | 187 |
| 103. | Fig. 5.5.1.a. Tronson de conductă | 188 |
| 104. | Fig. 5.5.1.b. Schemă tehnologică minimală, pentru implementare algoritmului de control predictiv bazat pe model a dinamicii presiunii de ieșire dintr-un tronson de conductă | 189 |
| 105. | Fig. 5.5.2. Reprezentare sistemică p1Q2 asociată modelului procesului de curgere realizat la nivelul tronsonului de conductă | 191 |
| 106. | Fig. 5.5.3.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor de ieșire cauzate de variația treaptă, cu amplitudini diferite, a presiunii de intrare, obținute prin simularea numerică cu un model neliniar / liniarizat | 198 |
| 107. | Fig. 5.5.3.b. Erorile relative procentuale în calculul presiunii de ieșire folosind un model liniarizat relativ la modelul neliniar | 198 |
| 108. | Fig. 5.5.4.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor de ieșire cauzate de variația treaptă, cu amplitudini diferite, a debitului de ieșire, obținute prin simularea numerică cu un model neliniar / liniarizat | 198 |
| 109. | Fig. 5.5.4.b. Erorile relative procentuale în calculul presiunii de ieșire folosind un model liniarizat relativ la modelul neliniar | 198 |
| 110. | Fig. 5.5.5.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 200 |
| 111. | Fig. 5.5.5.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 200 |
| 112. | Fig. 5.5.6.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 201 |
| 113. | Fig. 5.5.6.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 201 |
| 114. | Fig. 5.5.7.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 202 |
| 115. | Fig. 5.5.7.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 202 |
| 116. | Fig. 5.5.8.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 202 |
| 117. | Fig. 5.5.8.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă | 202 |

| | | |
|------|---|-----|
| 118. | Fig. 5.5.8.c. Evoluția în timp a ratei de variație a presiunii de comandă | 203 |
| 119. | Fig. 5.5.8.d. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 203 |
| 120. | Fig. 5.5.9.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 203 |
| 121. | Fig. 5.5.9.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă | 203 |
| 122. | Fig. 5.5.9.c. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 204 |
| 123. | Fig. 5.5.10.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 204 |
| 124. | Fig. 5.5.10.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 204 |
| 125. | Fig. 5.5.11.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință | 204 |
| 126. | Fig. 5.5.11.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă | 204 |
| 127. | Fig. 5.5.11.c. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 204 |
| 128. | Fig. 5.6.1.a. Sistem de transport cu o singură sursă de gaz și doi consumatori | 205 |
| 129. | Fig. 5.6.1.b. Schemă tehnologică minimală, pentru implementare algoritmului de control predictiv bazat pe model a dinamicii presiunilor de ieșire din sistemul de transport cu o sursă de gaz și doi consumatori | 206 |
| 130. | Fig. 5.6.2.a. Distribuția de presiune pe sistemul de transport în perioada de consum maxim | 207 |
| 131. | Fig. 5.6.2.b. Distribuția de presiune pe sistemul de transport în perioada de consum minim | 207 |
| 132. | Fig. 5.6.3. Reprezentarea sistemică asociată modelului procesului de curgere realizat la nivelul sistemului de transport | 208 |
| 133. | Fig. 5.6.4.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a presiunii de comandă din nodul $N1$ cu menținerea constantă a debitelor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ | 210 |
| 134. | Fig. 5.6.4.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a presiunii din nodul $N1$ | 210 |
| 135. | Fig. 5.6.5.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a presiunii de comandă din nodul $N3$ cu menținerea constantă a debitelor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ | 211 |
| 136. | Fig. 5.6.5.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a presiunii din nodul $N1$ | 211 |
| 137. | Fig. 5.6.6.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a debitului din nodul de ieșire $N2$ cu menținerea constantă a presiunilor de comandă din nodurile $N1$ și $N3$ | 212 |
| 138. | Fig. 5.6.6.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a debitului din nodul $N2$ | 212 |
| 139. | Fig. 5.6.7.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a debitului din nodul de ieșire $N4$ cu menținerea constantă a presiunilor de comandă din nodurile $N1$ și $N3$ | 212 |
| 140. | Fig. 5.6.7.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a debitului din nodul $N4$ | 212 |
| 141. | Fig. 5. 6. 8.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N2$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință | 213 |
| 142. | Fig. 5. 6. 8.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință | 213 |
| 143. | Fig. 5. 6. 9.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N2$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință | 213 |

| | | |
|------|---|-----|
| 144. | Fig. 5. 6. 9.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință | 213 |
| 145. | Fig. 5. 6. 10.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 214 |
| 146. | Fig. 5. 6. 10.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 214 |
| 147. | Fig. 5. 6. 11.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N4$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință | 215 |
| 148. | Fig. 5. 6. 11.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință | 215 |
| 149. | Fig. 5. 6. 12.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N4$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință | 216 |
| 150. | Fig. 5. 6. 12.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință | 216 |
| 151. | Fig. 5. 6. 13.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 216 |
| 152. | Fig. 5. 6. 13.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 216 |
| 153. | Fig. 5.6.14.a. Evoluția în timp a presiunilor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ pentru variații de tip treaptă a presiunilor de referință | 216 |
| 154. | Fig. 5.6.14.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 216 |
| 155. | Fig. 5. 6. 15.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul $N2$ cauzată de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N2$ | 217 |
| 156. | Fig. 5. 6. 15.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N2$ | 217 |
| 157. | Fig. 5. 6. 16.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul $N4$ cauzată de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N4$ | 217 |
| 158. | Fig. 5. 6. 16.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N4$ | 217 |
| 159. | Fig. 5 6 17.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 218 |
| 160. | Fig. 5 6 17.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 218 |
| 161. | Fig. 5.6.18.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de perturbații de tip treaptă a debitelor din nodurile $N2$ și $N4$ | 219 |
| 162. | Fig. 5.6.18.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 219 |
| 163. | Fig. 5.6.19.a. Evoluția în timp a presiunilor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ pentru variații de tip treaptă negativă a presiunilor de referință | 219 |
| 164. | Fig. 5.6.19.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 219 |
| 165. | Fig. 5.6.20.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de perturbații de tip treaptă negativă a debitelor din nodurile $N2$ și $N4$ | 220 |
| 166. | Fig. 5.6.20.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv | 220 |
| 167. | Fig. A.3.1.a. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale eliptice | 237 |
| 168. | Fig. A.3.1.b. Fig. A.3.1.a. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale parabolice | 237 |
| 169. | Fig. A.3.1.c. Fig. A.3.1.a. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale hiperbolice | 237 |
| 170. | Fig. A.5.1. Structura programului de simulare numerică | 240 |
| 171. | Fig. A.5.2. Schema SIMULINK simulare proces de curgere realizat la nivelul unui tronson de conductă | 247 |
| 172. | Fig. A.5.3. Controale grafice de introducere parametrilor de simulare numerică | 247 |
| 173. | Fig. A.5.4. Parametri inițializare simulare numerică | 248 |
| 174. | Fig. A.5.5. Schema SIMULINK modelare proces de curgere | 248 |
| 175. | Fig. A.5.6. Schema SIMULINK modelare nod de intrare | 248 |
| 176. | Fig. A.5.7. Schema SIMULINK modelare punct intermediar | 248 |

| | | |
|------|--|-----|
| 177. | Fig. A.5.8. Schema SIMULINK modelare nod de ieșire | 248 |
| 178. | Fig. A.5.9. Schemelor SIMULINK de modelare a ecuației debitului | 249 |
| 179. | Fig. A.5.10. Schemelor SIMULINK de modelare al ecuației presiunii | 249 |
| 180. | Fig. A.5.11. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_1 | 249 |
| 181. | Fig. A.5.12. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_2 | 250 |
| 182. | Fig. A.5.13. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_3 | 250 |
| 183. | Fig. A.5.14. Eroarea de modelare a schemei SIMULINK cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială | 251 |
| 184. | Fig. A.5.15. Eroarea de modelare a schemei SIMULINK cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 60$ puncte de discretizare spațială | 251 |
| 185. | Fig. A.5.16. Eroarea de modelare a programului MATLAB cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 60$ puncte de discretizare spațială | 251 |
| 186. | Fig. A.6.1. Schema SIMULINK de modelare a algoritmului de control predictiv bazat pe model a presiunilor de ieșire dintr-un sistem de transport | 252 |
| 187. | Fig. A.6.2. Schema SIMULINK de modelare procesului de curgere realizat la nivelul unui sistem de transport | 253 |
| 188. | Fig. A.6.3. Schema SIMULINK a modelului liniarizat al procesului de curgererealizat la nivelul unui sistem de transport | 254 |
| 189. | Fig. A.6.4. Mască bloc SIMULINK regulator predictiv bazat pe model | 254 |
| 190. | Fig. A.6.5. Schemă SIMULINK pentru calcularea erorii de reglare | 254 |
| 191. | Fig. A.6.6. Secțiunea de apelare funcție inițializare schemă SIMULINK modelare algoritm de control predictiv bazat pe model | 255 |

Listă de tabele

| | | |
|----|---|------------|
| 1. | Tabelul 1.4.1. Valori numerice ale presiunilor și debitelor în regim staționar | 22 |
| 2. | Tabel 4.2.1: Valorile constantelor de timp pentru cazurile de simulare numerică | 129 |
| 3. | Tab. 4.5.1. Valori calculate pentru studiul de caz 1 | 156 |
| 4. | Tab. 4.5.2. Valori calculate pentru studiul de caz 2 | 158 |
| 5. | Tab. 4.5.3. Valori calculate pentru studiul de caz 3 | 161 |

Capitolul 1: Problematika automatizării sistemelor de transport de gaze naturale

1.1. Introducere

În cadrul acestui capitol sunt discutate principalele probleme pe care le pune automatizarea sistemelor de transport de gaze naturale din perspectiva conducerii și monitorizării în timp real.

Astfel, în subcapitolul 1.2 este prezentată, la nivel global, structura unui sistem de transport de gaze naturale. Problematika conducerii unui astfel de proces face obiectul subcapitolului 1.3, iar modul în care aceasta se soluționează prin automatizarea nodurilor tehnologice ale sistemului de transport este arătat în subcapitolul 1.4.

Detalierea automatizării nodurilor sistemului din punctul de vedere al monitorizării instalațiilor tehnologice existente se face în subcapitolul 1.5, prin prezentarea automatizării stațiilor de reglare și măsurare gaze naturale.

Subcapitolul 1.6 este destinat prezentării conceptului de sistem SCADA, care permite implementarea sistemului de automatizare a instalațiilor tehnologice distribuite pe o arie geografică întinsă din componența unui sistem de transport gaze naturale.

Se face observația că cele ce se vor prezenta în cadrul subcapitolelor sus-menționate constituie un rezumat al activității de cercetare aplicativă ([43], [44], [46], [47], [48], [49], [50], [55]) desfășurată de autor în cadrul colectivului „Automatizări pentru Transportul Gazelor Naturale” din cadrul Departamentului Proiectare și Cercetare al „Societății Naționale de Transport Gaze Naturale TRANSGAZ S.A. Mediaș”.

Ultimul subcapitol, respectiv 1.7, este dedicat construirii unui referențial, pornind de la referințe bibliografice considerate relevante privind problematica și obiectul tezei.

1.2. Elemente structurale referitoare la sistemele de transport

Un sistem de transport de gaze (*STG*) naturale este rezultatul interconectării unui set de tronsoane de conducte de transport de lungimi și secțiuni de curgere diferite, în funcție de debitul și presiunea cerute la consumatori de gaze. Nodurile prin care se face interconectarea funcțională a tronsoanelor de conductă ale sistemului sunt numite generic *noduri tehnologice*.

În figura 1.2.1 este prezentată o schemă de principiu a unui astfel de sistem de transport de gaze, notat cu *STG(1)*, ale cărui tronsoane de conductă, de lungimi L_{xy} și diametre D_{xy} , sunt interconectate, prin intermediul nodurilor tehnologice $N1$, $N2$ și $N5$. Cu x , respectiv y s-au notat numerele de ordine ale nodurilor tehnologice amonte și aval de la capetele conductei. La rândul său, sistemul *STG(1)* este

interconectat prin intermediul nodurilor $N0$ și, respectiv, $N4$ cu sistemele de transport învecinate $STG(0)$ și $STG(2)$.

Figura 1.2.1 evidențiază prin intermediul sistemului de transport $STG(1)$ și a sensurilor fluxurilor (debitelor) Q de gaze mai multe tipuri de elemente structurale:

- $N0$ este un *nod tehnologic de intrare* de tip *sursă*, caracterizat prin presiunea $p0$ și debitul de gaz $Q01$ primit din sistemul de transport $STG(0)$, parametri care vor fi denumiți *parametrii sursei* de gaz ai sistemului de transport $STG(1)$.
- $N4$ este *nod tehnologic de ieșire*, caracterizat prin presiunea $p4$ și debitul $Q24$ introdus în sistemul de transport $STG(2)$. Nodul $N4$ constituie un nod de tip *sursă* pentru sistemul $STG(2)$. Ca urmare, pentru cele două sisteme de transport, nodul $N4$ va constitui un nod de interconectare.

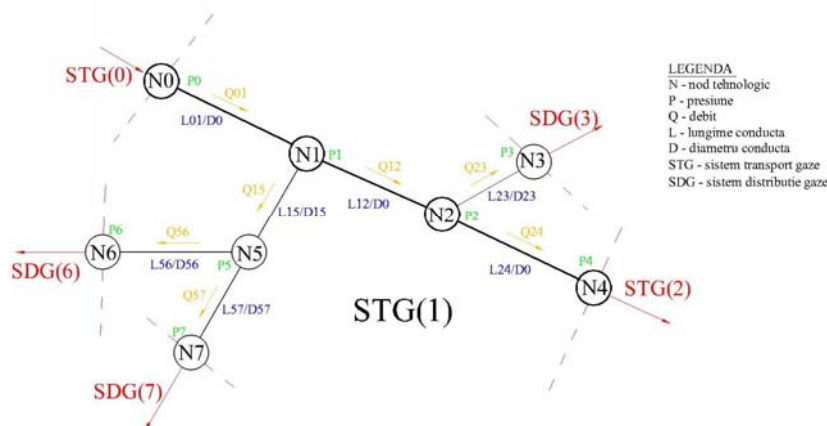


Fig. 1.2.1. Schema de principiu a unui sistem de transport gaze naturale

- $N3$, $N6$, $N7$ sunt *noduri tehnologice de ieșire* de tip *consumator* prin care sunt alimentate la presiunile $p3$, $p6$ și $p7$, respectiv, cu debitul de gaz $Q23$, $Q56$ și $Q57$, sistemele de distribuție gaze $SDG(3)$, $SDG(6)$ și $SDG(7)$.
- $N1$, $N2$ și $N5$ sunt *noduri tehnologice interne* prin care se controlează distribuția internă de presiune p , respectiv, circulația fluxurilor (debitelor) de gaze Q la nivelul sistemului $STG(1)$.

Printr-un nod tehnologic de intrare, de tip *sursă*, sistemul de transport poate fi racordat direct la o sondă de gaze naturale care este o *sursă propriu-zisă* de gaz.

Din punct de vedere tehnologic, nodurile de intrare-ieșire din sistem se prezintă sub forma stațiilor de reglare și măsurare, denumite generic *SRM-uri*, de primire sau de predare, unde se poate face reglarea presiunii și/sau măsurarea debitului de gaze transportat spre consumatori.

Nodurile tehnologice interne din sistem se pot prezenta, la rândul lor, sub forma stațiilor de comandă vane, denumite generic *SCV* și/sau a stațiilor de comprimare gaze, denumite generic *SCG*.

Stațiile de comandă vane *SCV* au, pe de o parte, rolul tehnologic de a realiza interconectările tronsoanelor unui sistem de transport prin intermediul robinetelor din structura lor, și pe de altă parte, rolul funcțional de dirijare a fluxurilor de gaze.

În schimb stațiile de comprimare gaze *SCG* au rolul tehnologic de a crește presiunea la nivelul nodului unde sunt amplasate în scopul asigurării curgerii gazelor pe tronsonul de conductă din aval la debitul cerut de consumatorii racordați la acesta.

1.3. Problematika conducerii unui sistem de transport

Prezentarea problemei conducerii unui sistem de transport de gaze naturale nu se poate face fără o înțelegere prealabilă a principalelor activități desfășurate de către administratorul unui astfel de sistem pentru funcționarea în condiții de siguranță și de eficiență economică ridicată a sistemului.

După cum se știe, regimul de funcționare al unui sistem tehnic constituie totalitatea mărimilor care caracterizează funcționarea acestuia la un moment dat.

Asimilând, ca sintagmă, sistemul de transport de gaze cu un sistem tehnic, *activitatea de operare* a unui sistem de transport de gaze naturale reprezintă totalitatea acțiunilor exercitate în sistem (închideri / deschideri de robinete sau stații de comprimare, etc.) pentru menținerea sau atingerea unui regim de funcționare impus de funcționarea în condițiile enumerate mai sus.

În schimb *activitatea de exploatare* a unui sistem de transport de gaze naturale va reprezenta totalitatea acțiunilor realizate în sistem (verificări / reparații periodice de robinete sau de stații de comprimare, etc.) pentru menținerea funcționării elementelor componente ale sistemului, în scopul asigurării operării acestuia.

Operarea și exploatarea unui astfel de sistem va presupune integrarea celor două activități în cadrul unui sistem de conducere (control și monitorizare) automată care va trebui să implementeze funcțiile necesare desfășurării acestor activități.

Astfel, în primul rând, un sistem de transport de gaze naturale, trebuie să asigure furnizarea spre consumatorii conectați în nodurile de ieșire, a debitului cerut la o valoare minim admisibilă a presiunii. Valoarea presiunii de ieșire a gazului din nodurile consumator pentru un anumit domeniu de variație al debitului de gaze este menținută prin reglarea presiunii la nivelul nodurilor sursă ale sistemului de transport sau prin reglarea presiunii la nivelul nodurilor tehnologice considerate ca interfețe între conductele magistrale și conductele de alimentare ale sistemelor de distribuție gaze.

În acest context apare cea mai importantă problemă care trebuie rezolvată prin activitatea de operare a sistemului de transport și anume *echilibrarea fizică* a acestuia [1], adică la stabilirea și menținerea unui echilibru între debitele de gaze care intră, respectiv, cele care ies din sistemul de transport.

Din punct de vedere funcțional echilibrarea fizică este rezultatul unui ansamblu de acțiuni predictive destinat gestionării debitelor de gaze transportate prin sistem având drept obiectiv menținerea parametrilor sistemului de transport la valorile impuse de funcționarea în condiții de siguranță a consumatorilor. În felul acesta sunt eliminate efectele principalului factor perturbator al regimului nominal de exploatare, și anume perturbația de debit cauzată de cererea variabilă de debit din sistem de către consumatorii de gaze racordați în nodurile de ieșire ale acestuia.

Efectele perturbațiilor de debit, în lipsa luării oricăror acțiuni compensatorii, au drept rezultat scăderea presiunilor de alimentare ale consumatorilor sub valorile impuse de funcționarea în condiții de siguranță ale acestora. Aceste efecte sunt cu atât mai vizibile cu cât sursele de alimentare ale sistemului sunt mai îndepărtate de consumatori. Manevrarea surselor, în vederea anulării efectelor perturbațiilor de debit va trebui să se efectueze ținând seama de amplitudinile, respectiv de momentele de timp ale apariției acestor perturbații.

Pentru sistemul de transport cu schema de principiu din figura 1.2.1, vom avea de a face cu o problemă de reglare automată, de stabilizare a presiunilor de

intrare p_3 , p_6 și, respectiv, p_7 în sistemele de distribuție $SDG(3)$, $SDG(6)$ și, respectiv, $SDG(7)$, în condițiile variației debitelor de gaze cerute din sistemul de transport de acestea. Perturbațiile de debit vor trebui interpretate ca perturbații de sarcină ale regimului nominal de exploatare al sistemului de transport.

Existența constanțelor de timp relativ mari ale procesului de curgere desfășurat la nivelul sistemului de transport și cerința alimentării consumatorilor de gaze la valori ale presiunii peste o valoare minimă de siguranță (fără a încălca nejustificat sistemul) impune un caracter predictiv al algoritmului de reglare automată, în sensul luării în considerare, în proiectarea acestuia, a timpilor de propagare a acțiunilor compensatoare în sistem.

Totodată, regimul nominal de funcționare a sistemelor de transport gaze mai este afectat și de o serie de alți factori perturbatori, printre care: obturarea conductelor de transport și pierderile de gaze. Pe de-o parte, ei impun luarea în considerare a unor noi funcții, de identificare, specifice activității de exploatare, pentru determinarea gradului de obturare și localizarea defectelor tehnologice (fisuri sau rupturi de conductă), iar pe de altă parte, susțin necesitatea utilizării unor structuri de reglare complexe.

O altă funcție de conducere, cu caracter economic, apare la nivelul ierarhic superior al întregului sistem de transport: operarea și exploatarea sistemului de transport cu costuri financiare minime.

Pentru a răspunde acestor cerințe sistemul de conducere trebuie să fie un sistem de conducere distribuit, format din bucle de automatizare locale, amplasate în nodurile tehnologice și un nucleu de control și monitorizare globală (dispecer) care va coordona funcționarea tuturor acestor sisteme locale de automatizare în baza unui algoritm care va ține seama de principalii factori perturbatori ai regimului normal de funcționare. Implementarea acestui algoritm de reglare automată va trebui să se facă ținând seama de optimizarea unor criterii impuse de funcționarea în condiții de siguranță, cu eficiență economică maximă, a sistemului de transport de gaze naturale.

Calitatea procesului de conducere va fi asigurată prin monitorizarea bunei funcționării a procesului condus, ceea ce impune existența la nivelul local, a unor posibilități de achiziție de semnale referitoare la starea de funcționare a elementelor de execuție ale buclelor de automatizare ale nodurilor tehnologice, iar la nivelul central implementarea, de exemplu, a unor estimatori privind parametrii tronsoanelor de conductă sau a unor sisteme de detecție a pierderilor de gaze, pe baza datelor măsurate.

Cele prezentate anterior vor fi particularizate prin intermediul structurii de sistem de transport de gaze naturale din figura 1.3.1, sistem în care fluxul de gaze se propagă de la sursa localizată în nodul NO al sistemului, prin intermediul conductelor de transport de gaze, de lungimi L și diametre D , interconectate prin nodurile tehnologice $N1..N3$, către consumatorii deserviți de stațiile de reglare măsurare $SRM01$, ..., $SRM04$ amplasate în nodurile de ieșire din sistemul de transport.

Exercitarea controlului sistemului de transport, cerut de funcționarea în condiții de siguranță a consumatorilor de gaze, impune menținerea presiunilor la intrarea în stațiile de reglare și măsurare $SRM01...SRM04$ peste o valoare minimă p_{min} care să asigure debitele $Q101$, $Q202$, $Q303$ și $Q304$ de gaz necesare la consumatorilor alimentați prin aceste stații, la presiunile reglate $p01_r$, $p02_r$, $p03_r$ și $p04_r$. În funcție de presiunea minimă, p_{min} , care trebuie menținută la intrarea în stația de reglare-măsurare și de debitele de gaz $Q01,...,Q04$ cerute de consumatorii

deserviți de aceste stații, rezultă valorile minim necesare ale presiunilor, $p_{1min}, \dots, p_{4min}$ la ieșirile din nodurile tehnologice $N1, \dots, N3$.

Dacă aceste noduri tehnologice nu sunt prevăzute cu sisteme de reglare a presiunilor, distribuția reală a presiunilor de ieșire din aceste noduri va avea valorile: $p_{1min} = p1$, $p_{2min} = p2$, $p_{3min} = p_{4min} = p3$, valori care vor fi mai mari decât cele ale distribuției minime de presiuni necesare furnizării în condiții de siguranță a debitelor la consumatori.

Prin $p0$ s-a notat presiunea sursei din nodul $N0$ care asigură distribuția de presiuni $p1, \dots, p3$ necesară transportării debitului de gaze spre consumatorii racordați la sistem.

În condițiile apariției unei perturbații de debit într-un anumit punct (consumator) al sistemului, în sensul creșterii debitului de gaze, este evident că apare o modificare a distribuției presiunilor din sistem, în sensul scăderii acestora. În consecință, se produce un proces de dezechilibrare a întregului sistem de transport ca urmare a scăderii sub valorile p_{min} a presiunilor la intrarea în stațiile de reglare și măsurare care deservește consumatorii. Pentru reechilibrarea sistemului trebuie crescută valoarea $p0$ a presiunii sursei din nodul $N0$.

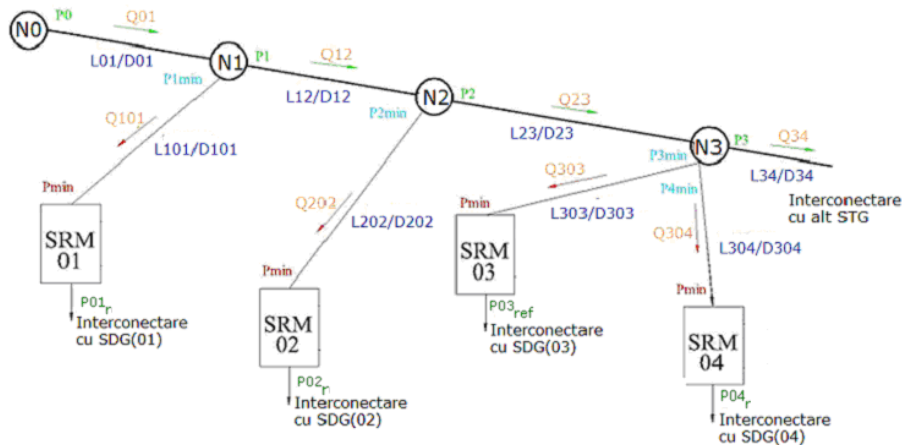


Fig. 1.3.1. Structură de sistem de sistem de transport

Întrucât sistemul de transport gaze are o structură distribuită, orice modificare a unor parametri ai sistemului (presiune, debit) într-un punct se propagă în diverse direcții în sistem. Viteza de propagare este finită.

Pentru caracterizarea acestor procese dinamice este necesară determinarea timpilor de stabilizare ai regimurilor dinamice ale procesului de curgere realizat prin conductele de transport gaze, timpi care vor sta la baza calculării momentelor de timp de luare a deciziilor de modificare a presiunii $p0$ a sursei, în corelație cu estimarea amplitudinii și a anticipării momentelor de timp de apariție a perturbației de debit, astfel încât sistemul să fie pregătit să preia perturbația, fără ca presiunile din sistem să scadă sub valorile minime de funcționare în siguranță ale consumatorilor.

În contextul dezvoltării unui algoritm de control predictiv al sistemului de transport de gaze naturale apar astfel, ca necesare, pe lângă un *model matematic al procesului de curgere* realizat la nivelul sistemului de transport, care să permită calcularea mărimilor de regim staționar și dinamic necesare implementării

algoritmului de control, și a unui model *pentru estimarea amplitudinii și a momentului apariției perturbației de debit*.

Caracteristicile perturbațiilor de debit care pot dezechilibra fizic un sistem de transport sunt generate de diferitele tipuri de consumatori de gaze racordați la sistem. În principal se deosebesc două tipuri de consumatori și anume: consumatorii casnici și consumatorii industriali.

În cazul consumatorilor industriali profilul de debit (curba de evoluție în timp a debitului consumat), cu excepția situațiilor de avarie, este cunoscut și reglementat prin contractele încheiate cu operatorul sistemului de gaze naturale. Orice modificare importantă a valorii debitului cerut de către consumatorul industrial se face cu înștiințarea în timp util a operatorului sistemului de transport, acest lucru fiind stipulat în contractul de furnizare de gaze încheiat între cele două părți.

În schimb profilul de debit al consumatorilor casnici nu poate fi reglementat în acest fel. Din analiza istoricelor înregistrărilor debitelor consumate sunt cunoscute cu certitudine numai valorile minime și maxime ale acestor debite. Și aceste valori depind de dinamica (aparitia sau disparitia) numărului de consumatori racordați la sistem. În lipsa oricăror informații suplimentare, operarea în condiții de siguranță a sistemului de transport se poate face la valoarea maximă a presiunilor surselor de gaz, în felul acesta asigurându-se, la orice moment de timp, valorile maxime ale debitelor cerute de consumatori la presiunea minimă de siguranță fără a efectua nici un fel de manevre în sistem. Această metodă de operare este, însă, ineficientă din punct de vedere al costurilor energetice necesare menținerii încărcării sistemului la aceste valori ale presiunilor surselor.

Pentru a da operatorului sistemului timpul necesar efectuării manevrelor trebuie făcută o estimare a profilului de debit pe un interval viitor de timp. Întrucât variația debitului consumatorilor casnici este puternic dependentă de variația temperaturii mediului ambiant, o astfel de estimare se realizează corelând istoricele înregistrărilor privind debitele consumate și temperaturile mediului ambiant, (reprezentate la nivelul fiecărei zone rezidențiale sub forma curbelor de sarcină debit mediu consumat - temperatură mediu ambiant) cu prognoza meteorologică pe termen scurt privind evoluția viitoare a acestor temperaturi. Rezultă astfel estimări privind profilul de debit pe intervale viitoare de timp (la nivelul unei zile sau săptămâni). Acest profil va fi menținut prin păstrarea unor valori corespunzătoare ale presiunilor în sistem.

În felul acesta sunt anticipate și momentele de timp la care urmează să se producă o modificare (perturbare) importantă în profilul de debit ca urmare a unei variații puternice (scădere) a temperaturii mediului ambiant, modificare care poate conduce, în lipsa luării unor măsuri compensatorii, la dezechilibrarea fizică a sistemului de transport.

1.4. Aspecte privind automatizarea nodurilor tehnologice ale sistemului de transport

Pentru prezentarea modului de automatizare al nodurilor tehnologice ale unui sistem de transport de gaze naturale se consideră tronsonul de conductă de lungime L și diametru D , din figura 1.4.1, delimitat de nodul de intrare $N1$ și nodul de ieșire $N2$.

Ca urmare a cererii variabile de debit gaz cauzată de consumatorul racordat în nodul de ieșire $N2$, care se interpretează ca o acțiune perturbatoare asupra valorii

presiunii gazului la consumator care reprezintă presiunea de ieșire din tronson $p_2(t)$, se pune problema controlării și menținerii acestei valori la nivelul unei valori de referință care asigură funcționarea în siguranță a consumatorului racordat, prin modificarea valorii presiunii de intrare $p_1(t)$, ca mărime de comandă.

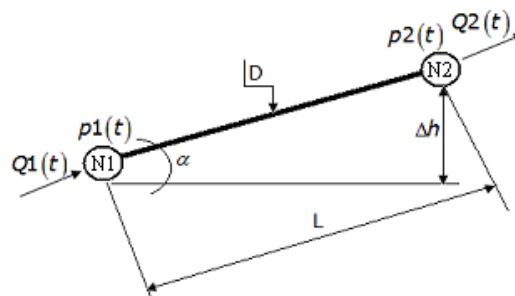


Fig. 1.4.1. Tronson de conductă

Automatizarea va trebui să rezolve problema implementării unui model de conducere în timp real, de tip predictiv, în condițiile anticipării unei perturbații de debit în nodul consumator N_2 .

Cea mai simplă cale de estimare a cererii variabile de debit de gaz, respectiv, momentul de timp la care urmează să se producă modificări substanțiale ale valorii debitului de gaz cerut de consumator se poate face pe baza prognozei meteorologice pe termen scurt a temperaturii mediului ambiant, respectiv, a curbelor de evoluție a debitului mediu de gaze consumat funcție de temperatura mediului ambiant pentru consumatorul de gaze racordat în nodul de ieșire N_2 .

O astfel de curbă de evoluție a debitului de gaze naturale funcție de temperatura mediului ambiant, obținută pe baza unor consemnări realizate pe durata unui an, este prezentată în figura 1.4.2.

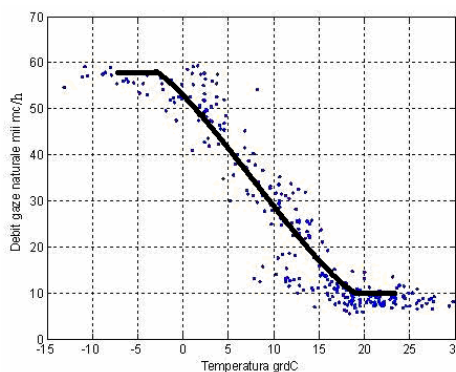


Fig. 1.4.2. Curbă de evoluție debit gaz funcție de temperatura mediului ambiant

Considerăm că această caracteristică este valabilă pentru nodul de ieșire N_2 pe intervalul de temperaturi de la $+10^{\circ}\text{C}$ la -8°C . Evoluția temperaturii mediului ambiant va fi estimată pe baza prognozei meteorologice pe termen scurt. În ipoteza scăderii temperaturii mediului ambiant de la $+10^{\circ}\text{C}$ la -8°C , debitul de gaz cerut de

consumatorul racordat în nodul de ieșire N_2 crește de la valoarea $30.000\text{Nm}^3/h$ la valoarea $60.000\text{Nm}^3/h$.

Pentru exemplificare se consideră tronsonul din figura 1.4.1, de lungime $L = 150\text{km}$, diametru interior $D = 0,6\text{m}$, rugozitate interioară de $0,2\text{mm}$ și elevație $\Delta h = 0$. În figura 1.4.3, sunt prezentate distribuțiile staționare de presiune, în condițiile în care p_1 și Q_2 iau valorile din tabelul 1.4.1.

Tabelul 1.4.1. Valori numerice ale presiunilor și debitelor în regim staționar

| Distribuție presiune | p_1 (bar) | p_2 (bar) | Q_2 (Nm^3/h) |
|----------------------|-------------|-------------|----------------------------------|
| (1) | 7,6 | 0 | 60.000 |
| (2) | 7,6 | 6 | 30.000 |
| (3) | 11,2 | 6 | 60.000 |
| (4) | 11,2 | 10,3 | 30.000 |

Curbele au fost calculate numeric pe baza presiunilor și debitelor în regim de curgere staționară și izotermă la $T_M = 7^0\text{C}$.

Curba (2) din figura 1.4.3 reprezintă distribuția staționară de presiune pe tronsonul de conductă la transportul pe conducta de gaz a unui debit volumic staționar de $Q_{1(2)} = Q_{2(2)} = 30.000\text{Nm}^3/h$ atunci când în nodul de ieșire N_2 presiunea este de $p_{2(2)} = 6\text{bar}$. După cum se constată, în această situație, presiunea necesară la sursa din nodul N_1 este $p_{1(2)} = 7,6\text{bar}$.

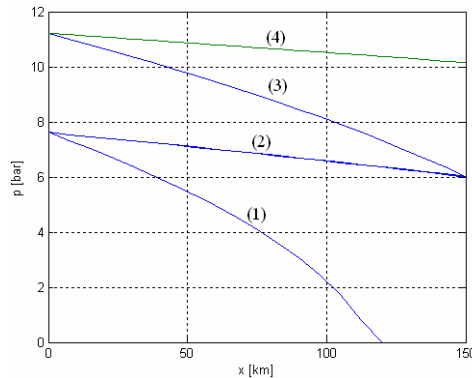


Fig. 1.4.3. Distribuții staționare de presiune

Curba (1), din figura 1.4.3, reprezintă distribuția staționară de presiune în situația în care în N_1 avem tot $p_{1(1)} = 7,6\text{bar}$ dar debitului de gaz la consumatorul racordat în nodul N_2 a crescut de la $Q_{1(2)} = Q_{2(2)} = 30.000\text{Nm}^3/h$ la $Q_{1(1)} = Q_{2(1)} = 60.000\text{Nm}^3/h$, ca urmare a scăderii temperaturii mediului ambiant de la $+10^0\text{C}$ la -8^0C (vezi fig. 1.4.2). După cum se constată, funcționarea tronsonului pe conductă de transport pe distribuția de presiune (1) este compromisă, consumatorul din nodul N_2 ne mai fiind alimentat datorită descărcării

tronsonului de conductă în partea terminală. Se observă că presiunea minimă de 6bar necesară consumatorului este realizată doar până la distanța de 40km de sursă, la distanța de 120km presiunea din conductă fiind 0bar .

Curba (3) din figura 1.4.3 reprezintă distribuția staționară de presiune în ipoteza unui debit prin nodul $N2$ de $Q1_{(3)} = Q2_{(3)} = 60.000\text{Nm}^3/h$ și la o presiune la consumatorul racordat în nodul $N2$ de $p2_{(3)} = 6\text{bar}$. Această distribuție indică că, pentru acest punct de funcționare, presiunea necesară la sursă este de $p1_{(3)} = 11,2\text{bar}$.

În fine, curba (4) sugerează ce se întâmplă, tot în regim staționar, atunci când, la aceeași presiune la sursă, debitul scade la $Q1_{(4)} = Q2_{(4)} = 30.000\text{Nm}^3/h$ datorită încălzirii mediului ambiant de la -8°C la $+10^{\circ}\text{C}$. La consumator presiunea se stabilizează la valoarea de $p1_{(4)} = 10,3\text{bar}$.

În figura 1.4.4 se prezintă modul în care se modifică în timp presiunea $p2(t)$ în ipoteza că inițial sistemul funcționează pe curba (2), iar presiunea $p1(t)$ se modifică de $p1_{(2)} = 7,6\text{bar}$ la $p1_{(3)} = 11,2\text{bar}$, variație în treaptă necesară preluării unei perturbații de debit de la $30.000\text{Nm}^3/h$ la $60.000\text{Nm}^3/h$ care urmează să se producă și care e evaluată prin corelarea curbei de sarcină 1.4.2 cu prognoza meteorologice pe termen scurt.

Curba de evoluție în timp a presiunii de ieșire $p2(t)$ din figura 1.4.4 poate fi asociată unui proces dinamic de tranziție [16] de pe caracteristica staționară (2) pe caracteristica staționară (4), proces dinamic cauzat de creșterea de tip treaptă a presiunii de intrare $p1(t)$ de la valoarea de $p1_{(2)} = 7,6\text{bar}$ la valoarea de $p1_{(3)} = 11,2\text{bar}$. Noua valoare de regim staționar a presiunii de ieșire $p2_{(3)}$ va fi atinsă după un timp de stabilizare propriu-zisă a procesului dinamic de aproximativ 8ore , după cum rezultă din curba de evoluție dinamică în timp a presiunii $p2(t)$ și care e reprezentată grafic în figura 1.4.4.

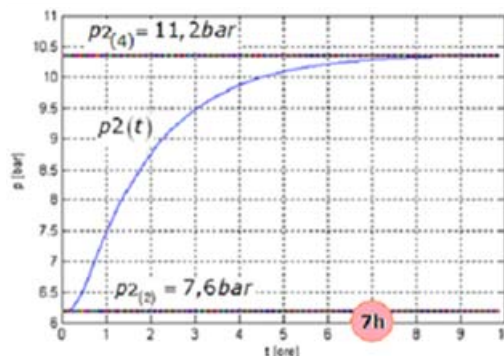


Fig. 1.4.4. Evoluția în timp a presiunii de ieșire $p2$

Existența acestor timpi de stabilizare și necesitatea păstrării valorii presiunii de ieșire $p2(t)$ din tronsonul de conductă peste o valoare de referință impusă de

alimentarea în condiții de siguranță a consumatorului racordat conduce la caracterul predictiv al oricărui algoritm de control al presiunii de ieșire $p_2(t)$, control care se realizează prin manipularea presiunii de intrare $p_1(t)$ în sensul compensării perturbației de debit $Q_2(t)$ la consumator.

Aspectele descrise privind conducerea predictivă a procesului de transport gaze de la o singură sursă la un singur consumator conectat prin tronsonului de conductă de transport conform figurii 1.4.1 pot fi implementate, riguros din punct de vedere sistemic, pe baza unei infrastructuri informaționale și de comandă care presupune achiziția, teletransmiterea, prelucrarea centralizată a datelor și emiterea comenzilor pentru manevrarea elementelor de execuție specifice proceselor tehnologice din cadrul sistemului de transport.

Pentru studiul de caz prezentat, schema tehnologică de implementare a modelului de conducere predictivă este redată în figura 1.4.5.

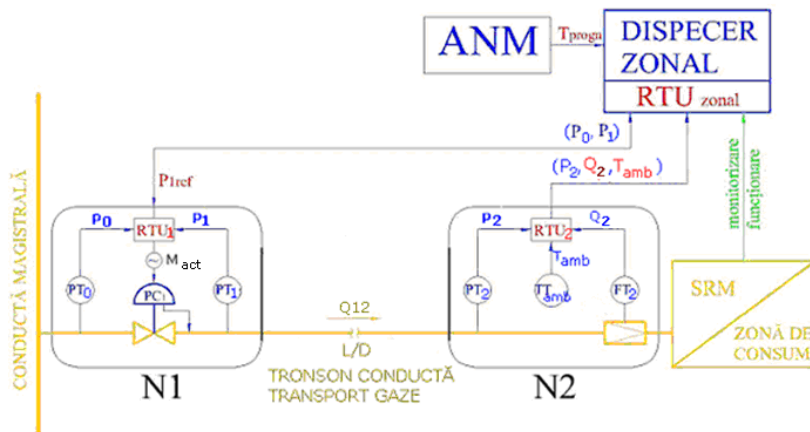


Fig. 1.4.5. Schema tehnologică de implementare a modelului de conducere predictivă

Avem de a face cu o schemă de conducere ierarhizată, cu sistem de automatizare, localizate la nivelul fiecărui nod tehnologic, realizate în jurul unei unități telecomandate de control denumite RTU. Coordonarea acestor unități este asigurată de către un nucleu de control amplasat la nivelul dispecerului zonal (central) al sistemului de transport.

Fiecare unitate telecomandată de control RTU implementează bucle locale de automatizare specifice elementelor de execuție și instrumentației de măsurare din nodul respectiv, coordonarea fiecărei unități RTU fiind asigurată de către dispecerul zonal prin stabilirea unor valori de referință pentru parametrii controlați sau monitorizați local.

La nivelul nodului de ieșire N_2 , unitatea de control RTU_2 achiziționează și transmite spre dispecerul zonal următoarele mărimi: debitul de gaz Q_2 cerut de consumator, măsurat prin traductorul de debit FT_2 , presiunea p_2 la care este furnizat consumatorului debitul de gaz Q_2 , măsurată prin traductorul de temperatură TT_{amb} , respectiv, temperatura mediului ambiant T_{amb} , măsurată prin traductorul de temperatură TT_{amb} .

La nivelul dispecerului zonal, pe baza istoricului înregistrărilor $\{Q_2, T_{amb}\}$ sunt trasate curbele de sarcină $Q_{stat}(T_{amb})$ ale consumatorului racordat în nodul

$N2$ care permit, pe baza prognozei meteorologice pe termen scurt asupra temperaturii probabile T_{progn} , obținută de la Agenția Națională Meteorologică ANM, estimarea valorii debitului de gaze $Q2(T_{progn})$ necesar consumatorului racordat prin nodul de ieșire $N2$ pe durata de timp asociată prognozei meteorologice.

Pentru algoritmul de control implementat la nivelul unității de control zonale RTU $Q2$ cerut de consumator, respectiv, variația acestuia $\Delta Q2$, sunt interpretate ca și o *perturbație de sarcină* al cărei mod dominant de variație este strâns legat [49] de variația temperaturii mediului ambiant T_{amb} din zona de consum. Variația debitului cerut de consumator $\Delta Q2$ va putea fi compensată prin variația distribuției de presiune $p1 \rightarrow p2$, (implicit prin controlul presiunii $p1$ la nivelul nodului de intrare $N1$) cu restricția menținerii presiunii consumatorului $p2$ peste valoarea minimă de funcționare în condiții de siguranță a consumatorului.

Astfel la nivelul nodului de intrare $N1$ valoarea presiunii $p1$ de intrare în tronson, măsurată cu traductorul de presiune PT_1 , va fi controlată prin intermediul unui regulator pneumatic de presiune PC , prevăzut cu servomotorul M_{act} , cu referința de presiune programabilă $p1_{ref}$. Valoarea presiunii în amonte de regulator este monitorizată prin traductorul de presiune PT_0 . Practic, reglarea presiunii $p1$ la valoarea de referință $p1_{ref}$, este realizată pneumatic, în mod continuu, de către regulatorul de presiune PC . Unitatea locală de control RTU_1 va fi responsabilă cu transmiterea, prin intermediul servomotorului de acționare M_{act} a valorii de referință $p1_{ref}$ pentru presiunea reglată $p1$, respectiv monitorizarea stării de funcționare a regulatorului.

Din această prezentare rezultă necesitatea implementării unor sisteme de automatizare locale nodurilor tehnologice care permit folosirea unor algoritmi de control specifici proceselor tehnologice din acele noduri. La nivelul dispecerului zonal valorile parametrilor proceselor tehnologice locale sunt folosite pentru generarea, conform modelului de control predictiv prezentat, a semnalelor de referință necesare coordonării funcționării sistemelor de automatizare locală în sensul realizării algoritmului global de conducere predictivă. Totodată se asigură și monitorizarea stării de funcționare a acestor sisteme de automatizare în sensul respectării cerințelor de siguranță în funcționare și operare cu eficiență economică ridicată.

Schema tehnologică din figura 1.4.5 este orientativă pentru problema de control descrisă. Ea poate fi completată astfel încât să reflecte și alte cerințe auxiliare de control și monitorizare a stării de funcționare. În principiu schema poate soluționa probleme specifice de operare legate de optimizarea regimului de presiune în nodurile tehnologice ale unui sistem de transport de gaze naturale în sensul:

- a) Încărcării optime în presiune a conductelor sistemului, în funcție de cerințele reale ale consumatorilor și de exigențele reducerii pierderilor de presiune;
- b) Dirijării eficiente a fluxurilor de gaze prin sistem între surse și consumatori, pentru realizarea echilibrării fizice a sistemului.

1.5. Aspecte privind automatizarea stațiilor de reglare și măsurare gaze naturale

Stațiile de reglare și măsurare gaze naturale, denumite generic SRM-uri, reprezintă ansamblul instalațiilor tehnologice de reglare și măsurare cu echipamentele anexe, folosite pentru alimentarea în condiții de siguranță a consumatorilor

de gaze. Într-o figură anterioară, 1.4.5, o astfel de stație a fost figurată separat, racordată la ieșirea din nodul tehnologic *N2* din motive care au ținut de prezentare, însă amplasamentele reale pot să comaseze un nod tehnologic de ieșire din sistem și o stație de reglare și măsurare gaze. De asemenea pot exista noduri de ieșire din sistem la care sunt racordate mai multe stații de reglare și măsurare gaze naturale, având instalațiile tehnologice bine delimitate de instalațiile tehnologice ale nodului.

În acest context, în general, apare, din punct de vedere practic, problema interpretării și ierarhizării structurii sistemului din punct de vedere al importanței funcțiilor acestuia (conducere globală, control local, monitorizare funcționare).

Schema de stație de reglare și măsurare din figura 1.5.1 este relevantă din punct de vedere al problemelor auxiliare de control local și monitorizare funcționare echipamente de automatizare existente la nivelul nodurilor tehnologice. Ea este o schemă funcțională de principiu a unei stații de reglare-măsurare gaze naturale automatizată, care evidențiază următoarele părți principale: instalația de filtrare-separare gaze, instalația de reglare-protecție presiune gaze, instalația de încălzire gaze, panoul de măsurare debit volumic gaze, instalația de odorizare automată gaze, centrala termică.

Instalația de filtrare-separare este prevăzută, pe partea de intrare cu termometru indicator *TI-01* și manometrul indicator *PI-01*, precum și cu traductoarele de temperatură *TT-01* și de presiune *PT-01*, conectate la *RTU*. Instalația de filtrare-separare propriu-zisă este formată din două linii delimitate de robinetele de izolare *R1*, *R2*, respectiv *R3*, *R4*, pe care sunt montate separatoarele de impurități lichide *SPG1* și *SPG2* și filtrele *Fg1*, respectiv *Fg2*. Fiecare separator are un colector de impurități lichide prevăzut cu câte un dispozitiv mecanic, *LCH-01* și *LCH-02*, de evacuare automată la atingerea unui nivel maxim, reglat, în rezervorul de impurități lichide. Eventuala funcționare necorespunzătoare a sistemului de evacuare lichide este semnalizată unității locale de control *RTU*, prin intermediul releelor electrice de nivel maxim-minim *LIALH-01*, *LIALH-02*. Totodată limitele minim-maxim al impurităților lichide din rezervorul de colectare este monitorizat de către *RTU* prin intermediul releului electric de nivel maxim-minim *LIAH-03*. În situația defectării accidentale a dispozitivelor de evacuare *LCH-01* sau *LCH-02*, ca măsură de protecție, pentru a preîntâmpina evacuarea necontrolată a gazelor spre rezervorul de impurități lichide, s-au introdus dispozitivele de protecție la atingerea nivelului minim admis în colectorul de impurități, *LSL-01*, respectiv *LSL-02*, acționate la atingerea aceluși nivel (sub nivelul minim atins prin funcționarea dispozitivelor mecanice de evacuare).

Se menționează faptul, că majoritatea dispozitivelor de evacuare a impurităților lichide utilizate curent în instalațiile de separare, nu au în componență dispozitivele de protecție la nivel minim care să asigure protecția instalației în cazul defectării regulatorului de nivel. Se impune, în consecință introducerea unor dispozitive adecvate sau inițierea unei cercetări pentru modernizarea dispozitivelor de evacuare automată a lichidelor.

Pentru sesizarea îmbăcsirii filtrului care conduce la creșterea căderii de presiune pe filtru-separator, sunt prevăzute manometrele diferențiale indicatoare cu contacte *PDIAH-01*, respectiv *PDIAH-02* conectate electric la *RTU*.

Totodată în aceste prezentări pot apărea și traductoare care nu pot fi conectate la un sistem de achiziție date, având o construcție pur mecanică. În realizarea instalațiilor tehnologice din industria gazelor până în ultimii ani concepția și proiectarea lor se făcea pe principiu folosirii exclusive a energiei gazului, astfel încât funcționarea lor să fie cât mai puțin dependentă de lipsa alimentării cu energie electrică.

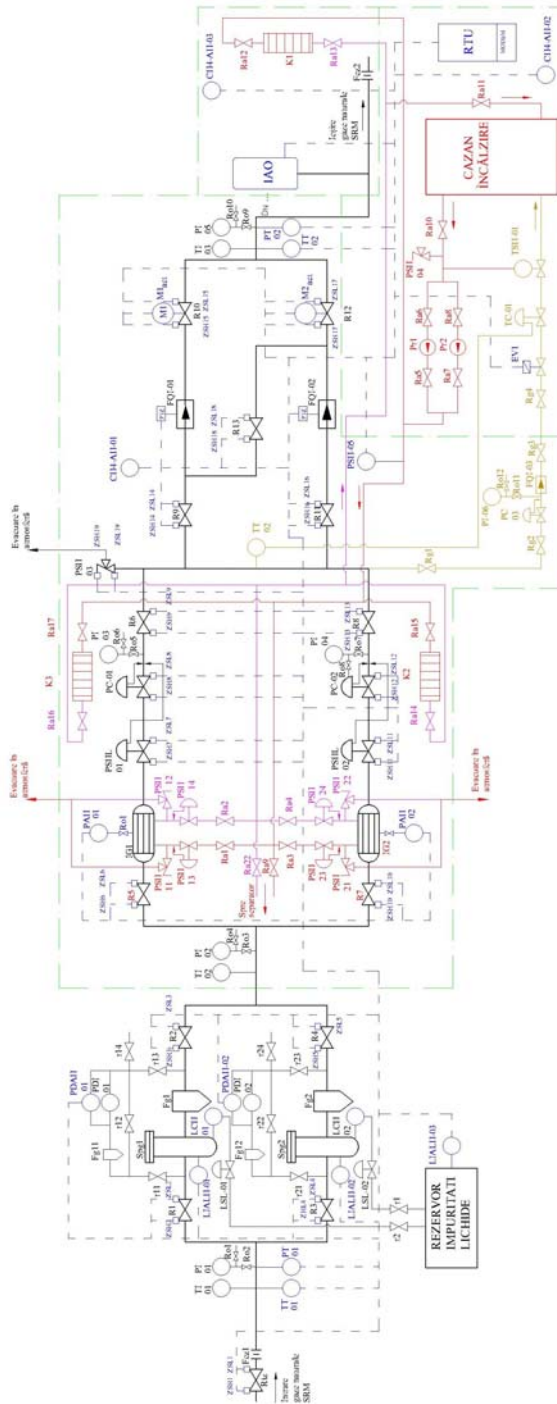


Fig. 1.5.1. Schemă de stație de reglare și măsurare gaze naturale

Practic, în lipsa energiei electrice funcționarea stațiilor lor este monitorizată prin protecții mecanice. Dacă o astfel de stație se oprește din funcționare, stopând alimentarea cu gaze a unui consumator/rețea de distribuție, chiar dacă avaria este remediată destul de repede, stația nu va fi repusă în funcțiune decât după ce a fost anunțat consumatorul sau toți consumatorii din rețeaua de distribuție (ca să-și închidă orice aparat pe gaz înainte de a da din nou drumul la gaz).

Căderea maximă de presiune admisă pe separatoare este de 0,3 bar, iar pe filtre este de 0,5 bar, astfel încât la depășirea valorii presiunii diferențiale de 0,8 bar măsurate pe ansamblul unui grup de separare-filtrare, releul de presiune diferențială corespunzător aceluși grup va genera un semnal de avertizare sistemului de automatizare.

Prin intermediul robinetelor *ri11*, *ri14*, respectiv a robinetelor *ri21*, *r24* se pot efectua manevrele de punere în funcțiune, respectiv scoatere din funcțiune în vederea depanării sau înlocuirii manometrelor diferențiale *PDIAH-01*, *PDIAH-02*.

Instalația de reglare-protecție presiune gaze naturale, prevăzută pe partea de intrare cu termometrul indicator *TI-02* și manometrul indicator *PI-02*, este formată din două linii, cu reglarea presiunii într-o singură treaptă de presiune, delimitate de robinetele de izolare *R5*, *R6*, respectiv *R7*, *R8*, pe care sunt montate dispozitivele de siguranță la sub și suprapresiune *PSHL-01*, *PSHL-02*, prevăzute cu senzorii de poziție închis-deschis *ZSL7*, *ZSL11*, respectiv *ZSH7*, *ZSH11*, regulatoarele de presiune *PC-01*, *PC-02* prevăzute cu senzorii de poziție închis-deschis *ZSL8*, *ZSL12*, respectiv *ZSH8*, *ZSH12*, conectați electric la *RTU*.

Pe colectorul de ieșire din instalația de reglare-protecție presiune s-a mai montat supapa de siguranță la suprapresiune *PSH-03*, cu evacuare în atmosferă, prevăzută cu senzorii de poziție închis-deschis *ZSL19*, respectiv *ZSH19*, conectați electric la *RTU*. Presiunea de ieșire din fiecare regulator de presiune poate fi vizualizată pe manometrele indicatoare *PI-03*, respectiv *PI-04*, montate pe tronsoanele de ieșire ale regulatoarelor de presiune.

Instalația de încălzire gaze naturale: asigură încălzirea gazelor naturale prin intermediul a două încălzitoare *IG1*, *IG2* montate pe liniile de reglare-protecție presiune gaze, respectiv a incintelor *SRM*-ului prin caloriferele *K1*, *K2*, *K3*, prevăzute cu robinetele de izolare *Ra12* și *Ra13*, *Ra14* și *Ra15*, respectiv *Ra16* și *Ra17*. Încălzirea agentului termic de către instalație este realizată de cazanul de încălzire al centralei termice, prevăzut cu următoarele bucle de automatizare și protecție locală:

- a) Protecție la creșterea temperaturii apei din cazan peste valoarea impusă prin elementul de reglare de tip "tot-nimic" *TSH-01* (bipozițional);
- b) Reglarea temperaturii gazelor la ieșirea din liniile de reglare gaze-naturale, măsurată cu traductorul de temperatură *TT-02* prin regulatorul de temperatură *TC-01* de tipul "tot-puțin-nimic" (tripozițional);
- c) Protecție la depășirea presiunii maxim admise în circuitul apei de încălzire, atât prin supapa de siguranță *PSH-04* cât și prin traductorul de presiune cu contact *PSH-05* conectat electric la *RTU*, care comandă electroventilul de protecție *EV1* montat pe circuitul de alimentare cu gaz al cazanului.

Protecția încălzitoarelor *IG1* și *IG2* se realizează atât pe circuitele de intrare a apei în încălzitoare, prin intermediul dispozitivelor de protecție la presiune maximă *PSH-13*, *PSH-23*, și pe circuitele de ieșire apă din încălzitoare, prin intermediul dispozitivelor de protecție la presiune maximă *PSH-14*, *PSH-24*, cât și prin intermediul dispozitivelor de suprapresiune de tipul supapei de siguranță cu evacuare în atmosferă, respectiv supapele *PSH-11*, *PSH-12*, *PSH-21*, *PSH-22*. Sesizarea creșterii presiunii într-unul din încălzitoarele *IG1* sau *IG2*, datorată unei

avarii a circuitelor de schimb de căldură, se realizează prin intermediul releelor de presiune maximă *PAH-01*, respectiv *PAH-02*, conectate electric la *RTU*.

Pe circuitul de ieșire al cazanului sunt prevăzute pompele de recirculare $P1_{rcr}$, $P2_{rcr}$, montate între robinetele *Ra5*, *Ra6*, respectiv *Ra7*, *Ra8*, coloanele de distribuție apă caldă tur cu robinetele *Ra1*, *Ra3*, și *Ra9*, respectiv coloanele de distribuție retur cu robinetele *Ra2*, *Ra4*, și *Ra11*.

Circuitul de alimentare cu gaze al cazanului este format din robinetele de izolare *Rg1*, *Rg2*, regulatorul de presiune *PC-03*, manometrul indicator *PI-06*, contorul *FQI-02*, robinetele de închidere *Rg3*, *Rg4*, electroventilul de protecție *EV1*, dispozitivul de protecție lipsă gaz *TC-01* și elementul de reglare de tip "tot-nimic" *TSH-01* (element de reglare bipozițională).

Panoul de măsurare debit volumic gaze naturale vehiculat spre consumatori este format din două linii de măsurare a debitului de gaze cu contoarele de gaze naturale *FQI-01*, pentru valorile mari ale debitului de gaze, respectiv *FQI-02*, pentru valorile mici ale debitului de gaze. Montajul acestora se face prin intermediul robinetele de izolare *R9*, *R10*, respectiv *R11*, *R12*. În scopul asigurării transferului automat de pe o linie de măsurare pe cealaltă, robinetele de izolare *R10* și *R12* sunt prevăzute cu servomotoarele $M1_{act}$, $M2_{act}$ acționate electric de *RTU*. Poziția de închis-deschis a acestora este sesizată prin intermediul senzorilor de poziție închis-deschis *ZSL15-ZSH15*, respectiv *ZSL17-ZSH17*. Elementul de execuție de pe linia de măsurare a debitului principal (maxim) care asigură transferul automat de pe o linie de măsurare pe alta, se recomandă să fie ales din categoria robinetelor cu sferă, cu deschiderea în timp suficient de lentă, astfel încât să fie protejat contorul de gaze la șocurile datorate unei deschideri sau închideri prea rapide a robinetului. Totodată acest robinet are caracteristica specială care asigură, în cazul lipsei accidentale a energiei electrice, revenirea în poziția inițială (normal deschis) prin intermediul unui arc de revenire într-un timp de aproximativ 10 secunde. Această durată mică de revenire nu va afecta integritatea funcțională a contorului de pe linia de măsurare debit mare deoarece, în cazul în care acest robinet este funcțional închis, măsurarea debitului de gaz are loc prin intermediul contorului de debit mic. Deschiderea rapidă a robinetului de pe linia de măsurare debit mare nu va produce un șoc de debit pe linia de măsurare de debit mare având în vedere valoarea mică a debitului vehiculat prin stație. S-a introdus acest tip de acționare pentru a răspunde cerințelor privitoare la exploatarea în condiții de maximă siguranță a stației, care impun ca în cazul căderii accidentale a alimentării cu energie electrică linia principală de debit să intre în mod automat în funcțiune chiar dacă pe perioada lipsei energiei electrice măsurarea debitului de gaze naturale pe linia principală se realizează cu eroarea inerentă funcționării în afara domeniului de precizie al contorului de pe linia principală de măsurare (*FQI-01*).

- a) Modul de efectuare al transferului măsurării debitului de pe linia de debit mare pe linia de debit mic: Pentru efectuarea acestui transfer, la sesizarea scăderii debitului măsurat de către *FQI-01* la o valoare minimă se comandă inițial servomotorul $M2_{act}$ pentru deschiderea robinetului *R12*, urmată, după sesizarea deschiderii complete, prin intermediul limitatorului de sfârșit de cursă, de comanda servomotorului $M1_{act}$ pentru închiderea completă a robinetului *R10*. Pentru a nu fi afectată funcționarea contoarelor cu turbină *FQI-01*, *FQI-02* se impune soluția de închidere lentă, respectiv deschidere lentă a robinetelor *R10* și *R12* pe o durată de acționare la 90° de minimum 60 secunde.
- b) Modul de efectuare al transferului măsurării debitului de pe linia de debit mic pe linia de debit mare: Pentru efectuarea acestui transfer, la sesizarea

creșterii debitului măsurat de către *FQI-02* la o valoare maximă se comandă inițial deschiderea robinetului *R10* urmată, după sesizarea deschiderii complete prin intermediul limitatorului de sfârșit de cursă, de închiderea completă a robinetului *R12*.

Fiecare contor de gaz este prevăzut cu calculatorul de debit de tip *PTZ* (corecția în presiune, temperatură, coeficient de neidealitate) care se conectează electric la *RTU* și care permite achiziția debitului de gaze naturale, respectiv a presiunii statice și temperaturii gazelor naturale aval de regulatoarele de presiune. Totodată, pe ieșirea panoului de măsurare sunt montate termometrul indicator *TI-03* și manometrul indicator *PI-06* pentru vizualizarea parametrilor gazului la ieșirea din *SRM*.

Instalația de odorizare automată asigură odorizarea gazelor la ieșirea din *SRM*, prin eșantionarea debitului de gaze naturale (secvențial, la momente de timp generate de trecerea prin contorul de gaze a unui anumit volum de gaz este eliberată în conductă doza corespunzătoare de lichid odorizant, procedeul fiind numit eșantionarea debitului). Menținerea și monitorizarea rației de odorizare la valoarea prescrisă este realizată automat de către *RTU*.

Centrala termică este formată din cazanul de încălzire cu automatizarea locală prezentată anterior. Buna funcționare a acestuia este transmisă *RTU* prin conectarea electrică a dispozitivelor de protecție ale acesteia. Centrala termică este situată în mediu cu atmosferă normală. Circuitul de alimentare cu gaz al centralei termice este format din robinetele de gaz *Rg1*, *Rg2* și *Rg3*, regulatorul de presiune *PC-03*, manometrul indicator *PI-07* și contorul măsurare debit gaz *FQI-02*. Detectarea pierderilor de gaze în incintele *SRM*-ului este realizată de către senzorii detectori de prezență a gazelor naturale *CH4-AH-01*, *CH4-AH-02*, *CH4-AH-03*, conectați electric la *RTU*.

Starea de închis-deschis a robinetelor de pe circuitele principale ale stației se realizează prin intermediul senzorilor de poziție de minim *ZSL*, respectiv *ZSH*, senzori conectați electric la *RTU*.

Automatizarea prezentată pentru stația de reglare și măsurare gaze naturale este la un nivel maximal de înzestrare. Structurile concrete vor depinde de cerințele de monitorizare de la distanță rezultate din analiza fiecărui amplasament de *SRM* în parte.

1.6. Conceptul de sistem SCADA

Din prezentarea făcută în paragrafele anterioare structurii de control și de monitorizare a proceselor tehnologice specifice unui sistem de transport de gaze naturale, rezultă că administrarea unui astfel de sistem de transport este o sarcină destul de greu de realizat din punctul de vedere al furnizării în condiții de siguranță și calitate a debitului cerut de consumatorii racordați la sistem.

La momentul actual de timp acest lucru este realizat prin amplasarea în nodurile sistemului (surse, tehnologice sau consumatori) a instrumentației de măsură și a echipamentelor de execuție, precum și prin existența unor echipe de teren menite să citească parametrii funcționali, să facă măsurători cu aparate de măsură portabile, să comunice valorile citite dispecerelor zonale și să execute manevrele tehnologice cerute de dispecer pentru buna funcționare a sistemului de transport. Comunicarea valorilor citite, precum și transmiterea comenzilor în sistem se face prin telefon sau prin stații de emisie-recepție. Procedeul este destul lent din punct de vedere al timpilor de reacție și necesită personal suplimentar (chiar și

mijloc de transport pentru deplasările mai lungi), dată fiind necesitatea deplasării între diferitele puncte de măsură, respectiv elemente de execuție.

Monitorizarea și controlul de la distanță al aparatelor și echipamentelor unui sistem de transport gaze, de felul celui prezentat în figura 1.3.1, care prezintă instalații tehnologice distribuite pe o arie geografică întinsă, se poate realiza, la nivelul tehnologic actual, prin implementarea unui sistem de tip SCADA, denumirea fiind prescurtarea de la "Supervisory Control And Data Acquisition". Structura unui astfel de sistem informațional, implementată pentru sistemul de transport gaze naturale din figura 1.3.1, este prezentată în figura 1.6.1..

Un sistem SCADA este alcătuit din componente, hardware și software, de natură diferită, interconectate între ele, care funcționează ca un tot unitar.

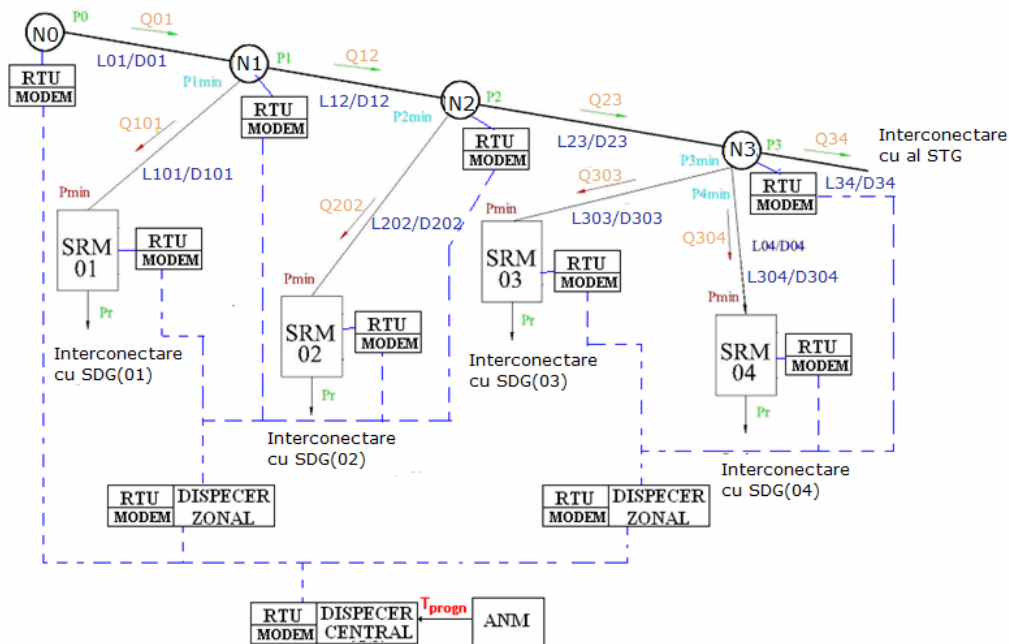


Fig. 1.6.1. Structură de sistem SCADA

Structura sistemului poate fi înțeleasă prin gruparea componentelor sistemului pe niveluri funcționale, și anume:

- a) *Nivelul instrumentației de câmp*: cuprinde totalitatea instrumentației de măsurare și a elementelor de execuție amplasate în diferite noduri ale sistemului de transport gaze naturale.
- b) *Nivelul de automatizare locală*: format din unitățile terminale de teletransmisie RTU care pot avea în componența lor automate programabile PLC necesare implementării algoritmilor locali de control (PLC). La un RTU va fi conectată și instrumentația de câmp prin care se realizează monitorizarea procesului. Tot prin RTU vor fi transmise comenzile spre elementele de execuție ale proceselor tehnologice specifice nodului tehnologic. Astfel vor fi implementate diferite bucle de automatizare și monitorizare a proceselor tehnologice din nodurile sistemului. Aceste unități RTU sunt prevăzute cu module de comunicație la distanță pentru transmisia datelor măsurate și recepționarea comenzilor (semnalele de referință pentru buclele de automatizare locală).

- c) *Nivelul de comunicație*: grupează toate modulele de comunicații care oferă mijloacele fizice necesare asigurării canalelor de comunicație informațională între componentele sistemului SCADA: linii telefonice, comunicații radio, comunicații mobile, comunicații prin satelit, rețele LAN etc. Canalele de comunicație au un rol esențial în realizarea prelucrării distribuite a datelor, întrucât realizează conectarea nodurilor informaționale ale sistemului.
- d) *Nivelul dispecer*: este reprezentat de sistemul central de prelucrare al informațiilor și cuprinde toate componentele hardware și software care asistă operatorul uman în luarea deciziilor privind administrarea sistemului de transport de gaze. Operatorul uman interacționează cu sistemul informațional prin intermediul interfeței grafice HMI („Human Machine Interface”).

Ținând seama de cele prezentate se observă că un sistem de tip SCADA are o structură complexă care pentru a putea fi exploatată corespunzător trebuie să respecte o serie de cerințe de bază.

Dintre acestea cea mai importantă este *deschiderea* sistemului, adică capacitatea de a permite interconectarea unei varietăți de echipamente. Deschiderea trebuie să fie posibilă atât în ceea ce privește hardware-ul (platforme hardware diferite), software-ul (sisteme de operare diferite și cod portabil) și comunicațiile (standarde internaționale), cât și în ceea ce privește administrarea datelor și a aplicațiilor (posibilități de interfațare și suport oferit pentru alte programe). Această cerință este, de regulă, asigurată prin respectarea standardelor tehnice.

O a doua cerință importantă este *adaptabilitatea*, adică capacitatea de configurare a componentelor conform cerințelor concrete, chiar în cazul în care aceste cerințe se modifică pe parcursul duratei de viață a sistemului sau de conectarea unor echipamente sau programe noi la sistemul existent.

Alte cerințe se referă la diferite aspecte de dependabilitate cum sunt: punerea la dispoziția operatorului uman a datelor necesare în timp util, securitatea și siguranța datelor, creșterea disponibilității sistemelor prin redundanță la nivelul componentelor esențiale ale sistemului.

1.7. Problematika și obiectivele tezei

Dezvoltarea puternică a industriei gazifere din ultimii ani, combinată cu creșterea cerințelor de calitate privind furnizarea gazelor naturale la consumatori a făcut ca rețelele de conducte de transport de gaze să evolueze spre structuri complexe de sisteme distribuite pe o arie geografică mare. Aceste structuri cuprind, pe lângă miile de kilometri de conducte de transport și foarte multe echipamente tehnologice de tipul stațiilor de comprimare gaze, robinetelor de închidere, reglatoarelor de presiune, etc. grupate în nodurile sistemului. Întrucât, aceste echipamente pot aparține unor generații tehnologice diferite, ca urmare a continuii extinderii a sistemului va rezulta o complexitate tehnică deosebită a acestuia. La acestea se mai adaugă existența unor consumatori caracterizați prin variații mari ale debitului de gaz cerut din sistemul de transport precum și o serie de limitările tehnologice privind parametrii de lucru ai surselor de gaze. Soluții la problemele specifice de operare care privesc încărcarea optimă în presiune a conductelor de transport sau dirijarea eficientă a fluxurilor de gaze, în aceste condiții de funcționare, vor fi și rezultatul modelării matematice și a simulării numerice a

proceselor specifice sistemului de transport, precum și a folosirii algoritmilor numerici specializați de rezolvare a problemelor de optimizare derivate.

Scopul principal al modelării și simulării [74] constă în a determina comportamentul actual și viitor al sistemului sub influența anumitor condiții de funcționare cum ar fi închiderea unor robinete, pornirea sau oprirea unor stații de comprimare, variația puternică a debitului de gaze într-o anumită zonă de consum, etc. În urma efectuării unor simulări numerice repetate se poate găsi un regim de funcționare a sistemului care să satisfacă condițiile impuse. Însă soluția rezultată nu este neapărat o soluție optimală iar numărul simulărilor numerice necesare poate fi destul de mare. Apare, astfel, necesară folosirea unor algoritmi numerici mai sofisticăți, de optimizare. Problema de operare a sistemului se transformă în felul acesta într-o problemă de control optimal restricționată de îndeplinirea unor condiții de funcționare, în soluționarea căreia, formularea corectă, cu luarea în considerare a tuturor aspectelor de modelare matematică și simulare numerică va juca un rol esențial.

Inițial, ca urmare a contractelor de furnizare a debitelor de gaze încheiate pe perioade mari de timp, procesul de transport al gazelor realizat la nivelul unei rețele de conducte de transport avea loc într-un regim de funcționare cvasistaționară. Variațiile sezoniere ale debitelor cerute de consumatori erau, în cele mai multe dintre cazuri, approximate prin consumuri constante, raportate la luni sau săptămâni de funcționare, ceea ce permite folosirea relațiilor de calcul specifice regimurilor staționare de curgere. Problemele de operare se limitau, în aceste condiții de funcționare, numai la probleme de optimizare staționară. Prin soluționarea acestora rezultau regimuri de funcționare optime din perspectiva respectării condițiilor impuse.

De-a lungul timpului, ca urmare a liberalizării pieței de gaz, creșterii ponderii consumului casnic în totalul debitului transportat prin sistem, apariția unor consumatori industriali mari (de genul centralelor pe gaz pentru producerea energiei electrice) caracterizați de variații mari ale debitului consumat din sistem fără o notificare prealabilă, în timp util, către operatorul de sistem, profilul de consum a devenit tot mai dinamic în timp, conducând la schimbarea continuă a condițiilor de funcționare, ceea ce a impus intensificarea dinamicii activității de operare necesare funcționării în condiții de siguranță a sistemului. Pe de altă parte, ca urmare a condițiilor economiei de piață, funcționarea în condiții de eficiență economică ridicată impune funcționarea sistemului de transport la capacitatea maximă sau corelarea debitului total transportat prin sistem cu încărcarea în presiune al acestuia.

Problematika operării sistemelor de transport gaze naturale din perspectiva implementării conceptelor specifice sistemelor de reglare automată a început să se pună, începând cu anii 1960, într-o formă sistematică.

Se pot preciza în acest sens programele de cercetare susținute de „The Pipeline Research Council International” [2] privind modelarea matematică a procesului de curgere al gazului prin conductele de transport gaze. Direcțiile de cercetare adoptate în acest sens, au pornit de la premiza investigării fenomenelor fizice ale curgerii nestaționare ale gazelor prin conductele de transport astfel încât modelele rezultate să se dovedească a fi folositoare, „inginerește” vorbind, pentru operarea optimală și eficientizarea activității de proiectare a sistemului de transport. Totodată în 1969, în scopul facilitării schimbului reciproc de informații în domeniul modelării, simulării, optimizării, curgerii tranzitorii a fluidelor prin sistemele de transport, se înființează „The Pipeline Simulation Interest Group” [3].

Ca referință în ceea ce privește modelarea matematică a procesului de curgere a gazului printr-o conductă de transport, prin utilizarea unui model matematic descris de un sistem de ecuații parțiale cu derivate parțiale, se pot lua studiile de cercetare [22] și [23] care tratează, pentru prima dată, problema modelării comportamentului tranzitoriu al procesului de curgere al gazelor naturale prin sistemele de transport, simplificările ce se pot aduce modelului matematic, determinarea unor aspecte lineare ale acestui model și, implicit folosirea unor modele liniarizate (funcțiilor de transfer) în anumite condiții de exploatare care permit liniarizarea. Din punctul de vedere al modelării unui sistem de transport gaze naturale, fiecare element component este modelat prin prisma efectului singular introdus în comportamentul global al sistemului, fără a lua în considerare toate aspectele fizice de modelare. Modelarea trebuie să asigure un echilibru între complexitatea modelului matematic al sistemului și precizia de modelare cerută de exploatarea tehnologică.

Modelele matematice folosite nu au luat în calcul aspectele energetice ale procesului de curgere, considerându-se suficientă, din punct de vedere al preciziei și posibilităților de calcul numeric, modelarea procesului de curgere în regim termodinamic izoterm al procesului de curgere. Pentru obținerea unei soluții s-a apelat la o metodă numerică de rezolvare bazată pe diferențe finite, soluția fiind validată și experimental.

Totodată s-a obținut și o reprezentare sistemică a procesului de curgere prin intermediul unei funcții de transfer.

În urma simulărilor efectuate au fost deduse trei reguli de bază privind minimizarea pierderilor energetice ale unui sistem de transport, care sunt luate ca referință până în zilele noastre, și anume:

- a) Operarea unui sistem să se facă la cea mai mare presiune posibilă (pierderile hidraulice de presiune sunt direct proporționale cu viteza de curgere a gazului care scade pe măsură ce presiunea crește);
- b) Furnizarea debitelor de gaz la consumatori să se facă la valoarea presiunii contractate și nu mai mult (energia potențială a gazului stocat în conductă este direct proporțională cu presiunea);
- c) Regimul de curgere să fie menținut cât mai aproape de un regim staționar (pierderile medii de energie sunt mai mari în cazul fluctuațiilor mari ale vitezei de curgere).

Pentru utilizarea acestor modele au fost folosite metode de calcul numeric bazate pe diferențe finite, fără a se analiza detaliat proprietățile de convergență ale metodei. Din acest punct de vedere este reprezentativă lucrarea [36], care arată că sistemele de ecuații diferențiale rezultate în urma discretizării prin metoda diferențelor finite a modelelor procesului de curgere al gazului printr-un sistem de transport se încadrează, începând de la o anumită precizie de calcul cerută, într-o clasă specială de sisteme de ecuații, respectiv sisteme de ecuații inflexibile („stiff equations”).

În [78] este prezentată o metodă numerică robustă, însoțită de un program de simulare numerică, pentru rezolvarea sistemului hiperbolic de ecuații cu derivate, fără a ignora nici unul dintre termenii ecuației de mișcare parțiale care descriu curgerea nestaționară izotermă a gazului printr-un tronson de conductă. Metoda este validată pe baza unor studii de caz experimentale.

Dezvoltarea tehnicilor de calcul numeric a permis reconsiderarea aspectelor de modelare matematică a procesului de curgere a gazului în sensul creșterii preciziei de modelare concomitent cu creșterea complexității modelului. În acest sens, în lucrările [62] și [63] sunt studiate avantajele și dezavantajele folosirii unor

forme matematice simplificate pornind de la modelul cel mai complex al procesului de curgere al gazului printr-un tronson de conductă.

La nivel european, liderul în activitatea de cercetare în domeniu este organizația „SIMONE Research Group” (www.ercim.org) care, pornind de la un proiect de cercetare demarat în anul 1975 axat pe proprietățile, comportamentul și controlul rețelelor complexe constituite dintr-un mare număr de elemente dinamice și restricții neliniare, a ajuns să implementeze prin software-ul specializat SIMONE algoritmi de simulare numerică pentru soluționarea unor structuri de rețele descrise prin zeci de mii de ecuații diferențiale neliniare cu derivate parțiale condiționate de tipuri diferite de restricții.

Prin intermediul modelării matematice a procesului de curgere și simulării numerice a acestuia s-au rezolvat o serie de probleme specifice de operare, în anumite condiții de funcționare, a unui sistem de transport gaze naturale.

Astfel în [41] se prezintă o metodă de control predictiv a procesului desfășurat la nivelul unui sistem de transport de gaze naturale, în cadrul căreia optimizarea propriu-zisă are loc pe durata orizontului de predicție care se întinde de la momentul curent de timp până la un moment de timp viitor. Pașii metodei sunt următorii:

- a) Obținerea valorilor de presiune și debit din sistemul de transport;
- b) Obținerea unei estimări privind debitul furnizat la consumatori pe perioada de timp asociată orizontului de predicție;
- c) Estimarea stării actuale a sistemului de transport pe baza valorilor presiunilor și debitelor măsurate;
- d) Soluționarea problemei de optimizare a funcției obiectiv, în prezența restricțiilor tehnologice impuse. Rezultă, astfel, valorile presiunilor de refulare ale stațiilor de comprimare gaze pe perioada de timp asociată orizontului de predicție (traectoria de comandă);
- e) Procesului i se aplică, pe durata pasului de discretizare al timpului, numai primul eșantion din această traiectorie de comandă;
- f) La momentul de timp următor metoda continuă din nou de la pasul a).

Optimizarea este bazată pe o metodă de programare pătratică succesivă. Gradientul funcției de cost care reprezintă energia consumată de stațiile de compresoare, se calculează numeric în cadrul buclei de optimizare.

Algoritmul de calcul al metodei este structurat pe două niveluri ierarhice. În cadrul acestei structuri de calcul, nivelul ierarhic inferior soluționează problema de optimizare de mai multe ori în cursul unei zile generând mărimile de comandă pentru stațiile de comprimare gaze amplasate pe tronsoanele de conductă racordate direct la nodurile de ieșire din sistem unde se înregistrează fluctuații importante ale debitului. Nivelul ierarhic superior realizează optimizarea o dată pe zi (pas de control de 24 ore) generând mărimile de comandă pentru stațiile de comprimare gaze din interiorul sistemului. Sistemul de reglare rezultat este un sistem în buclă închisă cu reacție după presiunile și debitele din sistem ale căror valori sunt folosite pentru actualizarea estimatorului de stare al sistemului. Mărimea orizontului de predicție depinde de dimensiunile conductelor componente ale sistemului de transport și este un parametru important de acord al sistemului de reglare.

În [73] este abordată problema estimării valorilor debitelor de gaze vehiculate în interiorul unui sistem de transport pe baza valorilor presiunii măsurate numai la nivelul nodurilor tehnologice ale sistemului, în scopul, fie al determinării debitului pe tronsoanele fără instrumentație de măsură, fie pentru determinarea pierderilor de gaze prin compararea valorilor estimate cu valorile măsurate. Problema este rezolvată, într-o manieră sistemică, prin construirea unor structuri de

observatori de stare folosind un model matematic simplificat, cu parametrii constanți, liniarizat.

În [61] se pune problema minimizării, cu restricții, a costului de operare al sistemului de transport, aflat în regim nestaționar de funcționare, cost în care ponderea cea mai importantă (estimată între 25% și 50%) o dă costul de funcționare al tuturor stațiilor de comprimare ale sistemului.

Pentru reducerea complexității problemei globale de optimizare cu restricții se procedează la o împărțire a sistemului de transport în subsisteme locale de transport interconectate între ele în anumite noduri tehnologice urmată de definirea unor costuri locale de operare a acestor subsisteme.

Rezultă astfel o mulțime de probleme locale de optimizare cu restricții care se transformă în probleme de optimizare fără restricții ce se rezolvă individual prin folosirea unei metode de gradient, ca urmare a neliniarității funcției criteriu asociate problemei locale de optimizare.

Rezolvarea individuală a tuturor acestor probleme locale de optimizare va fi coordonată prin folosirea unor variabile suplimentare care vor avea același rol ca și multiplicatorii Lagrange în formarea funcției Lagrangean globală prin includerea, pe lângă funcțiile Lagrangean locale, a restricțiilor globale introduse de interconectările subsistemelor. În acest fel, pentru fiecare set de soluții a problemelor locale de optimizare se determină mulțimea valorilor variabilelor de coordonare care asigură respectarea și a restricțiilor globale.

În [37] este prezentată o aplicație de modelare a unui sistem de transport gaze naturale folosind programarea orientată pe obiect. Sistemul de transport este modelat ca un graf orientat, fiecare arc al grafului reprezentând un tronson de conductă având asociat ecuația cu derivate parțiale care descrie procesul de curgere la nivelul tronsonului respectiv.

În [20] este prezentată o metodă de determinare a rugozității interioare a conductelor de transport necesare calculării factorului de pierdere de presiune pe baza unor măsurători reale ale de presiune și debite.

În [79] este dezvoltată o nouă relația analitică de calcul a debitului de gaz pentru curgerea staționară a gazului printr-un tronson înclinat de conductă, fără a ignora nici unul dintre termenii ecuației de mișcare.

În [76] sunt prezentate tehnici de regresie bazate pe funcții polinomiale de mai multe variabile, pentru estimarea cererii de debit de gaz la consumatori folosind prognoza meteorologică pe termen scurt și mediu corelată cu istoricul înregistrărilor parametrilor sistemului de transport.

În [26] este prezentată problema controlului calității gazului la nivelul unui sistem de transport din perspectiva realizării simulărilor numerice.

În [13] este prezentat un algoritm nesecvențial de programare dinamică pentru soluționarea problemelor de optimizare a rețelelor de conducte de transport care conțin și bucle în structura lor. Soluția problemei de optimizare astfel găsită este o soluție de optim global.

În [31] este prezentată o metodă de identificare parametrică a factorului de pierdere de presiune, respectiv, a factorului de transfer de căldură prin pereții conductei pornind de la măsurători reale ale mărimilor caracteristice procesului de curgere și folosind sistemul complet de ecuații cu derivate parțiale asociat regimului nestaționar de curgere neizotermă. Determinarea parametrilor modelului matematic se reduce la rezolvarea unor sisteme neliniare de ecuații prin folosirea unor metode numerice de tip Newton-Raphson.

În [12] este utilizat EXCEL-ul pentru simularea numerică a procesului de curgere în regim staționar și tranzitoriu, folosind o interfață creată sub EXCEL prin care se apelează funcții scrise în C++.

În [38] este prezentată o strategie de control predictiv robust bazată pe modelul neliniar multivariabil al procesului de curgere care permite obținerea traiectoriilor optime de stare pentru transferul procesului de curgere dintr-o stare optimală într-alta funcție de respectarea anumitor condiții de funcționare. Problema de optimizare se pune din perspectiva minimizării costurilor de funcționare ale stațiilor de comprimare gaze.

În [65] este descris cum se poate estima necesarul de debit la nivelul unui sistem de transport gaze precum și factorii de care trebuie să se țină seama în realizarea acestei estimări. Sunt prezentate o serie de metode bazate pe tehnici statistice clasice, rețele neuronale sau sisteme fuzzy care asigură estimarea necesarului de debit pe o durată de 72 de ore în avans.

În [33] se prezintă optimizarea atât a consumului de combustibil necesar funcționării stațiilor de comprimare gaze cât și a furnizării debitelor de gaze spre consumatorii racordați la sistem. Operarea optimă a sistemului de transport pe durate mari de timp (1 sau 2 ani) se formulează ca o problemă de optimizare neliniară cu variabile continue (presiuni, debite) și discrete (poziția de închis sau deschis a robinetelor), cu restricții, care se rezolvă apelând la tehnici de optimizare secvențială. Problema de optimizare dinamică, care apare când se pune problema operării sistemului în condițiile fluctuațiilor rapide ale debitelor de gaze cerute de către consumatori este considerată o extensie a problemei de optimizare staționară, fără complicații majore ale tehnicii de soluționare, exceptând timpul de calcul.

În [39] este prezentată o aplicație a rețelelor neuronale în realizarea unui sistem de estimare a necesarului de debit de gaz pentru următoarele 72 de ore, bazat pe prognoza meteo corelat cu istoricul înregistrărilor sistemului.

În [35] se arată că noile tipuri de materiale de construcție ale conductelor de transport precum și regimurile de funcționare la valori ridicate ale presiunilor de operare și ale debitelor transportate au necesitat găsirea unor noi relații de calcul a factorului de pierderi de presiune ca alternativă la relația clasică de calcul Colebrook-White.

În [14] se prezintă o strategie de optimizare a zestrei unui sistem de transport de gaze naturale în sensul păstrării acestora la valori care să permită preluarea de către sistem a fluctuațiilor majore, neprevăzute dar posibile ale consumului de gaz.

În [66] se face o prezentare a procesului de estimare a necesarului de debit pe perioada imediat următoare de timp din perspectiva factorilor care influențează precizia estimării și a eficienței metodelor matematice folosite.

În [25] se prezintă cum pot fi integrate restricțiile privind valorile admisibile ale presiunilor și debitelor din sistem, cauzate de prezența elementelor de execuție în nodurile tehnologice ale unui sistem de transport de gaze, în problemele de specifice de operare optimă a sistemului, cum ar fi: furnizarea gazului la consumatori la anumiți parametri cantitativi sau calitativi, reducerea costurilor de funcționare ale stațiilor de comprimare, etc. Găsirea unei soluții a problemei de optimizare se arată că se poate face apelând la tehnici secvențiale de programare liniară.

În [18] se arată cum se poate rezolva problema de optimizare cu restricții a unui sistem de transport gaze modelat prin ecuații cu derivare parțiale prin tehnici de optimizare pătratică secvențială.

În [34] se pune problema operării optime a stațiilor de comprimare gaze astfel încât să fie asigurat un anumit profil de variație în timp a zestrei sistemului. Problema se tratează ca o problemă de optimizare dinamică cu restricții, rezolvabilă printr-o tehnică de optimizare secvențială bazată pe modelul dinamic de regim termodinamic neizoterm al procesului de curgere.

O procedură și echipamentele necesare determinării controlului optim al procesului de curgere al unei conducte de transport gaze a făcut obiectul unui brevet de invenție [68].

În [72] este evaluată, din punct de vedere al aplicabilității practice și tehnice, o metodă de soluționare, bazată pe algoritmi genetici, a problemei de optimizare multiobiectiv asociată operării unui sistem de transport de gaze.

În [71] este prezentată problema optimizării, cu restricții, a costurilor de funcționare ale unui sistem de transport. Descrierea sistemului se face prin ecuații cu derivate parțiale hiperbolice. Se folosește o reprezentare sub forma unui graf orientat. Problema de optimizare astfel pusă este rezolvată printr-o metodă de punct interior.

Din cele prezentate se vede că problema principală care privește operarea în condiții de siguranță și cu costuri economice minime este tratată în sensul definirii unor funcții de cost care trebuie să fie optimizate acționând asupra anumitor variabile ale procesului de curgere.

Inițial, la nivelul anilor 1960, posibilitățile de calcul numeric mai reduse au permis formularea și rezolvarea numai a unor probleme de optimizare de regim staționar referitoare la determinarea costurilor de operare a unui anumit număr de stații de comprimare gaze dispuse de-a lungul unei conducte de transport gaze care nu prezenta nici o ramificație. Implementarea s-a bazat pe folosirea unor modele matematice ale procesului de curgere, cu luarea în considerare a restricțiilor impuse de operarea între niște valori minime și maxime ale presiunii în sistem. Începând cu anii 1990, ca urmare a dezvoltării tehnologiilor de calcul și de comunicație, problemele de optimizare devin mai complexe întrucât încep să fie formulate probleme privind controlul unor sisteme de transport gaze distribuite pe arii geografice mai extinse și care prezintă diferite tipuri de ramificații ale conductelor de transport componente, precum și restricții ale valorilor mărimilor caracteristice procesului de curgere.

Actualmente, metodele de control predictiv bazate pe modelul procesului condus cunosc un real succes din punct de vedere al numărului de aplicații industriale implementate. O scurtă introducere a tehnologiilor existente pe piața produselor software referitoare la implementarea acestor tehnici de control este făcută în [67]. Se arată că fundamentele teoretice ale acestei metode de control au fost puse începând cu anii 1960 prin lucrările lui Kalman referitoare la controlul linear pătratic. Însă aplicabilitatea industrială a acestei metode a rămas oarecum limitată, în perioada de apariție, întrucât nu răspundea unor cerințe rezultate din limitările tehnologice ale procesele industriale și anume:

- a) Integrarea restricțiilor existente asupra mărimilor procesului industrial;
- b) Neliniaritățile procesului condus;
- c) Existența incertitudinilor de modelare;
- d) Existența funcțiilor de cost multiobiectiv.

Prezența acestor cerințe a condus la continuarea cercetărilor în sensul dezvoltării unor metode de control optimal care să permită includerea în problema de optimizare și a cerințelor menționate.

Pentru soluționarea problemelor de optimizare astfel formulate au rezultat algoritmi numerici care necesită, pentru a putea face față restricțiilor impuse, soluționarea problemei la fiecare iterație de calcul.

Pentru aceasta mărimile de comandă ale procesului sunt calculate în așa fel încât comportamentul procesului să fie optimizat pe durata unui așa numit orizont de predicție. Funcția de cost poate avea, în principiu, orice formă. Comportamentul dinamic al procesului este descris printr-un model explicit care poate avea, la rândul său, orice formă matematică. Restricțiile asupra intrărilor și ieșirilor procesului sunt incluse direct în problema de optimizare astfel încât nerespectarea acestora să fie anticipată și prevenită.

Numai primul eșantion din traiectoria de comandă determinată pe orizontul de predicție ales este aplicat procesului. Rezolvarea problemei de optimizare se reia la momentul de timp următor folosind valorile actualizate, provenite din măsurători, ale parametrilor de proces.

Costurile de implementare ale acestei noi metode de control au fost mult reduse prin folosirea unor noi tehnici de identificare a procesului care asigură o estimare rapidă a comportamentului dinamic al procesului condus (obținerea de modele) din datele măsurate.

Astfel de sisteme de control ale proceselor industriale, care au în componență regulatoare predictive bazate pe model au o structură ierarhizată, împărțită pe niveluri, conform figurii 1.7.1. Pentru a putea face și o comparație a eficienței implementării, în figură mai este reprezentată, în paralel cu structura de control predictiv bazat pe model (în partea stângă) și o structură de control convențional.

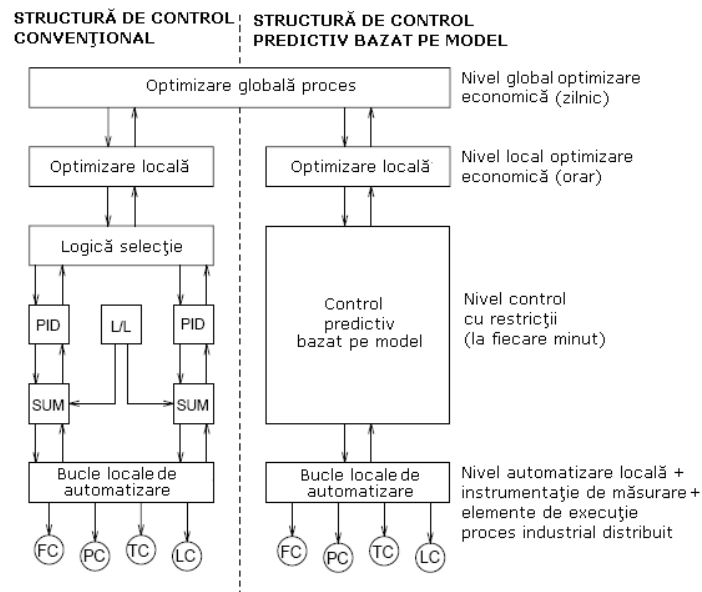


Fig. 1.7.1. Structură de control convențională / structură de control predictiv bazată pe model

La partea superioară a structurii de control avem implementat un bloc de optimizare globală a procesului industrial în sensul determinării setărilor (referințelor) componentelor procesului astfel încât acesta să se situeze într-un regim staționar optim. Aceste setări sunt transmise spre nivelul ierarhic inferior, de optimizare locală, care le folosește pentru calcularea stării staționare optime în care

trebuie să se situeze fiecare componentă a procesului. Stările staționare astfel calculate sunt trimise următorului nivel ierarhic inferior responsabil cu generarea mărimilor de control necesare conducerii procesului dintr-o stare staționară optimă într-altă stare staționară optimă, cu luarea în considerare a restricțiilor tehnologice.

Implementarea tuturor cerințelor de control ale unui proces industrial este, după cum se știe, destul de dificil de realizat folosind o structură convențională. De cele mai multe ori este necesar să fie folosită o combinație de structuri de reglare PID, L/L („lead-lag”) coordonate prin intermediul unor logici de control.

În schimb, prin folosirea unei structuri de control predictiv bazat pe model se asigură implementare algoritmului de reglare propriu-zisă împreună cu restricțiile asupra variabilelor procesului într-un singur bloc funcțional.

Foarte puțini autori din literatura de specialitate, care se referă la modelarea matematică, simularea numerică, optimizarea staționară sau dinamică a procesului de transport și, în puține cazuri, realizează o tratare sistemică a acestor probleme, respectiv: să dezvolte o interpretare sistemică a modelului matematic al procesului de curgere, să deducă modele sistemică de aproximare luând în considerare ipoteze simplificatoare rezultate din funcționarea în anumite condiții de exploatare, să studieze, să testeze prin simulări și să valideze experimental metode de soluționare.

În contextul celor prezentate la nivelul acestui capitol introductiv, *lucrarea și-a propus să investigheze toate aspectele care țin atât de modelarea matematică și simularea numerică a procesului de curgere a gazelor naturale realizat la nivelul unui sistem de transport, cât și de implementarea unui sistem de reglare automată a procesului cu luarea în considerare a restricțiilor asupra mărimilor de proces impuse de limitările tehnologice*. Atingerea obiectivele urmărite se va realiza printr-o structurare pe capitole a lucrării prezentată în cele ce urmează.

Astfel în capitolul 2 se vor prezenta, pe de o parte, fundamentele fizice care stau la baza deducerii modelului continuu al procesul de curgere al gazului natural prin conductele de transport și care vor permite înțelegerea diferitelor aspecte de natură mecanică, cinematică și termodinamică care diferențiază diferitele regimuri de curgere reală a gazului natural prin conductele de transport, iar pe de altă parte, interpretarea sistemică a acestui model, prin înțelegerea procesului de curgere ca un proces cu parametrii distribuiți. Orientarea și parametrii de intrare - stare - ieșire ai modelului vor fi determinați din alegerea condițiilor de frontieră ale sistemului de ecuații diferențiale cu derivate parțiale folosit pentru reprezentarea lui.

În capitolul 3 vor fi prezentate o serie de metode analitice și numerice care permit studiul procesului de curgere descris prin modele continue. Aplicabilitatea metodelor analitice de studiu este restrânsă numai în cazul folosirii unor modele simplificate ale procesului de curgere rezultate din luarea în considerare a unor ipoteze simplificatoare. Dacă nu se ține seama de nici o ipoteză simplificatoare, complexitatea matematică a modelului matematic al curgerii face imposibilă rezolvarea lui pe cale analitică. În acest caz este posibilă obținerea numai a unor soluții aproximative folosind metode numerice de calcul. În acest sens vor fi prezentate, în primul rând, o serie de aspecte generale de bază privind aplicabilitatea metodelor numerice bazate pe diferențe finite din punct de vedere al convergenței acestora. Se va insista pe o abordare sistemică a problemei convergenței. Totodată se vor evidenția acele aspecte care țin de eficiența implementării metodelor din punctul de vedere al tendinței sistemelor de ecuații rezultate în urma discretizării sistemelor de ecuații cu derivate parțiale asociate reprezentării matematice de a dobândi un caracter dinamic inflexibil.

Capitolul 4 va fi rezervat prezentării unor modele de aproximare ale procesului de curgere a gazului natural prin conductele de transport din perspectiva:

folosirii lor în simulările numerice pentru analiza erorilor de modelare, respectiv, deduceri unui model liniarizat de aproximare cu parametri constanți care să permită anticiparea comportamentului dinamic al procesului de curgere în vecinătatea unui regim staționar de funcționare; extinderea modelării la nivelul întregului sistem de transport respectând condiția de stabilitate. Valabilitatea modelelor de aproximare ale procesului de curgere va fi verificată prin validarea experimentală, prin corelarea unor măsurători efectuate pe diferite tronsoane din cadrul Sistemului Național de Transport Gaze cu valori determinate prin simulări numerice.

În capitolul 5 prezentarea se va axa pe problematica proiectării și implementării unui sistem de reglare automată a dinamicii unui sistem de transport gaze naturale apelând la tehnici de control predictive bazate pe model. În acest sens va fi abordată problema de control optimal linear cu orizont de predicție fixat care, din perspectiva aspectelor matematice specifice problemelor de optimizare, se poate reduce la o problemă de optimizare pătratică cu restricții lineare rezolvabilă prin metoda mulțimii restricțiilor active. Prin intermediul unor simulări numerice ale sistemului de reglare al procesului de curgere realizat la nivelul unui simplu tronson de conductă de transport, respectiv, al unei structuri simplificate de sistem de transport de gaze vor fi prezentate cele mai importante aspecte care privesc: caracterul anticipativ al sistemului de reglare, alegerea duratei orizontului de predicție, verificarea restricțiilor impuse și optimizarea propriu-zisă a funcției obiectiv asociate problemei de control.

În final, în ultimul capitol, se vor prezenta o serie de concluzii referitoare la rezultatele obținute, evidențiindu-se contribuțiile personale. Totodată vor fi prezentate și o serie de direcții viitoare de studiu.

Lucrarea este însoțită și de o serie de anexe care aduc o serie de completări privind înțelegerea anumitor aspecte matematice sau care privesc implementarea programelor de simulare numerică.

Capitolul 2: Modelul continuu al procesului de curgere al gazului natural prin conductele de transport

2.1. Generalități

Scopul acestui capitol îl constituie, pe de o parte, prezentarea fundamentelor fizice care stau la baza deducerii modelului matematic al procesului de curgere al gazului natural prin conductele de transport, și pe de altă parte, asimilarea acestui model, exprimat printr-un sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale, cu un model continuu al unui proces cu parametrii distribuiți, model care, din punct de vedere al teoriei sistemelor, va avea orientarea și parametrii de intrare-stare-ieșire determinați din alegerea condițiilor de frontieră ale sistemului de ecuații diferențiale în funcție de modul de utilizare.

Facilitarea înțelegerii fundamentelor fizice ale modelului matematic al procesului de curgere va fi realizată printr-o sistematizare a acestora sub forma aspectelor de natură mecanică, cinematică și termodinamică.

Într-o primă fază, în subcapitolul 2.2 vor fi prezentate prin intermediul unor aspecte mecanice ale curgerii fluidelor, ipotezele de structură ale mediului fluid care-l definesc ca mediu continuu și deformabil. Apoi se evaluează matematic starea de deformare (deplasare), respectiv, de tensiune a mediului continuu și deformabil, iar prin introducerea unei ipoteze suplimentare privind natura elastică a mediului continuu se va deduce și relația de legătură dintre deformări (deplasări) și tensiuni. Această relație va sta la baza înțelegerii ecuației constitutive a unui fluid.

Aspectele cinematice ale curgerii fluidelor din subcapitolul 2.3, tratează matematic curgerea unui fluid ca o transformare continuă a spațiului euclidian tridimensional. Prin intermediul unor operatori și elemente de geometria curgerii va fi descrisă metoda Euler de analiză a curgerii fluidelor.

Aspectele termodinamice ale curgerii fluidelor, dezvoltate în subcapitolul 2.4, tratează din punctul de vedere al primelor două legi ale termodinamicii și al mărimilor caracteristice, schimburile de energie și masă ale procesului de curgere al unui fluid, văzut ca un sistem termodinamic deschis.

Considerentele teoretice prezentate în subcapitolele 2.2, 2.3 și 2.4 vor permite, în cadrul subcapitolului 2.5, scrierea ecuațiilor curgerii laminare a fluidelor vâscoase.

Gazele reale din categoria cărora face parte și gazul natural au o serie de caracteristici, prezentate în subcapitolul 2.6, determinate teoretic și experimental care permit particularizarea ecuațiilor curgerii laminare a fluidelor vâscoase în condiții reale de curgere.

În finalul capitolului, respectiv subcapitolul 2.7, va fi prezentată o ipoteză simplificatoare a modelului matematic al procesului de curgere, permisă de geometria conductei de transport astfel încât se poate face o reducere a complexității acestuia. Simplificare este similară cu considerarea unui proces de curgere nestaționară, unidimensională, care, din punct de vedere sistemic, se va interpreta ca un proces continuu cu parametrii distribuiți.

În anexa A.1 sunt selectate elementele de teoria câmpurilor care facilitează înțelegerea operatorilor matematici care intervin în scrierea ecuațiilor matematice ale procesului de curgere.

2.2. Aspecte mecanice ale curgerii fluidelor

În cadrul acestui subcapitol se face o sinteză, pe baza lucrărilor [11], [24], [30], [64], a celor mai importante aspecte mecanice ale curgerii fluidelor considerate a fi medii continue și deformabile. Practic se vor prezenta o serie de relații și ecuații din mecanica mediilor continue care stau la baza modelării matematice a procesului de curgere.

Criteriul fizic de stabilire al continuității unui mediu este *numărul lui Knudsen*: $K_n = \frac{l_{pm}}{L_{dim}}$, în care l_{pm} este lungimea liberului parcurs molecular ($l_{pm} = 10^{-5} \text{ cm}$) iar L_{dim} este o dimensiune a corpului. Cercetările experimentale au arătat că pentru $K_n > 0,1$ un fluid poate fi considerat un mediu continuu.

Mediul continuu se consideră format dintr-o mulțime de puncte materiale interconectate prin forțele de atracție atomice. Vor fi luate în considerare numai aspectele macroscopice care privesc comportamentul materialului sub influența forțelor exterioare.

De asemenea, mediul continuu se consideră a fi un mediu elastic, adică un mediu pentru care între deformarea materialului și forța exterioară există o relație liniară. Materialul elastic se va considera omogen în ceea ce privește structura și izotrop în ceea ce privește proprietățile.

Pornind de la aceste considerații generale, structura mediului fluid va fi caracterizată prin următoarele ipoteze:

- a) Fluidul ca mediu material, ca substanță, se distribuie în mod *continuu* într-un domeniu al spațiului. Între particulele de fluid nu există vid sau intervale goale, lipsite de substanță. Mărimile fizice care caracterizează fluidul (presiune, viteză, densitate, temperatură, etc.) se distribuie, la rândul lor, în mod continuu, ca funcții de poziție și timp.
- b) Fluidele aflate în mișcare nu respectă *condiția de rigiditate*. Un corp fluid în mișcare, arbitrar considerat, își modifică forma și dimensiunile, adică *se deformează*.
- c) Fluidul se consideră divizat în *particule elementare* de formă arbitrară, caracterizate de volum și masă elementară.

Cele mai importante aspecte mecanice pot fi prezentate, în prima fază, prin exemplul din figura 2.2.1 al unei bare de material elastic de lungime l , grosime w și înălțime h , supusă acțiunii forțelor exterioare F .

Acțiunea rezultatei forțelor exterioare F va avea ca efecte, asupra corpului, apariția unor *deformări*: $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{\Delta w}{w}$, $\frac{\Delta h}{h}$ și *tensiuni* $\frac{F}{A}$, respectiv, la nivelul punctelor materiale componente, *deplasări* ale acestora cu vitezele v .

Din punct de vedere al mecanic, se consideră că procesul este caracterizat matematic complet (numărul de ecuații egal cu numărul de necunoscute) prin două relații cu caracter de legi locale (punctuale): *ecuația de mișcare a particulei materiale* (sau *corpului*) și *ecuația constitutivă a materialului* elastic al corpului considerat.

În principiu, cele două ecuații au forme binecunoscute din mecanica clasică însă, în cazul de față, se pune problema adaptării lor pentru cazul general al corpurilor constituite dintr-un material continuu și deformabil cu proprietăți elastice, corpuri care se deformează sub acțiunea combinată a forțelor masice exterioare și a forțelor de tensiune rezultate din contactul suprafețelor exterioare cu corpurile învecinate.

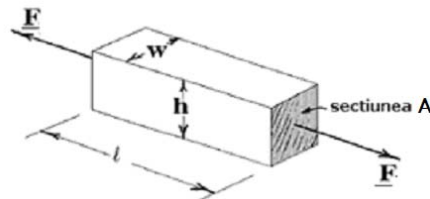


Fig. 2.2.1. Bară de material elastic supusă acțiunii unei forțe exterioare

Ecuația de mișcare a particulei materiale descrie deplasarea punctelor materiale ale mediului fluid exprimând faptul că între variația vitezei de deplasare (acclerație) $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ și rezultanta forțelor care acționează asupra particulei materiale

$\sum F$ există o relație de proporționalitate Newtoniană stabilită prin intermediul masei Δm_{mat} a particulei materiale:

$$\sum F = \Delta m_{mat} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.2.1)$$

Ecuația constitutivă a materialului redă legătura care există între deformările și tensiunile asociate unui corp material, dependente, după cum s-a precizat anterior, de proprietățile elastice ale materialului.

În cazul de față, această legătură este dată de legea lui Hooke care stabilește pentru deformarea principală, de pe direcția forței, $\frac{\Delta l}{l}$, și forța exterioară unidimensională o relație de proporționalitate, prin intermediul modului de elasticitate a lui Young E_Y , iar între celelalte deformări $\frac{\Delta w}{w}$, $\frac{\Delta h}{h}$ și deformarea principală $\frac{\Delta l}{l}$ tot o relație de proporționalitate prin intermediul coeficientului Poisson μ_P :

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= E_Y \frac{\Delta l}{l} \\ \frac{\Delta w}{w} &= \frac{\Delta h}{h} = -\mu_P \frac{\Delta l}{l} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Funcție de natura deformărilor vorbim de forțe de tracțiune care provoacă alungiri și forțe de presiune care provoacă contracții. Semnul minus arată că, dacă $\frac{\Delta l}{l}$ este o alungire, atunci $\frac{\Delta w}{w}$ și $\frac{\Delta h}{h}$ sunt contracții și invers.

Cazul cel mai general este cel al unui corp material cu densitatea de masă ρ , al cărui volum V , delimitat de restul mediului continuu prin suprafața exterioară σ , este supus acțiunii forțelor exterioare masice de intensitate \underline{f} (ca de exemplu accelerația gravitațională) și forțelor de tensiune cauzate de contactul cu corpurile

învicinat. Materialul din care este constituit corpul se consideră un material elastic, omogen și izotrop.

Evaluarea matematică a stării de deformare se va face, în prima fază, prin intermediul evaluării matematice a deformării specifice liniare a unei particule materiale. Astfel, în figura 2.2.2 se consideră o particulă de mediu continuu, poziționată față de un sistem de axe carteziane $Ox_1x_2x_3$. Particula care conține punctele $A(\underline{x}, t)$ și $B(\underline{x} + \delta\underline{x}, t)$ este supusă unei deformări caracterizată de deplasarea infinitesimală $\underline{u}_{dep}(\underline{x}, t)$, care determină trecerea punctelor inițiale A și B în punctele $A'(\underline{x}', t + dt)$ și $B'(\underline{x}' + \delta\underline{x}', t + dt)$.

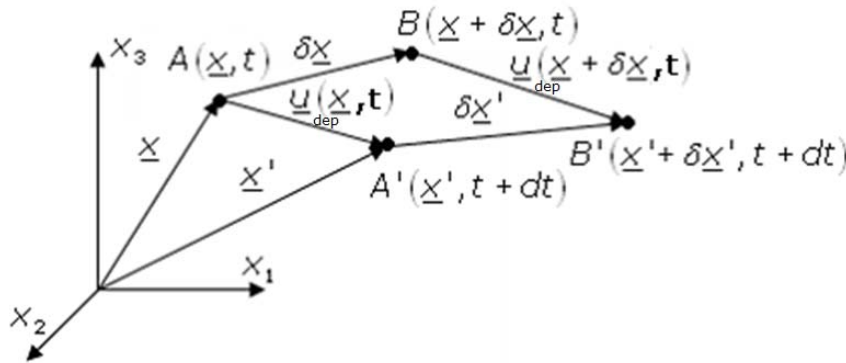


Fig. 2.2.2. Deformarea liniară a particulei de mediu fluid

Deformarea specifică liniară a particulei va fi caracterizată prin variația relativă ε_l a lungimii $l = \|\delta\underline{x}\|$ a segmentului AB :

$$\varepsilon_l = \frac{l' - l}{l} = \frac{d(\|\delta\underline{x}\|)}{\|\delta\underline{x}\|} = \frac{1}{\|\delta\underline{x}\|} \delta\underline{x}^t \cdot J_{\underline{u}_{dep}, \underline{x}}(\underline{x}) \cdot \delta\underline{x} \quad (2.2.3)$$

Prin $J_{\underline{u}_{dep}, \underline{x}}(\underline{x})$ s-a notat Jacobianul funcției de vectorul \underline{x} al deplasării $\underline{u}_{dep}(\underline{x}, t)$.

Dacă $\varepsilon_l > 0$, deformarea este o *alungire*, iar dacă $\varepsilon_l < 0$, deformarea este o *comprimare*.

Introducând coeficienții de deformare $\{a_{def_{ij}} / i, j = 1, 2, 3\}$ prin relațiile:

$$a_{def_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{dep_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{dep_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.4.a)$$

și notând cu $\{a_{dir_i} / i = 1, 2, 3\}$ cosinuzii directori ai segmentului AB :

$$a_{dir_i} = \frac{\delta x_i}{\sqrt{\|\delta\underline{x}\|}} \quad (2.2.4.b)$$

relația deformării specifice liniare (2.2.3) se va putea scrie sub forma:

$$\varepsilon_l = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a_{def_{ij}} \cdot a_{dir_i} \cdot a_{dir_j}) \quad (2.2.5)$$

Starea de deformare a materialului va fi caracterizată global de *tensorul deformărilor* reprezentat prin matricea $A_{def} = [a_{def_{ij}}]$ cu $i, j = 1, 2, 3$.

În cazul fluidelor deformările sunt mai mari. Deplasărilor $\underline{u}(\underline{x}, t)$ realizate în intervalul de timp infinitesimal dt li se pot asocia viteze de deplasare $\underline{v}(\underline{x}, t)$ potrivit relației $\underline{u}_{dep}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot dt$. Vom vorbi de tensorul vitezelor de deformare / deplasare reprezentat de matricea $B_{vit} = [b_{vit_{ij}}]$ cu $i, j = 1, 2, 3$, având componentele:

$$b_{vit_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.6)$$

Evaluarea matematică a deformării de volum va fi prezentată orientativ prin deformarea unei particule materiale paralelipipedice numai în sensul axelor carteziene $\{Ox_i, i = 1, 2, 3\}$, adică $\{a_{def_{ij}} = 0 / i \neq j / i, j = 1, 2, 3\}$, conform figurii 2.2.3.

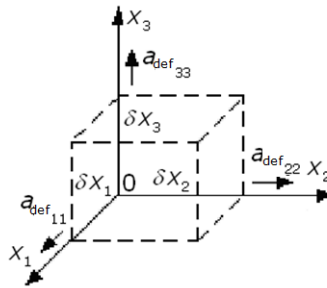


Fig. 2.2.3. Deformarea unei particule paralelipipedice de mediu fluid

Volumul particulei înainte de deformare este: $\delta V = \prod_{i=1}^3 \delta x_i$, iar după defor-

mare devine: $\delta V + d(\delta V) = \prod_{i=1}^3 [\delta x_i + d(\delta x_i)]$. Având în vedere relația (2.2.5),

pentru deformarea luată în considerare avem: $\{d(\delta x_i) = a_{def_{ij}} \cdot \delta x_j / i = 1, 2, 3\}$ și, ca urmare, volumul particulei materiale deformate se va rescrie sub forma

$$\delta V + d(\delta V) = \prod_i \delta x_i \cdot (1 + a_{def_{ij}}) \cong \prod_i \delta x_i + \prod_i \delta x_i \cdot \sum_i a_{def_{ij}} = \delta V + \delta V \cdot \sum_i \frac{\partial u_{dep_i}}{\partial x_i}$$

Deformarea specifică de volum va fi:

$$\frac{d(\delta V)}{\delta V} = \nabla \cdot \underline{u}_{dep} = \text{div}(\underline{u}_{dep}) \quad (2.2.7)$$

Dacă elementul de volum se consideră de masă unitară astfel încât: $\delta V = \frac{1}{\rho}$

relația (2.2.7) se rescrie:

$$\rho \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \nabla u_{dep} \quad (2.2.8)$$

În cazul fluidelor incompresibile (lichidelor) pentru care $\rho = const$ vom avea $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$ adică $\nabla u_{dep} = 0$.

Evaluarea stării de tensiune a corpului material considerat are la bază determinarea tensiunii \hat{t} dintr-un punct M , raportată la orice plan care conține punctul, prin cunoașterea distribuțiilor tensiunilor pe trei suprafețe ortogonale, conform figurii 2.2.4. Prin \underline{n}_{sup} s-a notat normala la plan, în punctul considerat.

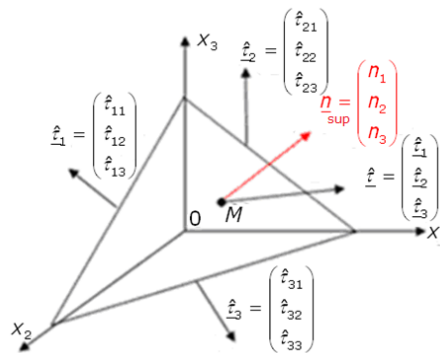


Fig. 2.2.4. Evaluarea stării de tensiune dintr-un punct al unui corp material

Între tensiunile (tracțiuni) figurate există următoarea relație denumită și legea Cauchy:

$$\hat{t} = \sum_{i=1}^3 \hat{t}_i n_i = \hat{t}^t \underline{n}_{sup} \quad (2.2.9)$$

Prin \hat{t} s-a notat matricea tensorului tensiunilor având componentele

$$\hat{t} = \begin{bmatrix} \hat{t}_{11} & \hat{t}_{12} & \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{21} & \hat{t}_{22} & \hat{t}_{23} \\ \hat{t}_{31} & \hat{t}_{32} & \hat{t}_{33} \end{bmatrix}, \text{ tensor prin care se caracterizează, global, starea de tensiune}$$

într-un punct.

Referitor la *semnificația fizică* a componentelor tensorului tensiunilor \hat{t} , în cazul unui mediu de fluid trebuie făcute câteva observații.

Astfel, fluidele reale posedă proprietatea de *viscozitate*, adică proprietatea fluidului de a se opune alunecării unei particule pe altă particulă, a unui strat de fluid pe altul vecin. Această împotrivire se manifestă prin *forțe tangențiale de frecare*, care sunt exprimate prin componentele $\{\hat{t}_{ij} / i \neq j\}$ ale tensorului tensiunilor \hat{t} . Proprietatea de viscozitate se manifestă și la contactul dintre fluid și suprafețele solide cu care acesta se află în contact direct.

Viscozitatea unui fluid este datorată schimbului de cantitate de mișcare între straturile de fluid vecine care se deplasează cu viteze diferite, cantitate de mișcare exprimată prin componentele $\{a_{def,ij} / i \neq j\}$ ale tensorului vitezelor de deformație

A_{def} . Schimbul de cantitate de mișcare conduce la tendința de egalare a vitezelor straturilor, fapt ce se percepe din afară ca tensiuni în interfața straturilor, deci viscozitate.

În *stare de echilibru* (sau de repaus) forțele tangențiale de frecare sunt nule $\{\hat{\tau}_{ij} = 0 / i \neq j\}$ întrucât existența unor astfel de forțe ar produce mișcare. Valoarea tensiunii normale în starea de echilibru se numește *presiune hidrostatică*. În cazul unui *fluid ideal* forțele de frecare (de viscozitate) se consideră neglijabile, astfel încât $\{\hat{\tau}_{ij} = 0 / i \neq j\}$ iar presiunea hidrostatică va fi

$$-p = \hat{\tau}_{11} = \hat{\tau}_{22} = \hat{\tau}_{33} \quad (2.2.10)$$

Semnul minus exprimă caracterul de tracțiuni al tensiunilor.

În cazul unei particule materiale de volum dV și suprafață exterioară $d\sigma$, cu masa $dm_{mat} = \rho \cdot dV$ concentrată în centrul de greutate M , și care este supusă acțiunii forțelor masice de intensitate \underline{f} (acelerația gravitațională) și tensiunii $\hat{\underline{t}}$ cauzată de contactul pe suprafața exterioară $d\sigma$ cu particulele materiale învecinate, mișcarea particulei cu viteza \underline{v} față de un sistem de referință este descrisă prin ecuația de mișcare a lui Newton:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \rho \cdot dV = \underline{f} \cdot \rho \cdot dV + \hat{\underline{t}} \cdot d\sigma \quad (2.2.11)$$

Integrând egalitatea (2.2.11) pe volumul V al corpului delimitat de suprafața exterioară σ , conform figurii 2.2.5, obținem:

$$\iiint_V \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \rho \cdot dV = \iiint_V \underline{f} \cdot \rho \cdot dV + \iint_{\sigma} \hat{\underline{t}} \cdot d\sigma \quad (2.2.12.a)$$

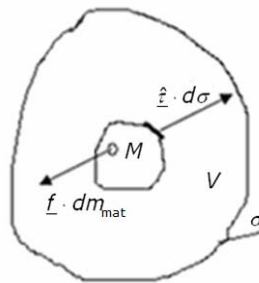


Fig. 2.2.5. Corp material de volum V și suprafață exterioară σ

Termenul $\iint_S \hat{\underline{t}} \cdot d\sigma$ din relația (2.2.12.a) reprezintă rezultanta forțelor de tensiune ce acționează asupra volumului V de mediu continuu, cauzată numai de *tensiunile exterioare* care se exercită pe suprafața exterioară σ de contact cu mediul înconjurător. Tensiunile interioare cauzate de contactul particulelor materiale componente se anulează în urma integrării întrucât ele apar în perechi de câte două, egale în modul dar de sens contrar, conform principiului acțiunii și reacțiunii.

Exprimând tensiunea $\hat{\underline{t}}$ în baza relației (2.2.9) și folosind formula Gauss-Ostrogradski, obținem următoarea relație pentru rezultanta forțelor de tensiune:

$$\iint_{\sigma} \underline{\hat{t}} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \underline{\hat{t}}^t \underline{n}_{sup} \cdot d\sigma = \iiint_V \nabla_{\underline{x}} (\underline{\hat{t}}^t) \cdot dV = \iiint_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial x_i} \cdot dV \quad (2.12.b)$$

Rescriem ecuația (2.2.12.a) sub forma:

$$\iiint_V \left(\frac{dV}{dt} \cdot \rho - \underline{f} \cdot \rho - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial x_i} \right) \cdot dV = 0 \quad (2.2.12.c)$$

Integrala de volum din relația (2.2.11.c) se va anula numai dacă va fi satisfăcută condiția:

$$\frac{dV}{dt} = \underline{f} + \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial x_i} \quad (2.2.13)$$

Relația (2.2.13) poartă numele de *ecuația Cauchy de mișcare a particulei materiale a unui mediu continuu*.

Când fiecare particulă a mediului staționează, $\frac{dV}{dt} = 0$, spunem că mediul continuu este în echilibru.

Ecuația constitutivă a materialului corpului considerat, care stabilește relațiile de legătură între deformări și tensiuni, este dată de legea generalizată a lui Hook:

$$\hat{t}_{ij} = 2 \cdot G_{YP} \cdot a_{defij} + \lambda_{YP} \cdot \sum_{i=1}^3 a_{defij} \cdot \delta_{ij}, \text{ cu } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.14)$$

S-au folosit următoarele notații: $G_{YP} = \frac{E_Y}{2(1+\mu_p)}$, $\lambda_{YP} = \frac{\mu_p E_Y}{(1+\mu_p)(1-2\mu_p)}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

În cazul fluidelor, ecuația constitutivă (2.2.13) care descrie o relație liniară între tensiuni și deformări este valabilă numai pentru fluidele newtoniene.

Astfel în cel mai simplu caz de al mișcării laminare a unui fluid vâscos între două plăci paralele, din figura 2.2.6, care se produce prin deplasarea uneia dintre plăci direcția Ox_1 , tensiunea de frecare locală τ dintre cele două straturi vecine și viteza $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ sunt legate prin *relația lui Newton*:

$$\hat{t} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (2.2.15)$$

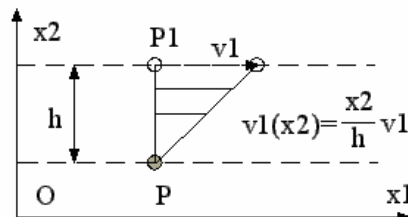


Fig. 2.2.6. Mișcarea laminară a unui fluid vâscos între două plăci paralele

Coeficientul de proporționalitate μ se numește *coeficient dinamic de viscozitate*.

În cazul fluidelor deformările se vor înlocui cu viteze de deplasare, iar ecuația constitutivă va fi sub forma:

$$\hat{r}_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot b_{vit_{ij}} - \left[p + \frac{2}{3} \mu \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] \delta_{ij}, \text{ cu } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.16)$$

2.3. Aspecte cinematice ale curgerii fluidelor

Aspectele cinematice ale curgerii fluidelor sunt sintetizate în cele ce urmează, în principal, după lucrările [11], [24] și [30] și fac referire la metodele de observare a curgerii unui fluid care permit obținerea unei reprezentări matematice a acesteia prin raportarea la un sistem de coordonate. Mișcarea unei particule fluide va fi caracterizată prin aceleași legi de conservare ca și în cazul particulelor materiale solide, însă, după cum s-a arătat în paragraful anterior, o particulă fluidă în mișcare interacționează de o așa manieră cu mediul înconjurător (deformare, tensionare) încât la un moment dat aproape că își pierde identitatea inițială. Din acest motiv mișcarea unei particule fluide nu va putea fi înțeleasă, în mod individual, fără a înțelege mișcarea fluidului pe întreg domeniul de curgere.

Din perspectiva mecanicii clasice, vorbim de o reprezentare de tip Lagrange a curgerii unui fluid care presupune realizarea unor observații ale mișcărilor individuale ale particulelor de fluid și determinarea, în raport cu un sistem de coordonate a traiectoriei $C : \underline{r} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$ a fiecărei particule de fluid ca o funcție de poziția inițială \underline{r}_0 , asociată momentului de timp t_0 începerii observației, și timpul t .

În cazul folosirii unui sistem de coordonate cartezian $Ox_1x_2x_3$, figura 2.3.1, curgerea fluidului va putea fi interpretată în spațiul euclidian ca o transformare continuă $(\underline{r}_0, t_0) \rightarrow \underline{r}(\underline{r}_0, t)$, care asociază, în mod unic, punctelor inițiale $A(\underline{r}_0, t_0)$ punctele $B(\underline{r}, t)$ la momentele ulterioare de timp t . Unicitatea transformării trebuie înțeleasă ca asocierea unică dintre o poziție inițială și o traiectorie.

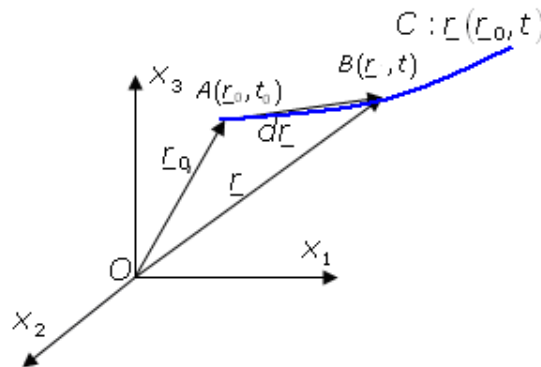


Fig. 2.3.1. Reprezentarea curgerii într-un sistem de coordonate cartezian

Din cunoașterea traiectoriei și aplicarea legilor de conservare se vor putea determina mărimile asociate particulei fluide, respectiv, scrie ecuațiile matematice ale reprezentării.

Astfel viteza \underline{v}_L determinată din această reprezentare, de-a lungul traiectoriei $\underline{r}(t)$, în condițiile unei poziții inițiale de observare fixate \underline{r}_0 , va fi

$$\underline{v}_L(\underline{r}_0, t) = \frac{d\underline{r}(\underline{r}_0, t)}{dt} \quad (2.3.1.a)$$

Accelerația particulei fluide, de-a lungul traiectoriei, se va calcula, la rândul ei, prin relația cunoscută:

$$\underline{a}(\underline{r}_0, t) = \frac{d\underline{v}(\underline{r}_0, t)}{dt} = \frac{d^2\underline{r}(\underline{r}_0, t)}{dt^2} \quad (2.3.1.b)$$

Ecuția de mișcare a particulei materiale de volum unitar și densitate ρ , sub acțiunea rezultantei forțelor $\sum \underline{F}$ va rezulta din aplicarea legii lui Newton:

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \sum \underline{F} \quad (2.3.2)$$

Dacă se pune problema calculării valorilor mărimilor asociate particulei fluide în diferite puncte $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ale corpului de fluid și diferite momente de timp t va fi necesară rezolvarea sistemului de ecuații inverse: $\underline{r}_0 = \underline{r}(\underline{r}, t) \leftrightarrow \underline{x}_0 = \underline{x}_0(\underline{x}, t)$ astfel încât mărimile respective să poată fi exprimate ca funcții continue de spațiu \underline{x} și timp t . Existența soluției sistemului de ecuații va fi garantată de inversabilitatea transformării $(\underline{r}_0, t_0) \rightarrow \underline{r}(\underline{r}_0, t)$ derivată din unicitatea ei. Scrierea în schimb a ecuațiilor reprezentării cu mărimile specifice particulei reprezentate astfel va conduce la forme complexe cauzate de complexitatea soluției sistemului de ecuații inverse.

Din acest motiv pentru analiza curgerii fluidelor se folosește metoda de reprezentare a lui Euler care presupune observarea, la momente de timp t , a mișcării particulelor fluide în anumite puncte \underline{x} , fixate. Mărimile specifice particulei se vor reprezenta, din punct de vedere matematic, sub forma unor câmpuri vectoriale $(\rho(\underline{x}, t), \rho(\underline{x}, t), \underline{v}(\underline{x}, t), T(\underline{x}, t))$ funcție de variabilele independente \underline{x} și t .

Un exemplu practic ar fi măsurarea vitezei de curgere a unui fluid prin amplasarea unui traductor de viteză într-un anumit punct \underline{x} al domeniului de curgere. Astfel se va măsura, la momentul de timp t , viteza $\underline{v}_E(\underline{x}, t)$ și direcția de curgere a particulelor de fluid care se mișcă prin *volumul de control (fixat)* al traductorului de viteză. Viteza măsurată va depinde de dimensiunile volumului de control considerat și durata dt de măsurare. Dacă acești parametri sunt suficienți de mici viteza măsurată nu va fi afectată de procesul de măsurare.

Cele două viteze măsurate astfel: $\underline{v}_L(\underline{r}_0, t)$ și $\underline{v}_E(\underline{x}, t)$ sunt reprezentări diferite ale aceleași viteze unice de curgere a fluidului. Ele sunt egale: $\underline{v}_L(\underline{r}_0, t) = \underline{v}_E(\underline{x}, t)$ numai dacă $\underline{x} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$.

Aplicarea legilor de conservare este simplă în cazul folosirii unei reprezentări de tip Lagrange, ele aplicându-se particulei/corpului de *volum material* de fluid în mișcare. În cazul folosirii unei reprezentări de tip Euler aceste legi se vor aplica unor puncte fixate în spațiu, suprafața care le cuprinde delimitând așa numitul *volum de control*.

Într-o reprezentare de tip Euler, derivata parțială funcție de timp a unei mărimi specifice particulei va reprezenta rata de variație în timp a acelei mărimi însă această rată nu va fi egală cu cea obținută prin reprezentarea de tip Lagrange a mărimii.

Aceasta a justificat folosirea *derivatei totale (materiale sau substanțiale)* a unei mărimi Ψ specifice particulei de fluid prin formula:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\Psi \quad (2.3.3)$$

în care $\nabla \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial \underline{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bullet}{\partial x_i} \underline{e}_i$ reprezintă operatorul „nabla”, iar viteza \underline{v} este:

$$\underline{v} = \left. \frac{d\underline{r}}{dt} \right|_{r_0 = \text{fixat}} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \sum_{i=1}^3 v_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \underline{e}_i .$$

Termenul $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ reprezintă derivata locală în raport cu timpul a mărimii Ψ și reprezintă rata de variație în timp a mărimii Ψ din poziția de observare fixată. O curgere staționară va avea $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$ pe întreg domeniul de curgere.

La termenul $(\underline{v} \cdot \nabla)\Psi$ ne vom referi ca și componenta convectivă sau advectivă a derivatei care va exprima rata de variație în timp a mărimii cauzate de variația spațială a câmpului reprezentării mărimii Ψ . Acest termen va fi nul dacă vom avea o variație spațială uniformă a mărimii Ψ sau vectorul viteză este paralel cu liniile $\Psi = \text{const}$ ale câmpului.

Referitor la semnificația fizică a derivatei totale trebuie făcută următoarea observație prin considerarea unui exemplu particular și anume: dacă considerăm temperatura fluidului T ca mărime de interes, observarea ratei de variație locale a temperaturii cu timpul nu este suficientă pentru a presupune că aceasta este cauzată numai de prezența unei surse de căldură fiind necesare informații și despre convecția termică.

Întrucât aplicarea legilor de conservare este ușor de realizat pentru reprezentarea de tip Lagrange, respectiv aplicarea lor asupra unui volum material de fluid (care conține aceleași particule de fluid pe toată durata observației) dar exprimarea lor este mai facilă pentru reprezentare de tip Euler, este justificată, de asemenea, prezentarea unei relații de legătură între integrala pe un volum material și integrala pe un volum de control. Această relație este dată de așa numita teoremă a transportului a lui Reynolds care, din punct de vedere matematic, reprezintă formula de derivare a unei integrale de volum.

Pentru înțelegerea modului de aplicare trebuie introduse o serie de elemente auxiliare care privesc aspecte de ordin geometric ale mișcării particulelor:

- a) *Traietoria*, după cum s-a discutat, reprezintă drumul $\underline{r}(t)$ parcurs de particula fluidă în mișcarea sa. Traietoria unei particule fluide care se mișcă cu viteza \underline{v} rezultă din formula de definiție a vitezei: $\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}$.
- b) *Curba fluidă*: Considerând viteza ca o funcție continuă de coordonate, rezultă că particulele care la momentul t_0 se aflau pe curba C_0 se deplasează în așa fel încât rămân întotdeauna în contact și se regăsesc la fiecare

moment pe o curbă C , care se deformează în timp și care poartă denumirea de *curbă fluidă*. În mod analog se definește *suprafața fluidă*, respectiv *volumul fluid*.

- c) *Linia de curent*, figura 2.3.1, reprezintă o curbă imaginată în fluid, asociată unui moment dat de timp t , care prezintă proprietatea de a fi tangentă vitezei \underline{v} de deplasare a particulelor fluide în fiecare din punctele sale. Ecuația liniei de curent rezultă din coliniaritatea vectorului viteză \underline{v} cu elementul de curbă $d\underline{r}$ exprimată prin anularea produsului vectorial:

$$\underline{v} \times d\underline{r} = 0, \text{ care, explicitat, conduce la sistemul de ecuații: } \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

cu t fixat. Liniile de curent nu coincid cu traiectoriile. În mișcarea staționară, în care parametrii mișcării nu depind explicit de timp, liniile de curent sunt fixe și coincid cu traiectoriile.

- d) *Suprafața de curent* este suprafața, la momentul t , formată din linii de curent. Suprafețele de curent sunt variabile cu timpul și fixe pentru o mișcare staționară.
- e) *Tubul de curent* este o suprafață de curent formată din linii de curent care se sprijină pe o curbă închisă care nu este o linie de curent.

Putem scrie atunci fluxul hidrodinamic Q_Ψ al unei mărimi Ψ specifice fluidului care curge cu viteza \underline{v} prin suprafața de curent σ , conform figurii 2.3.2, prin relația:

$$Q_\Psi = \iint_{\sigma} \Psi \cdot \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} \cdot d\sigma \quad (2.3.4.a)$$

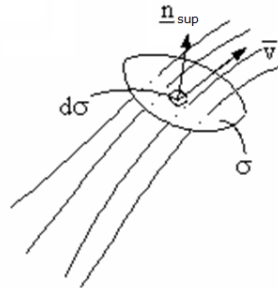


Fig. 2.3.2. Tub de curent

Dacă $\Psi = \rho$, vom vorbi despre debitul masic Q .

Dacă suprafața σ este închisă și $V(\sigma)$ este volumul delimitat de aceasta, pe baza teoremei Gauss-Ostrogradski, relația (2.3.4.a) se rescrie

$$Q_\Psi = \iiint_{V(\sigma)} \text{div}(\Psi \cdot \underline{v}) \cdot dV \quad (2.3.4.b)$$

Fluxul Q_Ψ prin suprafața închisă σ poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Considerăm atunci un volum material $V(t)$, de fluid, delimitat de suprafața închisă $\sigma(t)$, volum care se mișcă împreună cu fluidul și care va fi tot timpul format din aceleași particule de fluid. Suprafața $\sigma(t)$ considerată „oprită” la momentul t_c

și notată cu σ_C poartă numele de *suprafață de control*, iar volumul delimitat de aceasta va fi numit *volum de control* V_C .

Fluxul oricărei mărimi specifice $\Psi(\underline{x}, t)$ a fluidului prin suprafața σ este nul deoarece suprafața σ se mișcă și se deformează odată cu fluidul, în timp ce prin suprafața σ_C fluxul de fluid este nenul.

Prima formă a teoremei Reynolds este exprimată prin relația următoare:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \Psi \cdot dV = \iiint_{V_C} \left[\frac{d\Psi}{dt} + \Psi \cdot \text{div}(\underline{v}) \right] \cdot dV \quad (2.3.5.a)$$

O a doua formă a teoremei transportului, se obține plecând de la identitatea $\text{div}(\Psi \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot \text{grad}(\Psi) + \Psi \cdot \text{div}(\underline{v})$.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \Psi \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_C} \Psi \cdot dV + \iint_{\sigma_C} \Psi \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} \cdot d\sigma \quad (2.3.5.b)$$

2.4. Aspectele termodinamice ale curgerii fluidelor

Cele mai importante aspecte termodinamice care ne interesează pentru caracterizarea din punct de vedere termic a curgerii fluidelor sunt sintetizate, în cele de urmează, în principal, din lucrările [11], [24] și [40] și se referă la principiul întâi și la principiul al doilea ale termodinamicii.

Termodinamica clasică tratează din punct de vedere fenomenologic stările de echilibru ale sistemelor macroscopice și stabilește, pe baza unui set de observații empirice, sub forma unor relații coerente din punct de vedere matematic, o serie de principii (sau legi) prin care variațiile mărimilor necesare descrierii sistemului studiat sunt analizate din punctul de vedere al impactului acestora asupra stării de echilibru termodinamic.

Practic, în cadrul acestei lucrări, pe baza acestor principii vor putea fi descrise matematic observațiile privind evoluția unei alte mărimi necesare descrierii procesului de curgere și anume temperatura T . Din punct de vedere termodinamic temperatura T este o mărime de stare a cărei variație în timpul unei transformări depinde numai de starea inițială și starea finală între care are loc transformarea termodinamică.

Revenind la conceptul de *stare de echilibru termodinamic* a sistemului termodinamic asociat procesului de curgere al unui fluid, precizăm că starea de echilibru se poate caracteriza matematic prin intermediul așa numitei *ecuații de stare*, care exprimă o relație de legătură între mărimile folosite pentru descrierea procesului. În cazul gazelor ecuația se scrie pentru următoarele mărimi: presiunea p , densitatea ρ și temperatura T , având forma generală:

$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (2.4.1.a)$$

În particular trebuie reținută forma ecuației de stare pentru gazele ideale (perfecte) care sunt folosite ca referință în aprecierea abaterii de la comportamentul de gaz ideal al gazelor reale:

$$p = \rho R_p T \quad (2.4.1.b)$$

Prin R_p s-a notat constanta generală a gazului perfect respectiv.

Observațiile de natură termică privind procesul de curgere al unui *volum material* de fluid de volum V , de masă unitară, și densitate ρ care vor privi modul cum se conservă energia și sensul transformării termodinamice pot fi structurate relativ ușor sub forma unor relații analitice prin aplicarea primelor două principii ale termodinamicii sistemului considerat ca *sistem termodinamic închis* (sisteme care nu prezintă schimb de masă cu mediul exterior) cu considerarea fluidului ca și fluid ideal.

Primul principiu al termodinamicii afirmă că energia totală a unui sistem termodinamic se conservă pe parcursul unei transformări. Acest lucru se exprimă matematic prin următoarea relație de legătură între variația energiei interne a sistemului dU_{int} și formele schimbului de energie, respectiv, transferul de căldură δQ_{ct} și lucrul mecanic δL_{mec} , realizate pe durata transformării termodinamice:

$$\delta Q_{ct} = dU_{int} - \delta L_{mec} \quad (2.4.2)$$

În relația de mai sus numai energia interne a sistemului, a cărei variație se va exprima ca o diferență între energiile celor două stări de echilibru între care are loc transformarea, are caracter de mărime de stare. Practic variația energiei interne se poate calcula prin diferențiere iar variațiile căldurii și lucrului mecanic, în general, nu. Relația arată, de asemenea, și convenția de semne stabilită în cazul în care sistemul primește căldură și lucru mecanic din exterior.

Calculul transferului de căldură se face prin folosirea capacităților termice, determinate experimental și definite prin relațiile următoare:

$$C_V = \left. \frac{\delta Q_{ct}}{dT} \right|_{V=const} \quad (2.4.3.a)$$

$$C_p = \left. \frac{\delta Q_{ct}}{dT} \right|_{p=const} \quad (2.4.3.b)$$

Relațiile precizează parcursul de-a lungul căreia are loc transformarea termodinamică (volum constant sau presiune constantă) întrucât căldura nu este mărime de stare.

Primirea de căldură de către sistem din mediu exterior va avea drept consecință efectuarea de lucru mecanic de către forțele de presiune în relația cu mediului înconjurător.

Conform reprezentării din figura 2.4.1, lucrul mecanic efectuat de forța de presiune $p \cdot \underline{n}$ pe suprafața σ care delimitează volumul de fluid V , cu normala exterioră la suprafață \underline{n}_{sup} , în condițiile unei presiuni constante și al dilatației volumului: $dV = V' - V$, este:

$$dL_{mec} = \iint_{\sigma} p \cdot \underline{n}_{sup} \cdot d\sigma \cdot d\underline{r} = p \cdot dV \quad (2.4.4)$$

Referitor la obținerea lucrului mecanic efectuat în cursul transformării, printr-o operație de integrare pe curba $p = p(V)$, trebuie precizat că operația se poate face, matematic vorbind, numai pentru transformări termodinamice *reversibile* (parcursul în sens invers al transformării din punct de vedere al variației mărimilor caracteristice conduce la aceeași stare inițială).

Întrucât, în baza relației (2.4.2) (ținând seama de convenția de semn pentru efectuarea de lucru mecanic de sistem asupra mediului), avem: $\delta Q_{ct} = dU_{int} + p \cdot dV$, relațiile (2.4.3) se rescriu:

$$C_V = \left. \frac{dU_{int} + p \cdot dV}{dT} \right|_{V=const} = \left. \frac{\partial U_{int}}{\partial T} \right|_{V=const} \quad (2.4.5.a)$$

$$C_p = \left. \frac{\delta Q_{ct}}{dT} \right|_{p=const} = \left. \frac{dU_{int} + p \cdot dV}{dT} \right|_{p=const} = \left. \frac{\partial U_{int}}{\partial T} \right|_{p=const} + p \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{p=const} \quad (2.4.5.b)$$

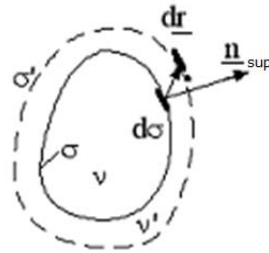


Fig. 2.4.1. Particulă de fluid de volum V și suprafață exterioară σ

Pe baza unor observații empirice s-a constatat că energia internă a unui fluid ideal depinde numai de temperatură $U_{int} = U_{int}(T)$, astfel că, în baza relației (2.4.5.a), energia internă U_{int} se poate exprima ca funcție numai de temperatura T prin intermediul capacității termice la volum constant C_V :

$$U_{int} = C_V \cdot T \quad (2.4.6)$$

Nivelul energetic al sistemului considerat se mai obișnuiește să fie caracterizat global printr-o altă mărime energetică de stare numită *entalpie*, introdusă prin relația următoare:

$$H_{entp} = U_{int} + pV \quad (2.4.7.a)$$

În cazul gazelor perfecte, entalpia se calculează în funcție de capacitatea termică la presiune constantă prin relația:

$$H_{entp} = C_p T \quad (2.4.7.b)$$

Prin *al doilea principiu* al termodinamicii se caracterizează sensul transformării termodinamice, și implicit reversibilitatea sau ireversibilitatea procesului termodinamic considerat. Acest lucru se exprimă prin intermediul mărimii de stare denumită *entropie*, introdusă prin intermediul variației:

$$dS_{entrp} = S_{entrp_2} - S_{entrp_1} = \frac{\delta Q_{ct}}{T} \quad (2.4.8)$$

Între variația entropiei și celelalte mărimi folosite pentru caracterizarea transformării există următoarea relație de legătură:

$$T \cdot dS_{entrp} = dU_{int} - \delta L_{mec} = dU_{int} + p \cdot dV = dH_{entp} \quad (2.4.9)$$

Conform relației de definiție a entropiei (2.4.8) al doilea principiu al termodinamicii arată că într-o transformare reversibilă adiabatică ($\delta Q_{ct} = 0$ nu există schimb de căldură între sistem și mediul exterior) variația entropiei este nulă:

$dS_{entrp} = 0$, adică entropia sistemului se conservă. Dacă transformarea este ireversibilă și adiabatică atunci $dS_{entrp} > 0$ și entropia sistemului crește.

Relațiile prezentate în cadrul acestui paragraf sunt o reprezentare de tip Lagrange a procesului. Obținerea unei reprezentări de tip Euler a aspectelor termodinamice ale procesului de curgere, conformă cu cele prezentate în capitolul anterior, impune realizarea unor observații asupra procesului de curgere prin folosirea unui volum de control. Din punct de vedere termodinamic sistemul analizat va fi un *sistem termodinamic deschis* care prezintă atât schimburi de energie cât și de masă cu mediul înconjurător, iar modul cum va fi dedusă această reprezentare va face parte dintre obiectivele paragrafului următor.

2.5. Ecuațiile curgerii laminare a fluidelor vâscoase

Aspectele mecanice, cinematice și termodinamice prezentate în paragrafele anterioare permit deducerea unei reprezentări matematice riguroase numai a procesului de curgere laminară a unui fluid vâscos. Ecuațiile asociate acestei reprezentări poartă numele, în literatura de specialitate, de *ecuațiile Navier-Stokes-Duhem*. Despre mișcarea unui fluid vâscos printr-un tub de curent se spune ca este laminară dacă traiectoriile particulelor de fluid supuse observațiilor sunt paralele între ele și paralele cu axa tubului de curent.

Regimul de curgere laminară este unul dintre regimurile de curgere care se poate întâlni în situații reale. Însă, în cazul curgerii gazelor naturale prin conductele de transport, cel mai adesea, curgerea lor are loc în regim turbulent. Dacă ne raportăm la definiția dată pentru regimul de curgere laminară regimul de curgere turbulent este caracterizat și prin existența unor mișcări secundare transversale pe axa tubului de curent. O reprezentare matematică riguroasă pentru descrierea generală a fenomenelor specifice regimului de curgere turbulentă nu se poate realiza din cauza complexității fenomenelor. Acest lucru este posibil însă, în diferite cazuri particulare de curgere în regim turbulent, cum este și cazul curgerii gazelor reale prin conductele de transport, prin integrarea observațiilor empirice și a reprezentărilor matematice asociate lor în reprezentarea matematică a procesului de curgere laminară. Va rezulta o reprezentare matematică care se va folosi exclusiv pentru descrierea cazului particular de curgere turbulentă luat în considerare.

În continuare se va face o prezentare, în principal după lucrările [11], [24], [29], a ecuațiilor Navier-Stokes-Duhem. La baza deducerii acestor ecuații stă reprezentarea de tip Euler a observațiilor asupra fenomenelor specifice procesului de curgere.

2.5.1. Ecuația continuității

Ecuația continuității exprimă principiul de conservare al masei m a corpului de volum material $V(t)$ delimitat de mediul înconjurător prin suprafața închisă $\sigma(t)$. Întrucât volumul material considerat va conține tot timpul același număr de particule materiale și neexistând surse de materie interioare corpului considerat, se poate scrie:

$$m_{mat} = \iiint_{V(t)} \rho dV = const \quad (2.5.1.a)$$

Relația (2.5.1.a) care exprimă principiul conservării masei într-o reprezentare Lagrange trebuie rescrisă într-o formă care să permită trecerea la reprezentarea de tip Euler prin folosirea teoremei Reynolds (2.3.5). Astfel dacă fixăm arbitrar volumul de control V considerând volumul material $V(t)$ oprit la momentul de timp t , în baza relației (2.3.5.a) putem scrie:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \leftrightarrow \iiint_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\underline{v}) \right] dV = 0 \quad (2.5.1.b)$$

Întrucât volumul de control V este un volum arbitrar ales la timpul t , condiția de anulare a integralei este satisfăcută numai dacă integrandul din relația (2.5.1.b) se anulează, rezultând relația prin care se exprimă *forma diferențială a ecuației de continuitate* pentru o particulă de fluid:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\underline{v}) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.5.2.a)$$

Forma integrală a ecuației de continuitate, aplicabilă unui volum de control V de particule de fluid de masă oarecare, delimitat prin suprafața de control închisă σ , rezultă prin aplicarea, în aceleași condiții, a teoremei Reynolds, (2.3.5.b) reprezentării (2.5.1.a), și are următorul aspect:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_{\sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} d\sigma \quad (2.5.2.b)$$

Relația (2.5.2.a) arată că variația locală a masei volumului V al corpului de fluid considerat: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$ este cauzată de transferul de masă prin suprafața

exterioară σ a corpului reprezentat prin fluxul de masă: $-\iint_{\sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} d\sigma$.

Dacă mișcarea este staționară ($\frac{\partial m_{mat}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = 0$), fluxul hidrodinamic

de masă (2.3.4.a) prin suprafața de control închisă σ este nul (se conservă), adică:

$$\iint_{\sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} d\sigma = 0 \quad (2.5.3)$$

Utilitatea relației (2.5.3) este imediată în exprimarea conservării debitului masic (ca formă a principiului de conservare a masei) în cazul curgerii staționare a unui fluid printr-un tub de curent cu secțiunea de intrare A_1 , respectiv de ieșire A_2 :

$$-\iint_{A_1} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} d\sigma = \iint_{A_2} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_{sup} d\sigma \quad (2.5.4)$$

Trebuie făcută următoarea observație legată de posibilitatea deducerii unei relații de legătură, pe baza ecuației continuității (2.5.2) și a teoremei Reynolds (2.3.5), între derivata totală a unei mărimi $\phi = \iiint_{V(t)} \phi \cdot dV$ caracteristice corpului de

fluid de volum material $V(t)$ oarecare și derivata totală a mărimii specifice ϕ

(aceeași mărime însă care va caracteriza corpul de volum material cu masa unitate):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \phi dV = \iiint_V \rho \frac{d\phi}{dt} dV \quad (2.5.5)$$

2.5.2. Ecuatia mișcării

În cazul curgerii laminare a fluidului ecuația mișcării este o formă generalizată a legii a doua a lui Newton (2.2.1) și exprimă, practic, principiul conservării momentului de mișcare. Conform acestui principiu, variația momentului de mișcare al corpului de fluid de volum material $V(t)$ delimitat prin suprafața închisă $\sigma(t)$:

$$\frac{dM_{misc}}{dt} = \iiint_{V(t)} \rho \underline{v} \cdot dV \text{ se produce numai sub acțiunea rezultantei forțelor care}$$

$$\text{acționează asupra volumului corpului fluid: } \sum \underline{F} = \iiint_{V(t)} \underline{f} \rho dV + \iint_{\sigma(t)} \underline{\hat{t}} d\sigma \quad (\underline{f} -$$

intensitatea câmpului de forțe masice exterioare, $\underline{\hat{t}}$ - tensiunea care acționează pe suprafața de separare):

$$\frac{dM_{misc}}{dt} = \sum \underline{F} \quad (2.5.6)$$

Folosind relația (2.5.5) variația momentului de mișcare al corpului fluid se poate scrie pentru volumul de control arbitrar V , sub forma:

$$\frac{dM_{misc}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \underline{v} \cdot dV = \iiint_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV \quad (2.5.7.a)$$

Exprimarea forței rezultante $\sum \underline{F}$ se va face ținând seama de relația (2.12.b) pentru rezultanta forțelor de tensiune exterioare $\iint_{\sigma} \underline{\hat{t}} d\sigma$ care acționează

asupra corpului de fluid de volum V prin intermediul suprafeței exterioare σ :

$$\sum \underline{F} = \iiint_V \underline{f} \rho dV + \iint_{\sigma} \underline{\hat{t}} d\sigma = \iiint_V \left(\underline{f} \rho + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial t} \right) dV \quad (2.5.7.b)$$

Rezultă relația care exprimă principiul de conservare al momentului de mișcare în reprezentarea Euler:

$$\iiint_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV = \iiint_{V(t)} \left(\underline{f} \rho + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial t} \right) dV \leftrightarrow \iiint_V \left(\rho \frac{d\underline{v}}{dt} - \underline{f} \rho - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (2.5.7.c)$$

Întrucât volumul de control V este un volum arbitrar ales la momentul t , condiția de anulare a integralei este satisfăcută numai dacă integrandul din relația (2.5.7.c) se anulează. Exprimând derivata totală $\frac{d\underline{v}}{dt}$ pe baza relației (2.3.3.), se obține:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \underline{f} - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \hat{t}_i}{\partial t} = 0 \quad (2.5.7.d)$$

Relația (2.5.7.d) constituie, într-o reprezentare Euler, ecuația de mișcare pentru o particulă de fluid care se deplasează cu viteza \underline{v} sub acțiunea combinată a forțelor exterioare masice de intensitate \underline{f} și a tensiunii $\underline{\hat{t}}$ (explicitate conform relației (2.2.9)) ce acționează pe suprafața exterioară a particulei.

Componentele tensorului tensiunilor $\underline{\hat{t}}$ din ecuația (2.5.7.d) se vor exprima în baza ecuației constitutive (2.2.16) funcție de componentele vectorului vitezei de deplasare \underline{v} , ceea ce va permite scrierea formei *diferențiale a ecuației de mișcare a fluidelor newtoniene* pentru o particulă de fluid:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \underline{f} + \frac{1}{\rho} \nabla(p) - \frac{\mu}{\rho} \Delta(\underline{v}) - \frac{\mu}{3\rho} \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \quad (2.5.8.a)$$

Forma integrală a ecuației de mișcare se obține din ecuația (2.5.6) prin aplicarea relației (2.3.5.b) pentru exprimarea variației momentului de mișcare $\frac{dM_{misc}}{dt}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \underline{v} dV = - \iint_{\sigma} (\rho \underline{v}) \underline{v} n_{sup} d\sigma + \iiint_V \rho \underline{f} dV - \iint_{\sigma} p n_{sup} d\sigma + \iiint_V \left[\mu \cdot \Delta(\underline{v}) + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \right] dV \quad (2.5.8.b)$$

Relația (2.5.8.b) arată că variația locală a momentului de mișcare al masei volumului V al corpului de fluid considerat: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \underline{v} dV$ este cauzată de:

- a) transferul de mișcare prin suprafața exterioară σ a corpului, reprezentat prin fluxul momentului de mișcare: $-\iint_{\sigma} (\rho \underline{v}) \underline{v} n_{sup} d\sigma$;
- b) acțiunea forțelor exterioare masice: $\iiint_V \rho \underline{f} dV$ asupra masei corpului fluid;
- c) acțiunea forțelor de presiune hidrostatică: $-\iint_{\sigma} p n_{sup} d\sigma$ pe suprafața σ de separare;
- d) acțiunea forțelor de viscozitate: $\iiint_V \left[\mu \cdot \Delta(\underline{v}) + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \right] dV$, similară acțiunii unor forțe de frecare (vâscoasă).

2.5.3. Ecuația energiei

Ecuația energiei exprimă principiul de conservare al energiei totale al unui corp de volum material de fluid. Există mai multe forme de scriere ale acestei ecuații în funcție de reprezentare a formele de energie care o compun, respectiv, ca sumă dintre energia externă și energia internă.

Energia externă are o interpretare pur mecanică, fiind rezultatul unui proces mecanic caracterizat prin producerea de lucru mecanic iar variația ei va conduce la variația mărimilor care descriu din punct de vedere mecanic procesul (în cazul corpurilor fluide: presiune, viteză, densitate).

Energia internă va avea, în schimb, o interpretare pur termodinamică, fiind rezultatul unui proces de natură termodinamică, caracterizat prin schimb de căldură și lucru mecanic, iar variația ei va conduce la variația temperaturii (indirect, în cazul gazelor și la variația celorlalți parametri de care este legată prin ecuația de stare).

În cazul corpului de fluid a cărui mișcare este descrisă de ecuația de mișcare (2.5.7), *ecuația energiei externe* se poate scrie pornind de la variația totală a energiei cinetice E_{cin} a corpului fluid de volum material $V(t)$ de masă m_{mat} :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho \cdot v^2}{2} dV = \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV = \iiint_V \rho \cdot \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} dV \quad (2.5.9)$$

Ținând cont de formula (2.3.3) pentru explicitarea derivatei totale $\frac{d\underline{v}}{dt}$, în ecuația de mișcare (2.5.8.a) și ecuația constitutivă (2.2.16), se vor putea detalia diferitele forme de transfer energetic specifice procesului de curgere numai din punct de vedere mecanic:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} + \frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{dL_{sup}}{dt} + \frac{dL_{mec}}{dt} - \frac{\delta Q_{visc}}{dt} \quad (2.5.10)$$

Semnificația termenilor este următoarea:

a) *Energia potențială* E_{pot} care reprezintă lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui corp de volum V de fluid cu densitatea ρ într-un câmp de forțe de intensitate \underline{f} : $\frac{dE_{pot}}{dt} = \iiint_V \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{f} \cdot dV$;

b) *Lucrul mecanic al forțelor de suprafață* L_{sup} : $\frac{dL_{sup}}{dt} = \iint_{\sigma} \left(\sum_{k=1}^3 \hat{i}_k \cdot \underline{v} \right) \cdot \underline{n}_{supk} d\sigma$;

c) *Lucrul mecanic consumat pentru comprimarea mediului fluid* L_{mec} (lucrul mecanic efectuat de forța de presiune hidrostatică pe suprafața σ): $\frac{dL_{mec}}{dt} = \iiint_V \rho \cdot \nabla \underline{v} \cdot dV$;

d) *Energia mecanică transformată în căldură* Q_{visc} ca urmare a lucrului mecanic al forțelor de viscozitate din interiorul fluidului: $\frac{\delta Q_{visc}}{dt} = \iiint_V \phi dV$.

În relația de exprimare a puterii mecanice transformate în căldură $\frac{\delta Q_{visc}}{dt}$ trebuie să se țină seama de forma matematică a termenului care exprimă această disipare:

$$\phi = 2\mu \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{vit_{jk}} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \nabla^2 (\underline{v}) \right] \quad (2.5.11.a)$$

Astfel, dacă se ține seama de relația (2.2.6) de definire a coeficienților de deformare: $b_{vit_{jk}}$, se observă că: $\phi \geq 0$, întrucât:

$$\phi = 2\mu \left(b_{vit_{11}}^2 + b_{vit_{22}}^2 + b_{vit_{33}}^2 \right) + \frac{2\mu}{3} \left[\left(b_{vit_{11}} - b_{vit_{22}} \right)^2 + \left(b_{vit_{22}} - b_{vit_{33}} \right)^2 + \left(b_{vit_{33}} - b_{vit_{11}} \right)^2 \right] \quad (2.5.11.b)$$

Ecuația energiei interne rezultă din aplicarea primului principiu al termodinamicii curgerii corpului fluid de volum material $V(t)$. Se va lua în considerare numai transferul de căldură prin conducție termică prin suprafața de separare σ a corpului

de fluid cu mediul înconjurător $\frac{\delta Q_{ct}}{dt}$ (care se va putea exprima prin relația Fourier (2.5.12)), transformare energiei mecanice în căldură $\frac{\delta Q_{visc}}{dt}$ (interpretată ca sursă internă de căldură) și lucrul mecanic efectuat pentru comprimarea mediului fluid $\frac{dL_{mec}}{dt}$:

$$\frac{\delta Q_{ct}}{dt} = \iint_{\sigma} \lambda_c (\nabla T \cdot \underline{n}) d\sigma = \iiint_V \nabla (\lambda_{ct} \cdot \nabla T) dV \quad (2.5.12)$$

Prin λ_{ct} s-a notat coeficientul de transfer termic prin conducție termică.

Primul principiu al termodinamicii aplicat volumului material $V(t)$ al corpului fluid se va exprima, ținând cont de relația (2.4.2), sub forma:

$$\frac{dU_{int}}{dt} = -\frac{dL_{mec}}{dt} + \frac{\delta Q_{ct}}{dt} + \frac{\delta Q_{visc}}{dt} \quad (2.5.13)$$

Ecuția (2.5.13) arată că variația totală a energiei interne a corpului constituit dintr-un fluid vâscos este determinată de:

- a) Încălzirea gazului datorită comprimării: $-\frac{dL_{mec}}{dt}$;
- b) Conducție termică ($\lambda_{ct} \neq 0$): $\frac{\delta Q_{ct}}{dt}$;
- c) Transformarea în căldură al lucrului mecanic al forțelor de viscozitate $\frac{\delta Q_{visc}}{dt}$.

Dacă se consideră un volum de masă unitară, cu folosirea relației (2.2.8), în baza relațiilor de definire a entalpiei (2.4.7.a), respectiv, a entropiei (2.4.9) se poate scrie forma diferențială a ecuației de conservare a energiei interne (2.5.13):

$$\rho \cdot T \cdot \frac{ds_{entrp}}{dt} = \Phi + \nabla \cdot (\lambda_{ct} \cdot \nabla T) \quad (2.5.14)$$

Ecuția (2.5.14) arată că variația substanțială $\frac{ds_{entrp}}{dt}$ a entropiei specifice

$s_{entrp} = \frac{S_{entrp}}{m_{mat}}$, este produsă de disiparea energiei mecanice (Φ) și conductibilitate termică (λ_c). Entropia fluidului aflat în mișcare se conservă dacă conductibilitatea termică și viscozitatea sunt nule, caz în care regimul de curgere este un *regim izentropic* de curgere.

Dacă se neglijează conductibilitatea termică ($\frac{\delta Q_{ct}}{dt} = 0$ sau $\lambda_{ct} = 0$), situație care corespunde unei curgeri adiabatică efectuată fără schimb de căldură cu mediul exterior, ecuația (2.5.14) devine:

$$\rho \cdot T \cdot \frac{ds_{entrp}}{dt} = \Phi \quad (2.5.15)$$

Întrucât $\phi \geq 0$, conform relației de definiție (2.5.11.b) avem $\frac{ds_{entrp}}{dt} \geq 0$.

Aceasta înseamnă că entropia mișcării adiabatică a fluidului vâscos este crescătoare astfel că din principiul al doilea al termodinamicii rezultă că *mișcarea fluidului este o transformare termodinamică ireversibilă*, fiind astfel un *proces termodinamic neizentropic*.

Dacă se neglijează și căldura care provine din frecarea vâscoasă, $\phi = 0$, ecuația bilanțului energetic se reduce la ecuația: $\frac{ds_{entrp}}{dt} = 0$ care corespunde mișcării unui fluid ideal. Pentru ca mișcarea fluidului ideal să poată fi considerată izentropică, entropia asociată mișcării particulelor de fluid aflate pe diferite linii de curent trebuie să aibă aceeași valoare

Ecuația de conservare a energiei totale a corpului de fluid se va scrie pe baza ecuațiilor de conservare a energiei externe (2.5.10) și interne (2.5.13):

$$\frac{d}{dt}(U_{int} + E_{cin} + E_{pot}) = \frac{\delta Q_{ct}}{dt} + \frac{dL_{sup}}{dt} \quad (2.5.16)$$

2.6. Caracteristicile procesului de curgere a gazelor reale

Procesul de curgere al gazelor reale prezintă o serie de caracteristici care nu pot fi reprezentate riguros matematic prin aplicarea unor principii sau ecuații ale fizicii, reprezentarea matematică fiind rezultatul efectuării unor experimente și deducerii unor observații empirice [17], [30].

Astfel, din punct de vedere mecanic gazele reale se încadrează în categoria fluidelor vâscoase care opun rezistență curgerii iar măsura acestei rezistențe este reprezentată prin coeficientul de viscozitate dinamică μ (sau cinematică $\nu = \frac{\mu}{\rho}$).

Experimental s-a constatat că viscozitatea unui fluid variază semnificativ numai cu temperatura. Influența presiunii asupra viscozității este foarte mică. De exemplu, studiile de specialitate arătând că valoarea viscozității la o presiune de 20bar este cu 4,6% decât valoarea viscozității la presiunea de 1bar.

Variația cu temperatura a coeficientului de viscozitate dinamică se poate aproxima cu o precizie suficient de bună prin relația lui Sutherland

$$\mu(T) = \mu_N \frac{1 + \frac{C_{gaz}}{T_N}}{1 + \frac{C_{gaz}}{T}} \sqrt{\frac{T}{T_N}} = \mu_N \left(\frac{T_N + C_{gaz}}{T + C} \right) \left(\frac{T}{T_N} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.6.1)$$

În relația anterioară μ_N reprezintă viscozitatea dinamică la $0^{\circ}C$ (sau echivalent $T_N = 273,15K$ care este temperatura stării termodinamice de referință normale), iar C_{gaz} constantă de calcul. Pentru gazul metan $C_{gaz} = 164K$ iar $\mu_N = 10,29 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s$.

Din punct de vedere termodinamic comportamentul gazelor reale (vâscoase) diferă de cel al gazelor perfecte (ideale). Acest lucru a necesitat introducerea unui

factor de abatere $Z(p, T)$ (denumit și factor de compresibilitate) în scrierea ecuației de stare a gazelor reale raportată la ecuația de stare a gazelor reale (2.4.1.b):

$$p = Z\rho R_p T \quad (2.6.2)$$

Calculul factorului de abatere $Z(p, T)$ se poate face cu o precizie destul de bună, în funcție de valorile reduse (raportate) ale presiunii și temperaturii, $p_{red} = \frac{p}{p_{cr}}$, respectiv $T_{red} = \frac{T}{T_{cr}}$, pe baza unei relații, destul de uzuale, a lui Berthelot:

$$Z = 1 + \frac{9}{128} \frac{p_{red}}{T_{red}} \left[1 - 6 \left(\frac{1}{T_{red}} \right)^2 \right] \quad (2.6.3.a)$$

Parametrii p_{cr} și T_{cr} caracterizează starea termodinamică critică a gazului, respectiv starea fizică în care faza lichidă și faza gazoasă se confundă.

„American Gaz Association” (AGA) recomandă pentru presiuni până la 70 de bar folosirea următoarei relații de calcul a factorului de abatere:

$$Z = 1 + 0,257 p_{red} - 0,533 \frac{p_{red}}{T_{red}} \quad (2.6.3.b)$$

Pentru calcularea cu o precizie mai ridicată a factorului de abatere Z se folosește relația Hall-Yarborough:

$$Z(p, T) = \frac{0,06125 p_{red} T_{ired} e^{-1,2(1-T_{ired})^2}}{y} \quad (2.6.3.c)$$

în care:

a) Temperatura inversă redusă: $T_{ired} = \frac{1}{T_{red}}$;

b) Parametrul y se determină prin rezolvarea următoarei ecuații neliniare:

$$-0,06125 p_{red} T_{ired} e^{-1,2(1-T_{ired})^2} + \frac{y + y^2 + y^3 - y^4}{(1-y)^3} - (14,76 T_{ired}^2 - 9,76 T_{ired}^2 + 4,58 T_{ired}^3) y^2 + (90,7 T_{ired} - 242,2 T_{ired}^2 + 42,4 T_{ired}^3) y^{2,18+2,82 T_{ired}} = 0 \quad (2.6.3.d)$$

Din punct de vedere cinematic, curgerea gazului natural prin conductele de transport are loc, în cele mai multe din cazurile practice, în regim turbulent. După cum s-a mai precizat și la începutul paragrafului 2.5, curgerea în regim turbulent prezintă pe lângă mișcarea principală de curgere de-a lungul axei conductei și mișcări secundare transversale pe această axă.

Criteriul după care se face discriminarea regimului de curgere este numărul Reynolds, adimensional. Pentru o conductă circulară cu diametrul interior D prin care curge, cu viteza medie v_M , un fluid cu viscozitatea cinematică ν , numărul Reynolds se calculează cu relația:

$$Re = \frac{v_M D}{\nu} \quad (2.6.4)$$

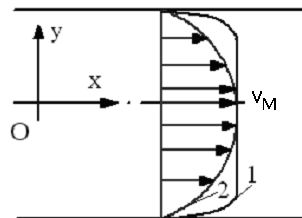
Experimental s-au stabilit niște intervale de variație ale numărului Reynolds care permit încadrarea regimului curgerii. Astfel dacă $Re < Re_{crit_inferior} = 2.000$ curgerea are loc, exclusiv, în regim laminar. Chiar dacă apare o perturbație care

scoate curgerea din acest regim, în momentul dispariției perturbației curgerea revine la regimul laminar. Pentru valori $Re > Re_{crit_superior} = 100.000$ curgerea are loc numai în regim turbulent. Pentru $Re_{crit_inferior} \leq Re \leq Re_{crit_superior}$ orice perturbație transformă ireversibil în curgere turbulentă orice curgere laminară existentă.

În cazul curgerii turbulente existența mișcărilor transversale pe direcția principală de curgere conduce la schimbări bruște ale traiectoriilor particulelor fluide astfel încât vom avea o distribuție a vitezei mult mai aplatizată decât distribuția de tip parabolic existentă în cazul unui regim laminar de curgere (figura 2.6.1).

Acest profil al vitezei, specific regimului turbulent de curgere, face ca regimul turbulent de curgere să fie mai eficient din punctul de vedere al transferului de masă decât regimul laminar.

Mișcarea haotică a particulelor de fluid va induce un caracter aleatoriu mărimilor caracteristice procesului de curgere.



1-profil viteza curgere turbulenta
2-profil viteza curgere laminara

Fig. 2.6.1. Profiluri de curgere viteză

Ca metodă de deducere a unei reprezentări matematice a procesului de curgere în regim turbulent, în mecanica fluidelor [11] se folosește o metodă bazată pe descompunerea mărimilor caracteristice procesului de curgere într-o parte medie și o parte pulsatorie (aleatoare), și înlocuirea lor, sub această formă în ecuațiile asociate reprezentării matematice a curgerii în regim laminar. Pentru ca reprezentarea rezultantă să fie completă (sistemul de ecuații să fie un sistem închis) vor trebui găsite relații de legătură între mărimile pulsatorii.

Însă, în aplicațiile practice care țin de curgerea gazului prin conductele de transport o astfel de metodă este greu de aplicat. S-a preferat cumulara efectelor introduse de mărimile pulsatorii cu efectul viscozității gazului sub forma rezistenței mecanice opusă de gazul real la curgere, măsurată experimental prin pierderea de presiune de-a lungul tronsonului de conductă considerat.

Pentru exprimarea acestor pierderi de presiune s-a luat ca punct de pornire curgerea în regim laminar printr-un tronson de conductă de lungime L și diametru interior D prin care fluidul vâscos cu densitatea ρ , curge cu viteza medie v_M . Prin rezolvarea ecuației de mișcare s-a obținut următoarea relație de calcul a pierderii de presiune de-a lungul tronsonului de lungime L :

$$\Delta p = -\frac{\lambda}{D} \frac{\rho v_M^2}{2} L \quad (2.6.5)$$

Semnul minus din relația (2.6.5) arată descreșterea presiunii în sensul de curgere al fluidului cu viteza v_M .

Exprimarea acestor pierderi s-a făcut prin intermediul factorului de pierderi hidraulice (care se poate interpreta și ca un coeficient de frecare) λ având următoarea formulă de calcul:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.6.6)$$

În literatura de specialitate, acest coeficient mai poartă numele și de *coeficientul lui Darcy-Weissenbach*, sau *coeficientul Fanning*:

$$\lambda_{Fan} = \frac{1}{4} \lambda \quad (2.6.7)$$

Cercetările experimentale făcute pentru studiul legăturii dintre factorul de pierderi hidraulice λ , numărul Reynolds Re și rugozitatea interioară relativă $r_r = \frac{k_a}{D}$ a peretelui interior al conductei de transport de rugozitate interioară absolută k_a , au condus la diagrama prezentată în figura 2.6.2, denumită și diagrama Moody.

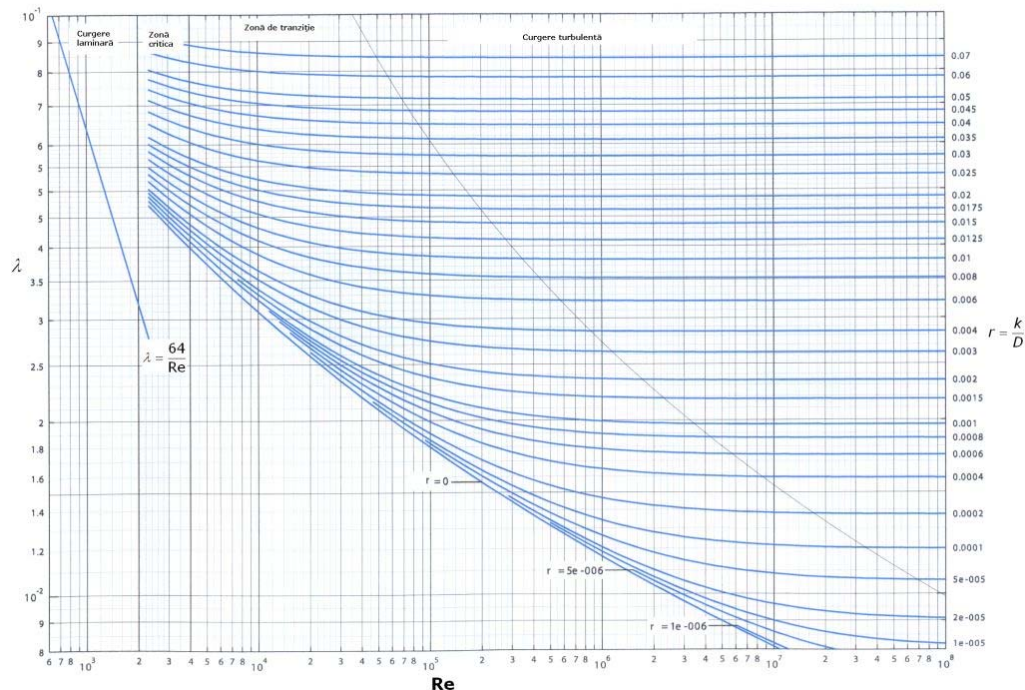


Fig. 2.6.2. Diagrama Moody

Din figură 2.6.2 se pot trage o serie de concluzii, și anume:

- Mișcarea este laminară pentru $Re < 2.000$;
- Pentru domeniul mișcării laminare, factorul de pierderi hidraulice λ depinde exclusiv de numărul Reynolds;
- În domeniul mișcării turbulente există niște regimuri de curgere pentru care, indiferent de rugozitate, factorul de pierderi hidraulice λ depinde numai de numărul Reynolds (cazul conductelor hidraulice netede);

- d)** De la o anumită valoare a numărului Reynolds, factorul de pierderi hidraulice λ rămâne constant și depinde numai de rugozitatea relativă (cazul conductelor hidraulice rugoase);
- e)** Aceeași conductă poate fi hidraulic rugoasă sau hidraulic netedă, în funcție de valoarea numărului Reynolds și de valoarea rugozității relative.

În cazul conductelor cu diametrul interior: $D \leq 60\text{cm}$, o estimare rapidă a coeficientului de rezistență hidraulică λ a unui tronson de conductă de diametru interior $D(\text{cm})$ se poate face prin intermediul formulei Weymouth:

$$\lambda = \frac{0,04363}{\sqrt[3]{D}} \quad (2.6.8)$$

Metoda de calcul empiric pentru factorul de pierderi hidraulice λ la nivelul unei secțiuni de curgere presupune că se cunosc: diametrul interior al conductei D , rugozitatea absolută k_a (tabelul din figura 2.6.4), viteza medie pe secțiune: v_M și viscozitatea cinematică ν :

| Tipul conductei | $k_a[\text{mm}]$ |
|---|--|
| Țeavă de sticlă | 0,001 ... 0,002 |
| Țeavă din material plastic | 0,002 ... 0,004 |
| Țevi trase din alamă, plumb din aluminiu | 0,002 ... 0,01 0,015 ... 0,06 |
| Țevi din oțel trase noi acoperite cu bitum conducte de apă caldă conducte de apă cu depuneri medii conducte de apă cu depuneri importante | 0,02 ... 0,10 0,03 ... 0,04 0,20 1,50 3,00 |
| Țevi de oțel sudate noi, neprotejate acoperite cu bitum conducte de apă cu depuneri slabe conducte de apă cu depuneri importante | 0,1 0,05 1 ... 1,5 2 ... 4 |
| Țevi de oțel zincate | 0,15 |
| Țevi de fontă noi conducte de apă cu depuneri medii conducte de apă cu depuneri importante | 0,25 ... 1 1 ... 1,5 2 ... 4 |
| Țevi de azbociment noi în funcțiune | 0,05 ... 0,1 0,6 |

Fig. 2.6.4. Valorile rugozității absolute echivalente pentru diferite tipuri de materiale

- a)** Se alege o rugozitate absolută echivalentă k_a ;
- b)** Se calculează viscozitatea cinematică ν a gazului la temperatura de curgere T_M pe baza formulei: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, în care: μ - viscozitatea dinamică a gazului a cărei variație cu temperatura, funcție de viscozitatea dinamică din starea termodinamică normală, se va calcula cu relația (2.6.1), iar ρ - densitatea gazului calculată pe baza ecuației de stare (2.6.2);
- c)** Se calculează numărul Reynolds cu relația (2.6.4);
- d)** dacă $Re < 2.000$ curgerea are loc în *regim laminar*, caz în care coeficientul de rezistență hidraulică λ , se calculează cu formula Hagen-Poiseuille (2.6.6);
- e)** În cazul în care: $Re > 2.000$ curgerea are loc în *regim turbulent*, caz în care coeficientul de rezistență hidraulică λ se calculează cu formula implicită

Colebrook-White, cu reprezentarea grafică din figura 2.6.2, valabilă în întregul domeniu al mișcării turbulente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k_a}{3,71D} \right) \quad (2.6.9)$$

Inițializarea calculelor se poate face pornind de la o valoare inițială λ_0 a coeficientului de pierderi hidraulice alegând o valoare din intervalul $(0,02...0,04)$, o valoare mai mică alegându-se pentru conductele cu diametru mai mare. O estimare a acestei valori se poate face pentru conductele cu diametrul mai mic de 600mm cu formula Weymouth, relația (2.6.8).

Pentru formula implicită Colebrook-White există formule explicite de calcul (precizia de calcul sub 2%) cum ar fi:

a) Formula Techo:

$$\lambda = \left[-0,8685 \ln \left(\frac{1,964 \cdot \ln Re - 3,8215}{Re} + \frac{k_a}{3,71D} \right) \right]^{-2} \quad (2.6.10.a)$$

b) Formula Haaland:

$$\lambda = \frac{1}{\left\{ 1,8 \lg \left[\left(\frac{k_a}{3,71D} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right] \right\}^2} \quad (2.6.10.b)$$

În domeniul *conductelor hidraulic netede*, rugozitatea nu are nici o pondere și relația (2.6.9) se reduce la relația von Karman și Prandtl:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (2.6.11)$$

Pentru relația von Karman-Prandtl, există o serie de formule de aproximare și anume:

a) Formula Blasius verificată experimental pentru $Re < 10^5$:

$$\lambda = \frac{1}{4 \sqrt[4]{100 Re}} \quad (2.6.12)$$

b) Formula Konakov cu valabilitate extinsă până la $Re = 10^7$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \cdot \lg (Re) - 1,5 \quad (2.6.13)$$

În schimb, în cazul *conductelor hidraulic rugoase*, numărul Reynolds este suficient de mare astfel încât în relația (2.6.9) ponderea primului termen din paranteză să devină foarte mică, relația Colebrook-White (2.20) reducându-se la formula Karman-Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{k_a}{D} + 1,14 \quad (2.6.14)$$

Încadrarea conductei într-unul din aceste regimuri de curgere turbulentă, respectiv hidraulic neted, de tranziție (semirugos sau prepătratic) sau hidraulic rugos (turbulent pătratic) și folosirea unor formule simplificate de calcul a coeficientului de pierderi hidraulice, se face pe baza criteriului:

$$C_r = Re \sqrt{\lambda} \frac{k_a}{D} \quad (2.6.15)$$

Astfel vom avea:

- a) $C_r \leq 9,4$, conducta este *hidraulic netedă*;
- b) $9,4 < C_r \leq 200$, conducta este în regim de *tranziție*;
- c) $C_r > 200$, conducta este *hidraulic rugoasă*.

Literatura americană [17] indică pentru țevi cu diametru de peste 250mm o rugozitate absolută echivalentă începând cu $k_a=0,01778$, iar pentru țevi cu diametru mai redus: $k_a=0,01524$. Unele fabrici de țevi din Europa indică pentru țevi noi trase $k_a=0,02...0,1$, iar pentru țevi sudate $k_a=0,04...0,1$. Aceste valori sunt prevăzute pentru țevi noi, dar dacă se ține seama de deteriorarea, în timp a țevilor ca urmare a curgerii fluidului, pentru țevi trase se va adopta $k_a=0,05$ iar pentru țevi sudate $k_a=0,1$.

2.7. Modelul continuu al curgerii gazului natural printr-o conductă de transport

Reprezentarea matematică a procesului de curgere a gazelor naturale prin conductele de transport va ține seama de simplificările ce se pot opera asupra ecuațiilor prezentate în cadrul paragrafului (2.5) prin integrarea reprezentărilor matematice particulare asociate observațiilor empirice care țin de caracteristicile gazelor reale detaliate în paragraful (2.6) precum și luarea în considerare a geometriei conductei de transport.

Astfel, întrucât aproape toate cazurile de curgere întâlnite în industria gaziferă se situează în zona curgerii turbulente toate mărimile prin care se descrie curgerea: densitatea ρ , presiunea p , viteza de curgere v și temperatura T se consideră a fi valori medii temporale raportate la secțiunea conductei de transport. Efectul viscozității gazului, respectiv, al turbulenței se va introduce în ecuațiile curgerii sub forma unor pierderi de presiune cuantificate prin factorul de pierderi hidraulice λ .

Considerarea geometriei conductei de transport și anume lungimea conductei mult mai mare decât diametrul ei permite a trata curgerea gazului ca o *curgere unidimensională* caracterizată prin aceea că numai componentele vectorilor mărimilor, care descriu procesul, orientate de-a lungul axei conductei $Ox = Ox_1$ sunt nenule. Restul componentelor, orientate după celelalte axe de coordonate: $Ox_2 = Oy$ și $Ox_3 = Oz$, se vor considera egale cu zero. Vom avea atunci:

- a) $p(\underline{x}, t) \rightarrow p(x, t)$;
- b) $\underline{v}(\underline{x}, t) \rightarrow v(x, t)$;
- c) $\rho(\underline{x}, t) \rightarrow \rho(x, t)$;
- d) $T(\underline{x}, t) \rightarrow T(x, t)$.

Pentru scrierea ecuațiilor procesului de curgere unidimensională pornind de la ecuațiile curgerii laminare a fluidelor vâscoase cu simplificările propuse, se consideră tronsonul de conductă de diametru interior $D = const$ și lungime L , din figura 2.7.1.

Procesul de curgere al gazului realizat cu viteza $v(x, t)$ se va observa prin intermediul volumului de control definit ca volumul interior al tronsonului de conductă: $V = A \cdot L$, cu elementul de volum $dV = A dx$. Prin $A = \frac{\pi D^2}{4}$ s-a notat secțiunea

circulară de curgere, iar $a(x)$ este unghiul de înclinare al tronsonului de conductă astfel încât: $\sin a(x) = \frac{dz}{dx}$.

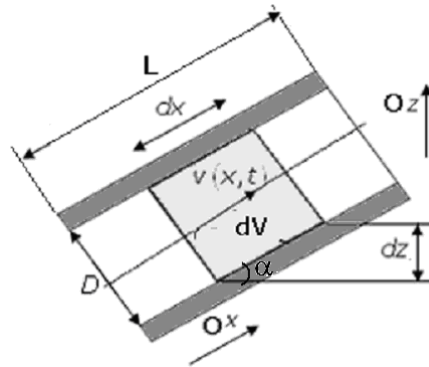


Fig. 2.7.1. Tronson de conductă

Efectul viscozității gazului, respectiv efectele componentelor pulsatorii specifice regimului turbulent de curgere vor fi cuantificate printr-un termen de pierdere de presiune având o formă similară celui definit prin relația (2.6.5). Pentru elementul de volum de control dV din figura 2.7.1 el va avea o formă care va arăta și orientarea pierderilor de presiune în cazul vitezelor negative: $\frac{dp_{frec}}{dx} = -\frac{\lambda \rho v |v|}{D \cdot 2}$.

Întrucât curgerea are loc în câmp gravitațional, pentru înclinația conductei dată de unghiul $a(x)$, intensitatea câmpului de forțe exterioare se reduce la accelerația gravitațională, respectiv: $\underline{f} \rightarrow -g \sin a(x)$.

În ceea ce privește schimburile energetice cu mediul înconjurător se va lua în considerare numai transferul de căldură realizat cu solul prin conducție termică prin peretele conductei, definit prin intermediul fluxului termic $q_{ct} \left(\frac{J}{kg \cdot s} \right)$ astfel

$$\text{încât: } \frac{\delta Q_{ct}}{\delta t} = \int_0^L \rho q_{ct} A dx .$$

Energia internă U_{int} a masei de gaz $m_{tr\grave{a}t} = \int_0^L \rho A dx$ se va exprima ca o funcție

de temperatura T prin intermediul căldurii specifice la volum constant $c_v \left(\frac{J}{kg \cdot K} \right)$,

(măsurată experimental) astfel: $U_{int} = \int_0^L \rho c_v T A dx .$

În aceste condiții simplificatoare, forma diferențială a ecuațiilor curgerii laminare a fluidelor vâscoase (2.5.2.a), (2.5.8.a) și (2.5.22) aplicate curgerii

unidimensionale netaționare a gazului prin tronsonul de conductă din figura (2.7.1) este:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.7.2.a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v |v|}{2} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2.7.2.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p \right) v \right] = \rho q_{ct} \quad (2.7.2.c)$$

Sistemul de trei ecuații (2.7.2) cu funcțiile necunoscute (p, v, T, ρ) se închiude prin adăugarea ecuației de stare (2.6.2):

$$\rho = \frac{p}{ZR_p T} \quad (2.7.2.d)$$

Întrucât, în situațiile practice, se măsoară debitul Q (masic sau volumic) și nu viteza v de curgere, respectiv, se cunoaște coeficientului de transfer termic, prin pereții conductei, $k_L \left(\frac{W}{m \cdot K} \right)$ între masa de gaz și mediul înconjurător (solul cu temperatura T_{sol}), sistemul de ecuații (2.7.2) se rescrie, în variabilele (p, Q, T) sub forma:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{ZT} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.7.3.a)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{R}{A^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2 ZT}{p} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R}{A^2} \frac{\lambda}{2D} \frac{Q|Q|ZT}{p} + \frac{p}{ZRT} g \sin \alpha = 0 \quad (2.7.3.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c_v p}{R Z} + \frac{1}{A^2} \frac{R Q^2 ZT}{2 p} + \frac{p}{ZRT} g z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{c_v p}{R Z} + \frac{1}{A^2} \frac{R Q^2 ZT}{2 p} + \frac{p}{ZRT} g z \right) \frac{R Q ZT}{A p} \right] + \frac{R}{A} \frac{\delta(QZT)}{\delta x} = \frac{k_L}{A} (T_{sol} - T) \quad (2.7.3.c)$$

Prin Q s-a notat debitul masic instantaneu (2.3.4) sau fluxul de masă transportat cu viteza v prin secțiunea de curgere A :

$$Q = \rho v A \quad (2.7.4)$$

Din punct de vedere sistemic, reprezentarea matematică a procesului de curgere netaționară unidimensională a gazului printr-un tronson de conductă dată prin sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (2.7.2) sau (2.7.3) constituie *modelul continuu al unui proces cu parametrii distribuiți* având orientarea stabilită prin alegerea condițiilor de frontieră.

O prezentare mai detaliată din punct de vedere al aspectelor care țin de teoria sistemelor și de metodelor de rezolvare se va face în capitolele care urmează.

Capitolul 3: Metode analitice și numerice utilizate pentru studiul procesului de curgere descris prin modele continue

3.1. Generalități

După cum s-a văzut în capitolul 2 curgerea gazului este descrisă printr-un model matematic complex a cărui aplicabilitate practică este strâns legată de găsirea unor metode analitice și numerice de studiu.

Cercetările experimentale privind curgerea gazelor prin conductele de transport, în diferite condiții de funcționare, au arătat valabilitatea unor forme simplificate ale modelului matematic. În acest sens, la nivelul subcapitolului 3.2, va fi prezentat setul de ipoteze, cu caracter semiempiric, rezultat din luarea în considerare numai a celor mai des întâlnite condiții în care are loc curgerea gazelor prin conductele de transport, și care permit operarea unor simplificări la nivelul modelului matematic.

Utilizând o formă simplificată a modelului matematic, curgerea în regim staționar printr-un tronson orizontal de conductă va putea fi complet caracterizată prin rezolvarea analitică a modelului considerat. Metoda de soluționare și formulele rezultate pentru mărimile care descriu regimul staționar de curgere vor fi prezentate în cadrul subcapitolului 3.3.

Aceași formă simplificată a modelului matematic va fi folosită, în cadrul subcapitolului 3.4, pentru analiza modurilor de comportament dinamic asociat regimului nestaționar (tranzitoriu) de curgere.

Pe de altă parte, dacă nu se ține seama de nici o ipoteză simplificatoare, complexitatea matematică a modelului matematic al curgerii face aproape imposibilă rezolvarea lui pe cale analitică. Obținerea unei soluții aproximative va avea în vedere folosirea unor metode numerice de calcul. În cadrul subcapitolului 3.5, pornind de la descrierea problemei de simulare numerică din punct de vedere sistemic, se prezintă o serie de aspecte de bază privind aplicarea metodelor de rezolvare numerică bazate pe diferențe finite, finalitatea constituind-o o abordare sistemică a problemei convergenței metodei.

În subcapitolul 3.6, se discută aplicabilitatea metodelor numerice cu diferențe finite în cazul sistemelor inflexibile („stiff”) de ecuații diferențiale la care se ajunge în cazul discretizării spațiale a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale asociate reprezentării matematice a procesului de curgere al gazelor prin conductele de transport. Se va prezenta și o modalitate de îmbunătățire a performanțelor acestor metode numerice în ceea ce privește aplicarea lor în rezolvarea numerică a sistemelor inflexibile de ecuații diferențiale. Subcapitolul este finalizat cu o prezentare a algoritmului de calcul al metodei Runge-Kutta-Chebyshev.

Ultimul subcapitol, 3.7, este rezervat prezentării unor concluzii.

3.2. Simplificarea modelului curgerii

După cum s-a arătat și în cadrul capitolului 2, sistemul de ecuații diferențiale asociat modelului matematic al curgerii netaționare a gazului prin conductele de transport rezultă în urma particularizării și integrării unor observații empirice în cadrul sistemului de ecuații diferențiale care descriu curgerea laminară a fluidelor vâscoase.

Pentru tronsonul de conductă din figura 3.2.1, curgerea unidimensională netaționară este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale, (3.2.1) în care mărimile care caracterizează procesul de curgere: presiune $p(x,t)$, viteza $v(x,t)$, temperatura $T(x,t)$, densitatea $\rho(x,t)$ sunt funcțiile necunoscute. Prin x s-a notat coordonata direcțională și prin t timpul.

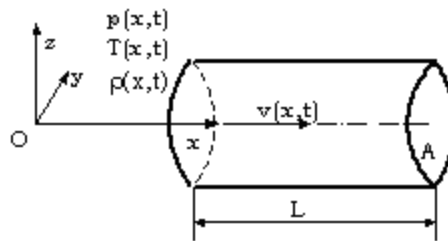


Fig. 3.2.1. Tronson de conductă

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (3.2.1.a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v |v|}{2} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (3.2.1.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p \right) v \right] = \rho q_{ct} \quad (3.2.1.c)$$

Sistemul de ecuații devine un sistem complet determinat (numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute) prin adăugarea ecuației de stare a gazului:

$$\rho = \frac{p}{ZR_p T} \quad (3.2.1.d)$$

Semnificația celorlalte mărimi componente ale sistemului de ecuații (3.2.1) este:

- a) $u_{int} = c_v T$ - energia internă specifică a gazului, cu c_v - căldura specifică a gazului la volum constant;
- b) $Z = Z(p, T)$ - factorul de abatere adimensional, care exprimă abaterea gazului natural de la comportamentul termodinamic al gazului ideal;
- c) z - elevația tronsonului de conductă;
- d) D - diametrul interior (constant pe toată lungimea L a tronsonului considerat);
- e) A - secțiunea de curgere;
- f) q_{ct} - cantitatea de căldură schimbată prin conducție, prin peretele tronsonului de conductă cu mediul înconjurător, de volumul de gaz, raportată la unitatea de timp, și masa de gaz a volumului considerat,

caracterizată prin coeficientului $k_L \left(\frac{W}{m \cdot K} \right)$ de transfer termic prin pereții

conductei;

- g)** T_{sol} - temperatura solului;
- h)** R_p - constanta generală specifică a gazului;
- i)** $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ - accelerația gravitațională;
- j)** $\lambda = \lambda(Re)$ - factorul de pierderi de presiune, adimensional.

Din punct de vedere matematic soluția sistemului de ecuații (nedeterminabilă pe cale analitică) (3.2.1) va fi unică prin stabilirea condițiilor limită (inițiale și de frontieră). Mai multe despre alegerea condițiilor de frontieră și legătura acestora cu orientarea sistemului de ecuații din punct de vedere al teoriei sistemelor se vor prezenta în cadrul subcapitolului 3.5 care privește obținerea unei soluții aproximative pe baza metodelor numerice.

În cele ce urmează, pe baza lucrărilor [22], [62], [63], sunt prezentate o serie de aspecte matematice privind simplificarea structurii modelului și modul de calcul al anumitor mărimi și parametri ai acestuia, în cazul considerării anumitor condiții de funcționare. Se pot deduce astfel, *fără a avea pretenția de rigurozitate matematică excesivă*, forme simplificate ale modelului matematic, care facilitează studierea, pe cale analitică sau numerică a procesului de curgere. Cunoașterea modelului matematic al procesului condus, chiar sub o formă simplificată, este importantă pentru determinarea algoritmului de control.

Cea mai importantă observație privind condițiile de funcționare ale unei conducte de transport este de natură termodinamică și se referă la modul în care are loc schimbul de căldură. Există două cazuri și anume:

- a)** Curgerea izotermă care are loc în condițiile unui schimb complet de căldură cu mediul înconjurător (solul în care este îngropată conducta). Ea este specifică regimurilor tranzitorii lente cauzate cel mai adesea de variația debitului la consumatori. Dinamica lentă asigură suficient timp ca sistemul să ajungă într-o stare de echilibru termodinamic caracterizată printr-o temperatură egală cu cea a mediului înconjurător (solul în care este îngropată conducta). Conducta de transport poate fi considerată ca un element de stocare de căldură de capacitate infinită aflat la temperatură constantă.
- b)** Curgere adiabatică (în anumite condiții chiar izentropică) care are loc fără schimb de căldură cu mediul înconjurător. Este specifică regimurilor tranzitorii caracterizate prin schimbări bruște ale valorii presiunii (defecte de tipul rupere de conductă sau anumite manevre tehnologice locale) care conduc la viteze mari de curgere care nu mai asigură timpul necesar atingerii stării de echilibru termodinamic.

Lungimile mari de conductă îngropată (tronsoane de zeci sau sute de kilometri) de diametre relativ mari conduc la volume de gaz acumulate în interiorul acestora care fac realistă ipoteza unei dinamici suficient de lente pentru a situa procesul de curgere în regim termodinamic izoterm cu temperatură gazului egală cu cea a solului datorită neizolării termice a pereților conductelor.

O observația cu caracter empiric privind influența temperaturii asupra celorlalte mărimi caracteristice procesului de curgere se poate face pe baza domeniului

de variație al temperaturii și anume valoarea minimă dată de temperatura solului $T_{min} = 5...7^{\circ}C$, respectiv, maximă, datorată încălzirii în stații de uscare sau stații de compresoare $T_{max} = 30^{\circ}C$. Aceasta conduce la domeniul de temperatură exprimat prin diferența $\Delta T = 25^{\circ}C$ (sau grade K) a temperaturii, care raportată la o temperatură medie a solului $T_{sol} = 7^{\circ}C = 280,15K$ înseamnă mai puțin de 10%.

În [63] se arată că ignorarea variației temperaturii în reprezentarea matematică a procesului de curgere printr-un tronson de conductă conduce la diferențe de sub 2% în obținerea distribuției de presiune. Valoarea prezentată este orientativă pentru aprecierea ordinului de mărime al erorii de calcul numeric.

Trebuie reținută și observația care se face în [22], tot în acest sens, legată de dependența în regim dinamic a presiunii, densității și vitezei de curgere cu rădăcina pătrată a temperaturii.

Ceea este important de reținut din aceste observații este că, prin considerarea unei temperaturii medii constante a gazului stabilizată la valoarea temperaturii solului $T_M = T_{sol}$, se poate renunța la ecuația (3.2.1.c) de conservare a energiei, ecuație care exprimă, practic, variația temperaturii în cadrul procesului de curgere. Astfel se reduce dimensiunea modelului matematic și, implicit, complexitatea lui.

În ceea ce privește ecuația de mișcare (3.2.1.b) analiza numerică legată de ordinul de mărime al termenilor componenți au arătat că influența termenilor $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$

și $\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x}$ asupra comportamentului dinamic este, din punct de vedere valoric, mai

mică de 1% din cea a termenului $\frac{\lambda \rho v^2}{D}$ asociat pierderilor prin frecare. Această valoarea trebuie luată tot cu caracter orientativ.

Din cele prezentate până acum se poate concluziona că, în funcționarea sistemelor de transport gaze naturale, în cele mai multe situații normale de funcționare, procesul de curgere al gazului printr-un tronson de conductă ar putea fi bine caracterizat de un model simplificat de forma următoare:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (3.2.2.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v |v|}{D} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (3.2.2.b)$$

$$\rho = \frac{p}{ZR_p T} \quad (3.2.2.c)$$

Caracterul neliniar al sistemului de ecuații diferențiale (3.2.2) poate fi atenuat tot pe baza formulării unor observații referitoare la anumiți parametri ai sistemului, respectiv $\alpha(x)$, $\lambda(Re)$, $Z(p, T)$.

Astfel unghiul de înclinația al tronsonului de conductă α este nul în cazul unui tronson de conductă orizontal. În caz contrar, cu o bună aproximație, se poate lua numai înclinarea totală a tronsonului de conductă:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta z}{L} = \text{const} \quad (3.2.3)$$

Prin Δz s-a notat diferența de nivel între capetele tronsonului considerat.

Pentru factorul de pierderi de presiune λ , o variație a debitului de gaz de la $2.000.000 \frac{Nm^3}{h}$ la $8.000.000 \frac{Nm^3}{h}$ conduce la o variație relativă a factorului de pierderi de presiune de aproximativ 20%. Această variație poate părea mare însă ea nu este chiar foarte relevantă în influențarea comportamentului dinamic întrucât experiența practică a arătat dependența în regim dinamic a presiunii, densității și vitezei de curgere cu rădăcina pătrată a factorului de pierderi hidraulice λ .

În ceea ce privește factorul de abatere Z , considerarea curgerii în regim termodinamic izoterm la temperatura medie $T_M = T_{sol} = const$, permite rescrierea relației (2.6.3.a) numai funcție de presiunea p :

$$Z(p, T) = Z(p)|_{T=T_M} = 1 - \tau p \quad (3.2.4.a)$$

Parametrul τ se poate calcula, ținând cont de relația (2.6.3.a) după formula:

$$\tau = -\frac{9}{128} \frac{1}{\rho_{cr} T_{red}} \left[1 - 6 \left(\frac{1}{T_{red}} \right)^2 \right] \quad (3.2.4.b)$$

În condițiile de față, calculele au arătat că o variație a presiunii cu $\pm 10 bar$ în jurul unei valori medii, variația relativă a factorului de abatere Z este sub 3% față de valoarea calculată cu relația Hall-Yarborough (2.6.3.b).

Dacă se ține seama și de aceste observații procesul de curgere al gazului s-ar putea descrie suficient de precis în jurul unei stări staționare de funcționare prin intermediul modelului simplificat format de sistemul neliniar de ecuații diferențiale (3.2.2), cu mărimile necunoscute (p, v, ρ) și setul de parametri constanți (a, λ, Z) .

În acest context simplificator mai trebuie făcută o ultimă observație care se referă la viteza c de propagare a perturbațiilor, respectiv unda de presiune asociată propagării. După cum se știe, orice perturbație de presiune se propagă în mediul gazos cu viteza locală a sunetului [29], [30]. Din punct de vedere termodinamic, în imediata vecinătate a perturbației, procesul de consideră adiabatic iar viteza sunetului se determină în baza relației:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_{entrp} = const} \quad (3.2.5)$$

Prin s_{entrp} s-a notat entropia specifică, iar condiția $s = const$ va indica un proces izentropic.

În baza relației (3.2.4.a), ecuația de stare (3.2.2.c) a unui proces de curgere izoterm care are loc la temperatura medie $T_M = const$, se poate aduce la forma:

$$\rho = \frac{p}{(1 - \tau p) R_p T_M} \quad (3.2.6.)$$

Întrucât: $\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{(1 - \tau p)^2 R_p T}$, rezultă următoarea relație de calcul a

vitezei sunetului în gaz pentru procesul de curgere izoterm considerat:

$$c(p) = (1 - \tau p) \sqrt{R_p T_M} \quad (3.2.7)$$

Pentru o temperatură a solului $T_M = T_{sol} = 7^{\circ}C$ la care se presupune că s-a stabilizat din punct de vedere termodinamic curgerea și o presiune statică de $20bar$, viteza medie a sunetului în gaz are valoarea aproximativă: $c_M = 364 \frac{m}{s}$.

3.3. Regimul staționar al procesului de curgere printr-un tronson orizontal de conductă

Procesul de curgere staționară a gazului, fără schimbarea sensului, în regim termodinamic izoterm, la temperatura medie $T_M = T_{sol} = const$, prin tronsonul orizontal ($a = 0$) de conductă din figura 3.3.1, poate fi descris, în baza ipotezelor simplificatoare prezentate în cadrul subcapitolului 3.2 prin modelul de regim staționar format din sistemul de ecuații (3.2.2) în care se consideră $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, în condițiile unei valori medii constante a factorului de abatere ($Z = Z_M = const$) [17]:

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0 \quad (3.3.1.a)$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} = 0 \quad (3.3.1.b)$$

$$\frac{p}{\rho} = Z_M R_p T_M \quad (3.3.1.c)$$

De regulă, din considerente tehnologice legate de costurile de amplasare ale instrumentației de măsurare, pentru tronsonul de conductă din figura 3.3.1 sunt disponibile pentru măsurare numai mărimile care caracterizează procesul de curgere staționară de la capetele tronsonului, adică din secțiunea de intrare 1 și secțiunea de ieșire 2.

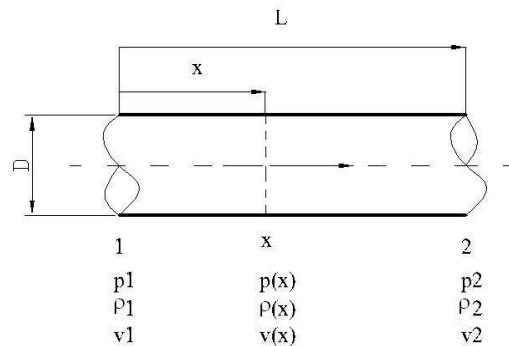


Fig. 3.3.1. Tronson orizontal de conductă

Pe baza acestor măsurători, folosind modelului de regim staționar (3.3.1), se pot determina, pe cale analitică, distribuțiile de regim staționar, respectiv valorile medii ale mărimilor care caracterizează procesul de curgere prin tronsonul considerat. Se face precizarea că formulele care urmează să fie prezentate constituie un prim nivel de aproximare a stării procesului de curgere staționar.

Aceste formule sunt folosite în mod curent în aplicațiile legate de exploatarea și operarea sistemului de transport de gaze naturale. Valabilitatea lor este condiționată de întrunirea condițiilor tehnologice care permit considerarea curgerii ca un proces staționar.

Notăm cu p_1 presiunea, respectiv, ρ_1 densitatea gazului în secțiunea 1 de intrare a tronsonului, iar cu p_2 și ρ_2 presiunea și densitatea în secțiunea 2 de ieșire, $x = L$, a tronsonului. De asemenea, notăm cu p_R și T_R valorile presiunii, respectiv temperaturii, prin care caracterizăm starea termodinamică de referință la care ne raportăm în calcularea volumului de gaz. Cu ajutorul lor, orice altă stare termodinamică caracterizată prin (p, T) va putea fi exprimată prin raportare la starea termodinamică de referință pe baza „ecuației de stare”:

$$\frac{p}{\rho Z T} = R_p = \frac{p_R}{\rho_R Z_R T_R} \quad (3.3.2)$$

Prin Z_R s-a notat factorul de abatere calculat în baza relației (2.6.3) pentru starea termodinamică de referință iar prin Z factorul de abatere pentru starea termodinamică oarecare. De asemenea, prin ρ_R s-a notat densitatea gazului în starea de referință, calculată pe baza ecuației de stare (3.3.1.c) prin folosirea parametrilor stării termodinamice de referință.

În baza ecuației de stare (3.3.1.c), se poate scrie următoarea egalitate de raporturi:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p(x)}{\rho(x)} = \frac{p_2}{\rho_2} = Z_M R_p T_M \quad (3.3.3.a)$$

Prima ecuație a modelului de regim staționar (3.3.1.a), care reprezintă ecuația de continuitate, permite deducerea următoarelor egalități:

$$\rho_1 v_1 = \rho(x) v(x) = \rho_2 v_2 \quad (3.3.3.b)$$

Ecuația a 2-a a modelului de regim staționar, respectiv (3.3.1.b), care reprezintă ecuația de mișcare, se poate aduce la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{2}{\rho v^2} dp + \frac{\lambda}{D} dx = 0 \quad (3.3.3.c)$$

care permite efectuarea integrării de-a lungul tronsonului de conductă. Astfel, explicitând din relațiile (3.3.3.a) și (3.3.3.b) termenul $\frac{2}{\rho v^2} dp$, ecuația (3.3.3.c) devine:

$$\frac{2p}{\rho_1 \rho_1 v_1^2} dp + \frac{\lambda}{D} dx = 0 \quad (3.3.3.d)$$

Separând variabile și integrând ecuația (3.3.3.d) pe lungimea L a tronsonului de conductă, de la $x = 0$ și $p = p_1$, la $x = L$ și $p = p_2$, rezultă relația:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{\rho_1 \rho_1 v_1^2} + \frac{\lambda}{D} L = 0 \quad (3.3.3.e)$$

Rezultatul se poate rescrie sub forma:

$$p_1^2 - p_2^2 = \rho_1 \rho_1 v_1^2 \frac{\lambda}{D} L \quad (3.3.3.f)$$

Înlocuind din ecuația de stare (3.3.1.c) densitatea ρ_1 în secțiunea de intrare a tronsonului de conductă, viteza v_1 de intrare în tronsonul de conductă va fi dată de relația (3.3.3):

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\rho_1^2} Z_M R_p T_M \frac{D}{\lambda L}}, \quad (3.3.4)$$

Debitul volumic de gaz Q_V prin secțiunea de intrare va fi:

$$Q_{V1} = \frac{\pi D^2}{4} v_1 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\rho_1^2} Z_M R_p T_M \frac{D^5}{\lambda L}}. \quad (3.3.5)$$

Debitul volumic calculat prin relația (3.3.5), asociat stării termodinamice caracterizată prin presiunea p_1 și temperatura T_M , se raportează la starea termodinamică de referință caracterizată prin presiunea p_R și temperatura T_R prin folosirea relației de raportare (3.3.2):

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_M Z_M} = \frac{p_R}{\rho_R T_R Z_R} = R_p \quad (3.3.6.a)$$

În baza formulei de definire a densității de masă:

$$\rho = \frac{m}{V} \leftrightarrow m = \rho V \quad (3.3.6.b)$$

Și ținând cont că $m = const$ în orice stare termodinamică, se poate scrie următoarea relație de egalitate:

$$\rho_1 Q_{V1} = \rho_R Q_{VR} \quad (3.3.6.c)$$

Formula generală de calcul a debitul volumic Q_V în starea termodinamică de referință printr-un tronson de conductă aflat în regim staționar de curgere izotermă va fi:

$$Q_{VR} = \frac{p_1}{p_R} \frac{T_R}{T_M} \frac{Z_R}{Z_M} Q_{V1} = \frac{\pi}{4} \frac{p_1}{p_R} \frac{T_R}{T_M} \frac{Z_R}{Z_M} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\rho_1^2} Z_M R_p T_M \frac{D^5}{\lambda L}}, \quad (3.3.7.a)$$

Formula poate fi adusă, prin efectuarea unor transformări, la forma, des, întâlnită în literatura de specialitate [17]:

$$Q_{VR} = 0,015148 \frac{T_R}{p_R} \left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{\delta_{ga} Z_M T_M \lambda L} \right)^{0,5} D^{2,5} \quad (3.3.7.b)$$

Semnificația mărimilor și parametrilor care apar în formulă este următoarea:

- a)** Q_{VR} , (Rm^3/h) debitul transportat prin conductă raportat la starea de referință;
- b)** p_R , (*bara*) presiunea stării de referință;
- c)** T_R , (*K*) temperatura stării de referință;
- d)** p_1 , (*bara*) presiunea în secțiunea de intrare;
- e)** p_2 , (*bara*) presiunea în secțiunea de ieșire;
- f)** D , (*cm*) diametrul interior al conductei;
- g)** L , (*km*) lungimea tronsonului de conductă;

- h)** δ_{ga} densitatea relativă a gazului față de aer astfel încât $\delta_{ga} = \frac{\rho}{\rho_{aer}}$;
- i)** λ factorul de pierderi de presiune (coeficientul de rezistență hidraulică);
- j)** T_M , (K) temperatura medie a gazelor;
- k)** Z_M factorul mediu de abatere al gazului.

În cazul unui tronson de conductă înclinat, având diferența de nivel între intrare și ieșire Δh , formula generală de calcul a debitului volumic exprimată prin relația (3.3.7.b) se corectează [15] prin intermediul parametrului de elevație $s_{\Delta h}$ și a lungimii echivalente a tronsonului de conductă L_e astfel:

$$Q_{VR} = 0,015148 \frac{T_R}{P_R} \left(\frac{p_1^2 - e^{s_{\Delta h}} p_2^2}{\delta_{ga} Z_{medie} T_{medie} \lambda L_e} \right)^{0,5} D^{2,5} \quad (3.3.7.c)$$

- a)** parametrul de elevație $s_{\Delta h}$:

$$s_{\Delta h} = 0,0684\delta \frac{\Delta h}{T_M Z_M} \quad (3.3.7.d)$$

- b)** lungimea echivalentă L_e :

$$L_e = L \frac{e^{s_{\Delta h}} - 1}{s} \quad (3.3.7.e)$$

Se face observația că în baza egalității (3.3.3.b) debitul masic Q în orice secțiune a conductei este constant, $Q = \rho_1 v_1 A = \rho(x) v(x) A = \rho_2 v_2 A$. Ținând cont de formula de calcul (3.3.6.b) a densității de masă extinsă pentru debitul masic și debitul volumic în condiții de referință, respectiv: $Q_{VR} = \frac{Q}{\rho_R}$, formula (3.3.7.a) reprezintă debitului volumic, raportat la starea termodinamică de referință, pentru orice secțiune de curgere a tronsonului de conductă considerat.

Similar relației (3.3.3.e), din (3.3.3.d) se deduce pentru presiunea într-un punct oarecare x al tronsonului de conductă formula:

$$p_1^2 - p(x)^2 = \rho_1 \rho_1 v_1^2 \frac{\lambda}{D} x, \quad (3.3.8.a)$$

Tot din relația (3.3.3.f) se poate face următoarea explicitare:

$$\rho_1 \rho_1 v_1^2 \frac{\lambda}{D} = \frac{p_1^2 - p_2^2}{L}, \quad (3.3.8.b)$$

Pe baza relațiilor (3.3.8), variația presiunii în regim staționar de curgere izotermă, de-a lungul tronsonului de conductă se poate calcula cu relația:

$$p(x) = \sqrt{p_1^2 + \frac{p_2^2 - p_1^2}{L} x} \quad (3.3.9)$$

Rezultatele obținute permit determinarea mai multor valori medii care se consideră ca mărimi caracteristice ale curgerii de gaz printr-un tronson orizontal în regim staționar:

- a)** Presiunea medie p_M de-a lungul tronsonului de conductă rezultă, atunci, ca valoare medie a distribuției de presiune (3.3.8) calculată de-a lungul lungimii L tronsonului prin următoarea relație:

$$p_M = \frac{1}{L} \int_0^L p(x) dx = \frac{2}{3} \left(p_1 + \frac{p_2^2}{p_1 + p_2} \right). \quad (3.3.10)$$

- b)** Viteza medie v_M de curgere a gazului pe întreaga lungime a tronsonului aflat se poate asocia unei valori medii Q_{VM} a debitului volumic la presiunea medie p_M :

$$v_M = \frac{4}{\pi D^2} Q_{VM}, \quad (3.3.11.a)$$

Valoarea medie Q_{VM} a debitului volumic se obține pe baza debitului volumic Q_{VR} exprimat în condițiile de referință, printr-o relație de raportare inversă, similară relației (3.3.6):

$$Q_{VM} = \frac{p_R T_M Z_M}{p_M T_R Z_R} Q_{VR}, \quad (3.2.11.b)$$

Viteza medie de curgere v_M a gazului pentru debitul (3.3.6) va fi:

$$v_M = \frac{4}{\pi D^2} \frac{p_R T_M Z_M}{p_M T_R Z_R} Q_{VR} \quad (3.3.12)$$

- c)** Pe baza valorii medii a vitezei v_M calculată cu relația (3.3.12) timpul mediu de propagare în regim de curgere staționar t_{stat_M} în care o particulă elementară de gaz străbate tronsonul de conductă de la un capăt la altul este:

$$t_{stat_M} = \frac{L}{v_M}. \quad (3.3.13)$$

- d)** Volumul mediu de gaz B_{trons_M} conținut în interiorul tronsonului de conductă (denumit și *zestrea conductei*), la un moment dat, raportat la starea termodinamică de referință descrisă prin (p_R, T_R) , în cazul regimului staționar de curgere izotermă, se calculează cu formula:

$$B_{trons_M} = \frac{\pi D^2}{4} L \frac{p_M T_R Z_R}{p_R T_M Z_M} \quad (3.3.14)$$

Formulele prezentate reprezintă un prim pas în aproximarea curgerii gazului printr-un tronson de conductă, printr-un model de regim staționar. Aproximarea este într-adevăr utilă dacă se ține seama că procesul de curgere al gazului prin sistemul de transport se menține pe durate destul de mari de timp în vecinătatea unui regim de curgere staționară, formulele permițând o caracterizarea rapidă a acestuia. De asemenea mai trebuie avută în vedere utilitatea acestor relații de calcul și în inițializarea metodelor de calcul numeric (determinarea condițiilor inițiale asociate unei stări staționare de pornire a simulării numerice).

3.4. Aspecte de regim tranzitoriu ale procesului de curgere

Același model matematic simplificat, descriș prin sistemul de ecuații (3.2.2), care a constituit punctul de pornire în deducerea, pe cale analitică, a unor aspecte de regim staționar ale procesului de curgere, în cadrul subcapitolului (3.3), va fi folosit și pentru deducerea, tot pe cale analitică, a unor aspecte importante care țin de înțelegerea regimului tranzitoriu al procesului [36], [69].

În ipoteza considerării unui proces de curgere izotermă a gazului (fără schimbarea sensului), printr-un tronșon de conductă, de lungime L , diametru interior D și înclinat cu unghiul α față de orizontală, realizat în jurul unei stări staționate caracterizate prin următoarele valori medii ale presiunii p_M , debitului masic Q_M , respectiv, temperatura T_M , prin introducerea debitului masic Q prin formula (2.7.4) și prin folosirea formei (3.2.6) a ecuației de stare pentru explicitarea densității ρ , procesul de curgere considerat va putea fi descriș prin sistemul de ecuații (3.2.2.a) și (3.2.2.b) rescriș în mărimile necunoscute (p, Q) :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \xi_2 \frac{Q^2}{p} + \xi_3 p = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Se face observația că mărimea Q , ca și mărimea p , sunt mărimi care pot fi măsurate direct prin intermediul instrumentației de măsurare existente, spre deosebire de mărimile v și ρ care, de cele mai multe ori, rezultă în urma efectuării unor calcule intermediare.

Parametrii modelului (3.4.1) sunt:

$$\xi_1 = \frac{(1 - \tau p_M)^2 R_p T_M}{A} \quad (5.5.2.a)$$

$$\xi_2 = \frac{(1 - \tau p_M) \lambda R_p T_M}{2DA^2} \quad (5.5.2.b)$$

$$\xi_3 = \frac{g \sin \alpha}{(1 - \tau p_M) R_p T_M} \quad (5.5.2.c)$$

Prin $A = \frac{\pi D^2}{4}$ s-a notat secțiunea de curgere.

Pentru simplificarea analizei, din punct de vedere dimensional, sistemul de ecuații (3.4.1) se normalizează, prin raportarea la regimul staționar de curgere, în jurul căruia se desfășoară, folosind variabilele:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{Q_M} \quad (3.4.3.a)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{p_M} \quad (3.4.3.b)$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad (3.4.3.c)$$

$$\bar{t} = \frac{t}{(L/c_M)} \quad (3.4.3.d)$$

$$c_M = (1 - \tau p_M) \sqrt{R_p T_M} \quad (3.4.3.e)$$

Modelul (3.4.1) se rescrie:

$$\begin{cases} \frac{\partial(p_M \bar{p})}{\partial\left(\frac{L}{c_M} \bar{t}\right)} + \xi_1 \frac{\partial(Q_M \bar{Q})}{\partial(L\bar{x})} = 0 \\ \frac{\partial(p_M \bar{p})}{\partial(L\bar{x})} + \xi_2 \frac{Q_M^2 \bar{Q}^2}{p_M \bar{p}} + \xi_3 p_M \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (3.4.4.a)$$

Prin calcule simple sistemul (3.4.4.a) se aduce la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \xi_1 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \xi_2 \frac{\bar{Q}^2}{\bar{p}} + \xi_3 \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (3.4.4.b)$$

denumită sistem normalizat, în care parametrii sunt:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{c_M} \frac{Q_M}{p_M} \xi_1 \quad (3.4.5.a)$$

$$\bar{\xi}_2 = L \frac{Q_M^2}{p_M^2} \xi_2 \quad (3.4.5.b)$$

$$\bar{\xi}_3 = L \xi_3 \quad (3.4.5.c)$$

Se face liniarizarea termenului $\frac{\bar{Q}^2}{\bar{p}}$ în jurul punctului $(\bar{p}_M = 1, \bar{Q}_M = 1)$ prin descompunere în serie Taylor până la termeni de ordinul I:

$$\frac{\bar{Q}^2}{\bar{p}} = \frac{\bar{Q}_M^2}{\bar{p}_M} - \frac{\bar{Q}_M^2}{\bar{p}_M^2} (\bar{p} - \bar{p}_M) + 2 \frac{\bar{Q}_M}{\bar{p}_M} (\bar{Q} - \bar{Q}_M) = 1 - \bar{p} + 1 + 2\bar{Q} - 2 = -\bar{p} + 2\bar{Q} \quad (3.4.6)$$

în care \bar{p} , respectiv, \bar{Q} , reprezintă mărimile liniarizate și normalizate.

Sistemul de ecuații normalizat (3.4.4.b), rezultat în urma liniarizării (3.4.6) va fi:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\xi}_1 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} - (\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_3) p + 2\bar{\xi}_2 Q = 0 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Pentru simplitate s-a renunțat la notațiile de normalizare și liniarizare astfel încât, în forma (3.4.7) avem $0 \leq x \leq 1$.

Din a doua ecuație a sistemului (3.4.7), prin derivare în raport cu x, se obține:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_3) \frac{\partial p}{\partial x} + 2\bar{\xi}_2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.4.8.a)$$

Se explicitază din (3.4.8.a) termenul $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{2\xi_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4.8.b)$$

Se înlocuiește (3.4.8.b) în prima ecuație a sistemului (3.4.7), rezultând o ecuație diferențială lineară cu derivate parțiale, de tip parabolic, care descrie dinamica presiunii:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{2\xi_2}{\xi_1} \frac{\partial p}{\partial t} + (\xi_2 - \xi_3) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4.9)$$

Introducând o nouă variabilă u , definită prin relația:

$$u(x, t) = p(x, t) e^{-\frac{\xi_2 - \xi_3}{2} x}, \quad (3.4.10)$$

din ecuația (3.4.9) rezultă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\xi_2}{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} u \quad (3.4.11)$$

Ecuația (3.4.11) trebuie completată cu condițiile inițiale $u(x, 0)$ și de frontieră $u(0, t)$, $u(1, t)$, necesare găsirii unei soluții unice.

Pentru analiza care se intenționează să se facă, se presupun cele mai simple condiții de frontieră și anume condiții omogene:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (3.4.12)$$

Ținând cont de omogenitatea condițiilor de frontieră, soluția ecuației (3.4.11) poate fi obținută prin folosirea metodei separării variabilelor. Soluția ecuației se caută sub forma:

$$u(x, t) = X_u(x) T_u(t) \quad (3.4.13)$$

Avem atunci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X_u}{dx^2} T_u \quad (3.4.14.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X_u \frac{dT_u}{dt} \quad (3.4.14.b)$$

Relațiile (3.4.14) se înlocuiesc în ecuația (3.4.11):

$$\frac{d^2 X_u}{dx^2} T_u = \frac{2\xi_2}{\xi_1} X_u \frac{dT_u}{dt} + \frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} X_u T_u \quad (3.4.15.a)$$

Ecuația (3.4.15.a) se aduce la forma (3.4.15.b):

$$\frac{\ddot{X}_u}{X_u} = \frac{2\xi_2}{\xi_1} \frac{\dot{T}_u}{T_u} + \frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} \quad (3.4.15.b)$$

Partea dreaptă a ecuației (3.4.15.b) depinde numai de x , iar partea stângă numai de t . Întrucât variațiile lui x și t sunt independente (necorelate) rezultă că, atât membrul stâng cât și membrul drept au o valoare constantă.

Notăm această valoare cu λ_{vp} . În consecință, vom avea:

$$\frac{\ddot{X}_u}{X_u} = -\lambda_{vp} = const \quad (3.4.16.a)$$

$$\frac{2\xi_2}{\xi_1} \frac{\dot{T}_U}{T_U} + \frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} = -\lambda_{vp} = \text{const} \quad (3.4.16.b)$$

Totodată condițiile de frontieră (3.4.12) devin:

$$u(0, t) = X_U(0)T_U(t) = 0 \quad (3.4.17.a)$$

$$u(1, t) = X_U(1)T_U(t) = 0 \quad (3.4.17.b)$$

Condițiile (3.4.17) se observă că vor fi respectate în cazul considerării soluției triviale (nule): $T_U(t) = 0$, întrucât: $u(x, 0) = X_U(x)T_U(0) = 0$.

Dacă condiția inițială este nenulă pentru $0 \leq x \leq 1$, soluția trivială iese din discuție, condițiile de frontieră fiind satisfăcute numai dacă:

$$X_U(0) = X_U(1) = 0 \quad (3.4.18)$$

În consecință, ecuația (3.4.16.a) reprezintă o ecuație diferențială ordinară omogenă cu condițiile inițiale și de frontieră (3.4.18). Ecuația admite soluții numai pentru valorile proprii reale nenegative: $\{\lambda_{vp_m} / m = 1, 2, 3, \dots\}$ (vezi Anexa A.2).

Soluția se reduce la componenta complementară și este de forma:

$$X_U(x) = A_{coef} \cos(\sqrt{\lambda_{vp}}x) + B_{coef} \sin(\sqrt{\lambda_{vp}}x) \quad (3.4.19)$$

Impunând condițiile de frontieră (3.4.18) din (3.4.19) rezultă:

$$X_U(0) = A_{coef} = 0 \quad (3.4.20.a)$$

$$X_U(1) = A_{coef} \cos\sqrt{\lambda_{vp}} + B_{coef} \sin\sqrt{\lambda_{vp}} \quad (3.4.20.b)$$

Relațiile (3.4.20.b) și (3.4.18) implică: $B_{coef} \sin\sqrt{\lambda_{vp}} = 0$. Cazul $B_{coef} = 0$ reprezintă o soluție trivială care conduce la $u = 0$, adică la o soluție trivială care nu se ia în considerare. Deci: $\sin\sqrt{\lambda_{vp}} = 0$, condiție care se realizează pentru mulțimea valorilor proprii ale ecuației $\ddot{X}_U + \lambda_{vp}X_U = 0$:

$$\{\lambda_{vp_m} = m^2\pi^2 / m = 1, 2, \dots\} \quad (3.4.21.a)$$

Rezultă mulțimea de funcții proprii:

$$\{X_{U_m}(x) = b_{coef_m} \sin(m\pi x) / m = 1, 2, \dots\} \quad (3.4.21.b)$$

Mulțimea de funcții proprii (3.4.21.b) se poate interpreta ca o bază de funcții care se folosește pentru scrierea oricărei soluții a ecuației (3.4.16.a) ca o descompunere în serie Fourier generalizată de tipul (3.4.20.b).

Ecuația (3.4.16.b) pentru $T_U(t)$ trebuie să satisfacă condiția inițială

$$u(x, 0) = X_U(x)T_U(0) \quad (3.4.22)$$

Ecuația (3.4.16.b) se pune sub forma (3.4.23):

$$\dot{T}_U = -\frac{\xi_1}{2\xi_2} \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + \lambda_{vp} \right] T_U \quad (3.4.23)$$

Pentru mulțimea de valori proprii (3.4.21.a) soluția ecuației (3.4.23) va fi:

$$T_{U_m} = k_{coef_m} e^{-\frac{t}{T_{pm}}} \quad (3.4.24)$$

În (3.4.24) k_m sunt constante de integrare iar

$$T_{p_m} = \frac{2\xi_2}{\xi_1 \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + m^2 \pi^2 \right]} \quad (3.4.25)$$

au semnificația unor constante de timp.

Pe baza acestor considerații, o componentă a soluției particulare a ecuației (3.4.11) va fi de forma

$$u_m(x, t) = d_{coef_m} \sin(m\pi x) e^{-\frac{t}{T_{p_m}}} \quad (3.4.26)$$

și va satisface condițiile de frontieră omogene (3.4.12). În relația (3.4.26) avem:

$$d_{coef_m} = k_{coef_m} b_{coef_m} \quad (3.4.27)$$

Fiecare funcție $u_m(x, t)$ va fi o soluție particulară a ecuației (3.4.11) și va satisface condițiile de frontieră omogene: $u(0, t) = u(1, t) = 0$, dar nu va satisface, în mod individual, condiția inițială $u(x, 0) = 0$.

Întrucât ecuația (3.4.11) este o ecuație lineară în $u(x, t)$, orice combinație de soluții individuale (3.4.26) reprezintă tot o soluție. Proprietatea de superpoziție se extinde și în cazul unei sume infinite de forma (3.4.28):

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{coef_m} \sin(m\pi x) e^{-\frac{t}{T_{p_m}}} \quad (3.4.28)$$

Extinderea este valabilă numai dacă seria rezultată este convergentă. Soluția rezultată $u(x, t)$ va satisface și condițiile de frontieră întrucât ele sunt respectate de fiecare soluție individuală: $u_m(0, t) = u_m(1, t) = 0$.

Impunând expresiei (3.4.28) să respecte condiția inițială, obținem:

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{coef_m} \sin(m\pi x) \quad (3.4.29)$$

Coeficienții d_{coef_m} trebuie calculați astfel încât să fie satisfăcută condiția inițială (3.4.29). În acest scop se observă că seria din relația (3.4.29) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier sinus a funcției $u(x, 0)$. Se știe că funcțiile proprii $\sin(m\pi x)$ au proprietatea de ortogonalitate:

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2}, & m = n \end{cases} \quad (3.4.30)$$

Pe această bază, din egalitatea:

$$\int_0^1 u(x, 0) \sin(n\pi x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} d_{coef_m} \left[\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx \right] \quad (3.4.31)$$

rezultă:

$$d_{coef_m} = 2 \int_0^1 u(x, 0) \sin(mnx) dx. \quad (3.4.32)$$

Revenind la soluția generală (3.4.28) se impune analiza proprietății de uniform-convergență a seriei implicate, pentru $t \geq t_0 > 0$ și $x \in [0, 1]$. Acest lucru se poate face prin intermediul următoarelor două teoreme:

1. *Teorema Weirstrass*: Fie setul de funcții: $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ definite peste mulțimea de numere reale $E \subseteq R$. Se presupune că: $|\varphi_m(x)| \leq \phi_m$ pentru $x \in E$ și

$m = 1, 2, \dots$ Seria de funcții $\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x)$ converge uniform pe E dacă seria de

numere $\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m$ converge absolut.

2. *Teorema de convergență a unei serii de numere*: Seria de numere $\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m$

converge absolut dacă: $\left| \frac{\phi_{m+1}}{\phi_m} \right| \leq r < 1$ oricare ar fi $m \geq 1$.

Se scrie atunci, pentru oricare $x \in [0, 1]$:

$$|u_m(x, t)| = \left| d_{coef_m} \sin(mnx) e^{-\frac{t}{\tau_{pm}}} \right| \leq |d_{coef_m}| e^{-\frac{t_0}{\tau_{pm}}} \quad (3.4.33.a)$$

Se calculează, oricare ar fi $x \in [0, 1]$:

$$|d_{coef_m}| = \left| 2 \int_0^1 u(x, 0) \sin(mnx) dx \right| \leq 2 \int_0^1 |u(x, 0) \sin(mnx)| dx \leq 2 \int_0^1 |u(x, 0)| dx \quad (3.4.33.b)$$

Se deduce atunci că mulțimea de funcții proprii (3.4.26) este mărginită superior de numerele ϕ_m :

$$|u_m(x, t)| \leq \phi_m = \left[2 \int_0^1 |u(x, 0)| dx \right] e^{-\frac{t_0}{\tau_{pm}}} \quad (3.4.33.c)$$

Se verifică:

$$\frac{\phi_{m+1}}{\phi_m} = \frac{e^{-\frac{t_0}{\tau_{p(m+1)}}}}{e^{-\frac{t_0}{\tau_{pm}}}} = e^{\frac{\xi_1}{2\xi_2} \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + m^2 r^2 \right] t_0 - \frac{\xi_1}{2\xi_2} \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + (m+1)^2 r^2 \right] t_0} = e^{-\frac{\xi_1}{2\xi_2} r^2 t_0} < 1 \quad (3.4.33.d)$$

Relația (3.4.33.d) arată, pe baza teoremei (2) că seria de numere $\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m$ este absolut convergentă, iar în baza teoremei Weirstrass (1), seria (3.4.28) va converge uniform pentru $t \geq t_0 > 0$ și $x \in [0, 1]$.

Forma generală a soluției(3.4.28) arată că dinamica tranzitorie a procesului de curgere al gazului printr-un tronșon de conductă este rezultatul combinației lineare a unor moduri individuale de comportament dinamic descrise de termeni de forma (3.4.34), moduri caracterizate de constantele de timp τ_{p_m} (3.4.25).

$$\left\{ M_{din_m}(t) = e^{-\frac{t}{\tau_{p_m}}}, m = 1, 2, \dots \right\} \quad (3.4.34)$$

Ponderea fiecărui mod dinamic $M_{din_m}(t)$ este dată de termenii d_{coef_m} , calculați funcție de condițiile inițiale și de frontieră.

Analiza care s-a făcut poate oferi o serie de informații importante atunci când se pune problema rezolvării, pe cale numerică, a sistemului de ecuații (3.4.1). Astfel, apelând la o metodă de rezolvare numerică bazată pe diferențe finite, discretizarea spațială prin folosirea a m puncte de discretizare spațială care se va face în cadrul metodei va fi echivalentă, din punct de vedere al analizei făcute asupra comportamentului dinamic al procesului, cu luarea în considerare numai a primelor m moduri de comportament dinamic, descrise prin sistemul de m ecuații diferențiale ordinare rezultat.

Cel mai rapid mod de comportament dinamic va fi determinat de constanta de timp (3.4.36.a) iar cel mai lent de constanta de timp (3.4.36.b):

$$\tau_{p_m} = \frac{2\xi_2}{\xi_1 \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + m^2 \pi^2 \right]} \quad (3.4.35.a)$$

$$\tau_{p_1} = \frac{2\xi_2}{\xi_1 \left[\frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{4} + \pi^2 \right]} \quad (3.4.35.b).$$

Intervalul de timp t_{final} necesar unei simulări numerice complete (atingerea unui regim staționar) va trebui ales astfel încât:

$$t_{final} \approx 2\tau_{p_1} \quad (3.4.36)$$

Pasul de discretizare Δt al timpului trebuie și el ales astfel încât:

$$\Delta t < 2\tau_{p_m} \quad (3.4.37)$$

Efortul de calcul numeric poate fi apreciat pe baza numărului de condiționare:

$$cond \approx \frac{\tau_{p_1}}{\tau_{p_m}} \quad (3.4.38)$$

Dacă $cond \geq 1000$ sistemul de ecuații diferențiale ordinare rezultat în urma discretizării spațiale este un sistem *inflexibil* („stiff”) de ecuații diferențiale (există moduri de comportament dinamic foarte lente și moduri de comportament dinamic foarte rapide). Rezolvarea numerică a unui sistem inflexibil de ecuații diferențiale

este costisitoare din punctul de vedere al resurselor de calcul ce trebuie alocate întrucât pasul de discretizare al timpului ales pe baza relației (3.4.37) rezultă foarte mic iar intervalul de simulare (3.4.36) rezultă foarte de mare.

Un exemplu de calcul numeric pentru un tronson orizontal de conductă de lungime $L = 100\text{km}$, diametru interior $D = 0,5\text{m}$ și rugozitate interioară $k_a = 0,2\text{mm}$, aflat într-o stare inițială caracterizată de presiunea la intrare de $p_1 = 20\text{bar}$ și debitul volumic staționar $Q_{VR} = 32.500 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$ calculat pentru starea termodinamică de referință normală definită prin presiunea $p_R = 1.01325\text{bar}$ și temperatura $T_R = 0^\circ\text{C}$, tronson prin care gazul curge în regim izoterm la temperatura $T_M = 7^\circ\text{C}$, arată ordinul constantelor de timp și dependența lor de numărul nodurilor de discretizare spațială.

Pentru debitul masic staționar: $Q = \rho_R Q_{VM} = 0,716 \frac{\text{kg}}{\text{Nm}^3} 32.500 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}} = 6,46 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ va rezulta presiunea medie $p_M = 18,78\text{bar}$ în baza relațiilor de calcul din cadrul subcapitolului (3.3). În baza relației (3.2.7) viteza izotermă a sunetului este: $c_M \cong 364 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Parametrii (3.4.2) ai modelului curgerii (3.4.1) vor avea valorile:

$$\xi_1 = 675.043\text{s}^{-2};$$

$$\xi_2 = 59.488\text{m}^{-3}\text{s}^{-2};$$

$$\xi_3 = 0\text{m}^{-1}.$$

Valorile normalizate (3.4.5) ale parametrilor (3.4.2) sunt:

$$\tilde{\xi}_1 = 0,006;$$

$$\tilde{\xi}_2 = 0,06;$$

$$\tilde{\xi}_3 = 0$$

Pentru $m = 11$ noduri de discretizare spațială, constantele extreme de timp în valori normalizate (3.4.36) sunt:

$$\tilde{\tau}_{p_1} = 2,058;$$

$$\tilde{\tau}_{p_{11}} = 0,017$$

În valori nenormalizate, în baza relației (3.4.3.d) avem:

$$\tau_{p_1} \cong 565,2\text{s}$$

$$\tau_{p_{11}} = 4,7\text{s}.$$

Pasul de discretizare al timpului (3.4.28) rezultă: $\Delta t < 2\tau_{p_{11}} = 9,4\text{s}$

Numărul de condiționare al problemei este: $cond = \frac{\tilde{\tau}_{p_1}}{\tilde{\tau}_{p_{11}}} \cong 122.$

Sistemul de ecuații diferențiale nu va fi, în acest caz, inflexibil.

3.5. Metode numerice, bazate pe diferențe finite, pentru rezolvarea (simularea) numerică a modelului continuu al procesului de curgere

Rezolvarea pe cale analitică a sistemului de ecuații diferențiale (3.2.1) pentru obținerea unei soluții exacte a modelului matematic al procesului de curgere al gazului printr-un tronson de conductă este posibilă, după cum s-a arătat în cadrul subcapitolelor 3.3 și 3.4, numai prin luarea în considerare a unor ipoteze care permit operarea unor simplificări ale modelului procesului.

De cele mai multe ori, în aplicațiile reale care impun ipoteze specifice de lucru nu mai este posibilă obținerea unei soluții exacte, fiind nevoie de apelarea la metode numerice de soluționare și găsirea unei soluții aproximative.

De asemenea trebuie luat în considerare și rolul pe care îl au caracteristicile ecuațiilor cu derivate parțiale asupra selecției unei metode de rezolvare numerică (vezi Anexei A.3).

În cadrul acestui subcapitol se va face o prezentare, cu caracter sistemic, plecând de la lucrările [6], [16], [22], [29], [36], [69], a metodelor numerice bazate pe diferențe finite și a calității acestora, luând ca și referință un model generic al procesului de curgere, reprezentativ ca și formă pentru tipurile de modele prezentate în cadrul lucrării.

3.5.1. Descrierea problemei de simulare numerică din punct de vedere sistemic

Într-o primă fază este necesar să se analizeze problema alegerii condițiilor limită ale sistemului de ecuații diferențiale asociat modelului procesului de curgere. Aceste condiții asigură, matematic, unicitatea soluției. Din punct de vedere sistemic, alegerea lor va orienta modelul procesului de curgere, adică vor fi stabilite intrările și ieșirile sistemului. Sistemul împreună cu condițiile limită, dacă acestea au fost bine puse, va putea fi considerat o realizare sistemică care va corespunde unui regim de funcționare / proces tehnologic real.

Există două tipuri de condiții limită și anume:

- a) *condiții inițiale* care se referă la distribuțiile inițiale (momentul inițial, $t = 0$) de presiune, debit și temperatură de-a lungul tronsonului de conductă considerat, $x \in [0, L]$; ele sunt de forma:
 - $p(x, 0), Q(x, 0), T(x, 0)$ pentru modelul (3.2.2);
 - $p(x, 0), Q(x, 0)$, pentru modelul simplificat (3.4.1).
- b) *condiții de frontieră* care se referă la evoluțiile presiunii, debitului și temperaturii, pe durata simulării numerice $t \in [0, t_{final}]$, la capetele tronsonului de conductă; ele pot fi:
 - oricare combinație de trei elemente ale mulțimii $\{p(0, t), p(L, t), Q(0, t), Q(L, t), T(0, t), T(L, t)\}$, pentru (2.7.3);
 - oricare combinație de două elemente ale mulțimii $\{p(0, t), p(L, t), Q(0, t), Q(L, t)\}$ pentru (3.4.1).

În situația cunoașterii tuturor distribuțiilor, selecția oricărei combinații de condiții de frontieră nu este, chiar arbitrară, implicațiile fiind vizibile la nivelul

metodei de calcul numeric și a corespondentului de regim de funcționare / proces tehnologic real.

Din punct de vedere sistemic precizarea condițiilor limită înseamnă de fapt *orientarea modelul matematic* în sensul stabilirii mărimilor de intrare, stare și de ieșire [16]. În acest context, în figura 3.5.1 este reprezentată grafic *realizarea sistemică* a modelului matematic (2.7.3), rescris în variabilele $\{p, Q, T\}$, asociată condițiilor limită:

$$CI : [p(x, 0), Q(x, 0), T(x, 0)] \quad (3.5.1.a)$$

$$CF : [p(0, t), Q(L, t), T(0, t)] \quad (3.5.1.b)$$

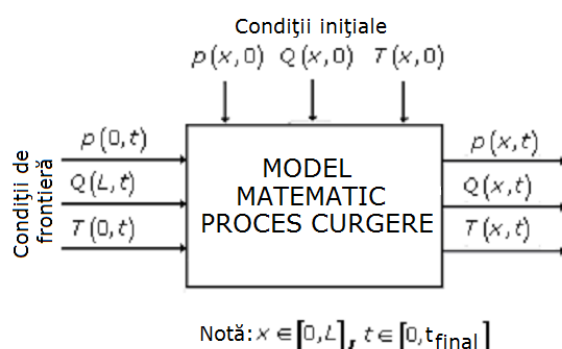


Fig. 3.5.1. Realizare sistemică $p1Q2T1$

Domeniul spațio-temporal al procesului curgere este: $D(L, t_{final}) = [0, L] \times [0, t_{final}]$, în care L este lungimea tronsonului de conductă iar t_{final} momentul de timp final.

Pentru realizarea sistemică din figura 3.5.1 avem:

- a) Mărimile de intrare reprezentate prin condițiile de frontieră impuse: $p(0, t)$, $Q(L, t)$ și $T(0, t)$ pentru $t \in [0, t_{final}]$;
- b) Mărimile de ieșire reprezentate, prin distribuțiile mărimilor caracteristice procesului de curgere: $p(x, t)$, $Q(x, t)$ și $T(x, t)$ pentru $(x, t) \in D$, iar, în particular, prin valorile de frontieră: $p(L, t)$, $Q(0, t)$ și $T(L, t)$ pentru $t \in [0, t_{final}]$.

Denumirea realizării sistemice se va face cu referire la condițiile de frontieră care s-au considerat în obținerea ei. Astfel, notând secțiunea de intrare, $x = 0$, a tronsonului de conductă cu ①, respectiv, secțiunea de ieșire, $x = L$, cu ②, mărimile definite la nivelul acestor secțiuni se vor nota și acestea în mod corespunzător și anume: $p(0, t) = p1(t)$, $Q(L, t) = Q2(t)$ sau $T(0, t) = T1(t)$.

Folosind aceste notații, la reprezentarea sistemică din figura 3.5.1 ne vom referi ca: „realizarea sistemică $p1Q2T1$ ”.

Revenind la modelele curgerii exprimate prin sistemele de ecuații (2.7.3) sau (3.4.1) acestea pot fi aduse la o formă generică, reprezentativă, care va permite expunerea elementelor de bază ale metodelor de rezolvare numerică:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} = \underline{\Xi} \left(\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}, \underline{\Omega} \right) \quad (3.5.2)$$

În modelul (3.5.2) $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(x, t)$ este vectorul variabilelor care descriu curgerea și reprezintă vectorul funcțiilor necunoscute, x este coordonata spațială unidimensională, iar t este timpul. De exemplu, dacă ne referim la modelul (3.2.1), înlocuind densitatea ρ , pe baza relației (3.2.1.d), în primele trei ecuații ale sistemului (3.2.1), putem, astfel, considera vectorul funcțiilor necunoscute ca fiind următorul: $\underline{\Omega} = [p \ v \ T]^T$. În cazul modelului (3.4.1), vectorul funcțiilor necunoscute este: $\underline{\Omega} = [p \ Q]^T$. Prin funcția vectorială $\underline{\Xi}$ se descrie caracterul neliniar al modelului matematic al procesului.

Din punct de vedere sistemic (3.5.2) este un sistem de ecuații cu derivate parțiale care reprezintă modelul matematic al unui *proces cu parametrii distribuiți*.

În cea ce privește condițiile limită care asigură existența și unicitatea soluției problemei de rezolvare numerică, ținând seama de context, acestea vor fi de forma:

- a) *CI: Inițiale:* $\underline{\Omega}(x, 0)$ cunoscut oricare ar fi $x \in [0, L]$;
- b) *CF: De frontieră:* stânga: $\underline{\Omega}(0, t)$, dreapta: $\underline{\Omega}(L, t)$, sau combinații ale acestora scrise pentru componentele vectorului $\underline{\Omega}(x, t) \Big|_{\substack{x=0 \\ x=L}}$ cunoscute oricare ar fi $t \in [0, t_{final}]$.

3.5.2. Aspecte de bază privind aplicarea metodelor de rezolvare numerică bazate pe diferențe finite

În cele ce urmează, considerând modelul generic (3.5.2), se vor prezenta cele mai importante aspecte care asigură convergența metodei numerice și implicit calitatea soluției aproximative rezultate.

Trebuie precizat că, pe lângă metodele numerice bazate pe diferențe finite, există și alte clase de metode numerice de rezolvare cum ar fi cele bazate pe elemente finite, volume finite sau metode spectrale.

Rezolvarea sistemului de ecuații (3.5.2) pe baza unei metode cu diferențe finite presupune aproximarea acestuia cu un sistem neliniar de ecuații algebrice, obținut prin discretizarea derivatelor, sistem care trebuie rezolvat la fiecare iterație de calcul asociată unui moment discret de timp. Evident, la modul general, nu se pot face considerații teoretice privind modul de alegere ai pașilor de discretizare ai coordonatei spațiale x , respectiv, timpului t , și influența acestor pași asupra complexității calculului numeric care trebuie efectuate.

O primă etapă în rezolvarea numerică o constituie precizarea intervalului de variație al coordonatei spațiale: $x \in [0, L]$, respectiv, intervalul de variație al coordonatei temporale $t \in [0, t_{final}]$, care conduce la domeniul $D = [0, L] \times [0, t_{final}]$ pe care trebuie evaluată funcția continuă și derivabilă $\underline{\Omega}(x, t)$.

În vederea discretizării derivatelor din componența sistemului de ecuații al modelului, domeniul considerat se divizează prin intermediul unei rețele de puncte caracterizată de un *pas de discretizare al timpului* Δt și un *pas de discretizare al coordonatei spațiale* Δx . Trebuie precizat că, în situația în care acești pași de discretizare au valori constate vorbim de o rețea uniformă de puncte de discretizare.

Raportul $r_{tx} = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ se numește constanta rețelei de discretizare. În funcție de precizia de calculul numeric impusă și din considerente de asigurare a convergenței metodei numerice, pasul Δt , respectiv parametrul r_{tx} pot avea valori diferite de o iterație de calcul la alta, în ansamblu operându-se cu o rețea de discretizare neuniformă [29]. Alegerea valorii parametrului r_{tx} la fiecare iterație de calcul este, așadar, direct legată de performanțele metodei numerice folosite.

În cazul unei rețele de puncte de discretizare uniforme, intervalul $[0, L]$ este împărțit în $m - 1$ intervale de discretizare $\{[x_j, x_{j+1}] / j = \overline{1, m-1}\}$, iar pentru orice moment $t_k = k \cdot \Delta t$, în rețea avem m puncte de discretizare spațială $\{x_j / j = \overline{1, m}\}$. La fiecare dintre momentele de timp $\{t_k = k \cdot \Delta t / k = \overline{0, 1, 2, \dots}\}$, valorile funcției $\underline{\Omega}(x, t)$ se vor evalua numai în cele m puncte discrete, respectiv, $\underline{\Omega}(x_j, t_k) = \underline{\Omega}_{j,k}$.

Pe baza acestei rețele de puncte de discretizare se poate proceda, în continuare la discretizarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3.5.2) care presupune aproximarea derivatelor după coordonata spațială x , respectiv, după timpul t , prin diferențe finite. Una din modalitățile cele mai des întâlnite de a realiza aceste aproximări constă în folosirea dezvoltării în serie Taylor, putând fi deduse mai multe tipuri de formule de discretizare pentru aproximarea aceleiași derivate [6], [69].

Un parametru important prin care se poate caracteriza precizia formulei de discretizare îl constituie eroarea de trunchiere ε_{tr} care este egală cu restul dezvoltării în serie Taylor folosite: $\varepsilon_{tr} = O(h^k)$. Prin h s-a notat pasul de discretizare (Δx sau Δt) iar prin k ordinul dezvoltării în serie Taylor. Ordinul erorii de trunchiere este dat de exponentul k .

Va rezulta un sistem asociat de ecuații algebrice scris numai pentru valorile nodale $\underline{\Omega}_{j,k} = \underline{\Omega}(x_j, t_k)$, interpretate ca mărimile necunoscute ale sistemului de ecuații, care trebuie aflate prin rezolvarea sistemului de ecuații algebrice, prin orice metodă matematică. Soluția aproximativă a sistemului de ecuații (3.5.2) o va constitui mulțimea valorilor funcției $\underline{\Omega}(x, t)$, respectiv $\{\underline{\Omega}_{j,k} / j = \overline{1, m}, k = \overline{0, n}\}$, evaluate în cele m noduri discrete $\{x_j = j \cdot \Delta x / j = \overline{1, m}\}$, la fiecare din momentele discrete de timp $\{t_k = k \cdot \Delta t / k = \overline{0, n}\}$.

După cum s-a mai precizat, calitatea soluției aproximative rezultate prin aplicarea metodei numerice este direct legată de convergența metodei.

Spunem despre metoda numerică cu diferențe finite că este *convergentă* dacă soluția aproximativă obținută converge către soluția exactă atunci când norma rețelei tinde la zero ($\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$).

Deoarece convergența unei metode numerice cu diferențe finite este destul de greu de demonstrat pornind de la această definiție, se definesc o serie de proprietăți mai slabe ale metodei, care se pot verifica mai ușor, fiecare în parte, iar împreună pot asigura convergența. Astfel de proprietăți mai slabe sunt consistența și stabilitatea.

O metodă numerică cu diferențe finite este *consistentă* cu ecuația cu derivate parțiale pe care se aplică, dacă aproximarea făcută în calculul derivatelor parțiale prin operația de discretizare tinde spre valoarea exactă a acestora când norma rețelei tinde la zero ($\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$).

În general, formulele de discretizare ale derivatelor deduse pe baza dezvoltărilor în serie Taylor sunt consistente întrucât:

$$\varepsilon_{tr} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (3.5.3)$$

Metoda este *stabilă* dacă nu amplifică erorile în decursul aplicării ei. O primă sursă a erorilor o constituie erorile de trunchiere sau rotunjire introduse de operația de discretizare, dar pot apărea și erori cauzate de nepotriviri (discontinuități) din condițiile la limită sau forma de reprezentare a numerelor în calculatoarele numerice.

Modalitățile de amplificare a erorilor sunt foarte variate astfel încât stabilitatea poate fi studiată în diverse moduri. În teoria rezolvării pe cale numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale se utilizează stabilitatea în sensul lui von Neuman [6]. În cazul ecuațiilor cu derivate parțiale unidimensionale, spațial, această analiză a stabilității se face introducând în ecuația cu diferențe, rezultată în urma aplicării metodei numerice ecuației cu derivate parțiale, a unei perturbații de forma $w = \psi(t)e^{i\beta x}$ în care: $i = \sqrt{-1}$, $\psi(t)$ este amplitudinea perturbației și $\beta \in R$ este numărul de undă al perturbației. Rezultă, astfel, o ecuație care descrie evoluția perturbației și care permite deducerea unor condiții privind alegerea pașilor de discretizare astfel încât amplitudinea perturbației să scadă pe parcursul aplicării metodei numerice

Din punct de vedere sistemic această metodă de analiză este similară metodei de analiză a stabilității prin folosirea transformatei Fourier în cazul sistemelor liniare.

În cazul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale care conduc la sisteme de ecuații cu diferențe fiecare componentă a vectorului variabilelor necunoscute va fi perturbată, rezultând un sistem de ecuații care descrie evoluția perturbațiilor introduse. Analiza acestui sistem poate să devină extrem de laborioasă din cauza complexității acestuia. O metodă echivalentă de studiu se va prezenta în paragraful următor.

Importanța studierii consistenței și stabilității este dată de *teorema lui Lax* care arată că o metodă numerică cu diferențe finite consistentă și stabilă este convergentă [6], [69].

3.5.3. O abordarea sistemică a problemei convergenței metodei numerice bazate pe diferențe finite

Studiul convergenței unei metode numerice pe baza teoremei lui Lax pune probleme în ceea ce privește demonstrare proprietății de stabilitate din cauza complexității modelului procesului de curgere (sistem neliniar de ecuații).

După cum s-a arătat și anterior, modelului matematic (3.5.2) i se poate asocia o realizare sistemică prin orientarea acestuia, prin precizarea unor valori ale componentelor vectorului $\underline{Q}(x,t)$ în anumite puncte de pe frontiera domeniului spațio-temporal al curgerii $D(L, t_{final})$. Această realizare sistemică va putea fi utilizată pentru calcularea răspunsului modelului matematic al procesului de curgere (3.5.2), recurgând la discretizarea spațială și la diferite tehnici de integrare

numerică a sistemelor dinamice cu parametri concentrați astfel obținute. Calitatea răspunsului modelului va fi o consecință a convergenței metodei numerice folosite.

În cele ce urmează se vor folosi o serie de rezultate, deduse în cadrul teoriei sistemelor, pentru demonstrarea proprietății de convergență a metodei numerice cu diferențe finite.

Ținând seama de cele prezentate anterior privind aplicarea metodelor de rezolvare numerică bazate pe diferențe finite, într-o prima etapă, se face discretizarea spațială a modelului matematic (3.5.2), după variabila x , prin aproximarea derivatelor $\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_j, t)$ cu diferențele finite $\delta \underline{\Omega}_j(t, \Delta x)$, $j = \overline{1, m}$, cu formule deduse având la bază dezvoltări în serie Taylor, cu eroarea de trunchiere $\varepsilon_{tr}(q, \Delta x) = O(\Delta x^q)$. Parametrul q caracterizează ordinul dezvoltării în serie. În particular, folosind notațiile $\underline{\Omega}(x_j, t) = \underline{\Omega}_j(t)$, pentru $j = \overline{1, m}$ și $t \geq 0$, se pot utiliza următoarele formule de discretizare având eroarea de trunchiere $O(\Delta x^2)$ [69]:

- pentru nodul de frontieră $j = 1$:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_1, t) \cong \delta \underline{\Omega}_1(t, \Delta x) = \frac{-3\underline{\Omega}_1(t) + 4\underline{\Omega}_2(t) - \underline{\Omega}_3(t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.5.4.a)$$

- pentru nodurile intermediare $j = \overline{2, m-1}$:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_j, t) \cong \delta \underline{\Omega}_j(t, \Delta x) = \frac{\underline{\Omega}_{j+1}(t) - \underline{\Omega}_{j-1}(t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.5.4.b)$$

- pentru nodul de frontieră $j = m$:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_m, t) \cong \delta \underline{\Omega}_m(t, \Delta x) = \frac{\underline{\Omega}_{m-2}(t) - 4\underline{\Omega}_{m-1}(t) + \underline{\Omega}_m(t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.5.4.c)$$

Corespunzător celor m noduri de discretizare spațială, din (3.5.2) rezultă sistemul neliniar de ecuații diferențiale:

$$\frac{d \underline{\Omega}_j}{dt}(t) = \underline{\Xi}(\delta \underline{\Omega}_j(t, \Delta x), \underline{\Omega}_j(t, \Delta x)), \quad j = \overline{1, m} \quad (3.5.5)$$

În continuare, acest sistem de ecuații se restructurează prin eliminarea ecuațiilor care descriu dinamica mărimilor cunoscute prin precizarea condițiilor de frontieră.

Introducem notațiile:

- $\underline{u}(t)$ - vectorul mărimilor de intrare format din valorile mărimilor cuprinse în vectorul $\underline{\Omega}(x_j, t)$, evaluate în nodurile de frontieră $\{x_1 = 0, x_m = L\}$ prin impunerea condițiilor de frontieră;
- $\underline{X}(t)$ - vectorul mărimilor de stare, format din valorile mărimilor necunoscute $\underline{\Omega}_j = \underline{\Omega}(x_j, t)$ evaluate la momentul de timp t numai în nodurile rețelei de discretizare spațială: $\{x_j / j = \overline{1, m}\}$, mai puțin valorile evaluate prin condițiile de frontieră și care au fost cuprinse în vectorul mărimilor de intrare.

Cu acestea sistemul (3.5.5) obține forma matriceală:

$$\frac{d\underline{X}}{dt}(t) = \underline{\psi}(\underline{X}(t), \underline{u}(t), \Delta x) \quad (3.5.6.a)$$

în care $\underline{\psi}$ este funcția vectorială neliniară a modelului matematic al procesului.

Prin liniarizarea funcției neliniare $\underline{\psi}$ în jurul punctului $\{\underline{X}_{lin}(t), \underline{u}_{lin}(t)\}$, sistemului (3.5.6.a) i se poate asocia forma lineară (3.5.6.b):

$$\frac{d\underline{X}}{dt}(t) = \underline{A}_{prm}(t, \Delta x)\underline{X}(t) + \underline{B}_{prm}(t, \Delta x)\underline{u}(t) + \underline{C}_{prm}(t, \Delta x) \quad (3.5.6.b)$$

Prin \underline{A}_{prm} , \underline{B}_{prm} și \underline{C}_{prm} s-au notat matricele parametrilor formei liniarizate continue.

Dimensiunea și modul de formare al vectorului liniarizat de stare \underline{X} sunt funcții de condițiile de frontieră. Valorile proprii ale matricei \underline{A}_{prm} a parametrilor sistemului de ecuații diferențiale (3.5.6.b), vor depinde de formula de discretizare spațială, respectiv, pasul de discretizare după variabila x .

Sistemul de ecuații diferențiale ordinare (3.5.6.b) scris pentru nodurile rețelei de discretizare $\{x_j / j = \overline{1, m}\}$ și care aproximează modelul (3.5.2) va permite *studiul dinamicii* procesului fizic descriș de (3.5.4) pentru fiecare moment discret de timp din intervalul: $t \in [0, t_{final}]$ pe care se caută soluția aproximativă. Valorile proprii ale matricei \underline{A}_{prm} permit deducerea unei aproximări a modurilor de comportament dinamic ale procesului fizic descriș prin modelul (3.5.2).

Sistemul linear de ecuații diferențiale (3.5.6.a) reprezintă, formal, modelul matematic al unui *proces linear cu parametri concentrați*. Studiul dinamicii procesului descriș de forma liniarizată (3.5.6.b), prin intermediul matricei \underline{A}_{prm} , este esențial pentru *determinarea* pasului de discretizare al timpului Δt (determinarea limitei de stabilitate).

A doua etapă, are ca punct de pornire discretizarea, la momentul de timp discret $t_k = k \cdot \Delta t$, a derivatei $\frac{d\underline{X}}{dt}(t_k)$ în raport cu timpul, tot prin intermediul unei diferențe finite, de forma $\delta\underline{X}(k, \Delta t)$, cu $k \geq 0$ și Δt pasul de discretizare al coordonatei de timp, având la bază dezvoltări în serie Taylor cu eroarea de trunchiere egală cu restul dezvoltării $\varepsilon_{tr}(s, \Delta t) = O(\Delta t^s)$. Și aici, parametrul s caracterizează ordinul dezvoltării în serie. În acest mod sistemul în timp continuu (3.5.6) asociat nodurilor de discretizare spațială $j = \overline{1, m}$ se aproximează prin sistemul în timp discret (3.5.7) care descrie tranziția lui \underline{X} , pe orizontul de timp considerat, între momente discrete de timp $k \rightarrow k + 1$, cu pasul de discretizare al timpului variabil Δt :

$$\delta\underline{X}(k + 1, \Delta t) = \theta \underline{\psi}(\underline{X}(k + 1), \underline{u}(k + 1), \Delta x) + (1 - \theta) \underline{\psi}(\underline{X}(k), \underline{u}(k), \Delta x) \quad (3.5.7.a)$$

În mod similar, prin liniarizare în jurul punctului $\{\underline{X}_{lin}, \underline{u}_{lin}\}$ a funcției neliniare $\underline{\psi}$, sistemului (3.5.7.a) i se poate asocia forma liniarizată (3.5.7.b):

$$\begin{aligned} \underline{X}(k + 1) = & \underline{\Phi}_{prm}(k, \Delta x, \Delta t)\underline{X}(k) + \underline{\Gamma}_{prm_1}(k, \Delta x, \Delta t)\underline{u}(k + 1) + \\ & + \underline{\Gamma}_{prm_2}(k, \Delta x, \Delta t)\underline{u}(k) + \underline{\Delta}_{prm}(k, \Delta x, \Delta t) \end{aligned} \quad (3.5.7.b)$$

Prin Φ_{prm} , Γ_{prm_1} , Γ_{prm_2} și Δ_{prm} s-au notat matricele parametrilor formeii liniarizate discrete, iar prin θ s-a notat un parametru al metodei de discretizare prin aproximare, care ia valoarea 1 pentru așa-numita *metodă implicită* și valoarea 0 pentru așa-numita *metodă explicită*.

Este important de observat că (3.5.7.a) este un sistem algebric recursiv care pentru $\theta = 0$ necesită, pentru determinarea lui $\underline{X}(k+1)$, doar substituții succesive (caracter explicit), pe când pentru $\theta \neq 0$, necesită rezolvarea, la fiecare iterație de calcul, a unui sistem neliniar de ecuații algebrice (caracter implicit).

Remarcă: Întrucât, din cauza diversității condițiilor de frontieră și a formulelor de discretizare ce se pot folosi, este destul de greu de descris un algoritm general valabil de deducere al vectorilor și matricelor sistemelor (3.5.6) și (3.5.7), pornind de la sistemul (3.5.4), în capitolul 4 se prezintă câteva exemple concrete de simulare numerică care vor ajuta la prezentarea și lămurirea acestor aspecte.

Prin sistemul de ecuații cu diferență (3.5.7) vor fi reprezentate *relațiile numerice de calcul* prin care se descrie *metoda numerică, cu diferențe finite*, de găsim a unei soluții unice a realizării sistemice asociate modelului matematic (3.5.2). Aceste relații permit calculul, prin cunoașterea valorilor discrete $\{\underline{\Omega}_{j,k} / j = \overline{1,m}\}$ la momentul de timp t_k , a valorilor discrete $\{\underline{\Omega}_{j,k+1} / j = \overline{1,m}\}$ la momentul următor de timp t_{k+1} . Soluția $\underline{\Omega}(x,t)$ a problemei va fi reprezentată, pe domeniul $D = [0, L = m \cdot \Delta x] \times [0, t_{final} = n \cdot \Delta t]$, prin setul de valori discrete $\{\underline{\Omega}_{j,k} = \underline{\Omega}(x_j, t_k) / j = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}\}$.

După cum s-a mai precizat, calitatea metodei cu diferențe finite se apreciază prin respectarea condiției de convergență.

Considerăm atunci funcția $\underline{\Omega}_e(x,t)$ ca fiind soluția exactă a ecuației cu derivate parțiale (3.5.2) pentru setul de condiții limită *CI* și *CF* folosit. Vectorului liniarizat al stărilor \underline{X} asociat modelului discret folosit îi asociem vectorul \underline{X}_e obținut din evaluarea soluției exacte în nodurile rețelei de discretizare în care este definit vectorul de stare \underline{X} al formeii liniarizate (3.5.7.b). Din modul de definire, vectorul \underline{X}_e va satisface și el relațiile (3.5.7.b) în vecinătatea punctului de liniarizare:

$$\begin{aligned} \underline{X}_e(k+1) = & \Phi_{prm}(k, \Delta x, \Delta t) \underline{X}_e(k) + \Gamma_{prm_1}(k, \Delta x, \Delta t) \underline{u}(k+1) + \\ & + \Gamma_{prm_2}(k, \Delta x, \Delta t) \underline{u}(k) + \Delta_{prm}(k, \Delta x, \Delta t) \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Definim eroarea metodei prin relația:

$$\underline{E}_{met}(k+1) = \underline{X}_e(k+1) - \underline{X}(k+1) \quad (3.5.9)$$

Dacă ținem seama de relațiile (3.5.8) vom avea:

$$\underline{E}_{met}(k+1) = \Phi_{prm} \underline{E}_{met}(k+1) = \dots = \Phi_{prm}^{k+1} \underline{E}_{met}(0) \quad (3.5.10)$$

Proprietatea de convergență a metodei se va putea exprima prin proprietatea de convergență a șirului erorilor $\{\underline{E}_{met}(n)\}$:

$$\underline{E}_{met}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.5.11)$$

Condiția (3.5.11) este îndeplinită numai dacã:

$$\Phi_{prm}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.5.12)$$

Aceasta înseamnă ca *raza spectrală* ρ_{spec} a matricei parametrilor formeii liniarizate discrete Φ_{prm} sã fie *subunitarã*:

$$\rho_{spec}(\Phi_{prm}) < 1 \quad (3.5.13)$$

Singurele erori care se propagã sunt cele datorate alegerii incorecte a condițiilor inițiale $\underline{E}_{met}(0)$, respectiv, consistenței formulelor de derivare numericã. Întrucât aproximãrile realizate prin intermediul diferențelor finite sunt rezultatul folosirii unor dezvoltãri în serie Taylor a cãror eroare de trunchiere tinde sã se anuleze când norma rețeleii de discretizare scade spre zero, respectiv, $\varepsilon_{tr}(q, \Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ și $\varepsilon_{tr}(s, \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, se deduce imediat cã ele sunt consistente. Totodatã, întrucât erorile de trunchiere sunt cu atãt mai mici cu cât ordinele dezvoltãrilor în serie Taylor, respectiv q și s , sunt mai mari, se poate obține o creștere a preciziei formulelor de discretizare, fãrã a micșora pasul de discretizare, prin creșterea ordinului dezvoltãrii în serie Taylor folosite [69].

Din punctul de vedere al teoriei sistemelor condiția (3.5.13) impune ca modelul discret liniarizat (3.5.7.b) sã fie un *model (asimptotic) stabil* (stabilitate în sens Lyapunov). Valorile proprii $\lambda_{vp}(\Phi_{prm})$ ale matricei sistemului vor fi localizate în interiorul cercului cu centrul în originea planului complex, de raza unitarã:

$$\|\lambda_{vp}(\Phi_{prm})\| < 1 \quad (3.5.14)$$

Ținând seama de dependența matricei Φ_{prm} de pașii de discretizare Δx și Δt , considerând cã punctele de discretizare spațialã sunt fixe, ar trebui ca la fiecare iterație de calcul sã alegem valoarea pasului de discretizare al timpului Δt astfel încât valorile proprii ale matricei Φ_{prm} sã rãmânã în interiorul cercului unitate.

În cele de urmeazã se vor prezenta o serie de particularități care permit operarea unor simplificãri în analiza stabilitãții modelului în timp discret (3.5.7.b).

Astfel, la folosirea unei *metode numerice implicite* de rezolvare, când $\theta = 1$, modelul (3.5.7.a) devine:

$$\delta \underline{X}(k+1, \Delta t) = \underline{\Psi}(\underline{X}(k+1), \underline{u}(k+1), \Delta x) \quad (3.5.15.a)$$

având forma liniarizatã:

$$\bar{\underline{X}}(k+1) = \underline{\Phi}_{prm}^{imp}(k, \Delta x, \Delta t) \bar{\underline{X}}(k) + \underline{\Gamma}_{prm}^{imp}(k, \Delta x, \Delta t) \underline{u}(k+1) + \underline{\Delta}_{prm}^{imp}(k, \Delta x, \Delta t) \quad (3.5.15.b)$$

Prin $\underline{\Phi}_{prm}^{imp}$, $\underline{\Gamma}_{prm}^{imp}$ și $\underline{\Delta}_{prm}^{imp}$ s-au notat matricele parametrilor formeii.

Trebuie observat cã forma simplificatã (3.5.15.a) reprezintã un sistem neliniar de ecuații algebrice implicite cu necunoscutele grupate, sub forma vectorului $\bar{\underline{X}}(k+1)$. Acest sistem va trebui rezolvat la fiecare iterație de calcul, printr-o metodã numericã adecvatã (de exemplu Newton-Raphson [6]).

În cazul când, pentru discretizarea sistemului de ecuații diferențiale (3.5.6) se folosesc diferențe finite de forma:

$$\delta \underline{X}(k+1, \Delta t) = \frac{\underline{X}(k+1) - \underline{X}(k)}{\Delta t} \quad (3.5.16)$$

corespunzătoare unei metode numerice de tip Euler, cu eroarea de trunchiere $O(\Delta t)$ [69], între matricea $\underline{\Phi}_{prm}^{imp}$ a modelului discret (3.5.15.b) și matricea \underline{A}_{prm} a formei liniarizate (3.5.6.b) a modelului continuu, există următoarea relație de legătură:

$$\underline{\Phi}_{prm}^{imp} = (\underline{I} - \Delta t \cdot \underline{A}_{prm})^{-1} \quad (3.5.17)$$

Prin \underline{I} s-a notat matricea unitare având aceeași dimensiune ca și matricea \underline{A}_{prm}

Legătura dintre valorile proprii ale matricei \underline{A}_{prm} și valorile proprii ale matricei $\underline{\Phi}_{prm}^{imp}$ este dată de următoarea teoremă [32]: Dacă $\lambda_{vp}(\underline{A}) = \{\lambda_{vp_1}, \lambda_{vp_2}, \dots, \lambda_{vp_n}\}$ este spectrul matricei $\underline{A} \in R^{n \times n}$, atunci pentru orice funcție φ definită pe $\lambda_{vp}(\underline{A})$ avem: $\lambda_{vp}(\varphi(\underline{A})) = \{\varphi(\lambda_{vp_1}), \varphi(\lambda_{vp_2}), \dots, \varphi(\lambda_{vp_n})\}$.

Astfel, considerând funcția: $\varphi(y) = (y^0 - \Delta t \cdot y)^{-1} = \frac{1}{1 - \Delta t \cdot y}$, matricea $\underline{\Phi}_{prm}^{imp}$ din relația (3.5.17) se poate scrie ca și funcția matriceală: $\underline{\Phi}_{prm}^{imp} = \varphi(\underline{A}_{prm})$, iar în baza teoremei ajutătoare rezultă relația de legătură:

$$\lambda_{vp}(\underline{\Phi}_{prm}^{imp}) = \frac{1}{1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp}(\underline{A}_{prm})} \quad (3.5.18)$$

în care notația din membrul stâng semnifică orice element al mulțimii $\lambda_{vp}(\underline{A}_{prm})$ a valorilor proprii matricei \underline{A}_{prm} , iar cea din membrul drept elementul corespunzător din mulțimea $\lambda_{vp}(\underline{\Phi}_{prm}^{imp}) = \lambda_{vp}(\varphi(\underline{A}_{prm}))$ a valorilor proprii ale matricei $\underline{\Phi}_{prm}^{imp} = \varphi(\underline{A}_{prm})$. Egalitatea (3.5.18) ne permite să afirmăm că indiferent de valoarea pasului de discretizare al timpului Δt , dacă $Re\{al[\lambda_{vp}(\underline{A}_{prm})]\} < 0$ atunci elementele mulțimii $\lambda_{vp}(\underline{\Phi}_{prm}^{imp})$ sunt în modul subunitar, fiind îndeplinită condiția de stabilitate a metodei numerice descrise prin modelul discret (3.5.15.b). În consecință, convergența metodei numerice implicite va fi condiționată numai de structura matricei $\underline{A}_{prm}(t, \Delta x)$ rezultate în urma operației de discretizare spațială, iar valoarea pasului de discretizare Δt va influența numai precizia calcului numeric.

Dezavantajul metodei este cauzat de forma implicită a ecuațiilor modelului (3.5.15.a) care, pentru realizarea recurenței, necesită la fiecare iterație calcule suplimentare de explicitare (rezolvarea unui sistem neliniar de ecuații algebrice).

În cazul unei metode numerice explicite, când în modelul (3.5.7) avem $\theta = 0$, acesta devine:

$$\delta \underline{X}(k+1, \Delta t) = \underline{\Psi}(\underline{X}(k), \underline{u}_k(k), \Delta x) \quad (3.5.19.a)$$

având forma liniarizată:

$$\bar{X}(k+1) = \Phi_{prm}^{exp}(k, \Delta x, \Delta t) \bar{X}_{prm}^{exp}(k) + \Gamma_{prm}^{exp}(k, \Delta x, \Delta t) \underline{u}(k+1) + \Delta_{prm}^{exp}(k, \Delta x, \Delta t) \quad (3.5.19.b)$$

În cazul când se folosește tot formula de discretizare (3.5.16), între matricea Φ_{prm}^{exp} a modelului discret (3.5.19.b) și matricea A_{prm} a formei liniarizate (3.5.6.b) a modelului continuu există relația de legătură:

$$\Phi_{prm}^{exp} = I + \Delta t \cdot A_{prm} \quad (3.5.20)$$

În mod similar, considerând funcția $\varphi(y) = y^0 + \Delta t \cdot y = 1 + \Delta t \cdot y$, rezultă următoarea relație de legătură între valorile proprii ale celor două matrici:

$$\lambda_{vp}(\Phi_{prm}^{exp}) = 1 + \Delta t \cdot \lambda_{vp}(A_{prm}) \quad (3.5.21)$$

În acest caz stabilitatea metodei numerice explicite este condiționată atât de respectarea condiției de stabilitate a modelului continuu $Real[\lambda_{vp}(A_{prm})] < 0$ cât și de alegerea pasului de discretizare al timpului Δt , întrucât este posibil să avem $Real(1 + \Delta t \cdot \lambda_{vp}(A_{prm})) < -1$. În acest caz vorbim de situarea valorilor pasului de discretizare Δt sub o valoare maximă numită limită de stabilitate [16], [36] care trebuie calculată la fiecare iterație de calcul.

Avantajul metodei numerice explicite de a nu necesita rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare la fiecare iterație de calcul comparativ cu metoda implicită este diminuat de dezavantajul necesității de alegere a pasului de discretizare Δt la fiecare iterație de calcul. Dificultatea problemei rezultă din contextul ce urmează.

Astfel, potrivit relațiilor (3.4.34), soluția generală a modelului procesului de curgere prezintă în componența sa o combinație de moduri exponențiale de comportament dinamic dintre care cel mai rapid mod este caracterizat printr-o constantă de timp al cărei ordin de mărime este direct proporțional cu $\frac{1}{m^2}$. În cazul

metodelor numerice explicite bazate pe discretizări uzuale ale derivatelor funcție de timp, această constantă de timp va reprezenta practic limita de stabilitate implicată în alegerea pasului de discretizare Δt . Dacă se cere o precizie de calcul mare care impune, printre altele un număr m mare de puncte de discretizare spațială, automat domeniul de alegere al pasului de discretizare Δt se micșorează practic cu pătratul numărului m al punctelor de discretizare spațială, crescând implicit și efortul de calcul.

Potrivit relației (3.4.34), în condiții de simplificare a modelului procesului de curgere, în regimurile tranzitorii ale acestuia apar componente modale cu constante de timp într-o gamă largă de ordine de mărime. Aspectul este important atât din punct de vedere calitativ (gama largă) cât și din punct de vedere cantitativ (valorile propriu-zise ale constantelor de timp). În acest context, modelele de procese cu parametri concentrați, de aproximare a modelului matematic al procesului de curgere, care au fost deduse, vor furniza, în ipoteza unei soluționări analitice, soluții care vor prezenta simultan atât componente dinamice extrem de lente și cât și componente dinamice extrem de rapide. Din punct de vedere matematic sistemele de ecuații asociate unor astfel de modele intră în categoria sistemelor de ecuații inflexibile („stiff equations”) [36].

Pentru acest tip de sisteme de ecuații diferențiale au fost dezvoltate o clasă specială de metode numerice explicite de rezolvare numite metode *Runge-Kutta-Chebyshev* bazate pe principiul relaxării preciziei de calcul numeric în favoarea creșterii limitei de stabilitate [75], [77]. Principiul metodelor va fi prezentat în subcapitolul care urmează și are la bază utilizarea unor formule pentru explicitarea diferenței finite $\delta X(k+1, \Delta t)$ astfel încât domeniul de stabilitate al sistemului de ecuații discrete să fie expandat față de cercul de rază unitară utilizat în cazul recurgerii la formula (3.5.16).

Din cele prezentate rezultă că mecanismul de selecție a unei metode numerice pentru simularea modelului matematic al procesului de curgere al gazului printr-un sistem de transport este destul de dificil de realizat. În diferitele situații concrete de lucru trebuie să se țină seama de aspectele prezentate.

Studiul convergenței metodei numerice se poate face, într-o primă fază, funcție numai de structura matricei A_{prm} a formei liniarizate (3.5.6.b), a modelului continuu. Această structură este determinată de formulele de discretizare folosite pentru aproximarea numerică a derivatelor după variabila x . De regulă, această matrice va avea elementele dispuse pe o bandă centrată pe diagonala principală. Între structura acestei matrice și valorile ei proprii se pot stabili o serie de corelații importante pentru studiul convergenței [32], [70].

3.6. Metoda Runge-Kutta-Chebyshev

Folosirea unei metode numerice implicite are atât avantajul convergenței necondiționată de alegerea pașilor de discretizare cât și dezavantajul folosirii unui sistem de ecuații cu diferențe neliniar pentru găsirea soluției aproximative.

În schimb metodele numerice explicite nu prezintă acest dezavantaj întrucât mărimile necunoscute ale sistemului de ecuații cu diferențe apar în mod explicit în cadrul sistemului de ecuații [6], [69]. Convergența metodei va fi condiționată de alegerea pașilor de discretizare și în cele mai multe din cazuri vor rezulta valori mici ale pasului de discretizare al timpului Δt ceea ce va conduce la un număr mare de iterații. Eliminarea acestui dezavantaj a fost realizat prin dezvoltarea metodei numerice Runge-Kutta-Chebyshev care are la bază ideea creșterii limitei de stabilitate pentru a putea crește valoarea pasului de discretizare al timpului Δt . Prezentarea care urmează să se facă are la bază lucrările [36], [75], [77].

3.6.1. Aplicabilitatea metodelor numerice cu diferențe finite în cazul sistemelor ecuații diferențiale inflexibile

După cum s-a arătat în paragrafele anterioare modelul discret al procesului de curgere posedă o serie de moduri dinamice extreme, care îngreunează algoritmul de calcul. Este vorba despre moduri dinamice similare, ca exemplificare, celor ale următorului sistem de ecuații diferențiale ordinare:

$$\dot{x}_1(t) = -\lambda_{vp} x_1(t) \quad (3.6.1.a)$$

$$\dot{x}_2(t) = -1000\lambda_{vp} x_2(t) \quad (3.6.1.b)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.6.1.c)$$

În sistemul de ecuații (3.6.1) λ este o constantă reală pozitivă.

Pentru condiții inițiale unitare soluția analitică a sistemului (3.6.1) este:

$$x_1(t) = e^{-\lambda_{vp}t} \quad (3.6.2.a)$$

$$x_2(t) = e^{-1000\lambda_{vp}t} \quad (3.6.2.b)$$

$$y(t) = e^{-\lambda_{vp}t} + e^{-1000\lambda_{vp}t} \quad (3.6.2.c)$$

Se observă că $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Una dintre metodele cele mai cunoscute de rezolvare numerică a sistemului de ecuații (3.6.1) este *metoda Euler*. Ea constă în discretizarea derivatelor dependente de timp din sistemul (3.6.1) cu formula

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta t} \quad (3.6.3)$$

și asocierea valorii derivatei capătului inferior al intervalului de timp $[t_k, t_{k+1}]$. Cu $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ s-a notat pasul de discretizare al timpului.

În urma discretizării la timpul t_k după formula (3.6.3), se poate scrie sistemul de ecuații cu diferență, în formă explicită:

$$\frac{x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)}{\Delta t} = -\lambda_{vp}x_1(t_k) \rightarrow x_1(t_{k+1}) = (1 - \lambda_{vp}\Delta t)x_1(t_k) \quad (3.6.4.a)$$

$$\frac{x_2(t_{k+1}) - x_2(t_k)}{\Delta t} = -1000\lambda_{vp}x_2(t_k) \rightarrow x_2(t_{k+1}) = (1 - 1000\lambda_{vp}\Delta t)x_2(t_k) \quad (3.6.4.b)$$

$$y(t_{k+1}) = x_1(t_{k+1}) + x_2(t_{k+1}) \quad (3.6.4.c)$$

Analitic, sistemul de ecuații cu diferențe (3.6.4) are soluția:

$$x_1(t_k) = (1 - \lambda_{vp}\Delta t)^k \quad (3.6.5.a)$$

$$x_2(t_k) = (1 - 1000\lambda_{vp}\Delta t)^k \quad (3.6.5.b)$$

$$y(t_k) = (1 - \lambda_{vp}\Delta t)^k + (1 - 1000\lambda_{vp}\Delta t)^k \quad (3.6.5.c)$$

Analizând soluția numerică $y(t_k)$, dată prin relația (3.6.5.c), se observă că, dacă pasul de discretizare al timpului Δt nu este suficient de mic, atunci soluția discretă $y(t_k)$ și soluția analitică $y(t)$, conform relației (3.6.2.c) diferă calitativ. Pentru a nu se întâmpla acest lucru este necesar ca $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t_k) = 0$, iar pentru a

avea o convergență uniformă este necesar ca $|y(t_{k+1})| < |y(t_k)|$. Cele două condiții sunt îndeplinite dacă

$$|1 - 1000\lambda_{vp}\Delta t| < 1 \rightarrow \Delta t < \frac{2}{1000\lambda_{vp}} \quad (3.6.6)$$

Condiția (3.6.6) care se impune în alegerea pasului de discretizare al timpului Δt poartă numele de *condiția de stabilitate*, iar valoarea $\frac{2}{1000\lambda_{vp}}$ reprezintă *limita de stabilitate*. Principial, valoarea limitei de stabilitate rezultă din asigurarea convergenței componente de dinamică cea mai rapidă: $x_2(t_k)$, relația

(3.6.5.b). Implicit, se asigură și convergența componentei cu dinamică mai lentă $x_1(t_k)$, relația (3.6.5.a). În adevăr, pentru aceasta rezultă o limită de stabilitate mai mare:

$$|1 - \lambda_{vp}\Delta t| < 1 \rightarrow \Delta t < \frac{2}{\lambda_{vp}} \quad (3.6.7)$$

Deci pasul de discretizare al timpului Δt trebuie astfel ales astfel încât toate componentele soluției $y(t_k)$ să fie convergente, deși contribuția (ponderea) fiecărei componente în formarea soluției finale este diferită. În cazul relației (3.6.5.c) componentele sunt $x_1(t_k)$ și $x_2(t_k)$. Numeric, pentru $t_1 = 0,2$ avem $x_1(t_1) = e^{-0,2\lambda_{vp}} = 0,82^{\lambda_{vp}}$, respectiv, $x_2(t_1) = e^{-1000 \cdot 0,2\lambda_{vp}} = (10^{-38})^{\lambda_{vp}}$. Valoarea componentei $x_2(t)$ poate fi neglijată, din punct de vedere cantitativ însă, din punct de vedere calitativ, nu poate fi neglijată contribuția pe care o are asupra *stabilității* sistemului de ecuații discrete, respectiv în alegerea pasul de discretizare al timpului.

Sistemele de ecuații care posedă astfel de caracteristici sunt numite sisteme de ecuații *inflexibile* („stiff equations”). Sistemele de ecuații diferențiale ordinare care rezultă din discretizarea spațială a ecuațiilor cu derivate parțiale care descriu curgerea gazelor prin conductele de transport tind să se încadreze în această categorie.

Metoda numerică asociată prin formula de discretizare (3.6.3) pentru rezolvarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale ordinare (3.6.1) face parte din categoria metodelor numerice *explicite* de rezolvare numerică pentru care convergența este, însă, *condiționată* de alegerea pasului de discretizare al timpului.

Obținerea unei metode numerice convergente necondiționat de alegerea pasului de discretizare al timpului se face prin discretizarea sistemului (3.6.1) cu formula (3.6.3) și asocierea valorii derivatei capătului superior t_{k+1} al intervalului de timp $[t_k, t_{k+1}]$. Rezultă sistemul de ecuații cu diferențe implicite:

$$\frac{x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)}{\Delta t} = -\lambda_{vp}x_1(t_{k+1}) \rightarrow x_1(t_{k+1}) = \frac{1}{1 + \lambda_{vp}\Delta t} x_1(t_k) \quad (3.6.8.a)$$

$$\frac{x_2(t_{k+1}) - x_2(t_k)}{\Delta t} = -1000\lambda_{vp}x_2(t_{k+1}) \rightarrow x_2(t_{k+1}) = \frac{1}{1 + 1000\lambda_{vp}\Delta t} x_2(t_k) \quad (3.6.8.b)$$

$$y(t_{k+1}) = x_1(t_{k+1}) + x_2(t_{k+1}) \quad (3.6.8.c)$$

Soluția analitică a sistemului (3.6.8) este:

$$x_1(t_k) = \frac{1}{(1 + \lambda_{vp}\Delta t)^k} \quad (3.6.9.a)$$

$$x_2(t_k) = \frac{1}{(1 + 1000\lambda_{vp}\Delta t)^k} \quad (3.6.9.b)$$

$$y(t_k) = \frac{1}{(1 + \lambda_{vp}\Delta t)^k} + \frac{1}{(1 + 1000\lambda_{vp}\Delta t)^k} \quad (3.6.9.c)$$

Se observă că șirul de numere $y(t_k)$ dat de relația (3.6.9.c) este uniform convergent necondiționat întrucât următoarele condiții de stabilitate:

$$\frac{1}{1 + \lambda_{vp} \Delta t} < 1 \quad (3.6.10.a)$$

$$\frac{1}{1 + 1000 \lambda_{vp} \Delta t} < 1 \quad (3.6.10.b)$$

sunt satisfăcute necondiționat de alegerea pasului de discretizare al timpului Δt .

O astfel de metodă numerică face parte din categoria metodelor numerice *implicite* pentru care alegerea pasului de discretizare al timpului este esențială numai în *precizia* metodei. Cu cât este mai mic pasul de discretizare al timpului, cu atât metoda este mai precisă, dar efortul de calcul devine mai mare.

În continuare să considerăm sistemul de ecuații diferențiale ordinare, nelinear:

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] \quad (3.6.11)$$

Dacă se urmărește rezolvarea sistemului (3.6.11) printr-o metodă numerică explicită, se obține următorul sistem de ecuații cu diferențe:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t \cdot f[x(t_k)], \quad (3.6.12),$$

iar dacă se folosește o metodă numerică implicită, se obține următorul sistem de ecuații cu diferențe:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t \cdot f[x(t_{k+1})]. \quad (3.6.13)$$

Caracterul implicit sau explicit al metodei numerice de rezolvare trebuie remarcat în mijlocul de realizare a tranziției $x(t_k) \rightarrow x(t_{k+1})$.

Astfel sistemul discret de ecuații (3.6.12) permite realizarea acestei tranziții printr-o simplă relație de calcul, în timp ce sistemul de ecuații (3.6.13) necesită rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare. Din acest motiv metoda care a condus la relațiile explicite (deschise) de calcul (3.6.12) se numește metodă numerică explicită, spre deosebire de atributul de implicită aplicat metodei numerice care a condus la relațiile implicite (închise) de calcul (3.6.13).

3.6.2. Utilitatea creșterii limitei de stabilitate a metodelor numerice cu diferențe finite

Fiecare metodă prezintă avantajele și dezavantajele ei în ceea ce privește asigurarea convergenței, respectiv a efortului de calcul.

Prin *teorema Dalquist, Hairer și Wanner*, 1991, s-a demonstrat că nu există metode numerice explicite, absolut stabile. Însă, dezvoltarea unor metode numerice explicite cu o limită de stabilitate îmbunătățită, poate permite acestora să devină mai competitive față de metodele numerice implicite, în ceea ce privește efortul de calcul numeric.

O astfel de metodă numerică explicită, cu îmbunătățirea limitei de stabilitate, pentru sistemul (3.6.11), este prezentată, calitativ, în cele ce urmează, prin relațiile de calcul (3.6.14) [36], [77]:

$$k_1 = f[x(t_k)] \quad (3.6.14.a)$$

$$k_2 = f[x(t_k) + a_1 k_1 \Delta t] \quad (3.6.14.b)$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + (\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2) \Delta t \quad (3.6.14.c)$$

Proprietățile metodei numerice (3.6.14) pot fi studiate calitativ prin aplicarea acestora asupra ecuației diferențiale (3.6.15):

$$\dot{x}(t) = -\lambda_{vp}x(t) \quad (3.6.15)$$

Relațiile de calcul numeric ale metodei sunt, pentru cazul considerat:

$$k_1 = -\lambda_{vp}x(t_k) \quad (3.6.16.a)$$

$$k_2 = -\lambda_{vp} \left[x(t_k) + a_1 \Delta t (-\lambda_{vp}x(t_k)) \right] \quad (3.6.16.b)$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) \left[1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp} (\beta_1 + \beta_2) + \beta_2 a_1 \cdot \Delta t^2 \lambda_{vp}^2 \right] \quad (3.6.16.c)$$

Ținând cont de soluția analitică (3.6.5) a sistemului (3.6.4), tranziția $x(t_k) \rightarrow x(t_{k+1})$ se poate calcula exact prin intermediul relației:

$$x(t_{k+1}) = e^{-\lambda_{vp} \Delta t} x(t_k) \stackrel{\text{serieTaylor}}{\cong} \left(1 - \lambda_{vp} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \lambda_{vp}^2 \Delta t^2 + \dots \right) x(t_k) \quad (3.6.17)$$

Pentru ca soluția numerică (3.6.16.c) să fie cât mai aproape de soluția analitică (3.6.17) se impune să fie satisfăcută egalitatea:

$$1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp} (\beta_1 + \beta_2) + \beta_2 a_1 \cdot \Delta t^2 \lambda_{vp}^2 = 1 - \lambda_{vp} \Delta t + \frac{1}{2} \lambda_{vp}^2 \Delta t^2 + \dots \quad (3.6.18)$$

Egalitatea (3.6.18) implică alegerea coeficienților metodei numerice (3.6.14) astfel încât:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (3.6.19.a)$$

$$a_1 \beta_2 = \frac{1}{2} \quad (3.6.19.b)$$

Întrucât avem numai două ecuații (3.6.18) și sunt 3 necunoscute, $\{a_1, \beta_1, \beta_2\}$, există un număr infinit de combinații care satisfac aceste două relații.

Relația de egalitate (3.6.19.a) este absolut necesară pentru ca metoda numerică să conducă la o soluție numerică care să aibă un comportament similar cu cel al soluției analitice. În schimb, satisfacerea relației (3.6.19.b) conduce la o metodă numerică mult mai precisă (relația de calcul numeric coincide cu dezvoltarea în serie Taylor de ordinul 2), decât dacă nu ar fi satisfăcută (dezvoltare în serie Taylor până la ordinul 1).

Analiza convergenței metodei numerice (3.6.14) se face prin analiza inecuației (3.6.20):

$$\left| 1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp} (\beta_1 + \beta_2) + \beta_2 a_1 \cdot \Delta t^2 \lambda_{vp}^2 \right| < 1 \quad (3.6.20)$$

Dacă ambele relații (3.6.19) sunt satisfăcute, inecuația (3.6.20) devine:

$$\left| 1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda_{vp}^2 \right| < 1 \Leftrightarrow \left| 1 + (\Delta t \cdot \lambda_{vp} - 1)^2 \right| < 2 \rightarrow \Delta t < \frac{2}{\lambda_{vp}} \quad (3.6.21)$$

Dacă condiția (3.6.19.b) nu este satisfăcută, inecuația (3.6.21) se transformă:

$$\left| 1 - \Delta t \cdot \lambda_{vp} + \beta_2 a_1 \cdot \Delta t^2 \lambda_{vp}^2 \right| < 1 \quad (3.6.22)$$

Coeficienții a_1 și β_2 pot fi aleși astfel încât să fie obținută cea mai mare limită de stabilitate. În cazul de față, după efectuarea unor calcule algebrice, cea mai mare limită de stabilitate se obține când: $a_1 \beta_2 = \frac{1}{8}$, adică:

$$\Delta t < \frac{8}{\lambda_{vp}} \quad (3.6.23)$$

Analizând relațiile (3.6.21) și (3.6.23), pentru exemplul (3.6.15) prezentat, se poate trage concluzia că, *relaxarea* cerințelor de precizie impuse metodei numerice conduce la creșterea de patru ori a limitei de stabilitate.

3.6.3. Algoritmul de calcul al metodei Runge-Kutta-Chebyshev

Principiul relaxării preciziei de calcul numeric în favoarea creșterii limitei de stabilitate a fost utilizat pentru crearea unor metode numerice de rezolvare cunoscute ca metode numerice de tip *Runge-Kutta-Chebyshev*, aplicabile unei clase de ecuații diferențiale cu valori proprii distribuite într-o bandă îngustă în jurul *axei reale* a planului complex, clasă în care tinde să se încadreze sistemul de ecuații diferențiale ordinare rezultate în urma discretizării derivatelor spațiale ale ecuațiilor cu derivate parțiale care caracterizează curgerea gazului prin conductele de transport (valori proprii localizate în jurul axei reale negative).

Pentru un model matematic de forma (3.6.11), care are localizate valorile proprii într-o bandă îngustă în jurul *axei reale negative*, varianta de metodă numerică explicită de rezolvare de tip Runge - Kutta - Chebyshev în *s*-pași constă în următorul algoritm de calcul:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= x(t_k) \\
 w_1 &= w_0 + \tilde{\mu}_1 \cdot \Delta t \cdot f(w_0, t_k + c_0 \Delta t) \\
 &\dots \\
 w_j &= \mu_j w_{j-1} + v_j w_{j-2} + (1 - \mu_j - v_j) w_0 + \tilde{\mu}_j \cdot \Delta t \cdot f(w_{j-1}, t_k + c_{j-1} \Delta t) + \tilde{v}_j \Delta t \cdot f(w_0, t_k + c_0 \Delta t) \\
 &\dots \\
 x(t_{k+1}) &= w_s
 \end{aligned}
 \tag{3.6.24}$$

cu $2 \leq j \leq s$.

Coeficienții metodei se calculează după formulele (3.6.25):

$$\tilde{\mu}_1 = b_1 \omega_1 \tag{3.6.25.a}$$

respectiv, pentru $j = \overline{2, s}$,

$$\mu_j = \frac{2b_j \omega_0}{b_{j-1}} \tag{3.6.25.b}$$

$$v_j = -\frac{b_j}{b_{j-2}} \tag{3.6.25.c}$$

$$\tilde{\mu}_j = \frac{2b_j \omega_1}{b_{j-1}} \tag{3.6.25.d}$$

$$\tilde{v}_j = -(1 - b_{j-1}) T_{j-1}(\omega_0) \tilde{\mu}_j \tag{3.6.25.e}$$

Coeficienții formulelor (3.6.25) sunt:

$$b_0 = \frac{1}{4\omega_0^2} \tag{3.6.26.a}$$

$$b_1 = \frac{1}{\omega_0} \tag{3.6.26.b}$$

$$b_j = \frac{\ddot{T}_{Ch_j}(\omega_0)}{\left[\dot{T}_{Ch_j}(\omega_0)\right]^2}, j = \overline{2, s} \quad (3.6.26.c)$$

$$\omega_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{s^2} \quad (3.6.26.d)$$

$$\omega_1 = \frac{\dot{T}_{Ch_s}(\omega_0)}{\ddot{T}_{Ch_s}(\omega_0)} \quad (3.6.26.e)$$

În relațiile (3.6.26) T_{Ch_k} este *polinomul Chebyshev* de prima speță și ordin k , iar pentru argumente $\omega_0 > 0$ are forma:

$$T_{Ch_k}(\omega_0) = \cosh[k \cdot \arccos h(\omega_0)] = \cosh\left[k \cdot \ln\left(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}\right)\right] \quad (3.6.27)$$

În implementarea practică a metodei trebuie să se țină seama de relațiile de recurență pentru calcularea polinomului Chebyshev:

$$T_{Ch_0}(\omega_0) = 1$$

$$T_{Ch_1}(\omega_0) = \omega_0$$

...

$$T_{Ch_j}(\omega_0) = 2\omega_0 T_{Ch_{j-1}}(\omega_0) - T_{Ch_{j-2}}(\omega_0), j = \overline{2, s}$$

Incrementiile $\{c_j / j = \overline{0, s}\}$ sunt dați de relațiile (3.6.29):

$$c_0 = 0 \quad (3.6.29.a)$$

$$c_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad (3.6.29.b)$$

$$c_j = \frac{\dot{T}_{Ch_s}(\omega_0) \ddot{T}_{Ch_j}(\omega_0)}{\ddot{T}_{Ch_s}(\omega_0) \dot{T}_{Ch_j}(\omega_0)} = \mu_j c_{j-1} + \nu_j c_{j-2} + \tilde{\mu}_j + \tilde{\nu}_j, j = \overline{2, s} \quad (3.6.29.c)$$

Limita de stabilitate $\beta_{stab}(s)$, funcție de raza spectrală $|\lambda_{vp}|_{max} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ (cel mai mare modul dintre modulele valorilor proprii ale spectrului formeii liniare $\frac{\partial f}{\partial x}$), este dată prin relația (3.6.30):

$$\Delta t < \frac{\left(2 - \frac{4}{3}\varepsilon\right)s^2}{|\lambda_{vp}|_{max}} = \beta_{stab}(s) \quad (3.6.30)$$

Parametrul $\varepsilon \geq 0$ este liber să fie definit, rolul său fiind acela de a crea o oarecare amortizare în comportamentul dinamic al componentelor rapide ale soluției. Dacă se alege $\varepsilon = 0$ metoda lucrează numai dacă valorile proprii ale formeii $\frac{\partial f}{\partial x}$ sunt situate pe axa reală negativă. Însă o perturbație imaginară de amplitudine mică poate produce instabilitate. Din considerente de robustețe a metodei parametrul ε trebuie să aibă valori mici pozitive. Efectul va consta într-o regiune de stabilitate de forma unei bande înguste în jurul axei reale negative.

Pentru situații practice în literatura de specialitate se indică $\varepsilon = 0,05$, însă aceasta este o valoare orientativă care conduce la o amortizare de aproximativ 5% iar limita de stabilitate (3.6.30) se diminuează cu aproximativ 2%.

Numărul de pași s ai metodei numerice este determinat pe baza pasului de discretizare al timpului Δt și de raza spectrală $|\lambda_{vp}|_{max} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$. Acest număr trebuie setat, pe considerentul eficienței metodei, la cea mai mică valoare care satisface inecuația (3.6.31):

$$\Delta t < \frac{1,9s^2}{|\lambda_{vp}|_{max}} = \beta_{stab}(s) \quad (3.6.31)$$

O aproximare a razei spectrale a unei matrice \underline{A} se poate face apelând la *teorema Gershgorin* care permite determinarea brută a unei zone (discurile Gershgorin) unde sunt localizate toate valorile proprii ale matricei \underline{A} (vezi Anexa A.4). Această teoremă arată că orice valoare proprie λ_{vp} a matricei \underline{A} este localizată într-unul din discurile planului complex cu centrul în elementele a_{ii} de pe diagonala principală ale matricei \underline{A} și având raza:

$$\rho_{vp_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (3.6.32.a)$$

Cu alte cuvinte: oricare ar fi $\lambda_{vp} \in \lambda_{vp}(\underline{A})$, cu $\lambda_{vp}(\underline{A})$ spectrul matricei \underline{A} , există indicii întregi i astfel încât:

$$|\lambda_{vp} - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (3.6.32.b)$$

Trebuie remarcat faptul că valoarea limitei de stabilitate β_{stab} depinde de numărul de pași s ai metodei, după cum arată relația (3.6.31). Schimbând valoarea s a pasului metodei se poate controla valoarea limitei de stabilitate astfel încât pentru orice pas de discretizare al timpului Δt este posibil să se selecteze un număr s de pași ai metodei numerice astfel încât metoda să fie stabilă.

Pentru cazul ecuației diferențiale (3.6.15), rezolvarea numerică a acesteia pe intervalul de timp $[0, t_{final}]$, presupune parcurgerea a:

$$N_{RKC} = \frac{t_{final}}{\Delta t_{max}} = \frac{|\lambda_{vp}|_{max} t_{final}}{0,653(s^2 - 1)} \text{ iterații. La fiecare iterație trebuie efectuați } s\text{-pași,}$$

astfel încât costul rezolvării numerice al ecuației prin această metodă devine:

$$C_{RKC} = sN_{RKC} = \frac{s|\lambda_{vp}|_{max} t_{final}}{0,653(s^2 - 1)}.$$

Dacă ecuația s-ar rezolva printr-o metodă de tip Euler, cu limita de stabilitate (3.6.6), numărul necesar de iterații ar fi: $N_{Euler} = \frac{t_{final}}{\Delta t_{max}} = \frac{|\lambda_{vp}|_{max} t_{final}}{2}$, costul de rezolvare fiind, în cazul de față unde se face, la fiecare iterație, o singură evaluare a unei funcții: $C_{Euler} = N_{Euler} = \frac{|\lambda_{vp}|_{max} t_{final}}{2}$.

Eficiența metodei Runge-Kutta-Chebyshev comparată cu metoda Euler rezultă a fi: $\frac{C_{RKC}}{C_{Euler}} = \frac{2,2}{s}$.

În figura 3.6.1 este prezentată organigrama de simulare numerică a unui model matematic de forma $\underline{X} = f(\underline{X}, t)$ cu $\underline{X} \in R^n$ și $f : R^n \times R \rightarrow R$, pentru un număr de N iterații.

Raza spectrală a formei matriceale $\underline{A} = \frac{df}{d\underline{X}} \in R^{n \times n}$ calculată într-un punct oarecare \underline{X}_a , se estimează folosind relația (3.6.32.b), respectiv, valoarea maximală

$$|\lambda_{vp}|_{max} = \max_{i=1}^n \left| a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right|, \text{ având în vedere localizarea în semiplanul stâng al}$$

planului complex a valorilor proprii a formei liniarizate a modelului.

Pentru un număr s de pași ai metodei RKC va rezulta o valoare minimală a limitei de stabilitate $\beta(s)$ calculată la fiecare iterație $k = \overline{0, N}$ pe baza relației (3.6.30), astfel încât pasul de discretizare al timpului Δt va putea fi considerat $\Delta t = \beta(s)$ la iterația k .

3.7. Concluzii

Obiectivul acestui capitol l-a reprezentat stabilirea aspectelor relevante privind aplicabilitatea practică a modelului matematic al procesului de curgere din perspectiva existenței unor metode matematice de soluționare

Astfel, pentru modelul complex al procesului de curgere, prezentarea unor condiții specifice de funcționare ale procesului a permis deducerea, fără a avea pretenția de rigurozitate matematică specifică excesivă, a unei forme analitice simplificate a acestui model, pe baza căreia s-au putut identifica și folosi o serie de tehnici și metode analitice specifice teoriei matematice a ecuațiilor diferențiale.

În acest context s-a realizat o expunere sistematizată a modului de soluționare a ecuațiilor de regim staționar, finalizată cu prezentarea unor relații de calcul ale valorilor medii ale unor mărimi care permit stabilirea unui prim nivel de

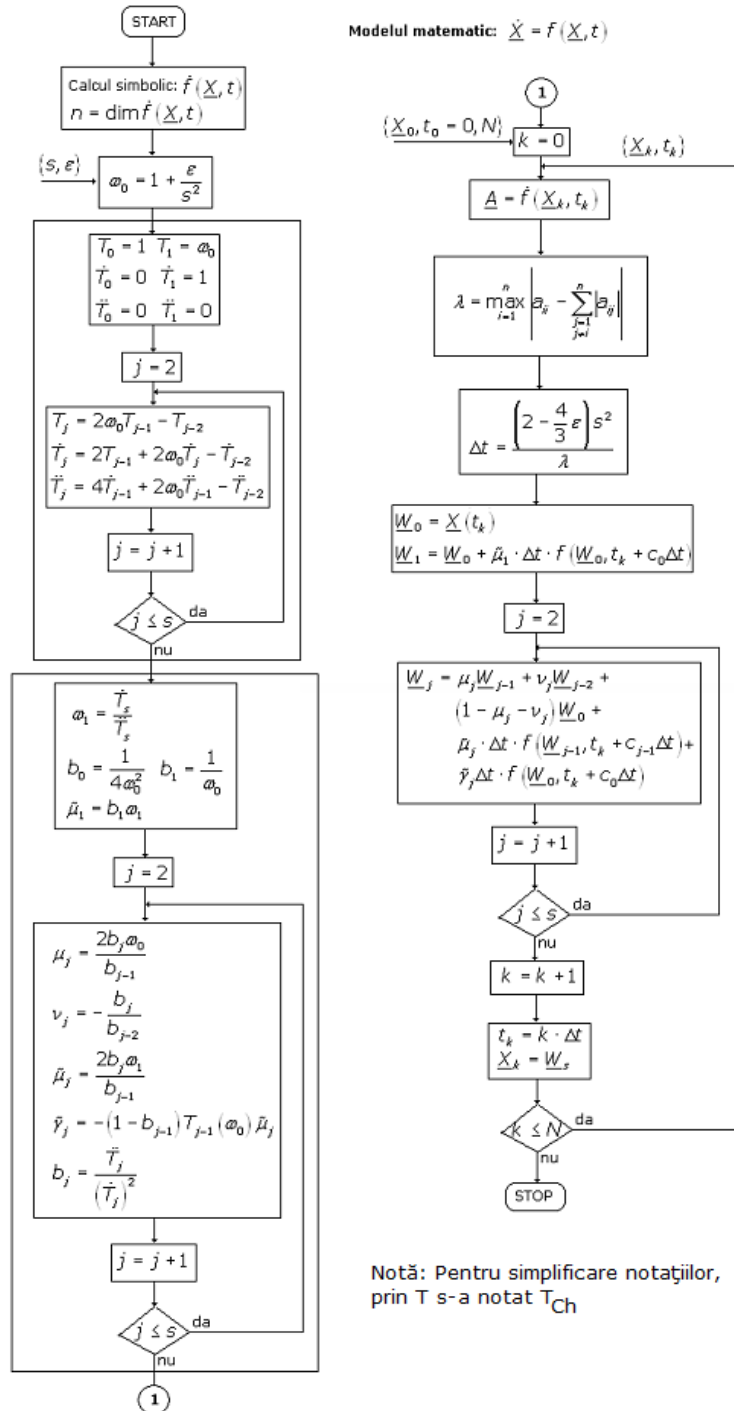


Fig. 3.6.1. Organigrama metodei Runge-Kutta-Chebyshev

aproximare a stării procesului de curgere în jurul unui punct staționar de funcționare.

Metoda analitică de studiu, folosită în cazul ecuațiilor de regim dinamic, a permis stabilirea modurilor de comportament dinamic și scrierea unor relații de calcul aproximativ pentru constantele de timp ale procesului. În felul acesta s-a putut face o estimare a nivelului de complexitate al sistemului de ecuații diferențiale prin care se descrie procesul de curgere din punct de vedere al rezolvării pe cale numerică.

Întrucât rezolvarea pe baza unei metode analitice a sistemului de ecuații diferențiale al modelului procesului de curgere are o valabilitate limitată la forma matematică simplificată, obținerea unei soluții a modelului matematic al procesului de curgere, în orice condiții de funcționare, este posibilă numai prin apelarea la metode numerice de calcul.

În cadrul acestei lucrări s-au luat în considerare numai metodele numerice bazate pe diferențe finite iar descrierea și modul de implementare al acestora s-a făcut accentuându-se aspectul sistemic în sensul că, impunerea condițiilor de frontieră sistemului de ecuații diferențial înseamnă a orienta modelul matematic al procesului de curgere și a-l considera ca o realizare sistemică asociată unui proces tehnologic real.

Acest lucru a permis și propunerea unei interpretări sistemice criteriilor care caracterizează calitatea metodei numerice.

Prezentarea metodelor numerice bazate pe diferențe finite a fost finalizată cu descrierea unei metode de simulare numerică din clasa metodelor Runge-Kutta-Chebyshev, care ține seama de specificul sistemului de ecuații diferențiale al modelului procesului de curgere.

În contextul celor mai sus prezentate se poate considera că obiectivul propus inițial a fost atins.

Capitolul 4: Modele de aproximare a procesului de curgere a gazului natural prin conductele de transport

4.1. Generalități

În cadrul acestui capitol vor fi prezentate și studiate proprietățile unor modelele de aproximare a procesului de curgere a gazului natural prin conductele de transport, care se vor folosi în soluționarea problemei de conducere a sistemului de transport.

Astfel primul subcapitol, 4.2, tratează problema simulării numerice a procesului de curgere al gazului natural printr-un tronson de conductă, prin folosirea unor modele de aproximare construite conform cerințelor de aplicare a metodelor numerice cu diferențe finite. Simulările numerice vor permite emiterea unor observații referitoare la dinamica procesului de curgere și erorile de calcul numeric rezultate în cazul folosirii unor modele matematice simplificate ale curgerii, respectiv, stabilitatea modelor de aproximare folosite.

În subcapitolul următor, 4.3, se pune problema determinării și analizei valabilității unui model sistemic al unui tronson de conductă reprezentat de un model de aproximare liniar cu parametri constanți care va permite analiza dinamicii procesului de curgere în vecinătatea unui regim staționar de funcționare rezolvarea problemei de control a procesului de curgere.

Problema stabilității unui model sistemic discret al procesului de curgere la nivelul unui sistem de transport gaze naturale, dedus din agregarea modelelor sistemice discrete ale tronsoanelor de conductă interconectate este prezentată în cadrul subcapitolului 4.4.

O problemă deosebit de importantă pe care o pune modelarea matematică a unui proces o constituie valabilitatea acestuia, iar acest lucru este realizat în cadrul subcapitolului 4.5 prin validarea experimentală, prin corelarea unor măsurători efectuate pe diferite tronsoane din cadrul Sistemului Național de Transport Gaze cu valori determinate prin simulări numerice.

4.2. Simularea numerică a procesului de curgere al gazului natural printr-un tronson de conductă folosind modele de aproximare

4.2.1. Construirea modelelor de aproximare

După cum s-a arătat în capitolul 2, procesul de curgere nestaționară, cu transfer de căldură a unui gaz real printr-un tronson de conductă este descris printr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale, de forma (2.7.3), care, din punct de vedere sistemic constituie modelul matematic al unui proces cu parametrii distribuiți.

Totodată, după cum s-a arătat în capitolul 3, obținerea unei soluții a sistemului de ecuații diferențiale asociat acestui model se poate face numai pe cale numerică, rezultând o soluție aproximativă. Din punct de vedere sistemic, prin aplicarea metodei numerice cu diferențe finite pentru rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale se face o aproximare a modelului matematic al procesului cu parametrii distribuiți cu un model matematic al unui proces cu parametrii concentrați, fapt care permite oferirea unei interpretări sistemice condițiilor de convergență ale metodei numerice prin analiza valorilor proprii ale sistemului linearizat de ecuații diferențiale.

În cele ce urmează se va prezenta procedura de lucru privind construirea unui model de aproximare al procesului de curgere, fără schimbarea direcției de curgere, luând drept referință modelul matematic (M_0) dat prin sistemul de ecuații cu derivate parțiale (2.7.3):

$$M_0\{p, v, T, \rho\} : \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} + \rho g \sin \alpha = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p \right) v \right] = \rho q_{ct} \\ \rho = \frac{p}{Z(p, T) R_p T} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Rescrierea sistemului de ecuații (4.2.1) numai în variabilele $\{p, v, T\}$ și determinarea traiectoriilor caracteristice (vezi Anexa A.3) constituie o problemă laborioasă însă ar putea oferi o serie de explicații matematice privitor la simplificările realizate pe baza unor observații, care au fost prezentate în cadrul capitolului anterior.

Notăm cu $Q = \rho v A$ debitul masic instantaneu transportat cu viteza v prin secțiunea circulară A a tronsonului de conductă. Semnificația celorlalte mărimi și parametri ai procesului de curgere al gazului prin conductă se consideră cunoscută, fiind prezentată în cadrul capitolelor anterioare.

Factorul de abatere al gazului $Z(p, T)$ se explicitează prin intermediul relației Berthelot (2.6.3), cu o precizie suficientă de bună, sau a celorlalte relații de calcul prezentate în subcapitolul 2.6. Pentru alte relații de calcul, mai precise, se poate consulta referința bibliografică [42].

Se va considera un tronson orizontal de conductă astfel încât elevația conductei va fi: $z = 0$.

Termenul ρq_{ct} asociat fluxului de căldură schimbat de masa de gaz prin conductivitate termică cu solul prin pereții conductei se va rescrie sub forma $\frac{k_L}{A}(T_{sol} - T)$ în care k_L este coeficientului de transfer termic prin pereții conductei.

Semnificația lui a fost prezentată în cadrul capitolului 2.

Folosind ecuația de stare (2.6.2.a), se explicitează densitatea ρ gazului și se înlocuiește în ecuațiile (4.2.1) ale modelului (M_0).

Notând cu $\underline{\Omega}(x,t) = [p(x,t) \ Q_m(x,t) \ T(x,t)]^t$ vectorul *variabilelor*, respectiv, cu $\underline{\xi}$ vectorul *parametrilor* procesului de curgere, după efectuarea calculului simbolice, modelul (M_0) se va putea scrie sub forma matriceală (mai ușor de manipulat în ceea ce privește implementarea programului de simulare numerică) astfel:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{V} \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x} + \underline{W} = 0 \quad (4.2.2.a)$$

Se face precizarea că $\underline{V} = \underline{V}(\underline{\Omega}, \underline{\xi})$ este o matrice având 3×3 elemente, respectiv, $\underline{W} = \underline{W}(\underline{\Omega}, \underline{\xi})$ vector având 3×1 elemente, fiind funcție de variabilele și parametrii procesului de curgere.

Forma de regim staționar a modelului (M_0) se obține pentru $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$:

$$\frac{d \underline{\Omega}}{dx} + \underline{Y} = 0 \quad (4.2.2.b)$$

S-a folosit notația: $\underline{Y} = \underline{V}^{-1} \underline{W}$.

Pentru a facilita analiza rezultatelor simulării numerice (aducerea la același ordin de mărime), variabilele p , Q și T ale sistemului de ecuații (4.2.2) se normalizează. Acest lucru se realizează prin raportare la niște constante de normalizare, și anume: p_M pentru presiune, Q_M pentru debitul masic și T_M pentru temperatură, potrivit relațiilor:

$$p = p_M \tilde{p} \quad (4.2.3.a)$$

$$Q = Q_M \tilde{Q} \quad (4.2.3.b)$$

$$T = T_M \tilde{T} \quad (4.2.3.c)$$

Pentru valorile de bază, la care se face raportarea, se introduce matricea de normalizare:

$$\underline{K}_{norm} = \begin{bmatrix} p_M & 0 & 0 \\ 0 & Q_M & 0 \\ 0 & 0 & T_M \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Coordonata spațială x se normalizează prin raportare la lungimea L a tronsonului de conductă, iar coordonata temporală t prin raportare la timpul în care unda de presiune străbate cu viteza medie a sunetului în gaz c_M tronsonul de conductă de la un capăt la altul:

$$x = L \tilde{x} \quad (4.2.5.a)$$

$$t = \frac{L}{c_M} \tilde{t} \quad (4.2.5.b)$$

Prin aceasta se obține următoarea formă normalizată a modelului (M_0):

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} = 0 \quad (4.2.6.a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{Y} = 0 \quad (4.2.6.b)$$

Relațiile de legătură dintre forma normalizată (4.2.6) și forma nenormalizată (4.2.2) a modelului (M_0) sunt următoarele:

$$\underline{\Omega} = K \tilde{\Omega} \quad (4.2.7.a)$$

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x} = \frac{1}{L} K \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} \quad (4.2.7.b)$$

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} = \frac{c_M}{L} K \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{t}} \quad (4.2.7.c)$$

$$\tilde{V}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}) = \frac{1}{c_M} K^{-1} \underline{V}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}) K \quad (4.2.7.d)$$

$$\tilde{W}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}) = \frac{L}{c_M} K^{-1} \underline{W}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}) \quad (4.2.7.e)$$

$$\tilde{Y} = L K^{-1} \underline{Y}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}) \quad (4.2.7.f)$$

Pentru simularea numerică a formei normalizate (4.2.6) a modelului (M_0) trebuie construită o rețea de discretizare și precizate condițiile la limită (inițiale și de frontieră) pentru variabilele procesului de curgere.

Rețeaua se construiește considerând m noduri de discretizare spațială, uniform repartizate de-a lungul axei Ox cu pasul $\Delta \tilde{x} = \frac{1}{m-1}$ astfel încât:

$$\tilde{\underline{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_m]^t \in R^m, \text{ cu } \tilde{x}_1 = 0, \ \{\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \Delta \tilde{x} / j = \overline{1, m-1}\} \text{ și } \tilde{x}_m = 1.$$

Timpu este eșantionat cu pasul $\Delta \tilde{t}$ astfel încât $\tilde{t}_1 = 0$ și $\{\tilde{t}_{k+1} = \tilde{t}_k + \Delta \tilde{t} / k \geq 1\}$.

Ca și condiții de frontieră, pentru $k > 0$, se consideră:

$$\tilde{p}_{1,k} = \tilde{p}1(t_k) \quad (4.2.8.a)$$

$$\tilde{Q}_{m,k} = \tilde{Q}2(t_k) \quad (4.2.8.b)$$

$$\tilde{T}_{1,k} = \tilde{T}1(t_k) \quad (4.2.8.c)$$

care conduc la o realizare p1Q2T1 a modelului matematic al procesului de curgere.

Pentru simplificarea notării și facilitarea urmăririi prezentării se va renunța la notația de normalizare.

Pentru vectorul variabilelor procesului de curgere se va folosi următoarea notație:

$$\underline{\Omega}(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t) = \underline{\Omega}_{j,k} \quad (4.2.9)$$

Întrucât, pentru simularea numerică se alege drept stare inițială o stare asociată unui regim staționar de curgere caracterizat prin $\{p_{1,1} = p1(t_1), Q_{1,1} = \dots = Q_{m,1} = Q_{stat} = Q2(t_1) = const, T_{1,1} = T1(t_1)\}$, condițiile inițiale pentru sistemul de ecuații diferențiale (4.2.6.a), formate din setul de valori $\{\underline{\Omega}_{j,1} / j = \overline{2, m-1}\}$, se determină prin integrare numerică a formei staționare (4.2.6.b) a modelului (M_0). Condițiile limită inițiale considerate în acest sens sunt:

$$\underline{\Omega}_{1,1} = (p_{1,1} \ Q_{stat} \ T_{1,1})^t.$$

Prin discretizarea derivatelor spațiale ale sistemului normalizat de ecuații cu derivate parțiale (4.2.6.a), modelul (M_0) se aproximează cu un sistem de ecuații diferențiale ordinare scris numai în nodurile de discretizare spațială: $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$, sistem care se interpretează din punct de vedere sistemic ca fiind modelul unui proces cu parametri concentrați în cele m noduri de discretizare spațială.

Astfel se pot folosi următoarele formule de discretizare [6], [69] cu precizia $O(\Delta x^2)$:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_1, t_k) = \frac{-\underline{\Omega}_{3,k} + 4\underline{\Omega}_{2,k} - 3\underline{\Omega}_{1,k}}{2 \cdot \Delta x} \quad (4.2.10.a)$$

$$\left\{ \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_j, t_k) = \frac{\underline{\Omega}_{j+1,k} - \underline{\Omega}_{j-1,k}}{2 \cdot \Delta x} / j = \overline{2, m-1} \right\} \quad (4.2.10.b)$$

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial x}(x_m, t_k) = \frac{\underline{\Omega}_{m-2,k} - 4\underline{\Omega}_{m-1,k} + 3\underline{\Omega}_{m,k}}{2 \cdot \Delta x} \quad (4.2.10.c)$$

Rezultă sistemul de $3m$ ecuații diferențiale ordinare

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{\Omega}}{dt}(x_1, t_k) = -\underline{V}_{1,k} \frac{-\underline{\Omega}_{3,k} + 4\underline{\Omega}_{2,k} - 3\underline{\Omega}_{1,k}}{2 \cdot \Delta x} - \underline{W}_{1,k} \\ \left\{ \frac{d\underline{\Omega}}{dt}(x_j, t_k) = -\underline{V}_{j,k} \frac{\underline{\Omega}_{j+1,k} - \underline{\Omega}_{j-1,k}}{2 \cdot \Delta x} - \underline{W}_{j,k} / j = \overline{2, m-1} \right\} \\ \frac{d\underline{\Omega}}{dt}(x_m, t_k) = -\underline{V}_{m,k} \frac{\underline{\Omega}_{m-2,k} - 4\underline{\Omega}_{m-1,k} + 3\underline{\Omega}_{m,k}}{2 \cdot \Delta x} - \underline{W}_{m,k} \end{array} \right. \quad (4.2.11.a)$$

În cazul unei metode numerice de rezolvare explicită, derivata $\frac{d\underline{\Omega}}{dt}(x_j, t_k)$ se va utiliza pentru calculul lui $\underline{\Omega}(x_j, t_k)$ conform formulei de aproximare:

$$\frac{d\underline{\Omega}}{dt}(x_j, t_k) = \frac{\underline{\Omega}(x_j, t_{k+1}) - \underline{\Omega}(x_j, t_k)}{\Delta t}.$$

Întrucât, în baza relațiilor (4.2.8), sunt cunoscute condițiile de frontieră $p_{1,k}$, $Q_{m,k}$ și $T_{1,k}$, $\forall k > 0$, vor fi cunoscute, oricare ar fi $k > 0$, și derivatele: $\frac{dp}{dt}(x_1, t_k)$, $\frac{dQ}{dt}(x_m, t_k)$, $\frac{dT}{dt}(x_1, t_k)$. De asemenea, sunt cunoscute și mărimile $p_{1,k}$, $Q_{m,k}$ și $T_{1,k}$ oricare ar fi $k > 0$.

Ca urmare, pentru a calcula celelalte mărimi necunoscute, în număr de $3(m-1)$, $\{p_{j,k} / j = \overline{2, m}, k > 0\}$, $\{Q_{j,k} / j = \overline{1, m-1}, k > 0\}$ și $\{T_{j,k} / j = \overline{2, m}, k > 0\}$, se va considera un sistem de ecuații diferențiale de ordin redus, respectiv, $3(m-3)$, obținut prin neluarea în considerare a ecuațiilor 1, 3 și $3(m-1)+2$ ale sistemului de ecuații (4.2.11), numerotate astfel:

$$\left. \begin{aligned}
 &3 \cdot 0 + 1 : \frac{dp}{dt}(x_1, t_k) = \Xi_1(x_1, t_k) \\
 &3 \cdot 0 + 2 : \frac{dQ}{dt}(x_1, t_k) = \Xi_2(x_1, t_k) \\
 &3 \cdot 0 + 3 : \frac{dT}{dt}(x_1, t_k) = \Xi_3(x_1, t_k) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &3(j-1) + 1 : \frac{dp}{dt}(x_j, t_k) = \Xi_1(x_j, t_k) \\
 &3(j-1) + 2 : \frac{dQ}{dt}(x_j, t_k) = \Xi_2(x_j, t_k) \\
 &3(j-1) + 3 : \frac{dT}{dt}(x_j, t_k) = \Xi_3(x_j, t_k) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &3(m-1) + 1 : \frac{dp}{dt}(x_m, t_k) = \Xi_1(x_m, t_k) \\
 &3(m-1) + 2 : \frac{dQ}{dt}(x_m, t_k) = \Xi_2(x_m, t_k) \\
 &3(m-1) + 3 : \frac{dT}{dt}(x_m, t_k) = \Xi_3(x_m, t_k)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11.b)$$

S-au folosit notațiile:

- a) $\Xi(x_1, t_k) = -V(x_1, t_k) \frac{-\Omega(x_3, t_k) + 4\Omega(x_2, t_k) - 3\Omega(x_1, t_k)}{2 \cdot \Delta x} - W(x_1, t_k);$
- b) $\Xi(x_j, t_k) = -V(x_j, t_k) \frac{\Omega(x_{j+1}, t_k) - \Omega(x_{j-1}, t_k)}{2 \cdot \Delta x} - W(x_j, t_k) / j = \overline{2, m-1};$
- c) $\Xi(x_m, t_k) = -V(x_m, t_k) \frac{\Omega(x_{m-2}, t_k) - 4\Omega(x_{m-1}, t_k) + 3\Omega(x_m, t_k)}{2 \cdot \Delta x} - W(x_m, t_k).$

Sistemul de ecuații diferențiale de ordin redus, respectiv, $3(m-3)$, rezultat în aceste condiții, va reprezenta modelul matematic al unui proces cu parametrii concentrați în nodurile de discretizare. El va fi exprimat prin forma neliniară:

$$\frac{dX}{dt}(t_k) = \Psi(X, u, t_k) \quad (4.2.12)$$

S-a notat cu $\underline{u} \in R^3$ vectorul intrărilor modelului (4.2.11):

$$\underline{u}(t) = \underline{u}(k \cdot \Delta t) = \begin{bmatrix} p_{1,k} \\ Q_{m,k} \\ T_{1,k} \end{bmatrix}, \quad (4.2.13.a)$$

iar cu $\underline{X} \in R^{3(m-1)}$ vectorul stărilor modelului (4.2.11):

$$\underline{X}(t) = \underline{X}(k \cdot \Delta t) = \begin{bmatrix} Q_{1,k} \\ \underline{\Omega}_{2,k} \\ \dots \\ \underline{\Omega}_{m-1,k} \\ P_{m,k} \\ T_{m,k} \end{bmatrix} \quad (4.2.13.b)$$

Soluția aproximativă se va determina prin integrarea numerică a sistemului de ecuații (4.2.12).

După cum s-a mai arătat și în capitolul 3, caracterul neliniar al sistemului de ecuații diferențiale (4.2.12) nu permite să se facă nici o apreciere a modului de selectare a pasului de discretizare al timpului Δt necesar rezolvării numerice. O estimare a pasului se poate, însă, face pe baza formei liniarizate a sistemului de ecuații (4.2.12).

Liniarizarea se va face într-o primă fază asupra sistemului complet de ecuații (4.2.11), ulterior, din cunoașterea condițiilor de frontieră, se va putea face o reducere a ordinului sistemului după cum s-a precizat anterior.

Astfel se consideră primul termen neliniar $\Xi(x_1, t_k)$ care se rescrie folosind notațiile:

$$\Xi(x_1, t_k) = F_1(\underline{\Omega}_{1,k}, \underline{\Omega}_{2,k}, \underline{\Omega}_{3,k}) = -V_{1,k} \frac{-\underline{\Omega}_{3,k} + 4\underline{\Omega}_{2,k} - 3\underline{\Omega}_{1,k}}{2 \cdot \Delta x} - W_{1,k} \quad (4.2.14.a)$$

Funcția neliniară $F_1(\underline{\Omega}_{1,k}, \underline{\Omega}_{2,k}, \underline{\Omega}_{3,k})$ se liniarizează prin descompunere în serie Taylor în vecinătatea punctului $(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3})$:

$$F_1(\underline{\Omega}_{1,k}, \underline{\Omega}_{2,k}, \underline{\Omega}_{3,k}) = F_1(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3}) + \sum_{i=1}^3 J_{F_1, \underline{\Omega}_i, k}(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3})(\underline{\Omega}_{i,k} - \underline{\Omega}_{ai}) \quad (4.2.14.b)$$

În mod analog, considerând termenul neliniar $\Xi(x_j, t_k)$ vom avea funcția neliniară:

$$\Xi(x_j, t_k) = F_j(\underline{\Omega}_{j-1,k}, \underline{\Omega}_{j,k}, \underline{\Omega}_{j+1,k}) = -V_{j,k} \frac{\underline{\Omega}_{j+1,k} - \underline{\Omega}_{j-1,k}}{2 \cdot \Delta x} - W_{j,k} / j = \overline{2, m-1} \quad (4.2.15.a)$$

care se liniarizează, prin descompunere în serie Taylor, în jurul $(\underline{\Omega}_{aj-1}, \underline{\Omega}_{aj}, \underline{\Omega}_{aj})$:

$$F_j(\underline{\Omega}_{j-1,k}, \underline{\Omega}_{j,k}, \underline{\Omega}_{j+1,k}) \cong F_j(\underline{\Omega}_{aj-1}, \underline{\Omega}_{aj}, \underline{\Omega}_{aj+1}) + \sum_{i=j}^{j+2} J_{F_j, \underline{\Omega}_i, k}(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3})(\underline{\Omega}_{i-1,k} - \underline{\Omega}_{ai-1}) / j = \overline{2, m-1} \quad (4.2.15.b)$$

Ultimul termen neliniar $\Xi(x_m, t_k)$ conduce la funcția neliniară:

$$\Xi(x_m, t_k) = F_m(\underline{\Omega}_{m-2,k}, \underline{\Omega}_{m-1,k}, \underline{\Omega}_{m,k}) = -V_{m,k} \frac{\underline{\Omega}_{m-2,k} - 4\underline{\Omega}_{m-1,k} + 3\underline{\Omega}_{m,k}}{2 \cdot \Delta x} - W_{m,k} \quad (4.2.16.a)$$

care se liniarizează, prin descompunere în serie Taylor, în jurul punctului $(\underline{\Omega}_{am-2}, \underline{\Omega}_{am-1}, \underline{\Omega}_{am})$:

$$F_m(\underline{\Omega}_{m-2,k}, \underline{\Omega}_{m-1,k}, \underline{\Omega}_{m,k}) \cong F_m(\underline{\Omega}_{am-2}, \underline{\Omega}_{am-1}, \underline{\Omega}_{am}) + \sum_{i=m-2}^m J_{F_m, \underline{\Omega}_{i,k}}(\underline{\Omega}_{ai}, \underline{\Omega}_{ai}, \underline{\Omega}_{ai})(\underline{\Omega}_{i,k} - \underline{\Omega}_{ai}) \quad (4.2.16.b)$$

Sistemul liniarizat asociat sistemului neliniar (4.2.11) va fi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Omega}(x_1, t_k) \\ \underline{\Omega}(x_2, t_k) \\ \underline{\Omega}(x_3, t_k) \\ \dots \\ \underline{\Omega}(x_m, t_k) \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_{1,k} \\ \underline{\Omega}_{2,k} \\ \underline{\Omega}_{3,k} \\ \dots \\ \underline{\Omega}_{m,k} \end{bmatrix} + \underline{A} \quad (4.2.17)$$

Semnificația matricelor, de valori constante, ale sistemului (4.2.17) este:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} & J_{1,2} & \dots & 0 \\ J_{2,1} & J_{2,2} & J_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & J_{3,1} & J_{3,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{m,m} \end{bmatrix} \in R^{3m \times 3m} \quad (4.2.18.a)$$

$$\underline{A} = -\underline{H} \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_{a1} \\ \underline{\Omega}_{a2} \\ \underline{\Omega}_{a3} \\ \dots \\ \underline{\Omega}_{am} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3}) \\ F_2(\underline{\Omega}_{a1}, \underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3}) \\ F_3(\underline{\Omega}_{a2}, \underline{\Omega}_{a3}, \underline{\Omega}_{a4}) \\ \dots \\ F_m(\underline{\Omega}_{am-2}, \underline{\Omega}_{am-1}, \underline{\Omega}_{am}) \end{bmatrix} \in R^{3m \times 1} \quad (4.2.18.b)$$

S-a folosit notația: $\{J_{i,j} = J_{F_i, \underline{\Omega}_{j-1}} / i, j = \overline{1, m}\}$.

Ținând cont de variabilele $\underline{u}(k \cdot \Delta t)$ și $\underline{X}(k \cdot \Delta t)$ definite conform formulelor (4.2.13) și de condițiile de frontieră alese (4.2.8), se creează următoarele matrici ale parametrilor formeii liniarizate: $\underline{A}_{prm} \in R^{(3m-3) \times (3m-3)}$, $\underline{B}_{prm} \in R^{(3m-3) \times 3}$, $\underline{C}_{prm} \in R^{(3m-3) \times 1}$, conform următoarei proceduri:

- a) Matricea \underline{A}_{prm} se formează din matricea \underline{H} prin înlăturarea liniilor $\{1, 3, 3(m-1)+2\}$ și coloanelor $\{1, 3, 3(m-1)+2\}$;
- b) Matricea \underline{B}_{prm} se formează înlăturând din matricea \underline{H} liniile $\{1, 3, 3(m-1)+2\}$ și extrăgând coloanele $\{1, 3, 3(m-1)+2\}$;
- c) Vectorul \underline{C}_{prm} se formează din vectorul \underline{A} prin înlăturarea elementelor de rang $\{1, 3, 3(m-1)+2\}$.

Forma liniarizată a sistemului (4.2.12) va fi:

$$\frac{d\bar{X}(k \cdot \Delta t)}{dt} = \underline{A}_{prm} \bar{X}(k \cdot \Delta t) + \underline{B}_{prm} \underline{u}(k \cdot \Delta t) + \underline{C}_{prm} \quad (4.2.19)$$

Valorile proprii ale matricei parametrilor A_{prm} se vor folosi la fiecare iterație k pentru estimarea pasului de discretizare al timpului Δt conform cu cele prezentate în cadrul capitolului 3.

Trebuie să se facă observația că matricele A_{prm} , B_{prm} , respectiv, vectorul C_{prm} sunt funcție de punctele în care se face discretizarea, fiind constante numai între două iterații succesive de calcul numeric $k \rightarrow k + 1$.

4.2.2. Exemplu de simulare numerică a procesului de curgere printr-un tronson de conductă prin folosirea unui model de aproximare

Pentru exemplificare se consideră următorul studiu de caz în care se dă un tronson de conductă având următorii parametri constructivi:

- a) Lungime: $L = 100\text{km}$;
- b) Diametru interior: $D = 0,5\text{m}$;
- c) Rugozitatea interioară: $k_a = 0,03\text{cm}$;
- d) Diferența de nivel între capetele tronsonului: $\Delta h = 0\text{m}$ (tronson orizontal);
- e) Coeficientul de transfer termic prin pereții conductei: $k_L = 25 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$.

Solul în care este îngropată conducta are temperatura: $T_{sol} = 7^{\circ}\text{C}$.

Drept fluid de lucru se consideră gazul metan având următorii parametri fizici:

- a) Constanta generală specifică: $R_p = 518 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$;
- b) Căldura specifică la volum constant: $c_v = 1760 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$;
- c) Presiunea critică: $p_{cr} = 46\text{bara}$;
- d) Temperatura critică: $T_{cr} = 191\text{K}$;
- e) Viscositatea dinamică în starea fizică normală: $\mu_N = 1,03 \cdot 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$

Curgerea gazului are loc, la momentul inițial $t_1 = 0$, în regim staționar, caracterizat prin:

- a) Presiunea de intrare: $p_1 = 20\text{bar}$;
- b) Debitul volumic staționar: $Q_{v\text{stationar}} = 32.500 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$;
- c) Temperatura de intrare: $T_1 = 30^{\circ}\text{C}$.

Considerând o curgere turbulentă de tranziție, factorul de frecare calculat la nivelul secțiunii de intrare a tronsonului de conductă, respectiv $\lambda = 0,0176$, se va lua ca valoarea medie pentru întreg tronsonul de conductă, pe toată durata de timp a simulării.

În relațiile de normalizare (4.2.3) se consideră următoarele valori pentru constantele de normalizare:

- a) $p_M = p_1 = 16,0132\text{bara}$;

- b) $Q_M = 6,478 \frac{kg}{s}$;
- c) $T_M = T_1 = 303,15K$;
- d) $c_M = Z(p_1, T_{sol}) \sqrt{R_p T_{sol}} = 374 \frac{m}{s}$ astfel încât: $\frac{L_c}{c_M} = 266s$.

Pentru realizarea discretizării spațiale tronsonului de conductă este împărțit în $m = 11$ puncte de discretizare astfel încât pasul de discretizare spațială va fi: $\Delta \tilde{x} = \frac{1}{m-1} = 0,1$. Vor rezulta astfel $m - 1 = 10$ segmente delimitate de coordonatele spațiale \tilde{x}_j și \tilde{x}_{j+1} .

Distribuțiile de regim staționar ale mărimilor procesului de curgere, asociate momentului inițial $\tilde{t}_1 = 0$, s-au calculat prin aplicarea unei metode Runge-Kutta (vezi Anexa A.5) formei de regim staționar (4.2.6.b), cu condițiile inițiale: $\underline{\Omega}_{1,1} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Distribuțiile rezultate sunt prezentate în figurile 4.2.1.

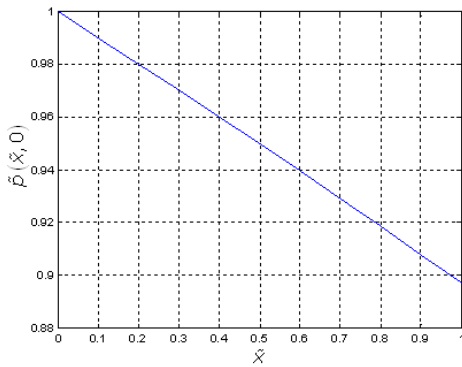


Fig. 4.2.1.a. Distribuție staționară normalizată de presiune

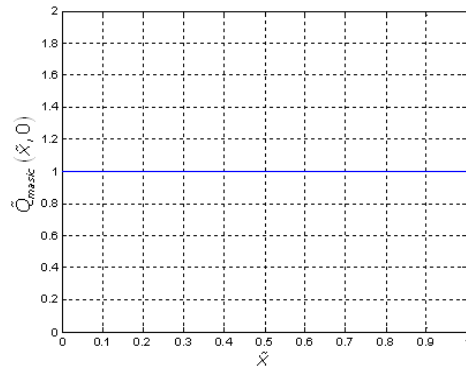


Fig. 4.2.1.b. Distribuție staționară normalizată de debit

Pentru valorile alese ale parametrilor de curgere se observă că, pentru calcularea cu o precizie mai mare a distribuției de regim staționar a temperaturii din figura 4.2.1.c, este necesară creșterea numărului de noduri intermediare. Acest lucru s-a făcut pentru distribuția staționară (detalierea primilor 10km) de temperatură din figura 4.2.2, prin considerarea a $m = 201$ noduri de discretizare spațială.

Prin liniarizarea modelului (4.2.6.a) în jurul punctelor $\{\tilde{p}_{j,1} \ \tilde{Q}_{m,j,1} \ \tilde{T}_{j,1}\} / j=1,m$ în care: $\tilde{p}_{j,1} = \tilde{p}(x_j, t_1)$, $\tilde{Q}_{j,1} = \tilde{Q}(x_j, t_1)$ și $\tilde{T}_{j,1} = \tilde{T}(x_j, t_1)$, după efectuarea calculelor, se obține forma liniarizată (4.2.19), caracterizată prin matricea \underline{A}_{prm} , de $(3m - 3) \times (3m - 3)$ de valori reale. Această formă liniarizată descrie un proces cu parametri concentrați și aproximează dinamica procesului de curgere pe perioada primei iterații.

În figura 4.2.3 sunt reprezentate, în planul complex, cele $(3m - 3)$ valori proprii ale matricei \underline{A}_{prm} , $m = 11$ puncte de discretizare spațială.

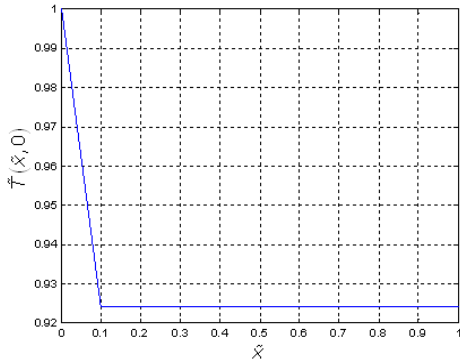


Fig. 4.2.1.c. Distribuție staționară normalizată de temperatură

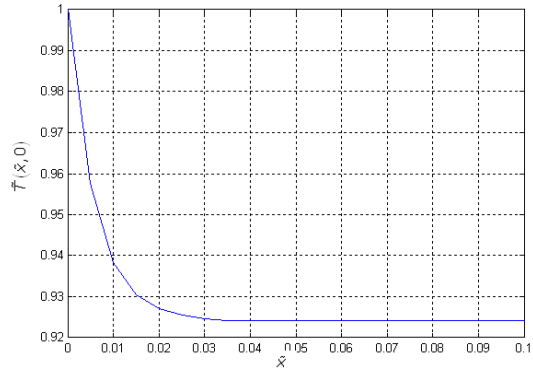


Fig. 4.2.2. Distribuție staționară normalizată de temperatură folosind un număr mai mare de puncte de discretizare spațială

Se observă că toate valorile proprii ale matricei A_{prm} sunt situate în semiplanul stâng al planului complex, ceea ce arată convergența metodei numerice de discretizare pe durata primei iterații de calcul:

- a) $Real\{\lambda_{vp_{min}}\} = -27,245$;
- b) $Real\{\lambda_{vp_{max}}\} = -0,084$.

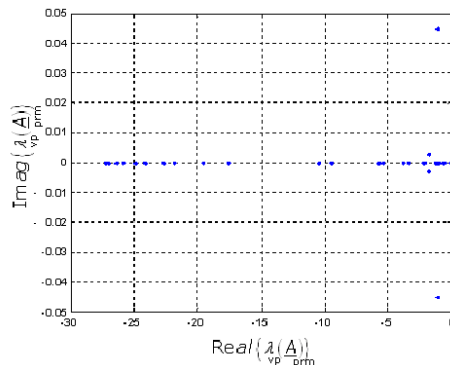


Fig. 4.2.3. Valorile proprii ale matricei A_{prm}

Pe baza valorii proprii inițiale celei mai mari: $Real\{\lambda_{vp_{max}}\} = -0,084$, se face o estimare a constantei de timp dominantă a procesului, care impune durata regimului tranzitoriu: $\tilde{t}_{final} = 2,3\tilde{t}_{p_{max}}$ (se atinge 90% din valoarea de regim

staționar, $1 - e^{-\frac{2,3\tilde{t}_{p_{max}}}{\tilde{t}_{p_{max}}}} \cong 0,9$). Se estimează: $\tilde{t}_{max} = \frac{1}{|Real\{\lambda_{vp_{max}}\}|} = 11,97$, astfel

încât: $\tilde{t}_{final} \cong 28$ sau $t_{final} \cong \tilde{t}_{final} \frac{L}{C_M} = 2,07h$ în valori reale. Această valoare

estimativă, $\tilde{t}_{final} \cong 28$, este folosită pentru stabilirea timpului necesar realizării simulării numerice. Informația este reactualizată, de o manieră similară, la fiecare iterație de calcul.

Constanta de timp cea mai mică a procesului, care impune alegerea pasului de discretizare al timpului în cazul folosirii unei metode explicite de calcul, conform relației: $\Delta\tilde{t} < 2\tilde{\tau}_{pmin}$, pentru prima iterație se estimează folosind relația:

$$\tilde{\tau}_{pmin} = \frac{1}{\left| \text{Real} \{ \lambda_{vpmin} \} \right|} = 0,0367, \text{ astfel încât } \Delta\tilde{t} < 0,073 \text{ sau } 19,56s \text{ în valori reale.}$$

Această valoare estimativă este folosită pentru alegerea pasului de discretizare din prima iterație de calcul numeric. Informația este reactualizată, de o manieră similară, la fiecare iterație de calcul.

Tot pe perioada primei iterații de calcul, întrucât numărul de condiționare al sistemului liniarizat: $cond = \frac{\tilde{\tau}_{pmax}}{\tilde{\tau}_{pmin}} \cong 326 < 1.000$, sistemul de ecuații diferențiale

care se rezolvă numeric în prima iterație de calcul nu este un sistem inflexibil („non-stiff”).

Pentru celelalte iterații de calcul, în figurile 4.2.4 sunt prezentate evoluțiile extremelor părților reale ale valorilor proprii ale matricii \underline{A}_{prm} respectiv, numărul de condiționare.

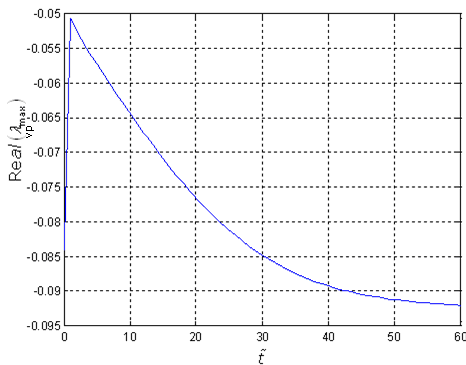


Fig. 4.2.4.a. Dependenta partii reale a valorii proprii maxime a matricii \underline{A}_{prm} pe durata simulării numerice

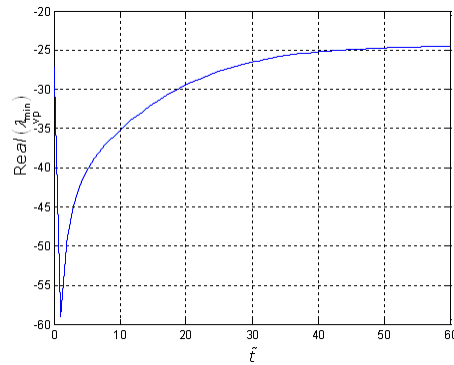


Fig. 4.2.4.b. Dependenta partii reale a valorii proprii minime a matricii \underline{A}_{prm} pe durata simulării numerice

Se observă că spectrul matricii \underline{A}_{prm} se va situa în semiplanul stâng al planului complex la fiecare iterație de calcul a simulării numerice.

Totodată, la anumite iterații de calcul, sistemul de ecuații devine inflexibil, ceea ce justifică folosirea unei metode numerice de tip Runge-Kutta-Chebyshev pentru realizarea simulării numerice.

Distribuțiile spatio-temporale ale variabilelor $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{t})$ și $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})$ ale procesului de curgere, rezultate în urma simulării numerice cu modelul matematic nelinier (4.2.11), pe domeniul normalizat $[0, 1] \times [0, 60]$, în ipoteza condițiilor inițiale,

reprezentate de distribuțiile spațiale din figurile 4.2.1 și condițiile de frontieră, reprezentate prin treapta de presiune în nodul de intrare: $\Delta\tilde{P}_1 = 0,1$ ($\Delta P_1 = 1,6\text{bar}$ în valoarea reală astfel încât $\tilde{p}_{1,k} = 1,1$), păstrarea constantă a temperaturii de intrare a gazului $\tilde{T}_{1,k} = 1$ respectiv, a debitului prin nodul de ieșire: $\tilde{Q}_{1,k} = 1$, sunt prezentate în figurile 4.2.5.

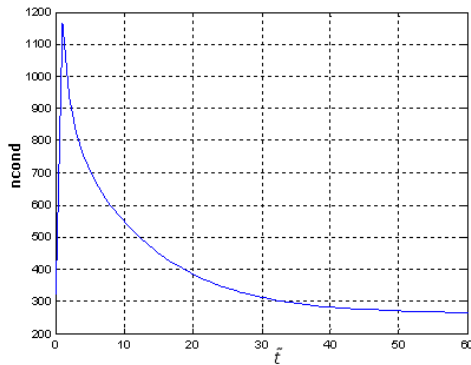


Fig. 4.2.4.c. Dependenta numărului de condiționare pe durata simulării numerice

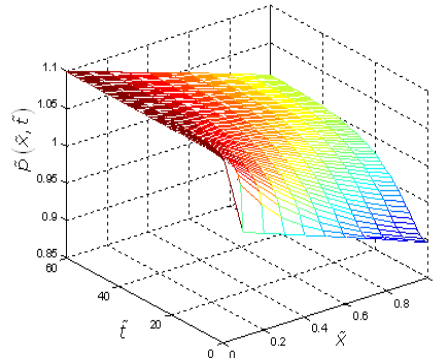


Fig. 4.2.5.a. Distribuția spațio-temporală a presiunii normalizate

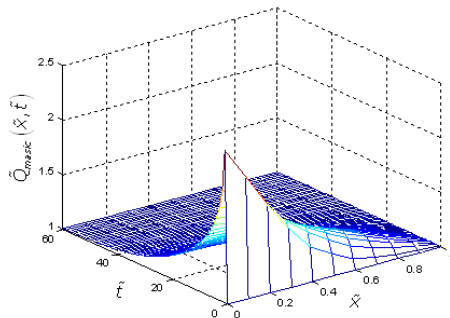


Fig. 4.2.5.b. Distribuția spațio-temporală a debitului normalizate

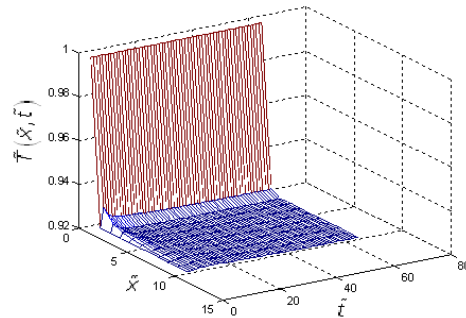


Fig. 4.2.5.c. Distribuția spațio-temporală temperaturii normalizate

Figura 4.2.5.c pune în evidență faptul că prin creșterea de presiune în nodul de intrare are loc o creștere, pe durata regimului tranzitoriu, a temperaturii medii a tronsonului de conductă, care ajunge la noua valoare de regim staționar după stabilizarea procesului de curgere.

În figurile 4.2.6 sunt prezentate evoluțiile în timp ale variabilelor procesului de curgere din nodurile de frontieră unde nu li se impun condiții de frontieră.

Cu privire la figura 4.2.6.a trebuie remarcat faptul că valoarea obținută în urma simulării numerice, pentru durata regimului tranzitoriu, respectiv $\tilde{t}'_{final} = 31$, este destul de apropiată față de valoarea estimată $\tilde{t}_{final} = 28$ (eroare relativă sub 10%).

Referitor la figura 4.2.6.a care descrie dinamica presiunii în nodul de ieșire se observă întârzierea de aproximativ o iterație, sau în valori reale de timp o

întârziere de $\frac{L}{c_M} = 266,515s$, după care „se simte” la ieșire creșterea presiunii de intrare. Din punct de vedere fizic este vorba de propagarea unui front de undă de presiune, de la intrarea spre ieșirea din tronson, cu viteza sunetului în gaz.

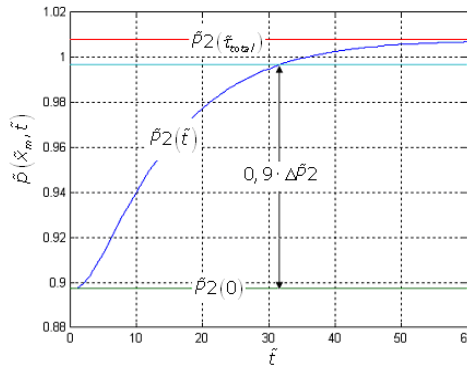


Fig. 4.2.6.a. Evoluția în timp a presiunii normalizate din nodul de ieșire

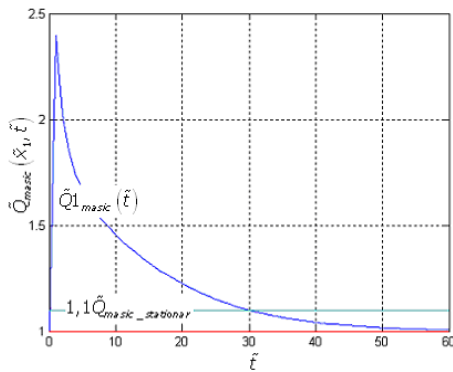


Fig. 4.2.6.b. Evoluția în timp a debitului normalizat din nodul de intrare

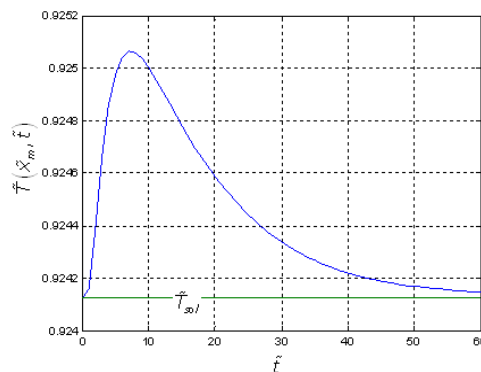


Fig. 4.2.6.c. Evoluția în timp a temperaturii normalizate din nodul de ieșire

Vârful care apare în figura 4.2.6.b pentru variația debitului se explică prin faptul că la apariția unei discontinuități locale de presiune, curgerea gazului, în zona de discontinuitate, se face, pe durată foarte mică de timp, cu viteza sunetului în gaz.

În figurile 4.2.7 este prezentată grafic influența numărului m de puncte de discretizare asupra valorilor estimate ale constantelor de timp extreme ale procesului, respectiv, $\bar{T}_{p_{min}}$ și $\bar{T}_{p_{max}}$, pentru prima iterație de calcul. Se observă că, începând, de la o anumită valoare a numărului de noduri de discretizare, valorile constantelor de timp extreme ale procesului tind spre o valoare constantă, independentă de numărul m al nodurilor de discretizare. Sistemul de ecuații diferențiale tinde, după cum s-a arătat și în capitolul 3 să devină un sistem inflexibil de ecuații prin creșterea numărului de noduri de discretizare.

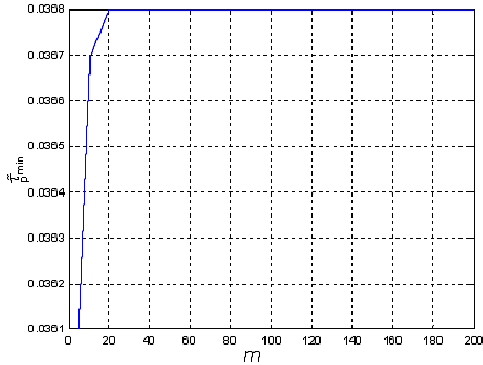


Fig. 4.2.7.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp

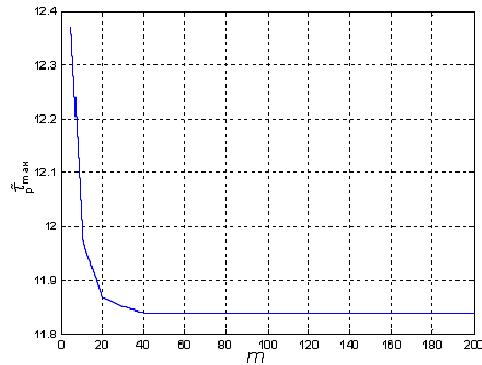


Fig. 4.2.7.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp

Simulările numerice au mai arătat următoarele aspecte privind dinamica procesului de curgere, relevante pentru implementarea algoritmului de control:

- a) durata regimului tranzitoriu este slab influențată de amplitudinea treptei de presiune aplicată la intrarea tronsonului, figura 4.2.8.a;
- b) durata regimului tranzitoriu scade cu creșterea presiunii de intrare în tronson asociată stării staționare anterioare aplicării treptei de presiune, figura 4.2.8.b;
- c) durata regimului tranzitoriu crește cu creșterea debitului staționar de la ieșirea din tronson asociat stării staționare de aplicare a treptei de presiune pe intrare, figura 4.2.8.c.

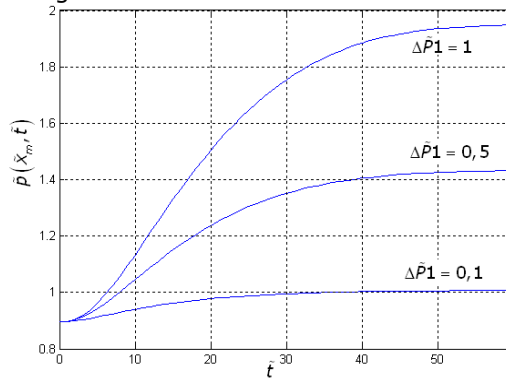


Fig. 4.2.8.a. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu amplitudini diferite, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la aceeași valoare a acesteia

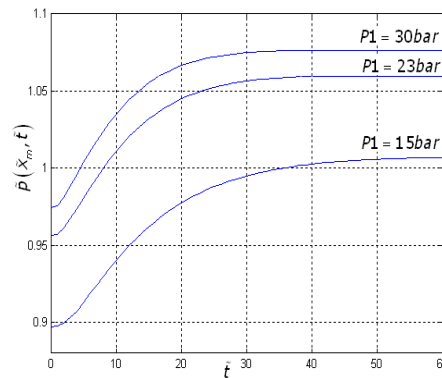


Fig. 4.2.8.b. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu aceeași amplitudine, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la valori diferite ale acesteia

Afirmațiile de mai sus trebuie tratate ca niște reguli empirice, având în vedere că nu sunt rezultatul unor demonstrații matematice, ci al experienței în analiza proceselor reale de curgere corelate cu simulări numerice.

Se face observația că notațiile prezente pe figurile 4.2.8 arată numai parametrii de simulare care se schimbă față de exemplu inițial.

În ceea ce privește influența temperaturii gazului asupra calcului distribuțiilor spatio-temporale ale presiunii și debitului, în figurile 4.2.9 și 4.2.10

sunt prezentate, prin intermediul unor distribuții spatio-temporale de erori relative procentuale $\varepsilon_a(\bar{p})$, $\varepsilon_a(\bar{Q})$, respectiv, $\varepsilon_b(\bar{p})$, $\varepsilon_b(\bar{Q})$, influența temperaturii în calcularea numerică a distribuțiilor spatio-temporale ale presiunii și debitului masic, în valori normalizate.

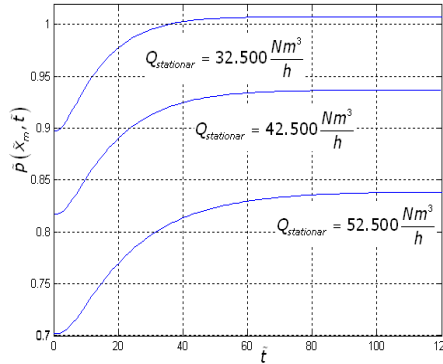


Fig. 4.2.8.c. Evoluțiile în timp ale presiunii normalizate din nodul de ieșire cauzate de creșterea, cu aceeași amplitudine, de tip treaptă a presiunii normalizate din nodul de intrare inițiate de la aceeași valoare a acesteia dar pentru valori diferite ale debitului staționar inițial

Erorile au fost calculate pentru simularea aceluiași proces de curgere, considerând stări staționare de inițiere a simulării numerice diferite prin temperatura gazului. Ca și stare staționară pentru calcularea distribuțiilor spatio-temporale de referință ale presiunii și debitului s-a considerat starea caracterizată prin temperatura de intrare a gazului în tronsonul de conductă egală cu cea a solului: $T_1 = T_{sol} = 7^0C$, având distribuțiile spatio-temporale ale presiunii $\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=7^0C, T_{sol}=7^0C}$ și debitului

$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=7^0C, T_{sol}=7^0C}$. Pentru celelalte două cazuri s-au considerat:

- a) $T_1 = 30^0C$ și $T_{sol} = 7^0C$, $\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=30^0C, T_{sol}=7^0C}$ și $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=30^0C, T_{sol}=7^0C}$;
- b) $T_1 = 30^0C$ și $T_{sol} = 30^0C$, $\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=30^0C, T_{sol}=30^0C}$ și $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=30^0C, T_{sol}=30^0C}$.

Modul de calcul al erorilor, folosind notația $u = \{\bar{p}, \bar{Q}\}$, este următorul:

$$a) \varepsilon_a(u) = \frac{u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=7^0C, T_{sol}=7^0C} - u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=30^0C, T_{sol}=7^0C}}{u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_1=7^0C, T_{sol}=7^0C}} \cdot 100 ;$$

$$b) \quad \varepsilon_b(u) = \frac{u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_{sol}=7^{\circ}C} - u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_{sol}=30^{\circ}C}}{u(\bar{x}, \bar{t})|_{T_{sol}=7^{\circ}C}} \cdot 100$$

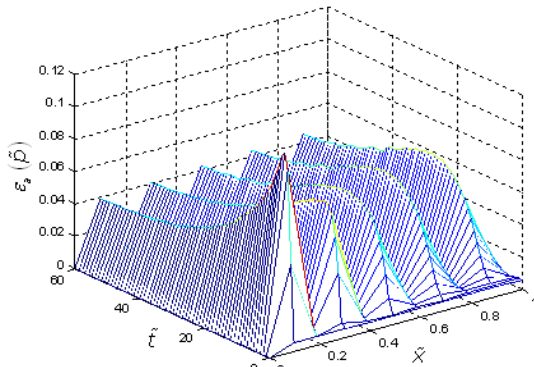


Fig. 4.2.9.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul a)

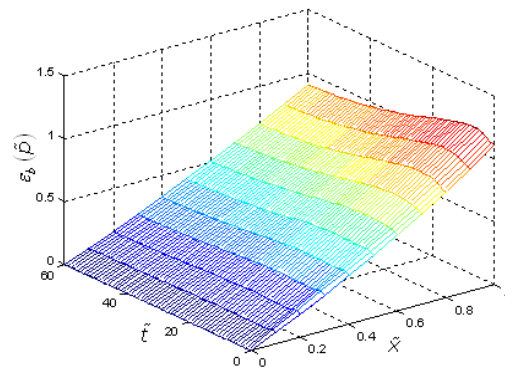


Fig. 4.2.9.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul b)

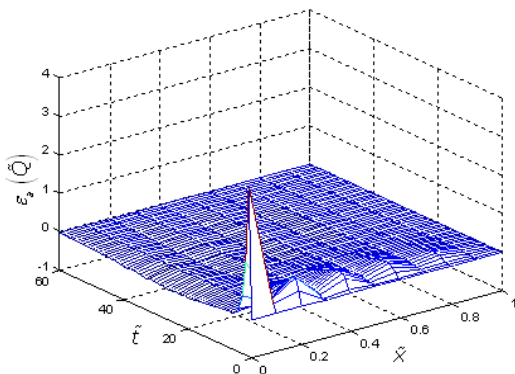


Fig. 4.2.10.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul a)

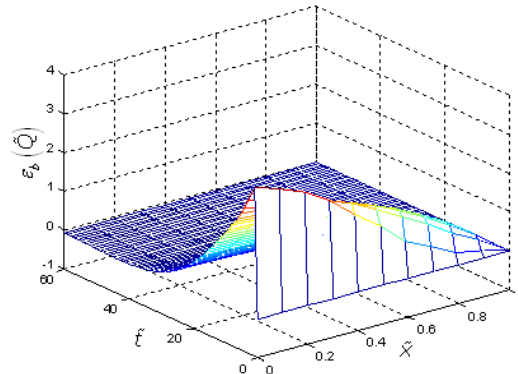


Fig. 4.2.10.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul b)

Din analiza figurilor 4.2.9 și 4.2.10 se observă că cea mai mare eroare procentuală în calcularea distribuțiilor spațio-temporale ale variabilelor procesului se situează, pentru studiul de caz luat în considerare, sub 4%. *Influența temperaturii* este deci *neglijabilă*, rezultat care a fost prezentat și în cadrul capitolului 3. Complexitatea modelului procesului curgerii nu permite, însă, o generalizare a acestui rezultat. O serie de alte studii făcute pe această temă [63], au evidențiat valori maxime ale acestor erori relative tot în jur de 3 – 4% .

Semnificative pentru această analiză sunt și valorile constantelor de timp extreme (erorile relative) din prima iterație de simulare numerică, prezentate în tabelul 4.2.1, în cele trei situații analizate din punct de vedere al temperaturilor de

lucru. Și în acest caz influența temperaturii în calcularea numerică a valorilor constantelor de timp extreme este neglijabilă (sub 5%).

Tabel 4.2.1: Valorile constantelor de timp pentru cazurile de simulare numerică

| m | $T1(^{\circ}C)$ | $T_{sol}(^{\circ}C)$ | $\bar{\tau}_{pmin}$ | $\bar{\tau}_{pmax}$ |
|----|-----------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| 11 | 7 (0%) | 7 (0%) | 0,0368 (0%) | 11,903 (0%) |
| | 30 (8,21%) | 7 (0%) | 0,0367 (0,27%) | 11,967 (0,54%) |
| | 30 (8,21%) | 30 (8,21%) | 0,0349 (5,15%) | 12,408 (4,24%) |

Un exemplu de program de calcul numeric care a stat la baza obținerii unora dintre rezultatele prezentate în cadrul acestui subcapitol este prezentat în cadrul anexei A.5.

4.2.3. O analiză a erorilor de simulare numerică a procesului de curgere folosind reprezentări sistemice p1Q2 ale modelelor matematice simplificate

În cadrul capitolului 2 s-au arătat, că în anumite condiții de funcționare, procesul de curgere al gazului printr-un tronson de conductă poate fi descris prin intermediul unor modele simplificate.

În acest scop se consideră următoarele două modele simplificate care caracterizează un proces de curgere în regim termodinamic izoterm:

$$(M_1)\{p, v, \rho\} : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} + \rho g \sin a = 0 \\ \rho = \frac{p}{Z(p, T_M) R_p T_M} \end{cases} \quad (4.2.20)$$

$$(M_2)\{p, v, \rho\} : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} + \rho g \sin a = 0 \\ \rho = \frac{p}{Z(p, T_M) R_p T_M} \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Înlocuind densitatea din cea de a 3-a relație în primele două relații ale fiecăruia dintre cele două sisteme, folosind relația (3.2.4.a) pentru calculul factorului de compresibilitate $Z(p, T_M)$, cele două sisteme de ecuații cu derivate parțiale se rescriu numai în variabilele $\{p, v\}$:

$$(M_1)\{p, v\} : \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \tau p) p \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(1 - \tau p) R_p T_M}{p} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2} + g \sin a = 0 \end{cases} \quad (4.2.22)$$

$$(M_2)\{p, v\} : \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \tau p) p \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2 - R_p T_M + 2R_p T_M \tau p - R_p T_M \tau^2 p^2}{(1 - \tau p) p} \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{D} + g \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.2.23)$$

Primul sistem de ecuații cu derivate parțiale (4.2.22) prezintă două familii de traiectorii caracteristice, reale și distincte, (vezi Anexa A.3) de-a lungul cărora avem vitezele fizice de propagare:

$$u_+|_{M_1} = v + c(p) \quad (4.2.24.a)$$

$$u_-|_{M_1} = v - c(p) \quad (4.2.24.b)$$

în care $c(p)$ reprezintă viteza izotermă a sunetului definită conform relației (3.2.7).

Și în cazul sistemului de ecuații cu derivate parțiale (4.2.23) vor rezulta două familii de traiectorii caracteristice, reale și distincte, caracterizate prin vitezele de propagare:

$$u_+|_{M_2} = c(p) \quad (4.2.25.a)$$

$$u_-|_{M_2} = -c(p) \quad (4.2.25.b)$$

Aceste caracteristici reale și distincte ale sistemelor de ecuații cu derivate parțiale (4.2.22) și (4.3.23), care descriu modelele M_1 și M_2 , arată că aceste sisteme vor fi de tipul hiperbolic.

Din punct de vedere al traiectoriilor caracteristice, cele două modele matematice vor diferi prin viteza fizică de propagare a informației.

Se știe că traiectoriile caracteristice sunt tangente la suprafața soluției astfel încât determinarea mulțimii traiectoriilor soluției sistemului care trec prin toate punctele domeniului pe care se caută soluția conduce la o caracterizare completă a suprafețelor integrale ale soluției sistemului de ecuații cu derivate parțiale [19].

Vitezele fizice de propagare definite prin relațiile (4.2.24) și (4.2.25) reprezintă pantele calculate în punctul de tangență, astfel încât prin intermediul acestora se obține o informație privind diferențele dintre cele două suprafețe integrale care constituie soluții ale celor două sisteme considerate.

Ca ordin de mărime al diferențelor dintre cele două seturi de viteze de propagare se cunoaște că, în cazul proceselor de curgere printr-un sistem de transport, viteza izotermă a sunetului se situează de regulă la valoarea medie de $c_M = 367 \text{ m/s}$ iar viteza de curgere a gazului poate atinge, în regim normal de funcționare maxim $v_{max} = 20 \text{ m/s}$.

Valoric vom avea diferențele relative:

$$\text{a) } \varepsilon(u_+) = \frac{u_+|_{M_1} - u_+|_{M_2}}{u_+|_{M_1}} \times 100 = \frac{v}{v + c(p)} \times 100 = 5,2\% ;$$

$$\text{b) } \varepsilon(u_-) = \frac{u_-|_{M_1} - u_-|_{M_2}}{u_-|_{M_1}} \times 100 = \frac{v}{v - c(p)} \times 100 = 5,8\% .$$

Pentru procesul de curgere prin tronsonul de conductă considerat, în figurile 4.2.11 și 4.2.12 sunt prezentate erorile relative procentuale $\varepsilon_1(\bar{p})$ și $\varepsilon_2(\bar{p})$, respectiv, $\varepsilon_1(\bar{Q})$ și $\varepsilon_2(\bar{Q})$ care intervin în calculul numeric al distribuțiilor de presiune $\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})$ respectiv, de debit masic $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{t})$, prin folosirea modelelor (M_1) și

(M_2) de curgere izotermă la temperatura medie $T_M = T_{sol} = 7^0C$, scrise în variabilele $\{p, Q\}$, față de calculul numeric bazat pe folosirea modelului (M_0).

Simulările numerice au fost implementate sub forma unor programe similare cu programul existent în anexa A.5.

S-au calculat următoarele erori relative, pentru $u = \{\tilde{p}, \tilde{Q}\}$:

$$a) \quad \varepsilon_1(u) = \frac{u|_{T=7^0C}^{(M_1)} - u|_{T=7^0C}^{(M_0)}}{u|_{T=7^0C}^{(M_0)}} \cdot 100 ;$$

$$b) \quad \varepsilon_2(u) = \frac{u|_{T=7^0C}^{(M_2)} - u|_{T=7^0C}^{(M_0)}}{u|_{T=7^0C}^{(M_0)}} \cdot 100$$

Din analiza grafică pe figurile 4.2.9 și 4.2.10 se observă că erorile relative procentuale se situează sub 3%.

Această valoare nu ne oferă decât o informație empirică asupra ordinului de mărime al erorilor care apar prin folosirea modelelor simplificate.

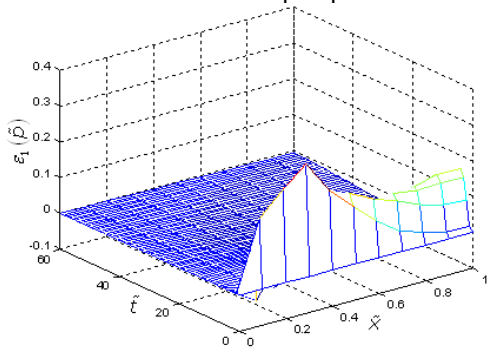


Fig. 4.2.11.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul a)

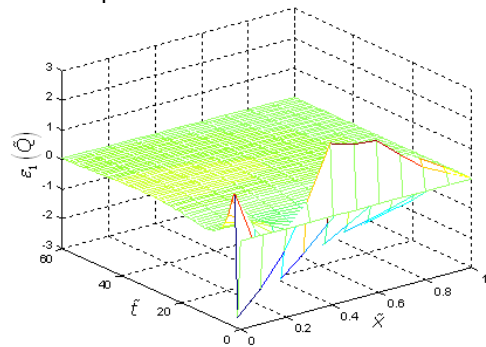


Fig. 4.2.11.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul a)

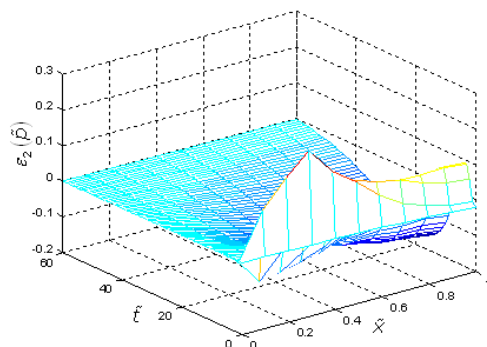
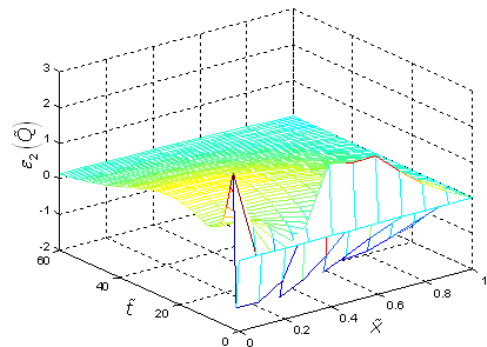


Fig. 4.2.12.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate în cazul b)



4.2.12.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat în cazul b)

Fig.

4.3. Un model sistemic al unui tronson de conductă

4.3.1. Deducerea unui model de aproximare liniar cu parametri concentrați, invariant în timp, prin folosirea unei reprezentări sistemice p1Q2 simplificate

Din perspectiva sintezei unui algoritm de control al procesului de curgere, unul dintre dezavantajele modelelor discrete de aproximare prezentate în subcapitolul anterior constă în neliniaritatea lui, iar formele liniarizate, așa cum au fost ele deduse, sunt variabile în timp (au parametrii variabili).

În cele ce urmează se prezintă o modalitate de deducere a unui model discret, de aproximare, liniar și cu parametri concentrați, constanți, pornind de la realizarea sistemică p1Q2, reprezentată în figura 4.3.1, a modelului matematic (3.2.2).

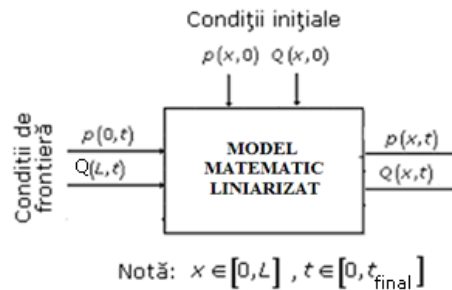


Fig. 4.3.1. Realizare sistemică p1Q2

Acest model discret de aproximare va fi considerat modelul sistemic al unui tronson de conductă, în sensul că va permite, pe de o parte, efectuarea unor analize privind evaluarea comportamentului dinamic și stabilitatea procesului de curgere în vecinătatea regimului staționar de funcționare unde este valabilă liniarizarea, și, pe de altă parte, folosirea lui în implementarea unor algoritmi predictivi de control conform strategiei de control descrisă în capitolul I al lucrării.

Reconsiderăm în acest sens ecuațiile modelului simplificat (3.2.2) asociate unui proces de curgere fără schimbarea direcției, rescriind, totodată, și ecuația de stare (3.2.2.c) sub forma (3.2.4.a) pe considerentul variației, în regim termodinamic izoterm de curgere la temperatura medie T_M , a factorului de abatere Z numai cu presiunea (relația 3.2.4.a):

$$(M_3)\{p, v, \rho\} : \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} + \rho g \sin \alpha = 0 \\ \rho = \frac{p}{(1 - \tau p) R_p T_M} \end{cases} \quad (4.3.1.a)$$

Înlocuind densitatea ρ din cea de-a 3-a ecuație în primele două ecuații, derivând după x cea de-a doua ecuație, exprimând $\frac{\partial v}{\partial x}$ și înlocuind în prima ecuație se obține o ecuație cu derivate parțiale cvasiliniară de ordinul 2, neomogenă. Ținând seama de forma generală prezentată în Anexa A.3, această ecuație are următoarele

expresii pentru coeficienții care intervin în calculul traiectoriilor caracteristice:

$$A_{coef} = 0, \quad B_{coef} = 0, \quad C_{coef} = -\frac{D_{coef}}{\lambda v}, \quad \text{care conduc la discriminantul } \Delta = 0 \text{ și}$$

ecuația caracteristică: $-\frac{D}{\lambda v}(dt)^2 = 0 \Rightarrow dt = \pm 0 \Rightarrow t = const$. Avem de a face cu o

ecuație de tip parabolic care prezintă traiectorii caracteristice reale, respectiv, linii de timp constant caracterizate prin vitezele fizice de propagare infinite:

$$u_{\pm} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{\pm 0} = \pm \infty. \quad \text{Conform acestui model de propagare a informației, valoarea}$$

presiunii într-un punct oarecare din domeniul procesului de curgere, la momentul de timp actual, va depinde de presiunea din toate punctele fizice de la momentele de timp anterioare și actual, și va influența presiunea în toate punctele fizice de la momentele de timp actual și viitoare.

În variabilele p -presiune și Q -debit masic, modelul matematic (M_3) se rescrie:

$$(M_3)\{p, Q\} : \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \xi_1(p) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \xi_2(p) \frac{Q^2}{p} + \xi_3(p)p = 0 \end{cases} \quad (4.3.1.b)$$

cu parametrii:

$$\xi_1(p) = \frac{(1 - \tau p)^2 R_p T_M}{A} \quad (4.3.1.c)$$

$$\xi_2(p) = \frac{(1 - \tau p) \lambda R_p T_M}{2DA^2} \quad (4.3.1.d)$$

$$\xi_3(p) = \frac{g \sin \alpha}{(1 - \tau p) R_p T_M} \quad (4.3.1.e)$$

Pentru un regim staționar de curgere putem considera o presiune medie p_M de curgere asociată tronsonului de conductă, calculată prin relația (3.3.10) astfel încât: $Z_M = 1 - \tau p_M = const$. Rezultă: $\xi_1(p_M) = \xi_{M1} = const$, $\xi_2(p_M) = \xi_{M2} = const$ și $\xi_3(p_M) = \xi_{M3} = const$. În felul acesta modelul matematic (M_3) se rescrie sub forma unui model matematic cu parametri constanți:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \xi_{M1} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \xi_{M2} \frac{Q^2}{p} + \xi_{M3} p = 0 \end{cases} \quad (4.3.2.a)$$

Pentru facilitatea analizei numerice, modelul rezultat se normalizează, ținând seama de cele prezentate în cadrul subcapitolului 4.2:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \tilde{\xi}_{M1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \tilde{\xi}_{M2} \frac{\bar{Q}^2}{\bar{p}} + \tilde{\xi}_{M3} \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (4.3.2.b)$$

Parametrii modelului normalizat sunt:

$$\tilde{\xi}_{M1} = \frac{c_M Q_M}{A p_M} = const \quad (4.3.3.a)$$

$$\bar{\xi}_{M2} = \frac{\lambda L c_M^2 Q_M^2}{2 D A^2 Z_M \rho_M^2} = const \quad (4.3.3.b)$$

$$\bar{\xi}_{M3} = \frac{g L Z_M \sin \alpha}{c_M^2} = const \quad (4.3.3.c)$$

Pentru a obține modelul de aproximare al procesului de curgere în jurul unui regim staționar de funcționare, termenul neliniar din cea de a doua ecuație a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (4.3.2) se liniarizează, prin descompunere în serie Taylor, în vecinătatea unui punct unic de funcționare asociat regimului staționar considerat. Din punct de vedere practic prezintă interes punctul de coordonate $(1, 1)$, asociat valorilor de presiune p_M și debit masic Q_M în raport cu care s-a făcut normalizarea. Rezultă:

$$\frac{\bar{Q}^2}{\bar{p}} \cong -\bar{p} + 2\bar{Q} \quad (4.3.4)$$

Forma liniarizată a modelului (4.3.2.b) va fi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\xi}_{M1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \bar{Q} = -\frac{1}{2\bar{\xi}_{M2}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3}}{2\bar{\xi}_{M2}} \bar{p} \end{cases} \quad (4.3.5.a)$$

căreia îi corespunde forma de regim staționar:

$$\begin{cases} \bar{Q} = const \\ \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = (\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3}) \bar{p} - 2\bar{\xi}_{M2} \bar{Q} \end{cases} \quad (4.3.5.b)$$

Potrivit acesteia, în regim staționar avem o distribuție fixă de presiune în lungul tronsonului de conductă. Prin aproximarea discretă a derivatelor spațiale din sistemul de ecuații (4.3.5.a), conform unor formule similare cu (4.2.10), rezultă următorul sistem de ecuații cu diferențe:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}_1}{dt} = -\bar{\xi}_{M1} \frac{-3\bar{Q}_1 + 4\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3}{2 \cdot \Delta \bar{x}} \\ \frac{d\bar{p}_j}{dt} = -\bar{\xi}_{M1} \frac{\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_{j-2}}{2 \cdot \Delta \bar{x}}, \quad j = \overline{2, m-1} \\ \frac{d\bar{p}_m}{dt} = -\bar{\xi}_{M1} \frac{\bar{Q}_{m-2} - 4\bar{Q}_{m-1} + 3\bar{Q}_m}{2 \cdot \Delta \bar{x}} \end{cases} \quad (4.3.6.a)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}_1 = -\frac{1}{2\bar{\xi}_{M2}} \frac{-3\bar{p}_1 + 4\bar{p}_2 - \bar{p}_3}{2 \cdot \Delta \bar{x}} + \frac{\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3}}{2\bar{\xi}_{M2}} \bar{p}_1 \\ \bar{Q}_j = -\frac{1}{2\bar{\xi}_{M2}} \frac{\bar{p}_{j+1} - \bar{p}_{j-1}}{2 \cdot \Delta \bar{x}} + \frac{\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3}}{2\bar{\xi}_{M2}} \bar{p}_j, \quad j = \overline{2, m-1} \\ \bar{Q}_m = -\frac{1}{2\bar{\xi}_{M2}} \frac{\bar{p}_{m-2} - 4\bar{p}_{m-1} + 3\bar{p}_m}{2 \cdot \Delta \bar{x}} + \frac{\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3}}{2\bar{\xi}_{M2}} \bar{p}_m \end{cases} \quad (4.3.6.b)$$

Matriceal sistemul de egalități (4.3.6) devine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \dots \\ \bar{p}_{m-2} \\ \bar{p}_{m-1} \\ \bar{p}_m \end{bmatrix} = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \dots \\ \bar{Q}_{m-2} \\ \bar{Q}_{m-1} \\ \bar{Q}_m \end{bmatrix} \quad (4.3.7.a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \\ \dots \\ \bar{Q}_{m-2} \\ \bar{Q}_{m-1} \\ \bar{Q}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 3 + \varphi_M & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varphi_M & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_M & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_M & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \varphi_M & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -3 + \varphi_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \dots \\ \bar{p}_{m-2} \\ \bar{p}_{m-1} \\ \bar{p}_m \end{bmatrix} \quad (4.3.7.b)$$

unde prin φ_M s-a notat:

$$\varphi_M = 2(\bar{\xi}_{M2} - \bar{\xi}_{M3})\Delta\bar{x} \quad (4.3.7.c)$$

Folosind notațiile, conform realizării sistemice din figura 4.3.1, pentru:

a) Mărimile de stare: $\bar{X}_p(t_k) = \begin{bmatrix} \bar{p}_{2,k} \\ \bar{p}_{3,k} \\ \dots \\ \bar{p}_{m-2,k} \\ \bar{p}_{m-1,k} \\ \bar{p}_{m,k} \end{bmatrix} \in R^{m-1}, \bar{X}_q(t_k) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1,k} \\ \bar{Q}_{2,k} \\ \bar{Q}_{3,k} \\ \dots \\ \bar{Q}_{m-2,k} \\ \bar{Q}_{m-1,k} \end{bmatrix} \in R^{m-1};$

b) Mărimile de intrare: $\bar{u}_q(t_k) = \bar{Q}_{m,k} \in R, \bar{u}_p(t_k) = \bar{p}_{1,k} \in R;$

c) Matricele parametrilor:

$$\bar{W}_1 = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix} \in R^{(m-1) \times (m-1)}, \bar{V}_1 = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \in R^{m-1},$$

$$\bar{W}_2 = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} -2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_M & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varphi_M & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_M & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varphi_M & -1 \end{bmatrix} \in R^{(m-1) \times (m-1)}, \bar{V}_2 = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 3 + \varphi_M \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m-1}.$$

egalitățile (4.3.7) devin:

$$\frac{d\bar{X}_p}{dt}(\tilde{t}_k) = \bar{W}_1 \bar{X}_q(\tilde{t}_k) + \bar{V}_1 \bar{u}_q(\tilde{t}_k) \quad (4.3.8.a)$$

$$\bar{X}_q(\tilde{t}_k) = \bar{W}_2 \bar{X}_p(\tilde{t}_k) + \bar{V}_2 \bar{u}_p(\tilde{t}_k) \quad (4.3.8.b)$$

Înlocuind \bar{X}_q din ecuația (4.3.8.b) în ecuația (4.3.8.a), introducând vectorul de intrare $\bar{u} = [\bar{u}_p \quad \bar{u}_q]^t \in R^2$ și, folosind notațiile $\bar{A}_{prm} = \bar{W}_1 \bar{W}_2 \in R^{(m-1) \times (m-1)}$, $\bar{B}_{prm} = [\bar{W}_1 \bar{V}_2 \quad \bar{V}_1] \in R^{(m-1) \times 2}$, se obține:

$$\frac{d\bar{X}_p}{dt}(\tilde{t}_k) = \bar{A}_{prm} \bar{X}_p(\tilde{t}_k) + \bar{B}_{prm} \bar{u}(\tilde{t}_k). \quad (4.3.9)$$

Sistemul (4.3.9) reprezintă modelul unui proces liniar de ordinul $(m-1)$, cu parametrii constanți, asociat reprezentării sistemice $p1Q2$ din figura 4.3.1 (cu orientarea $\bar{u} \rightarrow \bar{X}_p$). Condițiile inițiale asociate sunt reprezentate prin vectorul $\bar{X}_p(\tilde{t}_1) = -\bar{A}_{prm}^{-1} \bar{B}_{prm} \bar{u}(\tilde{t}_1)$ care caracterizează un regim staționar de curgere determinat prin presiunea de intrare $\bar{p}_{1,1}$ și debitul de regim staționar $\bar{Q}_{stat} = \bar{Q}_{1,1} = \dots = \bar{Q}_{m,1}$, valori care sunt grupate în vectorul intrărilor inițiale $\bar{u}(\tilde{t}_1)$.

Intrarea sistemului (4.3.9) este reprezentată de condițiile de frontieră $(\bar{p}_{1,k}, \bar{Q}_{m,k})$, cu $k > 0$. Vectorul mărimilor intermediare $\bar{X}_Q(\tilde{t}_k)$ (vector de stări alternative) se obține cu (4.3.8.b).

4.3.2. Erorile rezultate prin folosirea unui model de aproximare sistemic în simulările numerice

Întrucât modelul (4.3.9) reprezintă tot un model de aproximare al procesului de curgere al gazului printr-un tronson de conductă, însă mult mai simplificat și mai potrivit scopului propus (implementarea unui algoritm de control) decât modelul complex (M_0) dat prin relațiile (4.2.1), s-a considerat utilă prezentarea, prin intermediul unei simulări numerice, folosind același exemplu de proces de curgere ca și cel din paragraful 4.2.2, a unei analize a erorilor de calcul numeric a distribuțiilor de presiune și debit folosind acest model. Similar cu cele prezentate în paragraful 4.2.3, modelul simplificat va descrie tot un proces izoterm de curgere realizat la temperatura medie $T_M = T_{sol} = 7^{\circ}C$.

Valorile proprii extreme ale matricei \bar{A}_{prm} din (4.3.9) sunt:

a) $Real\{\tilde{\lambda}_{vp_{min}}\} = -5,15$;

b) $Real\{\tilde{\lambda}_{vp_{max}}\} = -0,091$.

Astfel, spectrul matricei \bar{A}_{prm} fiind situat în semiplanul stâng al planului complex este îndeplinită condiția de stabilitate în sens Lyapunov pentru modelul (M_3).

O corelație din punct de vedere a valorilor numerice ale valorilor proprii ale modelului (M_3) cu cele ale modelului (M_0) nu se poate face întrucât diferă vectorii de stare ai celor două modele considerate ca și ordin de mărime și semnificație fizică a componentelor.

Celor două valori proprii extreme ale procesului le sunt asociate constantele de timp extreme:

a) $\bar{\tau}_{p_{min}} = 0,194$;

b) $\bar{\tau}_{p_{max}} = 11,03$.

În consecință, pasul de discretizare al timpului Δt va trebui ales astfel încât să se situeze sub limita de stabilitate $\Delta t < 2\bar{\tau}_{p_{min}} = 0,39$ ($103,98s$ în valori reale), iar durata regimului tranzitoriu va fi: $\tilde{t}_{final} = 2,3\bar{\tau}_{p_{max}} = 25,37$ ($1,88h$ în valori reale). Relativ la valoarea $\tilde{t}_{final}|_{M_0} = 31$ vizualizată grafic pe curba din figura

(4.2.6.a) rezultă o eroare relativă: $\varepsilon(\tilde{t}_{final}) = \frac{\tilde{t}_{final}|_{M_0} - \tilde{t}_{final}|_{M_3}}{\tilde{t}_{final}|_{M_0}} \times 100 \cong 18\%$,

respectiv, o dinamică ceva mai rapidă a presiunii a presiunii de ieșire, pentru $m = 11$ puncte de discretizare spațiale.

În figurile 4.3.1 este prezentată grafic influența numărului m de puncte de discretizare asupra valorilor estimate ale constantelor de timp extreme ale procesului, respectiv, $\bar{\tau}_{p_{min}}$ și $\bar{\tau}_{p_{max}}$.

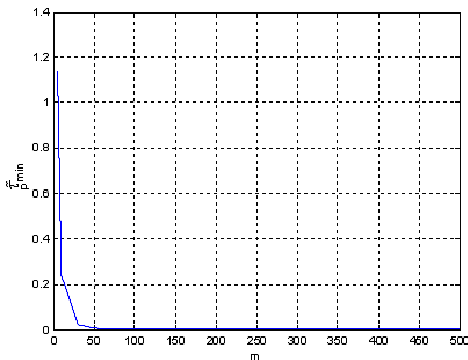


Fig. 4.3.1.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp

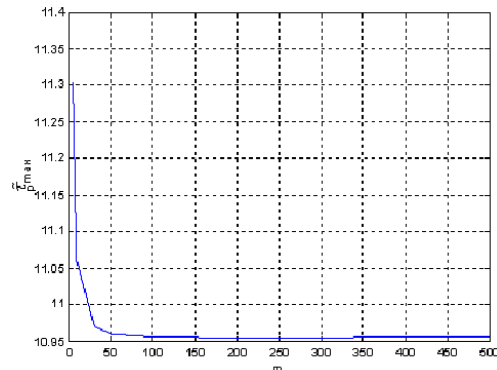


Fig. 4.3.1.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp

Similar cu cele constatate în subcapitolul anterior, creșterea numărului m de puncte de discretizare conduce la micșorarea constantei de timp $\bar{\tau}_{p_{min}}$ (tinde spre 0) astfel încât sistemul de ecuații diferențiale (4.3.9) devine de la o anumită valoare a lui m un sistem de ecuații inflexibil („stiff”).

În figurile 4.3.2 sunt prezentate erorile relative procentuale de calcul numeric al distribuțiilor de presiune $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t})$ și de debit masic $\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{t})$, la

temperatura medie $T_M = T_{sol} = 7^0 C$, față de calculul numeric bazat pe folosirea modelului (M_0):

$$a) \quad \varepsilon(\bar{p}) = \frac{\bar{p}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_3)} - \bar{p}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_0)}}{\bar{p}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_0)}} \cdot 100 ;$$

$$b) \quad \varepsilon(\bar{Q}) = \frac{\bar{Q}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_3)} - \bar{Q}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_0)}}{\bar{Q}|_{T1=T_{sol}=7^0 C}^{(M_0)}} \times 100$$

Din analiza figurii (4.3.2.a) se observă că modelul (M_3) permite, față de folosirea modelului (M_0), calculul distribuției de presiune cu erori sub 1,5% pentru tronsonul studiat.

În schimb, în calculul distribuției debitului masic, după cum se vede în figura (4.3.2.b), apar erori de aproape 20% datorate ignorării termenului $\frac{\partial Q}{\partial t}$ care exprimă variația în timp a debitului masic.

Exemplul prezentat ne arată că modelul liniar (M_3), de ordin redus, permite calcularea cu o precizie destul de bună a distribuției de presiune în vecinătatea unui punct / regim staționar de funcționare, în condițiile în care nu se ia în considerare variația în timp de debitului de gaz. Acest rezultat nu se poate demonstra pe cale analitică, fiind consecința unor observații bazate pe simulări numerice. Ordinul de mărime al erorilor este orientativ.

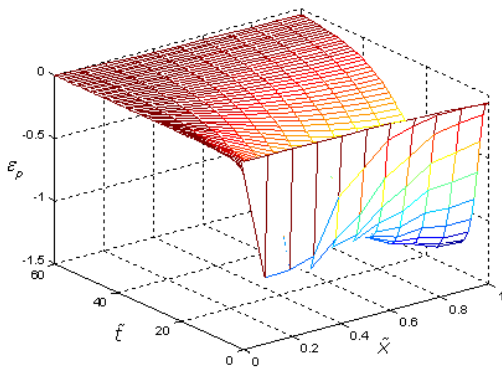


Fig. 4.3.2.a. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a presiunii normalizate

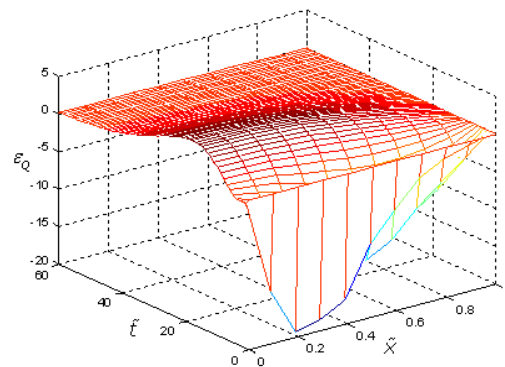


Fig. 4.3.2.b. Eroarea relativă procentuală a calculării distribuției spațio-temporale a debitului normalizat

4.3.3. Deducerea unei relații estimative de calcul a duratei regimului tranzitoriu

Determinarea unei formule de calcul pentru evaluarea duratei regimului tranzitoriu necesită folosirea unor modele de aproximare cu parametri concentrați ai modelului matematic al procesului de curgere, modele de aproximare având cel mai redus ordin de mărime posibil [22]. Un astfel de model de aproximare se poate

obține din reprezentarea sistemică $p1Q2$ a modelului matematic (4.3.2.a) prin efectuarea unei discretizări spațiale în numai 3 puncte a tronsonului de conductă prin care curge gazul, conform figurii 4.3.3.

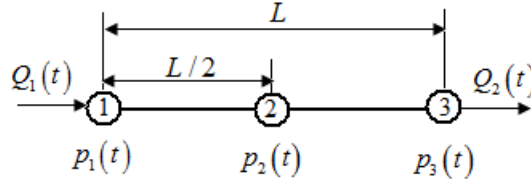


Fig. 4.3.3. Discretizarea spațială în 3 puncte a unui tronson de conductă

În baza reprezentării sistemice $p1Q2$, din figura 4.3.1, asociată modelului matematic (4.3.12.a), avem cunoscute presiunea $p_1(t)$ din nodul de intrare ① al tronsonului de conductă din figura 4.4.4, corespunzător punctului de discretizare spațială 1, și debitul $Q_2(t)$ din nodul de ieșire ②, corespunzător punctului de discretizare spațială 3. Rescriind cea de-a doua ecuația a modelului (4.3.1.b) sub forma:

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} + 2\xi_{M2}Q^2 + 2\xi_{M3}p^2 = 0 \quad (4.3.10)$$

în urma discretizării spațiale rezultă următorul model de aproximare format din două ecuații algebrice (de calculul a debitului $Q_1(t)$ și presiunii $p_3(t)$), respectiv, o ecuație diferențială (a presiunii $p_2(t)$):

$$Q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi_{M2}L}} \sqrt{(1 - \xi_{M3}L)p_1^2(t) - p_2^2(t)} \quad (4.3.11.a)$$

$$p_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_{M3}L}} \sqrt{p_2^2(t) - \xi_{M2}LQ_2^2(t)} \quad (4.3.11.b)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\xi_{M1}}{L} [Q_1(t) - Q_2(t)] \quad (4.3.11.c)$$

Ecuația diferențială a presiunii (4.3.11.c) se rescrie sub forma:

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\xi_{M1}}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{\xi_{M2}L}} \sqrt{(1 - \xi_{M3}L)p_1^2(t) - p_2^2(t)} - Q_2(t) \right] \quad (4.3.12)$$

Se fac notațiile:

$$p_1(t) = p_1(0) + \Delta p_1(t) \quad (4.3.13.a)$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \Delta p_2(t) \quad (4.3.13.b)$$

$$Q_2(t) = Q_2(0) + \Delta Q_2(t) \quad (4.3.13.c)$$

În urma liniarizării termenului: $\sqrt{(1 - \xi_{M3}L)p_1^2(t) - p_2^2(t)}$ în jurul punctului $\{p_1(0), p_2(0)\}$ se obține următoare ecuație diferențială liniară în variabila $\Delta p_2(t)$:

$$\frac{d(\Delta p_2)}{dt}(t) + K_M \cdot \Delta p_2(t) = \gamma_1 \Delta p_1(t) + \gamma_2 \Delta Q_2(t) \quad (4.3.14.a)$$

în care:

$$K_M = \frac{\xi_{M1}p_2(0)}{\sqrt{\xi_{M2}L^3} \sqrt{(1 - \xi_{M3}L)p_1(0)^2 - p_2(0)^2}} \quad (4.3.14.b)$$

reprezintă valoarea factorului de câștig.

Relația (4.3.14.a) poate fi rescrisă sub forma canonică a unui sistem de ordinul 1 [16]:

$$\tau_{pM} \frac{d(\Delta p_2)}{dt}(t) + \Delta p_2(t) = \frac{Y_1}{K} \Delta p_1(t) + \frac{Y_2}{K} \Delta Q_2(t) \quad (4.3.15)$$

în care:

$$\tau_{pM} = \frac{1}{K_M} = \frac{L}{Z_{MCM}} \sqrt{\frac{\lambda L}{2D}} \sqrt{\left(1 - \frac{g \sin \alpha}{c_M^2}\right) \frac{p_1(0)^2}{p_M^2} - 1} \quad (4.3.16)$$

reprezintă constanta de timp a procesului dinamic [9].

Formula (4.3.16) s-a scris considerând: $p_2(0) \cong p_M$.

Constanta de timp (4.3.16) ne permite să considerăm un mod de comportament dinamic al tronsonului de conductă similar cu cel al unui proces de ordinul 1 descris printr-o funcție pondere de forma:

$$M_M(t) = e^{-\frac{t}{\tau_{pM}}} \quad (4.3.17)$$

Pe baza modului de comportament dinamic (4.3.17), durata regimului tranzitoriu t_{final} [16] poate fi estimată direct din analiza dinamicii funcției de timp $M_M(t)$, respectiv:

$$t_{final} \cong 2,3\tau_{pM} \quad (4.3.18)$$

Pentru exemplificare se consideră procesul de curgere care are loc printr-un tronson de conductă de lungime: $L = 100km$, diametru interior: $D = 0,5m$, diferență de nivel între capete $\Delta h = 0$ și rugozitate interioară $k_a = 0,2mm$. Procesul are loc, inițial, într-un regim staționar de curgere izotermă, la temperatura: $T_M = 7^{\circ}C$, presiunea de intrare $p_{1stat_initial} = 16,5bar$, presiunea de ieșire: $p_{2stat_initial} = 15bar$ și debitul la consumator: $Q_2 = 32.500Nm^3/h$. În baza formulei de calcul (3.3.10), presiunea medie a tronsonului va fi: $p_M = 15,8bar$, rezultând, conform formulei de calcul (4.3.16) o valoare a constantei de timp de aproximativ: $\tau_{pM} = 0,94h$, respectiv, o valoare a timpului de stabilizare, conform formulei (4.3.17), de: $t_{final} \cong 2,16h$.

Prin creșterea treaptă a presiunii de intrare $p_1(t)$ de la valoarea $p_{1stat_initial} = 16,5bar$ la valoarea $p_{1stat_final} = 19,6bar$, păstrând constant debitul la consumator, $Q_2 = const$, se inițializează un regim tranzitoriu de curgere pe durata căruia presiunea de ieșire $p_2(t)$ din tronsonul de conductă va evolua, conform curbei „proces” din figura 4.3.4 de la valoarea inițială de $p_{2stat_initial} = 15bar$ la valoarea $p_{2stat_final} = 18,3bar$.

Pe lângă curba de evoluție în timp a presiunii de ieșire $p_2(t)$, obținută prin simularea numerică modelului matematic (4.3.1.b) cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială s-a figurat, comparativ, și curba „model” de evoluție în timp a presiunii de ieșire $p_2(t)$ rezultată în urma simulării numerice a modelului de aproximare (4.3.11) cu ecuația (4.3.11.c) scrisă în varianta liniarizată (4.3.14.a).

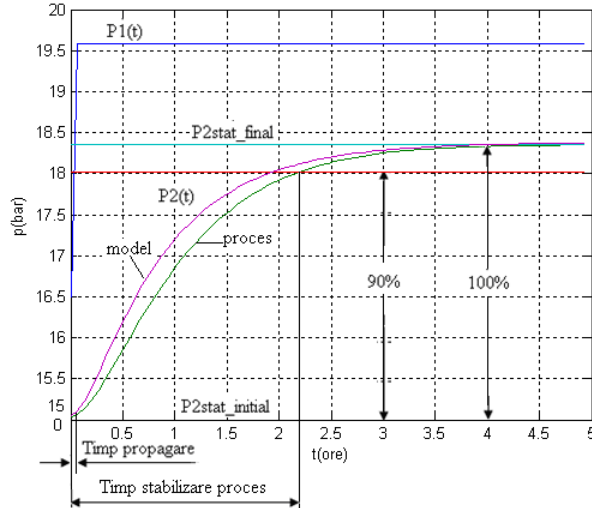


Fig. 4.3.4. Determinarea timpului de stabilizare a folosind curba de evoluție dinamică în timp a presiunii de ieșire din tronson cauzată de variația treaptă a presiunii de intrare

Din analiza curbei „proces” din figura 4.3.4 se observă că noua valoare de regim staționar a presiunii de ieșire p_{2stat_final} va fi atinsă după un timp de stabilizare propriu-zisă a procesului dinamic de aproximativ $t_{final_real} = 2,2h$, în care trebuie inclus și timpul necesar propagării de către unda de presiune, cu viteza sunetului în gaz c_M , a efectului creșterii, de tip treaptă, a presiunii de intrare la ieșirea din tronson. Calculând pentru presiunea medie p_M valoarea vitezei sunetului în gaz, pe baza relației (3.2.7) se obține valoarea: $c_M = 367m/s$ care conduce la un timp de propagare de aproximativ: $t_{prp_M} = \frac{L}{c_M} = 0,08h$. Acest timp reprezintă mai puțin de 4% din valoare totală a duratei regimului tranzitoriu de t_{final_real} citită pe curba „proces”.

4.3.4. Modele de aproximare liniare, invariante în timp având la bază realizări sistematice p1p2 sau Q1Q2

Până acum, modelele de aproximare ale procesului de curgere s-au construit în ipoteza unui anumit set de condiții de frontieră care stabilesc practic orientarea modelului discret.

În cele ce urmează se vor prezenta modelele de aproximare care rezultă din luarea în considerare numai a unor condiții de frontieră de forma $(\tilde{p}_{1,k}, \tilde{p}_{m,k})$, respectiv, $(\tilde{Q}_{1,k}, \tilde{Q}_{m,k})$, care conduc la reprezentări sistematice $p1p2$, respectiv, $Q1Q2$.

Plecând de la forma normalizată (4.3.2.b) a modelul simplificat (M_3) dat prin sistemul de ecuații (4.3.1.b), prin considerarea unor condiții de frontieră de forma $(\tilde{p}_{1,k}, \tilde{p}_{m,k})$, și, implicit, folosirea unei reprezentări sistematice $p1p2$, s-a considerat utilă prezentarea corelațiilor ce se pot stabili între relațiile deduse analitic

în cadrul subcapitolului (3.4) și rezultatele de calcul numeric, în ceea ce privește aplicabilitatea relațiilor analitice.

Pentru aceste condiții de frontieră, în baza relațiilor de discretizare (4.3.6), respectiv a ecuațiilor matriceale (4.3.7), acestei realizării sistemice a modelului (M_3) i se va asocia un model de aproximare liniar de proces cu parametrii concentrați, similar ca formă cu cel descris de relația (4.3.9), dedus pe baza unui set similar de egalități ca cele exprimate prin relațiile (4.3.8), care ține, însă, seama de condițiile de frontieră considerate în cazul de față:

$$\frac{d\bar{X}_p}{dt}(\bar{t}_k) = \bar{W}_1 \bar{X}_q(\bar{t}_k) \quad (4.3.19.a)$$

$$\bar{X}_q(\bar{t}_k) = \bar{W}_2 \bar{X}_p(\bar{t}_k) + \bar{V}_2 \bar{u}(\bar{t}_k), \quad (4.3.19.b)$$

În cazul de față, notațiile folosite pentru scrierea modelului sunt:

$$\text{a) } \bar{X}_p(\bar{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{p}_{2,k} \\ \bar{p}_{3,k} \\ \dots \\ \bar{p}_{m-2,k} \\ \bar{p}_{m-1,k} \end{bmatrix} \in R^{m-2}, \quad \bar{X}_q(\bar{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1,k} \\ \bar{Q}_{2,k} \\ \dots \\ \bar{Q}_{m-1,k} \\ \bar{Q}_{m,k} \end{bmatrix} \in R^m;$$

$$\text{b) } \bar{u}(\bar{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{p}_{1,k} \\ \bar{p}_{m,k} \end{bmatrix} \in R^2;$$

$$\text{c) } \bar{W}_1 = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in R^{(m-2) \times m}, \quad \bar{W}_2 = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} -4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \varphi_M & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \varphi_M & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_M & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varphi_M \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix} \in R^{m \times (m-2)},$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 3 + \varphi_M & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 + \varphi_M \end{bmatrix} \in R^{m \times 2},$$

unde φ_M este definit prin relația (4.3.7.c).

Ca și în paragraful precedent, ecuația sistemică de stare, asociată reprezentării sistemice $p1p2$ a modelului (M_3), similară ca formă cu (4.3.9) se obține eliminând din (4.3.19) pe \bar{X}_q . Ordinul acestei ecuații va fi $(m-2)$ iar:

$$\bar{A}_{prm} = \bar{W}_1 \bar{W}_2 \in R^{(m-2) \times (m-2)}, \quad \bar{B}_{prm} = \bar{W}_1 \bar{V}_2 \in R^{(m-2) \times 2}.$$

Pentru aplicația numerică studiată, în noile condiții de frontieră, în figurile 4.3.4 sunt reprezentate grafic evoluțiile constantelor de timp extreme ale procesului de curgere funcție de numărul de puncte interne de discretizare spațială m , corelate cu valorile constantelor de timp extreme calculate analitic prin relațiile (3.4.35).

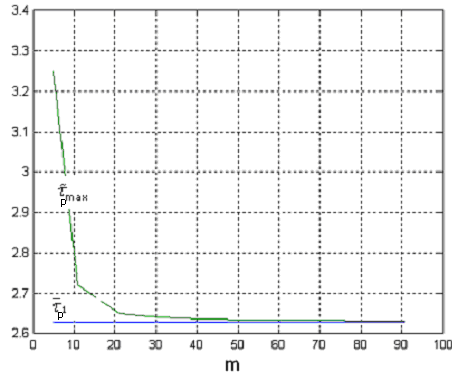


Fig. 4.3.4.a. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei maxime de timp

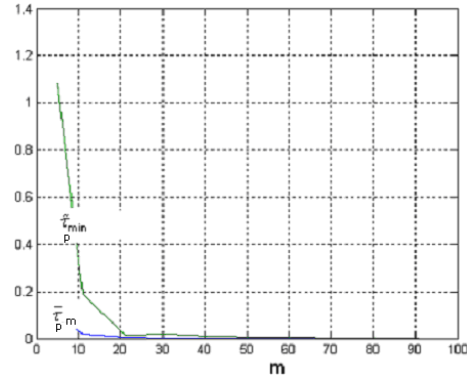


Fig. 4.3.4.b. Influența numărului de puncte de discretizare asupra constantei minime de timp

Din figura 4.3.4.a se observă că valoarea numerică calculată pentru constanta de timp maximală \bar{t}_{pmax} converge spre valoarea calculată \bar{t}_{p1} analitic prin relația (3.4.35.b).

Figura 4.3.4.b ne arată convergența spre zero a constantei de timp minimale \bar{t}_{pmin} pe măsură ce crește numărul de punctelor de discretizare spațială m , fapt care rezultă și din relația analitică de calcul (3.4.35.a) pentru \bar{t}_{pm} .

Corelând figurile (4.3.4) cu figurile (4.3.1) se observă diferențe notabile în ceea ce privește valorile constantelor de timp extreme ale realizărilor sistemice obținute prin condiții de frontieră diferite.

În ceea ce privește cazul condițiilor de frontieră $(\bar{Q}_{1,k}, \bar{Q}_{m,k})$, care conduc la o realizare sistemică $Q1Q2$, în mod similar cu cele prezentate mai sus, se va deduce ecuația sistemică de stare, similară ca formă cu (4.3.9), asociată reprezentării sistemice $Q1Q2$ a modelului (M_3) . Pentru aceasta înlăturăm din sistemul de ecuații (4.3.6.b) ecuațiile care exprimă relațiile de calcul ale valorilor $\bar{Q}_{1,k}$, respectiv, $\bar{Q}_{m,k}$. Ecuația matriceală (4.3.7.a) se rescrie astfel încât $\bar{Q}_{1,k}$ și $\bar{Q}_{m,k}$ să fie individualizate ca variabile de intrare. În aceste condiții relațiile (4.3.7) devin:

$$\frac{d\bar{X}_p}{dt}(\tilde{t}_k) = \bar{W}_1 \bar{X}_q(\tilde{t}_k) + \bar{V}_1 \bar{u}(\tilde{t}_k) \quad (4.3.20.a)$$

$$\bar{X}_q(\tilde{t}_k) = \bar{W}_2 \bar{X}_p(\tilde{t}_k) \quad (4.3.20.b)$$

S-au folosit notațiile:

$$\mathbf{a) } \bar{X}_p(\tilde{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{p}_{1,k} \\ \bar{p}_{2,k} \\ \dots \\ \bar{p}_{m-1,k} \\ \bar{p}_{m,k} \end{bmatrix} \in R^m \text{ - vectorul de stare, } \bar{X}_q(\tilde{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{m2,k} \\ \bar{Q}_{m3,k} \\ \dots \\ \bar{Q}_{mm-2,k} \\ \bar{Q}_{mm-1,k} \end{bmatrix} \in R^{m-2}$$

vector de stări alternative;

b) $\underline{\bar{u}}(\bar{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1,k} \\ \bar{Q}_{m,k} \end{bmatrix}$ - vectorul mărimilor de intrare;

c) Matricele parametrilor:

$$\underline{W}_1 = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} -4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix} \in R^{m \times (m-2)}, \quad \underline{V}_1 = \frac{\bar{\xi}_{M1}}{2\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in R^{m \times 2},$$

$$\underline{W}_2 = \frac{1}{4\bar{\xi}_{M2}\Delta\bar{x}} \begin{bmatrix} 1 & \varphi_M & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_M & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_M & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \varphi_M & -1 \end{bmatrix} \in R^{(m-2) \times m}$$

unde φ_M este definit prin relația (4.3.7.c).

Ecuția sistemică de stare care se obține eliminând din (4.3.20) vectorul $\underline{\bar{X}}_q$, va avea ordinul m , iar matricele acestea vor fi: $\bar{A}_{prm} = \bar{W}_1 \bar{W}_2 \in R^{m \times m}$, $\bar{B}_{prm} = \bar{V}_1 \in R^{m \times 2}$, $\bar{u} \in R^2$.

Pentru aplicația numerică studiată, în noile condiții de frontieră, pentru $m = 11$ noduri de discretizare spațială, rezultă: $\det(\bar{A}_{prm}) = 0$, iar $\text{rang}(\bar{A}_{prm}) = 9$. Numeric, s-a calculat că, pentru diferite valori ale lui m că: $\text{rang}(\bar{A}) = m - 2$, adică modelul prezintă întotdeauna două valori proprii egale cu zero.

Din punct de vedere fizic incertitudinea prezentă în modelul cu parametri concentrați care aproximează modelul cu parametri distribuiți se explică prin aceea că în starea de regim staționar, debitul masic este constant de-a lungul întregului tronson de conductă și, deci, nu poate să existe o stare de regim staționar caracterizată prin $Q_{1stat} \neq Q_{2stat}$.

4.4. Problema stabilității unui model sistemic discret al procesului de curgere printr-un sistem de transport

După cum s-a văzut în cadrul capitolului 3, problema stabilității modelelor de aproximare a procesului de curgere s-a pus din perspectiva asigurării convergenței schemelor numerice folosite pentru simularea procesului de curgere, iar metoda folosită se baza pe o analiză individuală a valorilor proprii ale matricei formelor linearizate ale modelelor procesului. Întrucât se urmărește folosirea acestor modele de aproximare pentru implementarea unor algoritmi de reglare automată a procesului este util a se prezenta o serie de rezultate matematice, cuantificate sub

forma unor teoreme, care să arate legătura dintre structura matricelor formelor discrete linearizate ale modelului procesului și amplasarea valorilor proprii ale acestora.

În acest sens, în [73] este analizată stabilitatea unei forme linearizate și discrete a modelului de aproximare al procesului de curgere la nivelul unui sistem de transport gaze, în jurul unui regim staționar de curgere.

Modelul procesului de curgere al gazului prin sistemul de transport va fi obținut prin agregarea modelelor individuale ale proceselor de curgere prin tronsoanele sistemului, interconectate prin noduri de legătură.

Modelul individual al procesului de curgere printr-un tronson va fi de forma (4.3.1.b), cu observația că, pentru factorul de abatere Z , se va lua în considerare și dependența acestuia cu presiunea gazului, conform relației 3.2.4.a, ca urmare a variațiilor mari ale acesteia între extremitățile sistemului de transport.

Modelul (4.3.1.b) al procesului de curgere al gazului printr-un tronson orizontal de conductă de lungime L , diametru interior D și elevație Δh , în regim termodinamic izoterm la temperatura T_M , scris în variabilele p -presiune, Q -debit masic se rescrie sub forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon_1(1 - \tau p)^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.4.1.a)$$

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} + 2\varepsilon_2(1 - \tau p)Q^2 = 0 \quad (4.4.1.b)$$

Parametrii sistemului de ecuații diferențiale (4.4.1), ținând seama de relațiile (4.3.1.c...d), sunt:

$$\varepsilon_1 = \frac{R_p T_M}{A} \quad (4.4.2.a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda R_p T_M}{2DA^2} \quad (4.2.2.b)$$

Liniazarea modelului (4.4.1) se va face în cazul mai general și anume în jurul unui regim staționar de curgere al gazului prin tronsonul considerat, și nu al unui punct unic de funcționare ca în cazul modelelor sistemice deduse în subcapitolul precedent. Regimul staționar în jurul căruia se va face liniarizarea este caracterizat de distribuția de presiune $p_{stat}(x)$ și debitul $Q_{stat}(x) = const$, o detaliere a modului de calcul al acestor mărimi fiind prezentată în cadrul subcapitolului 3.3.

Notând cu $\Delta p(x, t)$ abaterea mică de presiune, iar cu $\Delta Q(x, t)$ abaterea mică de debit față de valorile de regim staționar, avem:

$$p(x, t) = p_{stat}(x) + \Delta p(x, t) \quad (4.4.3.a)$$

$$Q(x, t) = Q_{stat} + \Delta Q(x, t) \quad (4.4.3.b)$$

Prin înlocuirea variabilelor p și Q , în baza exprimărilor (4.4.4), în sistemul de ecuații (4.4.2) și ținând cont că: $\frac{\partial p_{stat}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial Q_{stat}}{\partial x} = 0$, respectiv, că termenii

Δp^2 , $\Delta p \cdot \Delta Q$, $\tau \cdot \Delta p$, $\tau^2 \cdot \Delta p$, $\tau^2 \cdot \Delta p^2$ reprezintă cantități neglijabile, se obține:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} + \varepsilon_1(1 - \tau p_{stat})^2 \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial x} = 0 \quad (4.4.4.a)$$

$$\frac{\partial(p_{stat} \cdot \Delta p)}{\partial x} + 2\varepsilon_2(1 - \tau p_{stat})Q_{stat} \cdot \Delta Q = \varepsilon_2 T \cdot \Delta p \cdot Q_{stat}^2 \quad (4.4.4.b)$$

Din ecuația (4.4.5.b), folosind notațiile:

$$\Gamma = \frac{p_{stat}}{1 - \tau p_{stat}} \quad (4.4.5)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\varepsilon_2 Q_{stat}} \quad (4.4.6)$$

obținem pe baza explicitării debitului staționar Q_{stat} din ecuația (4.4.1.b), scrisă pentru regimul staționar, următoarea relație de calcul a abaterii de debit ΔQ :

$$\Delta Q = -\varepsilon_3 \frac{\partial(\Gamma \cdot \Delta p)}{\partial x} \quad (4.4.7.a)$$

Înlocuind ΔQ din (4.4.7.a) în ecuația (4.4.4.a) rezultă următoarea ecuație diferențială care modelează dinamica abaterii de presiune Δp :

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = \Omega \frac{\partial^2(\Gamma \cdot \Delta p)}{\partial x^2} \quad (4.4.7.b)$$

Parametrul acestei ecuații este:

$$\Omega = \varepsilon_2 \varepsilon_3 (1 - \tau p_{stat})^2 \quad (4.4.8)$$

În mod similar cu cele prezentate în subcapitolele anterioare se discretizează sistemul de ecuații (4.4.7) prin intermediul a m puncte de discretizare spațială $\{x_j / j = \overline{1, m}\}$ având pasul: $\Delta x = \frac{L_c}{m-1}$. Timpul este eșantionat cu pasul:

$$\Delta t = t_k - t_{k-1}, \quad k > 0, \quad \text{astfel încât constanta rețelei de discretizare este } a = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

În continuare se vor folosi notațiile:

$$\Delta p_{j,k} = \Delta p(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t) \quad (4.4.8.a)$$

$$\Delta Q_{j,k} = \Delta Q(j \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t) \quad (4.4.8.b)$$

$$\Gamma_j = \Gamma(j \cdot \Delta x) \quad (4.4.8.c)$$

$$\Omega_j = \Omega(j \cdot \Delta x) \quad (4.4.8.d)$$

Ecuația diferențială (4.4.7.a) se discretizează astfel:

$$\Delta Q_{j,k} = -\varepsilon_3 \frac{\Gamma_{j+1} \Delta p_{j+1,k} - \Gamma_{j-1} \Delta p_{j-1,k}}{2 \Delta x} \quad (4.4.9.a)$$

Ecuația diferențială (4.4.7.b), care descrie dinamica abaterii presiunii, se discretizează, prin folosirea factorului de ponderare $\theta \in [0, 1]$, astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_{j,k+1} - \Delta p_{j,k}}{\Delta t} = & \theta \Omega_j \frac{\Gamma_{j-1} \Delta p_{j-1,k+1} - 2 \Gamma_j \Delta p_{j,k+1} + \Gamma_{j+1} \Delta p_{j+1,k+1}}{(\Delta x)^2} + \\ & + (1 - \theta) \Omega_j \frac{\Gamma_{j-1} \Delta p_{j-1,k} - 2 \Gamma_j \Delta p_{j,k} + \Gamma_{j+1} \Delta p_{j+1,k}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.4.9.b)$$

În contextul celor prezentate în cadrul capitolului 3, se observă că pentru $\theta = 0$, ecuația cu diferențe (4.4.9.b) este asociată unei metode numerice explicite, iar pentru $\theta = 1$ ea va fi asociată unei metode numerice implicite. În schimb, pentru

$\theta = \frac{1}{2}$ ecuația cu diferențe (4.4.9.b) reprezintă o schemă de discretizare Crank-Nicholson care, conform cu [6], [69] prezintă cea mai mare precizie numerică. Făcând notațiile:

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{r_{tx}}{\Delta x}, \quad (4.4.10.a)$$

$$\varphi_{ji} = \Omega_j r \Gamma_i, \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, m-1} \quad (4.4.10.b)$$

ecuația (4.4.9.b) se aduce la forma următoare:

$$-\theta \varphi_{j,j-1} \Delta p_{j-1,k+1} + (1 + 2\theta \varphi_{j,j}) \Delta p_{j,k+1} - \theta \varphi_{j,j+1} \Delta p_{j+1,k+1} = \quad (4.4.11)$$

$$(1 - \theta) \varphi_{j,j-1} \Delta p_{j-1,k} + [1 - 2(1 - \theta) \varphi_{j,j}] \Delta p_{j,k} + (1 - \theta) \varphi_{j,j+1} \Delta p_{j+1,k}$$

Condițiile limită care se pun pentru ecuația cu diferențe (4.4.11) sunt:

a) condiții inițiale: $\Delta p_{j,0} = 0$ pentru $j = \overline{1, m}$;

b) condiție de frontieră într-unul din nodurile terminale: $\Delta p_{1,k} = p(0, \Delta t) - p_{stat}(0)$ sau $\Delta p_{m,k} = p(L, \Delta t) - p_{stat}(L)$, pentru $k > 0$.

Aceste condiții limită vor trebui completate cu condițiile limită pentru abaterea de debit.

Funcție de condițiile de frontieră va trebui rescrisă și ecuația cu diferențe pentru nodul terminal corespunzător.

Astfel în cazul unui set de condiții de frontieră: $\{(\Delta p_{1,k}, \Delta Q_{m,k}) / k > 0\}$, ecuația cu diferențe (4.4.11) se rescrie pentru nodul terminal $j = m$ prin explicitarea termenilor $\Gamma_{m+1} \Delta p_{m+1,k}$ și $\Gamma_{m+1} \Delta p_{m+1,k+1}$ din ecuația (4.4.9.a) scrisă pentru $j = m$, la momentele succesive de timp $k, k+1$:

$$-2\theta \varphi_{m,m-1} \Delta p_{m-1,k+1} + (1 + 2\theta \varphi_{m,m}) \Delta p_{m,k+1} + 2\theta \eta_m \Delta Q_{m,k+1} = \quad (4.4.12.a)$$

$$2(1 - \theta) \varphi_{m,m-1} \Delta p_{m-1,k} + [1 - 2(1 - \theta) \varphi_{m,m}] \Delta p_{m,k} - 2(1 - \theta) \eta_m \Delta Q_{m,k}$$

unde prin η_m s-a notat:

$$\eta_j = \frac{\Omega_j \Gamma \cdot \Delta x}{\varepsilon_3}, \quad j = \overline{1, m} \quad (4.4.12.b)$$

În mod similar, în cazul unui set de condiții de frontieră $\{(\Delta p_{m,k}, \Delta Q_{1,k}) / k > 0\}$, se deduce ecuația cu diferențe care exprimă dinamica perturbației de presiune în nodul de intrare $j = 1$:

$$(1 + 2\theta \varphi_{1,1}) \Delta p_{1,k+1} - 2\theta \varphi_{1,2} \Delta p_{1,k+1} - 2\theta \eta_1 \Delta Q_{1,k+1} = \quad (4.4.13)$$

$$[1 - 2(1 - \theta) \varphi_{1,1}] \Delta p_{1,k} + 2(1 - \theta) \varphi_{1,2} \Delta p_{2,k} + 2(1 - \theta) \eta_1 \Delta Q_{1,k}$$

Ca exemplificare se consideră structura de sistem de transport din figura (4.4.1), formată din două tronsoane de conductă, notate cu z , respectiv $z+1$, de lungimi $L^{(z)}$, $L^{(z+1)}$, și diametre $D^{(z)}$, $D^{(z+1)}$, interconectate prin intermediul unui nod de tip consumator, astfel încât, în regim staționar de curgere, între debitele staționare prin cele două tronsoane de conductă $Q_{1,0}^{(z)} = \dots = Q_{m,0}^{(z)} = Q_{stat}^{(z)}$, respectiv,

$Q_{1,0}^{(z+1)} = \dots = Q_{m,0}^{(z+1)} = Q_{stat}^{(z+1)}$ și debitul staționar pe ieșirea din nodul consumator $Q_{stat}^{(z)/(z+1)}$ să existe relația:

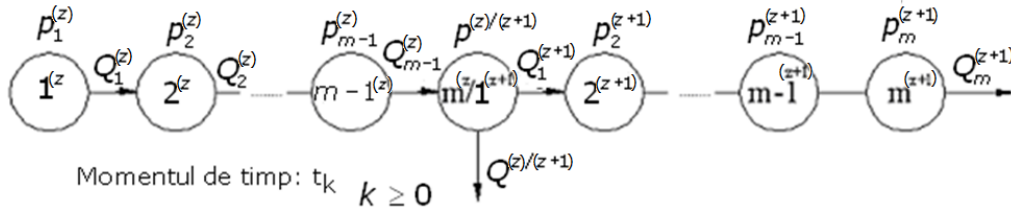
$$Q_{stat}^{(z)/(z+1)} = Q_{stat}^{(z)} - Q_{stat}^{(z+1)} \quad (4.4.14)$$


Fig. 4.4.1. Structură de sistem de transport cu figurarea punctelor de discretizare spațială

Modul de deducere al modelului procesului de curgere la nivelul întregului sistem de transport prin agregarea modelelor proceselor de curgere prin tronsoanele componente precum și considerațiile legate de stabilitatea acestuia rămân valabile pentru orice structură de sistem de transport.

Pentru sistemul de transport din figura 4.4.1 dinamica presiunii, asociată unui proces cu parametri concentrați, va putea fi descrisă prin următorul sistem liniarizat de ecuații diferențiale, scrise sub forma matriceală:

$$\underline{E}_0 \underline{X}_0(k+1) = \underline{A}_0 \underline{X}_0(k) + \underline{B}_0 \underline{u}_0(k+1) + \underline{B}_0 \underline{u}_0(k) \quad (4.4.15)$$

Semnificația mărimilor modelului (4.4.15) va fi descrisă în cele ce urmează plecând de la modul de aplicare al ecuațiilor discrete (4.4.11), (4.4.12), (4.4.13).

Astfel, în nodul $1^{(z)}$ se consideră cunoscută mărimea $\Delta p_{1,k}^{(z)}$, $(\forall) k > 0$.

Pentru procesul descris prin sistemul de ecuații (4.4.15), ea va fi considerată mărime de intrare.

Pentru nodurile $2^{(z)}, \dots, m-1^{(z)}$, respectiv, $2^{(z+1)}, \dots, m-1^{(z+1)}$, sunt necunoscute, $(\forall) k > 0$, mărimile $\Delta p_{2,k}^{(z)}, \dots, \Delta p_{m-1,k}^{(z)}$, respectiv, $\Delta p_{2,k}^{(z+1)}, \dots, \Delta p_{m-1,k}^{(z+1)}$. Ele vor fi considerate mărimi de stare. Nodurilor le vor fi asociate ecuații de forma (4.4.12) scrise corespunzător cu notațiile folosite.

În nodul $m^{(z+1)}$ se va considera cunoscută, $(\forall) k > 0$, mărimea $\Delta Q_{m,k}^{(z)}$ tratată ca mărime de intrare și necunoscută mărimea $\Delta p_{m,k}^{(z+1)}$ care se va alătura setului mărimilor de stare, pentru procesul descris prin sistemul de ecuații (4.4.15). Nodului îi va fi asociată o ecuație de forma (4.4.12) scrisă corespunzător cu notațiile folosite.

În schimb, pentru interconectarea prezentă în figura 4.4.1, la nivelul nodului $m^{(z)}/1^{(z+1)}$ va trebui determinată ecuația cu diferențe care modelează dinamica presiunii, mărime necunoscută, care va completa setul mărimilor de stare ale procesului considerat:

$$\Delta p_{m,k}^{(z)} = \Delta p_{1,k}^{(z+1)} = \Delta p_k^{(z)/(z+1)} \quad (4.4.16.a)$$

Se notează cu $\Delta Q_k^{(z)/(z+1)}$ perturbația de debit datorată variației consumului, cunoscută $(\forall) k > 0$, care va completa, la rândul ei, setul de mărimi de intrare ale procesului considerat. Cu această notație, debitul variabil cerut de consumator la ieșirea din nodul de interconectare va fi:

$$Q_k^{(z)/(z+1)} = Q_{stat}^{(z)/(z+1)} + \Delta Q_k^{(z)/(z+1)} \quad (4.4.16.b)$$

În aceste condiții, cu mărimea $\Delta Q_k^{(z)/(z+1)}$ cunoscută, $(\forall) k > 0$, nodului terminal $m^{(z)}/1^{(z+1)}$ al tronsonului de conductă z i se va asocia ecuația cu diferențe (4.4.12), iar nodului inițial $m^{(z)}/1^{(z+1)}$ al tronsonului de conductă $z+1$, în mod corespunzător, ecuația cu diferențe (4.4.13). Prin combinarea celor două ecuații, ținând cont de (4.4.16) și de următoarele observații:

a) valoarea comună a presiunii în nodul de interconectare (4.4.16.a) face ca:

$$\Gamma_m^{(z)} = \Gamma_1^{(z+1)} = \Gamma^{(z)/(z+1)};$$

b) continuitatea debitului masic în nodul de interconectare, atât în regimul staționar de bază $Q_{stat}^{(z)} = Q_{stat}^{(z+1)} + Q_{stat}^{(z)/(z+1)}$, cât și în regim tranzitoriu:

$$Q_{m,k}^{(z)} = Q_{1,k}^{(z+1)} + Q_k^{(z)/(z+1)}, \text{ impune, } (\forall) k > 0, \text{ ca: } \Delta Q_{m,k}^{(z)} = \Delta Q_{1,k}^{(z+1)} + \Delta Q_k^{(z)/(z+1)};$$

c) folosirea notației: $\phi^{(z)/(z+1)} = \left(\frac{\varepsilon_3^{(z)}}{2r^{(z)} \Delta x^{(z)} \Omega_m^{(z)}} + \frac{\varepsilon_3^{(z+1)}}{2r^{(z+1)} \Delta x^{(z+1)} \Omega_1^{(z+1)}} \right)^{-1}$.

rezultă ecuația cu diferențe asociată nodului de interconectare:

$$\begin{aligned} & -\theta \mu_{m-1}^{(z)} \Delta p_{m-1,k+1}^{(z)} + \left(1 + \theta v^{(z)} + \theta v^{(z+1)} \right) \Delta p_{k+1}^{(z)/(z+1)} - \\ & - \theta \mu_2^{(z+1)} \Delta p_{2,k+1}^{(z+1)} + \theta \kappa \Delta Q_{k+1}^{(z)/(z+1)} = \end{aligned} \quad (4.4.17.a)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \theta) \mu_{m-1}^{(z)} \Delta p_{m-1,k}^{(z)} + \left[1 - (1 - \theta) v^{(z)} - (1 - \theta) v^{(z+1)} \right] \Delta p_k^{(z)/(z+1)} + \\ & + (1 - \theta) \mu_2^{(z+1)} \Delta p_{2,k}^{(z+1)} - (1 - \theta) \kappa \Delta Q_k^{(z)/(z+1)} \\ & \kappa = \phi^{(z)/(z+1)} \end{aligned} \quad (4.4.17.b)$$

$$\mu_j^{(s)} = \frac{\phi^{(z)/(z+1)} \varepsilon_3^{(s)} \Gamma_j^{(s)}}{\Delta x^{(s)}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.17.c)$$

$$v^{(s)} = \frac{\phi^{(z)/(z+1)} \varepsilon_3^{(s)} \Gamma^{(z)/(z+1)}}{\Delta x^{(s)}}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.17.d)$$

Pe baza acestor considerații, pentru modelul (4.4.15) al procesului de curgere al gazului prin sistemul de transport considerat avem:

a) vectorul mărimilor de stare, având $n = m^{(z)} + m^{(z+1)} - 2$ elemente:

$$X_0(k) = \left[\Delta p_{2,k}^{(z)} \quad \Delta p_{3,k}^{(z)} \quad \dots \quad \Delta p_{m-1,k}^{(z)} \quad \Delta p_k^{(z)/(z+1)} \quad \Delta p_{2,k}^{(z+1)} \quad \Delta p_{3,k}^{(z+1)} \quad \dots \quad \Delta p_{m-1,k}^{(z+1)} \quad \Delta p_{m,k}^{(z+1)} \right]^t$$

b) vectorul mărimilor de intrare, având 3 elemente:

$$\underline{u}_0(k) = \left[\Delta p_{1,k}^{(z)} \quad \Delta Q_k^{(z)/(z+1)} \quad \Delta Q_{m,k}^{(z+1)} \right]^t$$

c) matricele parametrilor modelului \underline{E}_0 și \underline{A}_0 , având $n \times n$ elemente, respectiv \underline{B}_{01} , \underline{B}_{00} cu $n \times 3$ elemente:

$$\underline{E}_0 = \begin{bmatrix} 1+2\theta\varphi_{2,2}^{(z)} & -\theta\varphi_{2,3}^{(z)} & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -\theta\varphi_{3,2}^{(z)} & 1+2\theta\varphi_{3,3}^{(z)} & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1+2\theta\varphi_{m-1,m-1}^{(z)} & -\theta\varphi_{m-1,m}^{(z)} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & -\theta\mu_{m-1}^{(z)} & 1+\theta v^{(z)} + \theta v^{(z+1)} & -\theta\mu_2^{(z+1)} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & -\theta\varphi_{2,1}^{(z+1)} & 1+2\theta\varphi_{2,2}^{(z+1)} & -\theta\varphi_{2,3}^{(z+1)} & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & -\theta\varphi_{3,2}^{(z+1)} & 1+2\theta\varphi_{3,3}^{(z+1)} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1+2\theta\varphi_{m-1,m-1}^{(z+1)} & -\theta\varphi_{m-1,m}^{(z+1)} \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & -2\theta\varphi_{m,m-1}^{(z+1)} & 1+2\theta\varphi_{m,m}^{z+1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 1-2(1-\theta)\varphi_{2,2}^{(z)} & (1-\theta)\varphi_{2,3}^{(z)} & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ (1-\theta)\varphi_{3,2}^{(z)} & 1-2(1-\theta)\varphi_{3,3}^{(z)} & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1-2(1-\theta)\varphi_{m-1,m-2}^{(z)} & (1-\theta)\varphi_{m-2,m-1}^{(z)} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & (1-\theta)\mu_m^{(z)} & 1-(1-\theta)v^{(z)} - (1-\theta)v^{(z+1)} & (1-\theta)\mu_2^{(z+1)} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & (1-\theta)\varphi_{2,1}^{(z+1)} & 1-2(1-\theta)\varphi_{2,2}^{(z+1)} & (1-\theta)\varphi_{2,3}^{(z+1)} & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & (1-\theta)\varphi_{3,2}^{(z+1)} & 1-2(1-\theta)\varphi_{3,3}^{(z+1)} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1-2(1-\theta)\varphi_{m-1,m-1}^{(z+1)} & (1-\theta)\varphi_{m-1,m}^{(z+1)} \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 2(1-\theta)\varphi_{m,m-1}^{(z+1)} & 1-2(1-\theta)\varphi_{m,m}^{(z+1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{01} = \begin{bmatrix} \theta\varphi_{2,1}^{(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\theta\eta_m^{(z+1)} \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_{00} = \begin{bmatrix} (1-\theta)\varphi_{2,1}^{(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\theta)\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-\theta)\eta_{m-1}^{(z+1)} \end{bmatrix},$$

cu notațiile:

$$\varphi_{j,1}^{(s)} = \Omega_j^{(s)} r_i^{(s)} \Gamma_i^{(s)}, \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.17.e)$$

$$\eta_j^{(s)} = \frac{\Omega_j^{(s)} r^{(s)} \cdot \Delta x^{(s)}}{\varepsilon_3^{(s)}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.17.f)$$

Determinarea condițiilor care asigură stabilitatea modelului procesului se va face prin luarea în considerare a unor ipoteze ajutătoare.

Astfel, între matricele modelului procesului se pot obține următoarele relații de legătură, consecință a modului lor de definire:

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{\theta} [\underline{I} - (1-\theta)\underline{E}_0] \quad (4.4.18.a)$$

$$\underline{B}_{00} = \frac{1-\theta}{\theta} \underline{B}_{01} \quad (4.4.18.b)$$

Pe de altă parte se introduc următoarele matrici ajutătoare:

$$\underline{D}_0 = \begin{bmatrix} r_2^{(z)} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{(z)} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & r_{m-1}^{(z)} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & r^{(1)/(2)} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & r_2^{(z+1)} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & r_3^{(z+1)} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & r_{m-1}^{(z+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & r_m^{(z+1)} \end{bmatrix} \quad (4.4.19.a)$$

$$\underline{M}_0 = -\frac{1}{\theta} (\underline{I} - \underline{E}_0). \quad (4.4.18.b)$$

$$\underline{G}_0 = \underline{M}_0 \underline{D}_0^{-1} \quad (4.4.18.c)$$

Referitor la matricele introduse se fac următoarele observații (Anexa A.4):

- a)** Matricea \underline{D}_0 este o matrice nesingulară (de rang maxim) întrucât componentele de pe diagonala principală sunt nenule: $r_i^j > 0$ (din modul de definiție);

- b)** Matricea \underline{A}_0 se va rescrie funcție de matricea \underline{M}_0 astfel:

$$\underline{A}_0 = \underline{I} - (1-\theta)\underline{M}_0 \quad (4.4.18.d)$$

Pentru sistemul de transport considerat în figura 4.4.1, structura matricelor \underline{M}_0 și \underline{G}_0 va fi următoarea:

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 2\varphi_{2,2}^{(z)} & -\varphi_{2,3}^{(z)} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\varphi_{3,2}^{(z)} & 2\varphi_{3,3}^{(z)} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 2\varphi_{m-1,m-1}^{(z)} & -\varphi_{m-1,m}^{(z)} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & -\mu_{m-1}^{(z)} & v^{(z)} + v^{(z+1)} & -\mu_2^{(z+1)} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & -\varphi_{2,1}^{(z+1)} & 2\varphi_{2,2}^{(z+1)} & -\varphi_{2,3}^{(z+1)} & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -\varphi_{3,2}^{(z+1)} & 2\varphi_{3,3}^{(z+1)} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 2\varphi_{m-1,m-1}^{(z+1)} & -\varphi_{m-1,m}^{(z+1)} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -2\varphi_{m,m-1}^{(z+1)} & 2\varphi_{m,m}^{(z+1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_0 = \begin{bmatrix} 2n_2^{(z)} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 2n_3^{(z)} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 2n_{m-1}^{(z)} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \sigma^{(z)} + \sigma^{(z+1)} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 2n_2^{(z+1)} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 2n_3^{(z+1)} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 2n_{m-1}^{(z+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 2n_m^{(z+1)} \end{bmatrix}$$

cu notațiile:

$$n_j^{(s)} = \Omega_j^{(s)} r^{(s)}, \quad j = \overline{2, m}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.19.a)$$

$$\sigma^{(s)} = \frac{\varphi^{(z)}/(z+1) \varepsilon_3^{(s)}}{\Delta x^{(s)}}, \quad s = z, z+1 \quad (4.4.19.b)$$

Analiza elementelor matricei \underline{M}_0 , astfel definite, arată că \underline{M}_0 este o matrice reală tridiagonală (Anexa A.4) care are toate elementele de pe diagonala principală strict pozitive, iar toate elementele de pe diagonalele secundare, de indice $|i - j| = 1$ strict negative astfel încât valorile proprii ale acestei matrice sunt toate reale.

Matricea \underline{G}_0 va fi o matrice nesingulară întrucât toate elementele de pe diagonala principală sunt nenule.

Următoarele teoreme ne vor permite analiza matricei modelului discret, din punct de vedere al asigurării stabilității acestuia.

Teoremă (4.4.1): Dacă $\theta > 0$, matricea \underline{E}_0 este o matrice nesingulară.

Teorema se demonstrează introducând matricea:

$$\underline{F}_0 = \underline{E}_0 \underline{D}_0^{-1} = (\underline{I} + \theta \underline{M}_0) \underline{D}_0^{-1} = \underline{D}_0^{-1} + \theta \underline{M}_0 \underline{D}_0^{-1} = \underline{D}_0^{-1} + \theta \underline{G}_0$$

care va fi tot o matrice strict diagonal dominantă, nesingulară.

Atunci matricea: $\underline{E}_0 = \underline{F}_0 \underline{D}_0$ trebuie să fie, de asemenea, nesingulară.

Teoremă (4.4.2): Dacă $\theta > 0$ valorile proprii ale modelului discret sunt toate reale.

Valorile proprii ale modelului discret (4.4.15) sunt valorile proprii ale matricei $\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0$, care se găsesc prin rezolvarea ecuației:

$$\det(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0 - \lambda_{vp} \underline{I}) = 0, \quad (4.4.20.a)$$

ecuație care se rescrie sub forma:

$$\det\left[\left(\underline{I} + \theta \underline{M}_0\right)^{-1} \left(\underline{I} - (1 - \theta) \underline{M}_0\right) - \lambda_{vp} \underline{I}\right] = 0 \quad (4.4.20.b)$$

Se fac următoarele notații pentru valorile proprii:

$$\lambda_{vp}(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0)_i \in \lambda_{vp}(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0) \quad (4.4.21.a)$$

$$\lambda_{vp}(\underline{M}_0)_i \in \lambda_{vp}(\underline{M}_0) \quad (4.4.22.b)$$

Atunci, în baza teoremei care face legătura între valorile proprii ale matricelor și valorile proprii ale funcțiilor de matrice ([32]), avem:

$$\lambda_{vp}(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0)_i = \frac{1 - (1 - \theta) \lambda_{vp}(\underline{M}_0)_i}{1 + \theta \lambda_{vp}(\underline{M}_0)_i}. \quad (4.4.23)$$

Întrucât $\lambda_{vp}(\underline{M}_0)_i$ reprezintă valori reale, rezultă că și $\lambda_{vp}(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0)_i$ sunt valori reale.

Concluzia care ne interesează în finalul acestui subcapitol referitoare la modelul linear al unui sistem de transport obținut prin agregarea modelelor individuale ale tronsoanelor interconectate este dată prin următoarea teoremă:

Teoremă (4.4.2): Dacă $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ modelul discret al procesului dat de sistemul de ecuații cu diferențe (4.4.15) are valorile proprii situate în interiorul cercului unitate și deci este asimptotic stabil.

S-a demonstrat prin teorema (4.4.1) că $\det \underline{E}_0 \neq 0$. Se poate scrie atunci că:

$$\begin{aligned} \det(\underline{E}_0) \det(\underline{E}_0^{-1} \underline{A}_0 - \lambda_{vp} \underline{I}) &= \det(\underline{A}_0 - \lambda_{vp} \underline{E}_0) = \det(\underline{I} - (1 - \theta) \underline{M}_0 - \lambda_{vp} (\underline{I} + \theta \underline{M}_0)) = \\ &= \det\left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \underline{I} + \left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \theta - 1\right) \underline{M}_0\right) = \det\left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \underline{I} + \left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \theta - 1\right) \underline{G}_0 \underline{D}_0\right) = \\ &= \det\left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \underline{D}_0^{-1} + \left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \theta - 1\right) \underline{G}_0\right) \det(\underline{D}_0) \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Pentru a arăta că: $\det(\underline{A}_0 - \lambda_{vp} \underline{E}_0) \neq 0$, pentru $|\lambda_{vp}| \geq 1$ și $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, trebuie să se studieze $\det\left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \underline{D}_0^{-1} + \left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \theta - 1\right) \underline{G}_0\right)$, întrucât $\det(\underline{D}_0) \neq 0$.

Dacă $\lambda_{vp} \geq 1$ atunci $1 - \lambda_{vp} \leq 0$ și, deci, $(1 - \lambda_{vp}) \theta - 1 \leq -1$. De asemenea, dacă $\lambda_{vp} \leq -1$ atunci $1 - \lambda_{vp} \geq 2$ și, deci, $(1 - \lambda_{vp}) \theta - 1 \geq 0$.

Avem deci, următoarele două cazuri:

- i. Dacă: $(1 - \lambda_{vp}) \theta - 1 = 0$ atunci: $1 - \lambda_{vp} \geq 2$ și $(1 - \lambda_{vp}) \underline{D}_0^{-1} + \left(\left(1 - \lambda_{vp}\right) \theta - 1\right) \underline{G}_0 = (1 - \lambda_{vp}) \underline{D}_0^{-1}$ care este o matrice nesingulară.

ii. Dacă: $(1 - \lambda_{vp})\theta - 1 \neq 0$, atunci, ca urmare a proprietăților matricelor \underline{D}_0 și \underline{G}_0 , matricea: $(1 - \lambda_{vp})\underline{D}_0^{-1} + ((1 - \lambda_{vp})\theta - 1)\underline{G}_0$ va fi nesingulară întrucât are următoarele proprietăți:

- a) tridiagonală;
- b) strict diagonal dominantă pentru $i = 1$;
- c) elementele de pe diagonalele secundare cu indicii $|i - j| = 1$ sunt nenule și de semn contrar elementelor de pe diagonala principală.

Rezultă atunci că, pentru $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, valorile proprii ale matricei modelului (4.4.15) trebuie să aibă modulul subunitar pentru ca: $\det(\underline{A}_0 - \lambda_{vp}\underline{E}_0) = 0$, și, implicit: $\det(\underline{E}_0^{-1}\underline{A}_0 - \lambda_{vp}\underline{I}) = 0$, rezultat care conduce la stabilitatea asimptotică a modelului considerat.

4.5. Validarea experimentală a modelului curgerii

Validarea experimentală a modelului numeric s-a făcut pe baza unor determinări experimentale ale mărimilor caracteristice procesului de curgere (presiuni și debite) pe diferite subsisteme de transport pentru care au fost disponibile măsurători reale de presiuni și debite [49], și corelarea valorilor acestor mărimi cu valorile calculate.

Practic pe fiecare subsistem de transport analizat s-a căutat să se identifice un tronson de conductă, cum este cel reprezentat în figura 4.5.1, delimitat de un

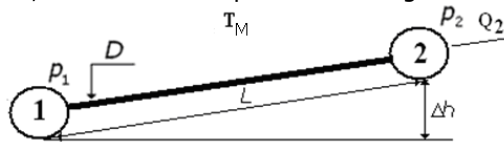


Fig. 4.5.1. Tronson de conductă folosit pentru determinări experimentale

nod de intrare ① și un nod de ieșire ②, având diametrul interior D , lungimea L și diferența de nivel între intrare și ieșire Δh (pozitivă ca valoarea pentru sensul de curgere al gazului prin tronsonul din figura 4.5.1).

Pentru acest tronson se presupune că avem măsurători ale valorilor presiunii de intrare p_1 și de ieșire p_2 , respectiv ale debitului de ieșire Q_2 . Temperatura medie de curgere a gazului T_M , care caracterizează regimul izoterm de curgere se consideră cea de la nivelul punctului de măsurare a debitului de gaze.

Calculul numeric s-a făcut în ipoteza gazului natural (gaz metan) cu următorii parametri fizico-chimici de referință:

- a) Densitatea în condiții normale de referință ($p_N = 1,01325 \text{ bar}$,

$$T_N = 273,15 \text{ K}): \rho_N = 0,7175 \text{ kg} / \text{m}^3 ;$$

- b) Densitatea relativă față de aer în condiții normale: $\delta_{ga} = 0,5549$

$$(\rho_{Naer} = 1,293 \text{ kg} / \text{m}^3);$$

- c) Viscositatea dinamică în condiții normale: $\mu_N = 10,35 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, cu constanta de calcul $C_{gaz} = 164$ pentru relația Sutherland;
- d) Parametrii critici: $p_{cr} = 45,99 \text{ bara}$, $T_{cr} = 190,55 \text{ K}$.

4.5.1. Studiul de caz 1

Se consideră subsistemul de transport gaze din figura 4.5.1.a, cu consumatorii localizați la nivelul nodurilor A , B , C . Totodată sunt figurate, orientativ și valorile presiunii și debitului în diferite puncte intermediare pentru o stare de regim staționar premergătoare realizării experimentului.

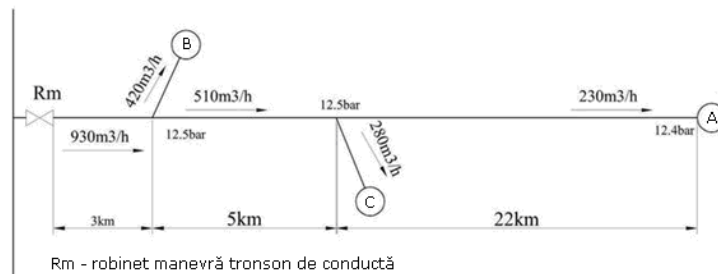


Fig. 4.5.1.a. Subsistemul de transport pentru studiul de caz 1

Întrucât lungimile tronsoanelor de conductă care alimentează consumatorii intermediari B și C sunt neesențiale în comparație cu lungimea tronsonului principal de conductă, între robinetul de manevră R_m , considerat nodul de intrare ①, și consumatorul A , considerat nodul de ieșire ②, se identifică un tronson de conductă, similar celui prezentat în figura 4.5.1, având următoarele caracteristici:

- a) Lungime: $L = 30 \text{ km}$;
 b) Diferența de nivel: $\Delta h = 100 \text{ m}$;
 c) Diametrul interior: $D = 200 \text{ mm}$;

Curgerea gazului se presupune că are loc în regim termodinamic izoterm la temperatura medie: $T_M = 7^{\circ} \text{C}$.

Pornind de la un regim staționar de curgere, studiul de caz a constatat în creșterea presiunii în nodul de intrare (robinetul R_m), de la valoarea de $p_1(t_{initial}) = 9 \text{ bar}$ la valoarea de $p_1(t_{final}) = 12,5 \text{ bar}$, figura 4.5.1.b, în condițiile păstrării constante a debitului la consumatori și măsurarea variației în timp a presiunii $p_2(t)$ în nodul de ieșire (A) pe durata de timp $t_{final} - t_{initial}$ necesară stabilizării procesului de curgere. Pentru cele două stări staționare între care are loc regimul nestaționar (tranzitoriu) de curgere, presiunile măsurate la consumatorul A au fost $p_2(t_{initial}) = 8,9 \text{ bar}$, respectiv, $p_2(t_{final}) = 12,4 \text{ bar}$.

Pentru realizarea simulării numerice este necesară determinarea factorului de pierderi hidraulice λ pe baza caracteristicilor constructive ale tronsonului de conductă și ale valorilor variabilelor caracteristice ale procesului de curgere

(presiune și debit). Se alege o rugozitatea absolută a conductei de $k_a = 0,03\text{ cm}$ (rugozitate relativă $r_r = 0,0015$), care, conform normelor tehnice corespunde unei conducte de transport veche curată.

Pentru cele două regimuri staționare considerate, la nivelul fiecărui nod, de intrare ①, respectiv, de ieșire ② se calculează un factor de frecare λ pe baza formulei de calcul Colebrook-White (2.6.9). Valorile obținute sunt prezentate în tabelul 4.5.1.

Tab. 4.5.1. Valori calculate pentru studiul de caz 1

| Nod intrare (robinet Rm) | | | | | Nod ieșire (consumator A) | | | | |
|--------------------------|------------------------|--------|------|-----------|---------------------------|------------------------|--------|-----|-----------|
| p_1 | Q_1 | Re | Cr | λ | p_2 | Q_2 | Re | Cr | λ |
| bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - | bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - |
| 9 | 930 | 0,114 | 26,2 | 0,024 | 8,9 | 230 | 0,03 | 6,9 | 0,027 |
| 12,5 | | | | | 12,4 | | | | |

Valorile obținute pentru numărul Reynolds Re (2.6.4), respectiv, criteriul Cr (2.6.15), în baza considerațiilor din cadrul subcapitolului 2.6 ne arată că tronsonul de conductă se comportă, pentru cele două regimuri staționare de curgere între care are loc regimul tranzitoriu de curgere, ca un tronson de conductă netedă.

Pe de altă parte, regimul tranzitoriu de curgere declanșat prin realizarea saltului de presiune în nodul de intrare ① este asociat cu o creștere substanțială a debitului de gaz prin nodul de intrare, pe durata regimului tranzitoriu, reflectată și de-a lungul tronsonului de conductă.

Valori mari ale debitului conduc la valori mari ale numărului Reynolds iar acestea denotă o scădere a valorii factorului de frecare λ (vezi diagrama Moody din figura 2.6.2) respectiv un comportament al tronsonului de conductă apropiat de comportamentul unui tronson hidraulic rugos. (de exemplu o valoarea a debitului prin secțiunea de intrare $Q_1 = 5.000\text{ Nm}^3 / \text{h}$ conduce la un $Re = 0,6 \cdot 10^6$ și factor de pierderi $\lambda = 0,022$).

La momentul de timp inițial $t_{initial}$ căderea de presiune $p_1(t_{initial}) - p_2(t_{initial})$ o putem asocia, în baza formulei (3.3.7.c), cu un debit staționar $Q_{stat}(t_{initial}) = Q_2(t_{initial}) = 400\text{ Nm}^3 / \text{h}$ transportat la nivelul tronsonului de conductă cu un factor mediu de pierderi hidraulice $\lambda(t_{initial}) = 0,026$, ceea ce ne permite, prin integrare numerică, calcularea unei distribuții de presiune $\{p(x, t_{initial}) / x = [0, L]\}$ necesare inițializării simulării dinamice.

Simularea numerică, prin folosirea unei metode numerice implicite (vezi capitolul 3), făcută prin considerarea a $m = 11\text{ noduri}$ de discretizare spațială și a unui factor de pierderi hidraulice $\{\lambda(t) = 0,022 / t = (t_{initial}, t_{final})\}$ a condus la variația calculată a presiunii $\{p_2(t) / t = (t_{initial}, t_{final})\}$ din figura 4.5.1.b.

Eroarea relativă procentuală între valoarea măsurată și valoarea calculată, conform formulei: $\varepsilon(t) = \frac{p_2(t)_{masurat} - p_2(t)_{calculat}}{p_2(t)_{masurat}} \times 100$ este reprezentată grafic în figura 4.5.1.c.

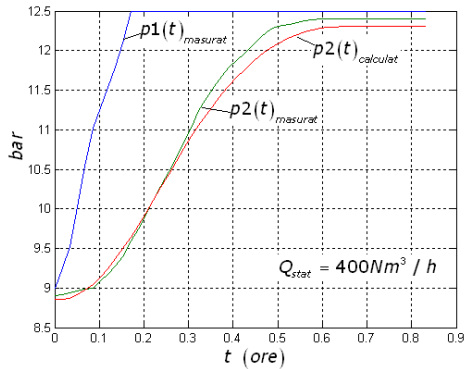


Fig. 4.5.1.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 1

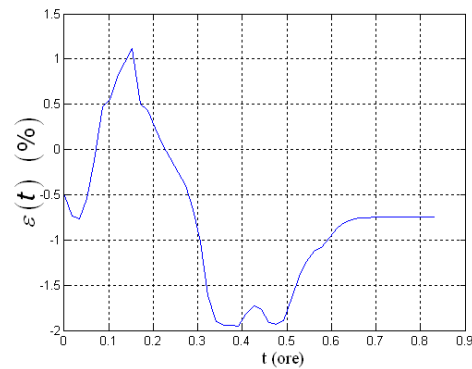


Fig. 4.5.1.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 1

Analizând figura 4.5.1.b se observă o corelație destul de bună între curba presiunii de ieșire măsurate $p2(t)_{masurat}$ și curba presiunii de ieșire calculate $p2(t)_{calculata}$, cu o eroare relativă de maxim 2%, în valoarea absolută, conform figurii 4.5.1.c.

4.5.2. Studiul de caz 2

În figura 4.5.2.a este prezentată structura unei rețele de consumatori de gaze cu A consumatorul principal și B, C și D consumatori secundari cu debite de consum precizate.

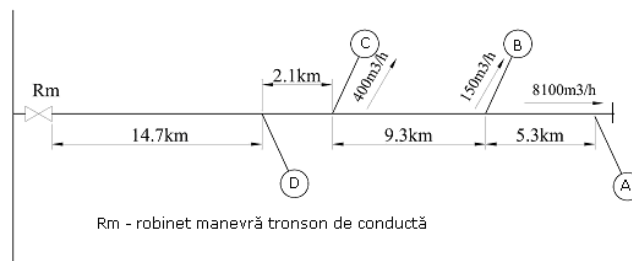


Fig. 4.5.2.a. Subsistemul de transport pentru studiul de caz 2

Dacă se consideră că lungimile tronsoanelor de conductă care alimentează consumatorii B, C, D sunt nesemnificative în comparație cu lungimea conductei de alimentare a consumatorului principal A respectiv, debitele de gaz ale consumatorilor secundari sunt și ele nesemnificative față de debitul consumatorului principal se poate identifica, conform figurii 4.5.1, un tronson de conductă delimitat de robinetul de manevră Rm, considerat nodul de intrare ①, și consumatorul A considerat nodul de ieșire ②, având următoarele caracteristici:

- Lungime: $L = 31,4 \text{ km}$;
- Diametru interior: $D = 500 \text{ mm}$;
- Diferența de nivel: $\Delta h = -250 \text{ m}$.

Curgerea gazului se presupune că are loc în regim termodinamic izoterm la temperatura medie: $T_M = 5^{\circ} \text{C}$.

Prima fază a studiului de caz a constat în creșterea rampă, pe durata a 3min, a presiunii de intrare în punctul de racord al tronsonului de conductă la conducta magistrală, prin intermediul robinetului de manevră R_m , de la valoarea de aproximativ $p_1(t_{1_initial}) = 3\text{bar}$ la valoarea de aproximativ $p_1(t_{1_final}) = 5\text{bar}$, urmată de menținerea constantă a acesteia, iar în cea de a doua fază, după stabilizarea presiunii de ieșire, creșterea rampă, tot pe durata a 3min, a presiunii de intrare de la valoarea de aproximativ $p_1(t_{2_initial}) = 5\text{bar}$ la valoarea de aproximativ $p_1(t_{2_final}) = 7\text{bar}$, urmată de menținerea constantă a acesteia, în condițiile păstrării debitului la consumatorul A din nodul de ieșire 2 la valoarea de aproximativ $\{Q_2(t) = 8.100\text{Nm}^3/h/t \in [t_{1_initial}, t_{1_final}], t \in [t_{2_initial}, t_{2_final}]\}$.

În mod similar cu cele prezentate în cadrul primului studiu de caz, pentru calcularea unui factor de pierderi hidraulice λ , se alege o rugozitate absolută a conductei de $k_a = 0,03\text{cm}$ (rugozitate relativă $r_r = 0,0006$), care, conform normelor tehnice pentru conductele de transport este rugozitatea luată în calcul pentru o conductă de transport veche curată.

La momentele de timp $t_{1_initial}$, $t_{1_final}/t_{2_initial}$, respectiv, t_{2_final} avem 3 stări staționare ale procesului de curgere asociate regimurilor staționare de curgere caracterizate de căderile de presiune $p_1 - p_2$ necesare transportării debitului staționar $Q_1 = Q_{stat} = Q_2$. Pentru aceste valori de regimuri staționare, rezultatele calculului factorului de frecare λ , pe baza formulei de calcul Colebrook-White (2.6.9) sunt prezentate în tabelul 4.5.2:

Tab. 4.5.2. Valori calculate pentru studiul de caz 2

| Nod intrare (robinet R_m) | | | | | Nod ieșire (consumator A) | | | | |
|------------------------------|------------------------|--------|----|-----------|---------------------------|------------------------|--------|----|-----------|
| p_1 | Q_1 | Re | Cr | λ | p_2 | Q_2 | Re | Cr | λ |
| bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - | bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - |
| 2,9 | 8.100 | 0,4 | 32 | 0,018 | 2,7 | 8.100 | 0,4 | 32 | 0,018 |
| 4,95 | | | | | 4,85 | | | | |
| 7 | | | | | 6,9 | | | | |

Valorile obținute pentru numărul Reynolds Re, respectiv, criteriul Cr, în baza considerațiilor din cadrul subcapitolului 2.6 ne arată un tronson cu conducta în regim hidraulic de tranziție, iar valoarea obținută pentru factorul de pierderi hidraulice nu va mai varia semnificativ pe durata regimurilor tranzitorii caracterizate prin creșteri ale valorilor debitelor și implicit valori mari ale numărului Reynolds, putând fi folosită cu o bună precizie și pentru simulările de regimuri tranzitorii.

Variațiile în timp ale presiunii în nodul de ieșire, rezultate în urma simulării numerice: $\{p_2(t)/t \in [t_{1_initial}, t_{1_final}], t \in [t_{2_initial}, t_{2_final}]\}$, prin folosirea unei metode numerice implicite (vezi capitolul 3), pentru cele două faze ale experimentului, au fost reprezentate grafic în figurile 4.5.2.b și 4.5.2.d. Pentru comparație sunt reprezentate și curbele de variație ale presiunii măsurate $\{p_2(t)_{masurat}/t \in [t_{1_initial}, t_{1_final}], t \in [t_{2_initial}, t_{2_final}]\}$.

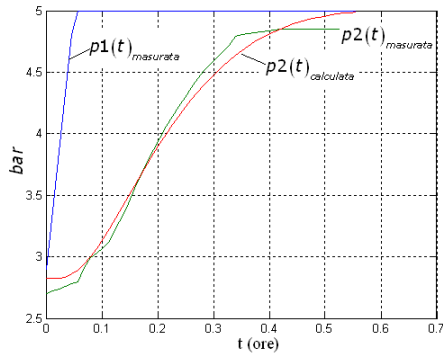


Fig. 4.5.2.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru prima fază a studiului de caz 2

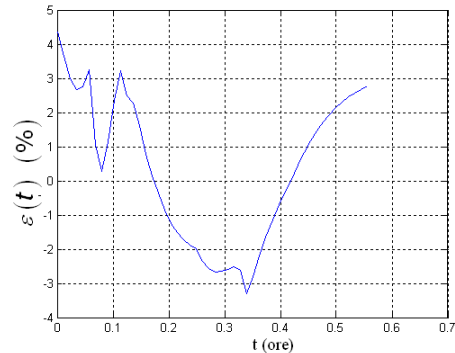


Fig. 4.5.2.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru prima fază a studiului de caz 2

Analiza erorilor relative procentuale din figurile 4.5.2.c și 4.5.2.d arată o corelație destul de bună dintre curba presiunii măsurate și curba presiunii calculate (maxim 4% abatere în valoare absolută) dacă se ține seama de erorile introduse de citirea vizuală a aparatelor de măsurare folosite.

A treia fază a studiului de caz a constat în aplicarea unei rampe de presiune de amplitudine dublă, respectiv creșterea rampă a presiunii, pe durata a 3min, de la valoarea $p_1(t_{3_initial}) = 4\text{bar}$ la valoarea de $p_1(t_{3_final}) = 8\text{bar}$, în condițiile păstrării debitului la consumatorul A din nodul de ieșire 2 la aceeași valoare, respectiv $\{Q_2(t) = 8.100\text{Nm}^3 / \text{h} / t \in [t_{3_initial}, t_{3_final}]\}$.

Curba obținută în urma simulării numerice pentru variația în timp a presiunii din nodul de ieșire 2, $\{p_2(t)_{calculata} / t \in [t_{3_initial}, t_{3_final}]\}$, este reprezentată grafic în figura 4.5.2.f, alături de curba presiunii măsurate $\{p_2(t)_{masurata} / t \in [t_{3_initial}, t_{3_final}]\}$, cele două curbe fiind corelate cu o eroare relativă de maxim 6%, în valoarea absolută, conform figurii 4.5.2.g.

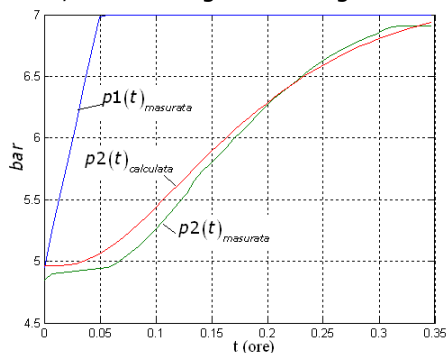


Fig. 4.5.2.d. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru faza a doua a studiului de caz 2

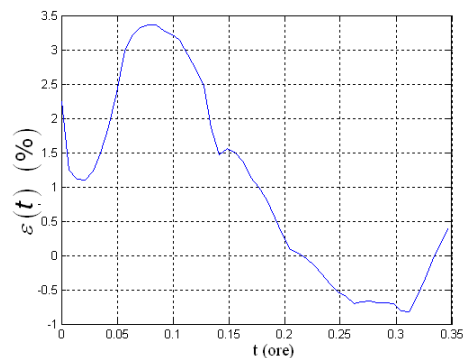


Fig. 4.5.2.e. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru faza a doua a studiului de caz 2

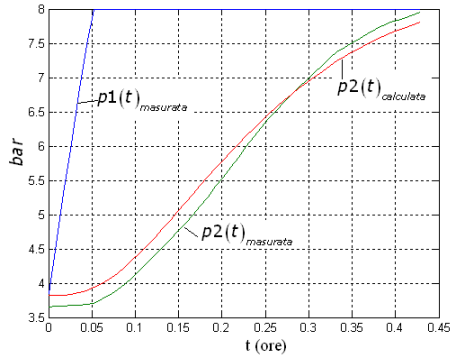


Fig. 4.5.2.f. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru faza a treia a studiului de caz 2

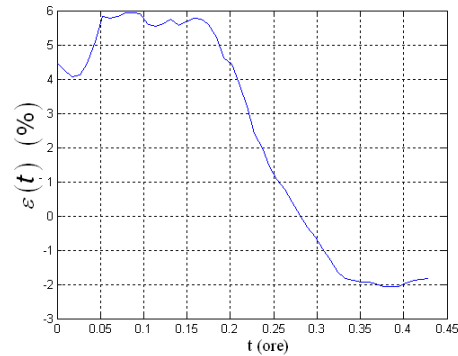


Fig. 4.5.2.g. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru faza a treia a studiului de caz 2

Experimentul acesta a mai urmărit și verificarea unor concluzii privind dinamica procesului de curgere, rezultate în urma simulărilor numerice, care au fost prezentate în cadrul subcapitolului 4.2.2, figurile 4.2.8.

Astfel curba presiunii de ieșire din figura 4.5.2.b indică o durată a regimului tranzitoriu mai mare decât durata regimului tranzitoriu asociată curbei presiunii din figura 4.5.2.d, explicabilă prin aceea că, în cel de-al doilea caz presiunea de inițiere a regimului tranzitoriu a fost mai mare.

În schimb valorile pentru durata celor două regimuri tranzitorii asociate curbelor presiunilor din figurile 4.5.2.b și 4.5.2.f sunt destul de apropiate în ciuda valorilor diferite ale saltului de presiune de intrare care le-au inițiat.

4.5.3. Studiul de caz 3

Se consideră tronsonul de conductă din figura 4.5.3.a delimitat de robinetul de manevră R_m , considerat a fi nodul de intrare ①, și consumatorul A, considerat a fi nodul de ieșire ②, având următoarele caracteristici:

- a) Lungime: $L = 33\text{km}$;
- b) Diametrul interior: $D = 400\text{mm}$;
- c) Diferența de nivel: $\Delta h = 0\text{m}$.

Curgerea gazului se presupune că are loc în regim termodinamic izoterm la temperatura medie: $T_M = 7^{\circ}\text{C}$.

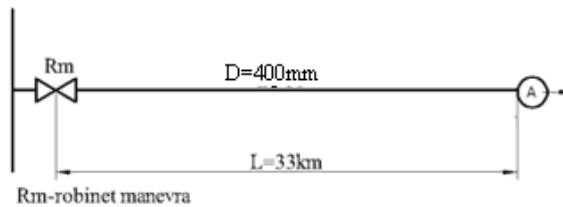


Fig. 4.5.3.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 3

Studiul de caz a constatat în realizarea unui salt de presiune, prin manevrarea robinetului R_m , de la valoarea de aproximativ $p_1(t_{initial}) = 5,6\text{bar}$ la valoarea de

aproximativ $p_1(t_{final}) = 9,6 \text{ bar}$ în condițiile păstrării constante a debitului la consumatorul A din nodul de ieșire 2 la valoarea de aproximativ $\{Q_2(t) = 9.500 \text{ Nm}^3 / \text{h} / t \in [t_{initial}, t_{final}]\}$.

Procedând într-o manieră similară cu cele prezentate, în cazul celorlalte studii de caz, se alege o rugozitatea absolută a conductei de $k_a = 0,02 \text{ cm}$ (rugozitate relativă $r_r = 0,0005$), care, conform normelor tehnice pentru conductele de transport este rugozitatea luată în calcul pentru o conductă de transport relativ nouă, curată, și se calculează factorul de pierderi hidraulice λ , pentru cele două stări staționare între care are loc regimul tranzitoriu de curgere. Rezultatele calculelor sunt prezentate în tabelul 4.5.3.a:

Tab. 4.5.3. Valori calculate pentru studiul de caz 3

| Nod intrare (robinet Rm) | | | | | Nod ieșire (consumator A) | | | | |
|--------------------------|------------------------|--------|----|-----------|---------------------------|------------------------|--------|----|-----------|
| p_1 | Q_1 | Re | Cr | λ | p_2 | Q_2 | Re | Cr | λ |
| bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - | bar | Nm^3/h | 10^6 | - | - |
| 5,6 | 9.500 | 0,6 | 39 | 0,017 | 5,18 | 9.500 | 0,6 | 39 | 0,017 |
| 9,6 | | | | | 9,45 | | | | |

Valorile obținute pentru numărul Reynolds Re și criteriul Cr indică un tronson cu conducta în regim hidraulic de tranziție astfel încât valoarea calculată pentru factorul de pierderi λ nu va mai varia semnificativ pe durata regimului tranzitoriu.

Curba obținută în urma simulării numerice, prin folosirea unei metode numerice implicite (vezi capitolul 3), pentru presiunea din nodul de ieșire $\{p_2(t)_{calculata} / t \in [t_{initial}, t_{final}]\}$ este reprezentată grafic în figura 4.5.3.b alături de curba presiunii măsurate $\{p_2(t)_{masurata} / t \in [t_{initial}, t_{final}]\}$, cele două curbe fiind corelate cu o eroarea relativă de maxim 2,5% în valoarea absolută conform figurii 4.5.3.c.

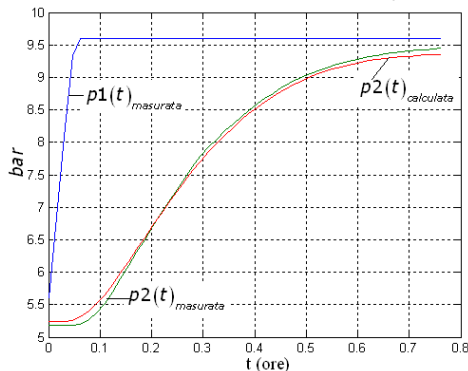


Fig. 4.5.3.b. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 3

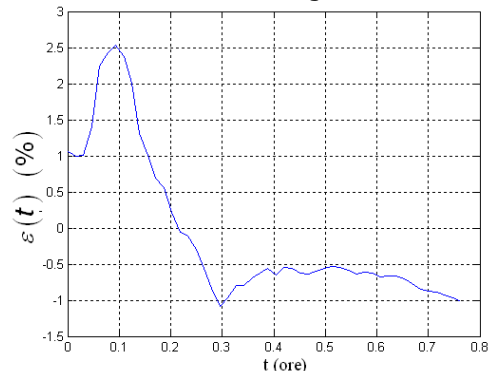


Fig. 4.5.3.c. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 3

4.5.4. Studiul de caz 4

Se consideră tronsonul de conductă din figura 4.5.4.a, având următoarele caracteristici:

- a) Diametrul interior: $D = 1.200 \text{ mm}$;

- b) Lungimea: $L = 183\text{km}$;
- c) Diferența de nivel: $\Delta h = 0\text{m}$.

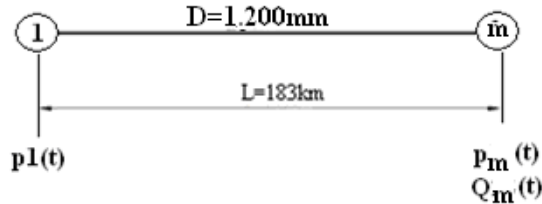


Fig. 4.5.4.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 4

Curgerea gazului de-a lungul acestui tronson de conductă se consideră că se realizează în regim termodinamic izoterm la o temperatură medie de: $T_M = 9^{\circ}\text{C}$.

Pentru acest tronson de conductă au fost realizate măsurători, la intervale de timp orare, pe durata $t = \overline{0, 1.929h}$ ale presiunii de intrare $p_1(t)_{\text{masurat}}$, presiunii de ieșire $p_2(t)_{\text{masurat}}$ și debitului volumic de ieșire $Q_2(t)_{\text{masurat}}$. Curbele de variație cu timpul obținute pentru aceste mărimi sunt reprezentate grafic în figurile 4.5.4.b și 4.5.4.c.

Se observă că, pe intervalul orar [530, 700], ore regimul de curgere se poate interpreta ca un regim cvasistaționar caracterizat prin variații mici ale valorilor presiunilor și debitelor. Acest regim se va lua de referință pentru determinarea unui factor de pierderi de presiune λ , astfel încât să fie verificată relația de calcul (3.3.7.a) a debitului transportat, în regim staționar, funcție de diferența de presiune înregistrată de-a lungul tronsonului de conductă.

În prealabil, pe baza relației (3.3.10), la fiecare moment de timp t , cunoscând presiunile la capetele tronsonului de conductă: $p_1(t)$ și $p_2(t)$ se calculează presiunea medie $p_M(t)$ a tronsonului de conductă pe intervalul orar considerat, reprezentată grafic în figura 4.5.4.d, cu valoarea medie

$$p_{\text{medie}} = \frac{1}{M} \int_{t=530h}^{700h} p_M(t) dt = 41,04\text{bar} .$$

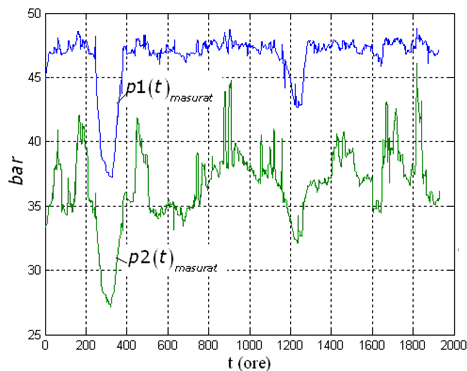


Fig. 4.5.4.b. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pentru studiul de caz 4

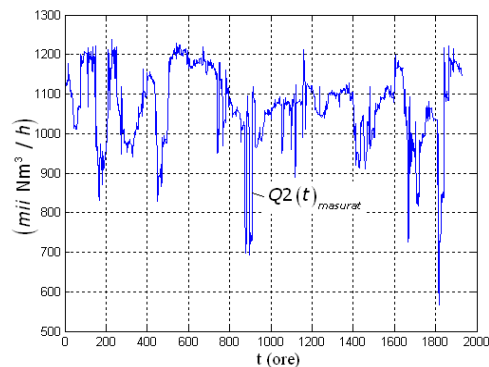


Fig. 4.5.4.c. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pentru studiul de caz 4

În figura (4.5.4.e) este reprezentat debitul volumic de ieșire pe $Q2(t)_{\text{masurat}}$ pe intervalul de timp considerat, cu valoarea medie:

$$Q_{\text{medie}} = \frac{700}{M} \int_{t=530h} \{Q2(t)_{\text{masurat}}\} dt = 1.189.500 \text{ Nm}^3 / h.$$

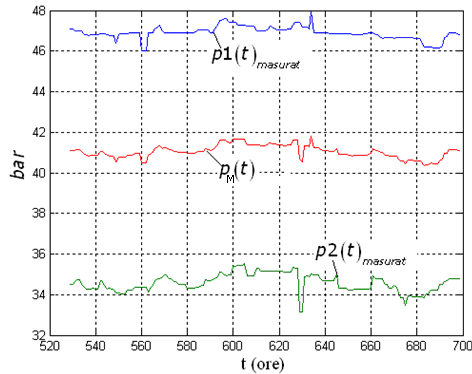


Fig. 4.5.4.d. Presiunea medie a tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

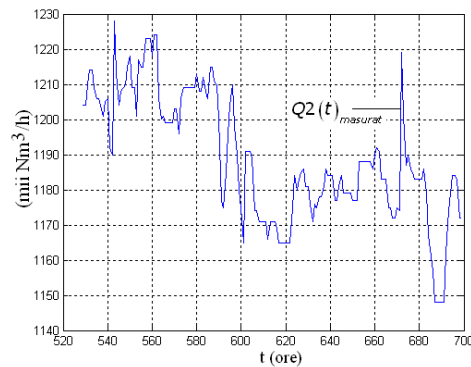


Fig. 4.5.4.e. Debitul măsurat la ieșirea tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

Apoi, pe baza relației (2.6.3.a), pentru presiunile medii $p_M(t)$ se calculează un factor de abatere mediu $Z_M(t)$, a cărei variație cu timpul, în jurul valorii medii:

$$Z_{\text{medie}} = \frac{700}{M} \int_{t=530h} \{Z_M(t)\} dt = 0,926 \text{ este reprezentată în figura 4.5.4.f.}$$

În baza formulei de calcul Colebrook-White (2.6.9), rezultă un set de valori ale factorului de pierderi de presiune $\lambda_M(t)$, a cărui variație, în jurul valorii medii:

$$\lambda_{\text{medie}} = \frac{700}{M} \int_{t=530h} \{\lambda_M(t)\} dt = 0,0113, \text{ pe intervalul de timp considerat, este reprezentată în figura 4.5.4.g.}$$

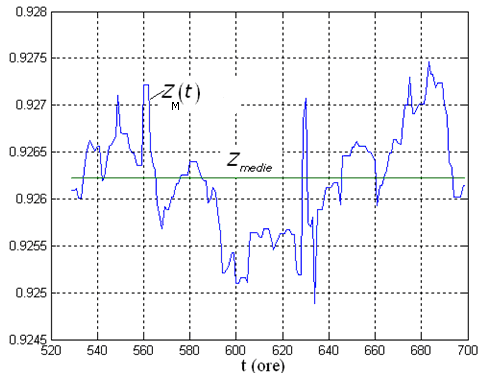


Fig. 4.5.4.f. Factorul de abatere mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

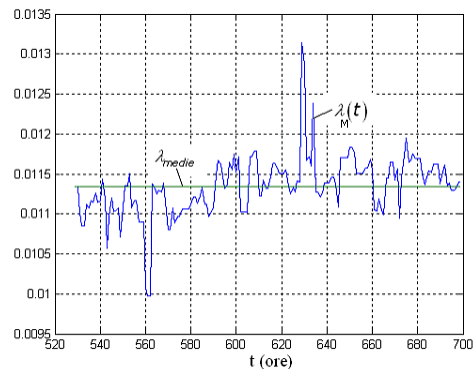


Fig. 4.5.4.g. Factorul de pierderi de presiune mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

Pentru debitul de gaze $Q_2(t)_{masurat}$ considerat a fi la presiunea medie $p_M(t)$ de regim staționar, se calculează numărul Reynolds $Re_M(t)$ a cărei variație,

în jurul valorii medii: $Re_{medie} = \frac{700}{M} \{Re_M(t)\}_{t=530h} = 24,3 \times 10^6$, pe intervalul de timp

considerat, este reprezentată în figura 4.5.4.h. Valoarea medie obținută pentru numărul Reynolds situează curgerea în regim turbulent de tranziție când nu se mai înregistrează variații mari ale factorului de pierderi de presiune, conform cu cele prezentate în capitolul 2.

În baza relației Colebrook-White (2.6.9) rugozitatea absolută k_a rezultă dacă se cunoaște numărul Reynolds Re și factorul de pierderi de presiune λ pentru un tronson de conductă de diametru interior D , conform relației:

$$k_a = 3,71D \left(10^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} - \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.5.4.a)$$

Pentru valorile medii considerate rezultă o rugozitate absolută $k_{aM}(t)$ a cărei variație, pe intervalul de timp considerat, este reprezentată în figura 4.5.4.i, în

jurul unei valori medii $k_{aMmedie} = \frac{700}{M} \{k_{aM}(t)\}_{t=530h} = 0,0087cm$.

Folosind aceste valori medii ale parametrilor și variabilelor procesului cvasistaționar de curgere pentru determinarea factorului de pierderi de presiune, cu relația Colebrook-White (2.6.9), se obține: $\lambda = 0,0114$, o valoare foarte apropiată de valoarea $\lambda_{medie} = 0,0113$, calculată inițial și care mediază valorile calculate individual pentru fiecare set de măsurători.

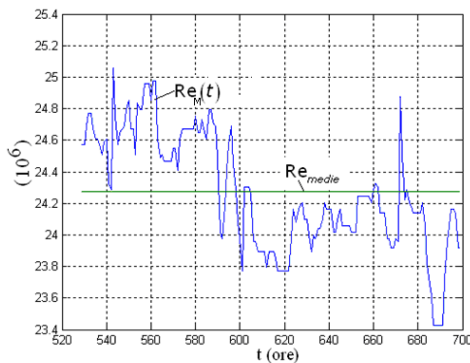


Fig. 4.5.4.h. Numărul Reynolds mediu pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

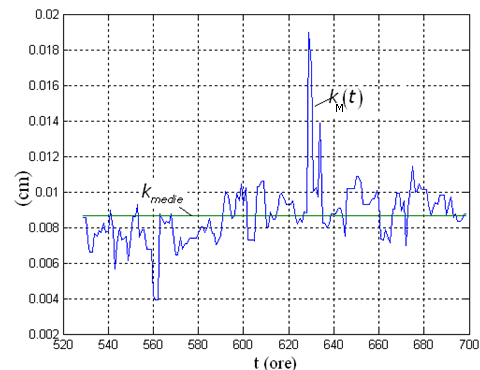


Fig.4.5.4.i. Rugozitatea absolută medie pentru tronsonului de conductă pe intervalul de timp asociat regimului cvasistaționar

În cele ce urmează se va formula o observație importantă, care poate sta la baza implementării unor algoritmi de estimare a parametrilor unui tronson de conductă (factorul de pierderi de presiune λ , rugozitatea absolută k).

Se consideră cea de a doua ecuație a sistemului de ecuații diferențiale (4.3.1.b), scrisă pentru un tronson orizontal de conductă, cu considerarea unei valori medii a factorului de abatere:

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} + \frac{\lambda Z_M R_p T_M}{DA^2} Q^2 = 0 \quad (4.5.4.2)$$

Dacă se face aproximarea: $\frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{p_2^2 - p_1^2}{L}$ se obține:

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda \frac{L}{DA^2} Z_M R_p T_M Q^2 \quad (4.5.4.3)$$

Se fac notațiile:

$$a_Q(t) = Q(t)^2 \quad (4.5.4.4.a)$$

$$b_{\Delta p}(t) = p_1(t)^2 - p_2(t)^2 \quad (4.5.4.4.b)$$

$$c_{pQ}(\lambda) = \lambda \frac{L}{DA^2} Z_M R_p T_M \quad (4.5.4.4.c)$$

Ecuția (4.5.4.3) se rescrie atunci:

$$b_{\Delta p}(t) = c_{\Delta p Q}(\lambda) a_Q(t) \quad (4.5.4.5)$$

În figura 4.5.4.j sunt reprezentate grafic, pe intervalul de timp $t \in [0, 1929]$ ore, punctele rezultate experimental corespunzătoare dependenței parametrice (parametrul timp) $\{a_Q(t), b_{\Delta p}(t)\}$, respectiv dreapta de pantă $c_{\Delta p Q_{medie}} = c_{\Delta p Q}(\lambda_{medie})$.

Putem spune că reprezentarea din figura 4.5.4.j furnizează, pe baza setului de valori experimentale $\{a_Q(t), b_{\Delta p}(t)\}$ de pe intervalul de timp $t \in [0, 1929]$ ore, caracteristica de funcționare a regimurilor staționare: $b_{\Delta p}(t) = c_{\Delta p Q_{medie}} a_Q(t)$.

Dispersia punctelor $\{a_Q(t), b_{\Delta p}(t)\}$ în jurul acesteia reflectă direct caracterul nestaționar al curgerii gazului prin tronsonul de conductă. Cu cât această dispersie este mai mică cu atât curgerea se situează mai aproape de un regim staționar, iar valorile măsurate ale presiunilor și debitului verifică cu precizie mai mare ecuațiile de regim staționar pe baza cărora se pot determina parametrii conductei (rugozitate interioară, factor de pierderi de presiune).

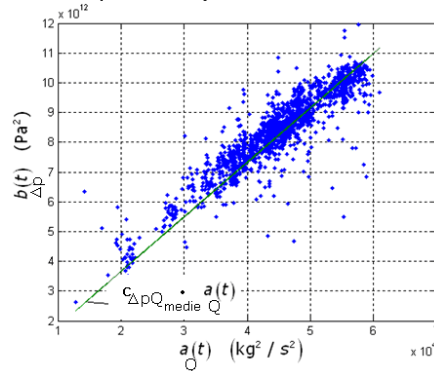


Fig. 4.5.4.j. Variația diferenței pătratelor presiunilor de la capetele tronsonului de conductă cu pătratul debitului transportat prin tronsonul de conductă

Caracterul de „aparentă liniaritate” a acestei caracteristici se păstrează pentru valori ale presiunilor și ale debitului care situează conducta în regim hidraulic

de tranziție, pentru care factorul de pierderi de presiune λ nu mai variază semnificativ pe măsură ce crește numărul Reynolds Re (figura 2.6.2).

Pentru simulare numerică, prin folosirea unei metode numerice implicite (vezi capitolul 3), s-a considerat un pas de discretizare al timpului $\Delta t = 10 \text{ min}$, și $m = 11$ punctelor de discretizare spațială ceea ce conduce la un pas de discretizare spațială $\Delta x = 18,3 \text{ km}$. Din valorile $p_1(t)_{\text{masurat}}$, $p_2(t)_{\text{masurat}}$ și $Q_2(t)_{\text{masurat}}$ măsurate la intervale de timp de o oră, s-au construit prin interpolare liniară valorile corespunzătoare pasului de discretizare al timpului de $\Delta t = 10 \text{ min}$.

În urma simulării numerice, pe baza presiunii de intrare $p_1(t)_{\text{masurat}}$ și a debitului de ieșire $Q_2(t)_{\text{masurat}}$ s-a calculat presiunea de ieșire $p_2(t)_{\text{calculat}}$, reprezentată grafic în figura 4.5.4.k, alături de curba presiunii măsurate $p_2(t)_{\text{masurat}}$.

În figura 4.5.4.l este reprezentată eroarea relativă cu care s-a calculat presiunea de ieșire față de valoarea reală măsurată.

Din analiza grafică a figurilor 4.5.4.k și 4.5.4.l se observă o corelare destul de bună între valoarea calculată numeric $p_2(t)_{\text{calculat}}$ și valoarea măsurată $p_2(t)_{\text{masurat}}$ a presiunii de ieșire, cu situarea erorii relative, în cea mai mare parte, în plaja de variație $\pm 5\%$. Totodată valoarea medie a acestei erori relative pe intervalul de timp considerat pe care s-au făcut măsurători este de aproximativ:

$$\varepsilon_{\text{medie}} = \frac{1929h}{M} \left\{ \varepsilon(p_2)(t) \right\} = 0,5\% .$$

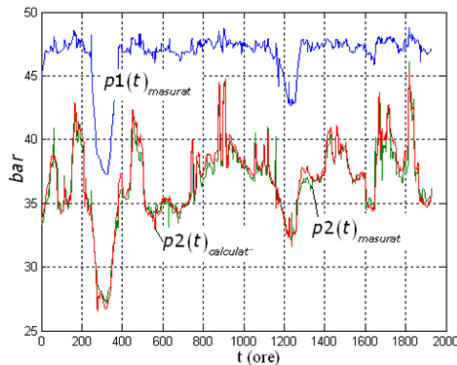


Fig. 4.5.4.k. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pentru studiul de caz 4

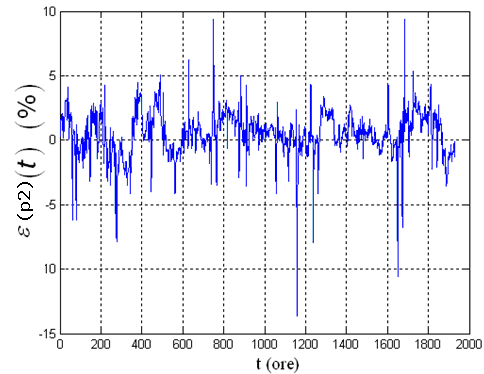


Fig.4.5.4.l. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pentru studiul de caz 4

4.5.5. Studiul de caz 5

Se consideră tronsonul de conductă din figura 4.5.5.a, având următoarele caracteristici:

- a) Diametrul interior: $D = 700 \text{ mm}$;
- b) Lungimea: $L = 123,9 \text{ km}$;
- c) Diferența de nivel: $\Delta h = 170 \text{ m}$.

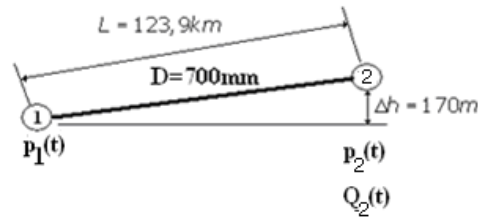


Fig. 4.5.5.a. Tronsonul de conductă pentru studiul de caz 5

Curgerea gazului de-a lungul acestui tronson de conductă se consideră a se realiza în regim termodinamic izoterm la o temperatură medie de: $T_M = 5,5^{\circ}\text{C}$.

Pentru acest tronson de conductă au fost realizate măsurători, la intervale de timp orare, pe două durate de timp, respectiv, $t_a = 0,93h$ și $t_b = 0,145h$ ale presiunii de intrare $p_1(t)_{\text{masurat}}$, presiunii de ieșire $p_2(t)_{\text{masurat}}$ și debitului volumic de ieșire $Q_2(t)_{\text{masurat}}$. Curbele de variație cu timpul, obținute pentru aceste mărimi sunt reprezentate grafic în figurile 4.5.5.b, 4.5.5.c pentru intervalul orar t_a , respectiv, figurile 4.5.5.d, 4.5.5.e pentru intervalul orar t_b .

Pentru o valoare medie a factorului de pierderi de presiune de: $\lambda_{\text{medie}} = 0,013$, simularea numerică, prin folosirea unei metode numerice implicite (vezi capitolul 3), cu pasul de discretizare al timpului $\Delta t = 10 \text{ min}$, $m = 11$ puncte de discretizare și un pas de discretizare spațială $\Delta x = 12,39 \text{ km}$ a condus la presiunile de ieșire calculate numeric $p_2(t)_{\text{calculat}}$, reprezentate grafic în figurile 4.5.5.f și 4.5.5.h, alături de curbele presiunii măsurate $p_2(t)_{\text{masurat}}$, pentru cele două intervale de timp considerate.

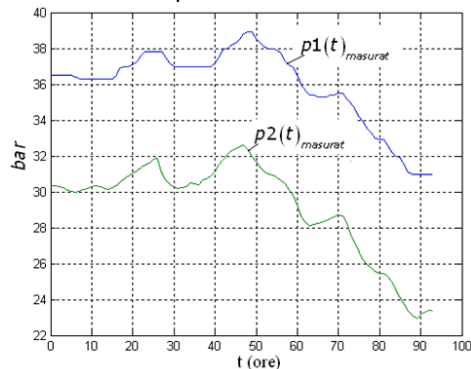


Fig. 4.5.5.b. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5

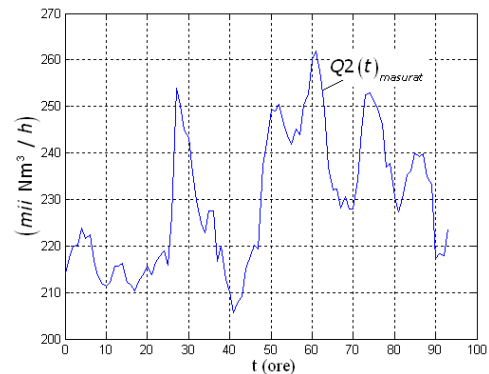


Fig. 4.5.5.c. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5

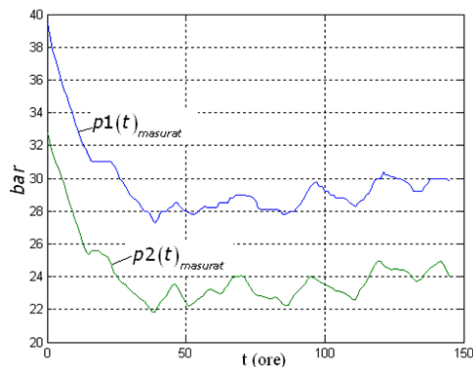


Fig. 4.5.5.d. Evoluțiile dinamice ale presiunilor măsurate experimental la capetele tronsonului de conductă pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5

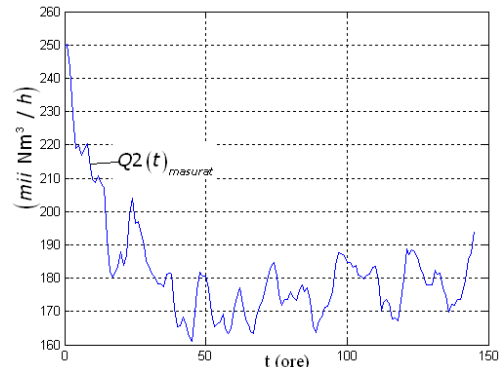


Fig. 4.5.5.e. Evoluția dinamică a debitului măsurat experimental la ieșirea tronsonului de conductă pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5

În figurile 4.5.5.g și 4.5.5.i sunt reprezentate erorile relative de calcul $\varepsilon(p_2)(t) = \frac{p_{2masurat}(t) - p_{2calculat}(t)}{p_{2masurat}(t)}$ ale valorilor presiunilor de ieșire față de valorile reale măsurate.

Valorile medii rezultate pe cele două intervale de timp pe care s-au realizat măsurători, respectiv, $\varepsilon_{medie} = \frac{93h}{M} \{\varepsilon(p_2)(t)\} = -0,7\%$ și $\varepsilon_{medie} = \frac{145h}{M} \{\varepsilon(t)\} = 1,2\%$, arată o corelare destul de bună a valorilor calculate cu valorile măsurate ale presiunii din nodul de ieșire.

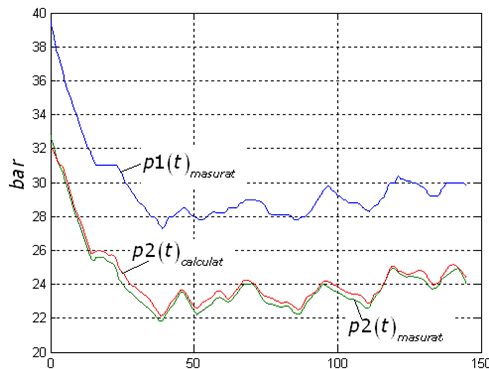


Fig. 4.5.5.h. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5

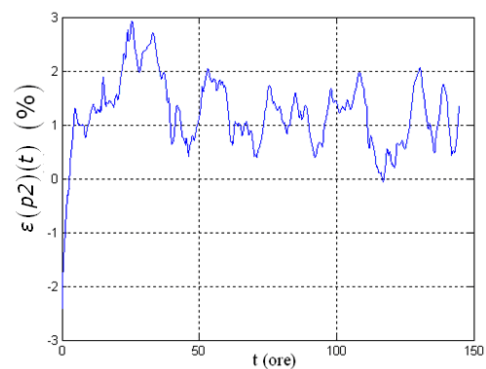


Fig. 4.5.5.i. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pe primul interval de timp, pentru studiul de caz 5

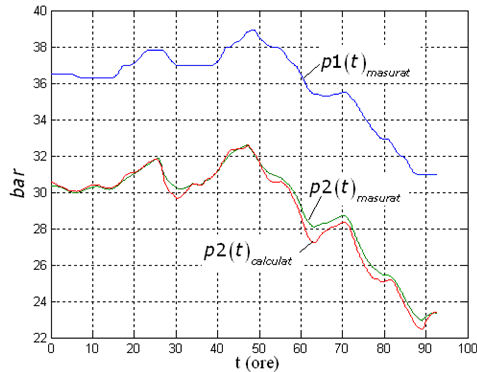


Fig. 4.5.5.f. Evoluția dinamică a presiunii de ieșire măsurate comparativ cu cea calculată numeric pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5

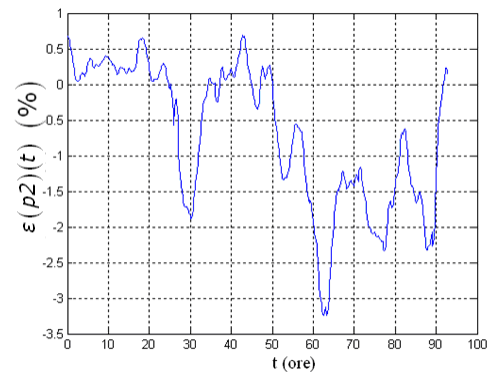


Fig. 4.5.5.g. Eroarea de modelare în calculul presiunii de ieșire pe al doilea interval de timp, pentru studiul de caz 5

4.6. Concluzii

Obiectivul acestui capitol l-a constituit prezentarea și analiza unor modele de aproximare a procesului de curgere al gazului natural prin conductele de transport, din perspectiva folosirii acestora în rezolvarea problemei de conducere (reglare) așa cum a fost ea formulată în primul capitol al acestei lucrări.

Prin construirea unor modele de aproximare, conform cerințelor de aplicare ale metodelor numerice cu diferențe finite formulate în capitolul anterior, și simulări numerice a unor procese de curgere s-a arătat că modelele matematice simplificate, menționate în capitolul anterior, caracterizează, cu o precizie de calcul satisfăcătoare pentru obiectivul urmărit, comportamentul dinamic al procesului de curgere.

Simplificările operate în structura modelelor discrete de aproximare au permis reducerea efortului de calcul numeric, obținerea unei relații estimative de calcul a duratei regimului tranzitoriu și, în cazul unui model de aproximare cu parametri concentrați constanți, formularea unor teoreme care permit analiza stabilității pe baza proprietăților structurale ale matricelor unui model discret de aproximare. Valabilitatea acestor teoreme se păstrează pentru orice model global de sistem complex de transport gaze naturale construit prin agregarea modelelor tronsoanelor componente.

Dacă simulările numerice s-au concentrat asupra ordinului de mărime al erorilor de calcul numeric, existența unor seturi de date experimentale sau măsurate privind valorile variabilelor și parametrilor unor procese de curgere reale au permis o analiză a erorilor de modelare.

Valorile, relativ mici, obținute pentru aceste erori, dacă se ține seama de condițiile reale de măsurare, validează experimental modelul matematic al procesului de curgere și, implicit, modelele de aproximare.

Totodată, cele prezentate în cadrul analizei experimentale legate de procedura de determinare a valorilor parametrilor modelului procesului, permit realizarea corelațiilor necesare implementării metodelor sistemice de estimare a parametrilor modelului.

În contextul celor mai sus prezentate se poate considera că obiectivul propus inițial a fost atins. Modelele de aproximare pot fi folosite în rezolvarea problemei de reglare a comportamentului dinamic al unui sistem de transport gaze naturale. Acest lucru se va realiza în capitoul următor, prin realizarea unor simulări numerice care să permită studiere algoritmilor de reglare care asigură echilibrarea fizică a sistemului de transport de gaze.

Capitolul 5: Problematika implementării unui algoritm de reglare automată a dinamicii unui sistem de transport de gaze naturale

5.1. Generalități

Tehnicile de optimizare joacă un rol extrem de important în proiectarea sistemelor de control ale proceselor dinamice industriale. În multe cazuri problema de control optimal este rezolvată off-line folosind un model fixat și invariant în timp al procesului condus. Legea de control rezultată poate avea o aplicabilitate limitată întrucât modelele matematice ale procesului nu reflectă întru totul realitatea fizică. În plus, de cele mai multe ori proiectarea nu surprinde în mod corect influența dinamicii perturbațiilor de sarcină care acționează asupra procesului condus și afectează funcționarea sistemului de reglare. Întrucât, în faza de proiectare a sistemului de reglare nu se pot lua în calcul, în mod complet, toate aceste incertitudini (erorile de modelare și perturbațiile de sarcină), sunt realiste doar soluțiile bazate pe o rezolvare on-line a problemei de optimizare [37].

În acest sens, în practica proiectării sistemelor de control optimal a proceselor industriale s-a impus, în ultimii ani, ca metodă de rezolvare, *controlul predictiv bazat pe model* („*Model Predictive Control*”).

Ideea de bază în dezvoltarea tehnicilor de control predictiv bazate pe model, o constituie determinarea legii de comandă $u_0 = u(t_0)$ la momentul de timp t_0 , prin rezolvarea unei probleme de control optimal pe orizontul de predicție $[t_0, t_0 + T_{pred}]$. În acest fel se determină o secvență de comenzi optimale $u[t_0, t_0 + T_{pred}]$, având la bază istoricul valorilor măsurate ale ieșirilor procesului $y_{t < t_0}$, respectiv, al valorilor anterior calculate ale comenzilor $u_{t < t_0}$. Primul eșantion din secvența de comandă astfel determinată se aplică procesului condus pe o durată de timp scurtă, de regulă egală cu pasul de discretizare al timpului Δt .

Ideea este ilustrată în figura 5.1. La momentul de timp următor $t_0 + \Delta t$ se va rezolva o nouă problemă de control optimal pe orizontul de predicție $[t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta t + T_{pred}]$ translatat față de $[t_0, t_0 + T_{pred}]$ cu un pas Δt înainte, iar comanda optimală rezultată $u(t_0 + \Delta t)$ va fi aplicată, în mod similar, procesului industrial pe următoarea durată de timp egală cu valoarea pasului Δt .

În felul acesta problema de control predictiv bazat pe model se transformă într-o secvență de probleme de optimizare care se rezolvă on-line, la momente de timp discrete, consecutive.

Se face observația că, în lipsa perturbațiilor și a incertitudinilor de modelare, atunci când problema de optimizare poate fi rezolvată pe un orizont infinit de timp, comanda optimală determinată începând cu momentul de timp $t_0 = 0$ va reprezenta o lege de control optimală a procesului, nemaifiind necesară o recalculare a acesteia

la momentele de timp ulterioare $t > 0$. Problema de control predictiv bazată pe model se va reduce la o problemă de control optimal clasică [37].

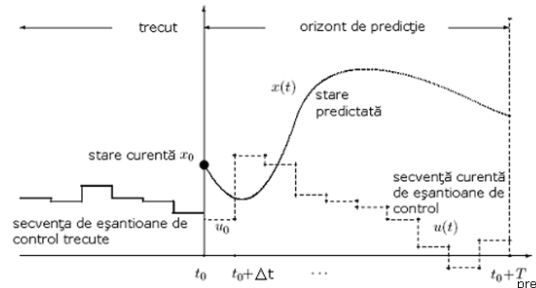


Fig. 5.1.1. Principiul tehnicilor de control predictiv bazate pe model

În prezența perturbațiilor și a incertitudinilor de modelare tratarea problemei necesită alegerea unui orizont de predicție (T_{pred}).

5.2. Aspecte matematice ale problemelor de optimizare

La baza tehnicilor de optimizare stau elemente de analiză matematică referitoare la găsirea punctelor de extrem ale funcțiilor reale.

Existența punctelor de extrem ale unei funcții reale este garantată prin *teorema Weierstrass* care arată că: *Orice funcție care este continuă pe un domeniu închis va avea puncte de extrem, de maxim sau de minim, fie în interiorul fie pe frontiera domeniului considerat.*

Localizarea punctelor de extrem ale unei funcții în interiorul unui domeniu pe care funcția este continuă este dată de următoarea *teoremă*: *Punctele de extrem ale unei funcții continue se găsesc printre punctele staționare ale funcției, adică acele puncte în care gradientul funcției se anulează.*

Cele mai simple probleme de optimizare fac parte din categoria *problemelor de optimizare fără restricții*, care, din punctul de vedere al analizei matematice, presupun determinarea *punctelor de extrem fără legături* ale unei funcții reale și continue, de n -variabile: $f : R^n \rightarrow R$, pe întreaga mulțime a numerelor reale R^n .

În baza teoremei anterioare, punctele de extrem ale funcției $f(\underline{x})$ trebuie căutate printre punctele staționare rezultate în urma rezolvării ecuației:

$$\nabla f(\underline{x}) = 0 \quad (5.2.1)$$

Deducerea unor condiții de suficiență care să permită caracterizarea ca punct de extrem a unui punct staționar $\underline{x}^* \in R^n$ are la bază dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(\underline{x})$ în jurul punctului staționar considerat:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^*) + \nabla(f, \underline{x}^*)^t (\underline{x} - \underline{x}^*) + \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}^*)^t H(f, \underline{x}^*) (\underline{x} - \underline{x}^*) + o(\underline{x} - \underline{x}^*)^2 \quad (5.2.2)$$

în care $H(f, \underline{x}^*) = \nabla^2(f, \underline{x}^*)$ este matricea Hessian.

Întrucât $\underline{x}^* \in R^n$ este un punct staționar determinat în baza condiției (5.2.1), se consideră că pentru \underline{x} situat într-o vecinătate $N_\varepsilon(\underline{x}^*)$ restul dezvoltării $O(\underline{x} - \underline{x}^*)^2$ este suficient de mic astfel încât să se poată face aproximarea:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) \cong \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}^*)^t \underline{H}(f, \underline{x}^*)(\underline{x} - \underline{x}^*) \quad (5.2.3)$$

Dacă: $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) > 0 \Leftrightarrow f(\underline{x}) > f(\underline{x}^*)$ pentru oricare $\underline{x} \in N_\varepsilon(\underline{x}^*)$, punctul staționar \underline{x}^* va fi un punct de *minimum* (strict) local al vecinătății considerate, respectiv de *maximum*, în cazul $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) < 0$ pentru oricare $\underline{x} \in N_\varepsilon(\underline{x}^*)$. După cum se observă, semnul diferenței $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)$ este dat de semnul formei diferențiale pătratice:

$$Q_{pat}(H, \underline{x} - \underline{x}^*) = \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}^*)^t \underline{H}(f, \underline{x}^*)(\underline{x} - \underline{x}^*) \quad (5.2.4)$$

Forma pătratică $Q_{pat}(H, \underline{x} - \underline{x}^*)$ este pozitivă numai dacă $\underline{H}(f, \underline{x}^*) > 0$, adică matricea Hessian este pozitiv definită (are toate valorile proprii strict pozitive), respectiv negativă, numai dacă $\underline{H}(f, \underline{x}^*) < 0$.

În baza celor prezentate rezultă că, un punct $\underline{x}^* \in R^n$ este punct de minimum pe vecinătatea $N_\varepsilon(\underline{x}^*) \subset R^n$ pe care funcția este continuă și netedă dacă sunt îndeplinite următoarele *condiții de optimalitate*:

a) Condiția de necesitate: $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$; (5.2.5.a)

b) Condiția de suficiență: $\underline{H}(f, \underline{x}^*) > 0$. (5.2.5.b)

Un punct de minimum $\underline{x}^* \in R^n$ astfel determinat este un punct de minimum *local* al funcției $f(\underline{x})$. O funcție reală poate să admită mai multe puncte de minimum (maximum) local.

Determinarea punctului de minimum global al funcției pe mulțimea de definiție R^n se face prin compararea valorilor funcției în toate punctele de minimum local determinate în baza condițiilor de optimalitate (5.2.5).

Dacă, în schimb, se pune problema determinării punctelor de maximum, acestea vor coincide cu punctele de minimum ale funcției $-f(\underline{x})$, iar condițiile de optimalitate (5.2.5) se rescriu corespunzător.

Totodată, în determinarea punctelor de extrem local și global ale funcției reale $f(\underline{x})$ pe domeniul real de definiție R^n trebuie să se țină seama că un punct staționar $\underline{x}^* \in R^n$ determinat prin condiția de necesitate (5.2.5.a) poate să fie și *punct de inflexiune* al funcției $f(\underline{x})$, caz în care $\underline{H}(f, \underline{x}^*)$ nu este nici pozitiv definită nici negativ definită, iar condiția de suficiență (5.2.5.b) trebuie rescrisă prin luarea în calcul a celorlalte derivate parțiale de ordin superior.

În baza unor teoreme, care presupun îndeplinirea anumitor ipoteze de convexitate avem următorul rezultat [10], [21]: *Dacă funcția care trebuie minimizată este convexă, iar mulțimea $S_{con} \subset R^n$ pe care se caută minimumul este o mulțime convexă, atunci există un unic punct de minimum al funcției $\underline{x}^* \in S_{con} \subset R^n$ care este minimumul global pe domeniul considerat.* Consecința este imediată în cazul funcțiilor reale convexe $f : R^n \rightarrow R$, care vor admite un *unic punct de minimum* pe R^n , întrucât mulțimea numerelor reale este o mulțime convexă.

Problema de determinare a punctelor staționare ale unei funcții, respectiv, de analiză a caracterului de extrem al acestor puncte (minimum sau maximum), devine mai complexă atunci când se impun restricții asupra variabilelor funcției. În acest caz vorbim de o *problemă de optimizare cu restricții*.

Trebuie reținut că, adeseori, metodele de rezolvare a problemelor de optimizare cu restricții le reduc la probleme de optimizare fără restricții.

Cele mai „simple de rezolvat” sunt problemele de optimizare cu restricții de tip egalitate. Problema se formulează în felul următor, pentru m restricții scalare:

$$\min_{\underline{x} \in R^n} f(\underline{x}) \quad (5.2.6)$$

cu restricțiile:

$$\{g_j(\underline{x}) = 0, j = \overline{1, m}\}, \text{ cu } \{g_j : R^n \rightarrow R, j = \overline{1, m}\}, \quad (5.2.7)$$

Una din metodele de rezolvare analitice, des folosite în aplicațiile practice, este *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*, prin care problema de optimizare cu restricții este transformată într-o problemă de optimizare fără restricții a funcției Lagrangean $L : R^n \times R^m \rightarrow R$, create prin folosirea multiplicatorilor Lagrange $\underline{\gamma} \in R^m$ [10] [21]:

$$L_{lagr}(\underline{x}, \underline{\gamma}) = f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^m \gamma_j g_j(\underline{x}) \quad (5.2.8)$$

În cazul în care, pe lângă restricțiile de tip egalitate apar și l restricții de tip inegalitate de forma:

$$\{h_j(\underline{x}) \leq 0 / j = \overline{1, l}\} \text{ cu } \{h_j : R^n \rightarrow R, j = \overline{1, l}\}, \quad (5.2.9)$$

rezolvarea problemei de optimizare devine și mai complexă.

Aplicarea metodei multiplicatorilor lui Lagrange în acest caz necesită introducerea unor *variabile suplimentare* $\underline{n}_+ \in R^l$ și transformarea restricțiilor inegalitate (5.2.9) în restricții de tip egalitate $\{h_j(\underline{x}) + n_{+j}^2 = 0 / j = \overline{1, l}\}$.

Funcția Lagrangean (5.2.8) se rescrie prin introducerea unui nou set de multiplicatori Lagrange $\underline{\omega} \in R^l$, $L : R^n \times R^m \times R^l \times R^l \rightarrow R$:

$$L_{lagr}(\underline{x}, \underline{\gamma}, \underline{\omega}, \underline{n}_+) = f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^m \gamma_j g_j(\underline{x}) + \sum_{j=1}^l \omega_{m+j} [h_j(\underline{x}) + n_{+j}^2] \quad (5.2.10)$$

Pentru aceste tipuri de probleme, localizarea punctului de minimum local \underline{x}^* al problemei de minimizare (2.5.6) cu restricțiile (5.2.7) și / sau (5.2.9) se face pe

baza *condițiilor de necesitate Karush-Kuhn-Tucker*, deduse prin aplicarea condiției de necesitate (5.2.5.a) problemei de minimizare fără restricții [21]:

$$\min_{(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\omega}, \underline{n}_+) \in \mathbb{R}^{n+m+2l}} L_{\text{Lagr}}(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\omega}, \underline{n}_+):$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \sum_{j=1}^m \omega_j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + n_{+j}^2 \right] = 0, i = \overline{1, n} \quad (5.2.11.a)$$

$$g_j(\underline{x}^*) = 0, j = \overline{1, m} \quad (5.2.11.b)$$

$$h_j(\underline{x}^*) \leq 0, j = \overline{1, l} \quad (5.2.11.c)$$

$$\omega_j h_j(\underline{x}^*) = 0, j = \overline{1, l} \quad (5.2.11.d)$$

$$\omega_j \geq 0, j = \overline{1, l} \quad (5.2.11.e)$$

$$\gamma_j, j = \overline{1, m} \text{ nerestricționată în semn} \quad (5.2.11.f)$$

Caracterul de minimum al punctelor rezultate prin impunerea condițiilor *Karush-Kuhn-Tucker* (5.2.11) trebuie verificat prin completarea condițiilor de necesitate cu *condiții de suficiență*, deduse prin studierea semnului formei diferențiale pătratice rezultate prin dezvoltarea în serie Taylor până la termeni de ordinul 2, în vecinătatea punctului staționar \underline{x}^* , al funcției Lagrangean (5.2.10).

O ultimă observație care trebuie făcută se referă la numărul restricțiilor unei probleme de optimizare. El trebuie să fie mai mic decât numărul variabilelor funcției care trebuie minimizate. Dacă numărul restricțiilor de tip egalitate este egal cu numărul variabilelor funcției, soluția problemei de optimizare este determinată potențial din rezolvarea sistemului de ecuații asociat restricțiilor de tip egalitate. Dacă numărul restricțiilor de tip egalitate este mai mare decât numărul variabilelor funcției de minimizat, problema de optimizare este supradeterminată, putând să nu admită soluție.

5.3. Problema de optimizare pătratică cu restricții lineare

Problema de optimizare pătratică cu restricții lineare face parte dintr-o clasă de probleme de optimizare neliniare care au funcția obiectiv ce trebuie optimizată (minimizată) *pătratică* iar restricțiile *liniare*. Forma problemei de optimizare pătratică este:

$$\min_{\underline{X} \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(\underline{X}) = \frac{1}{2} \underline{X}^t \underline{H}_{\text{pon}} \underline{X} + \underline{X}^t \underline{c}_{\text{pon}} \right\} \quad (5.3.1.a)$$

$$\text{cu restricțiile: } \underline{A}_{\text{eg}}^t \underline{X} = \underline{a}_{\text{eg}} \quad (5.3.1.b)$$

$$\underline{B}_{\text{ineg}}^t \underline{X} \leq \underline{\beta}_{\text{ineg}} \quad (5.3.1.c)$$

în care: $\underline{X} \in R^n$, $\underline{H}_{pon} \in R^{n \times n}$ matrice simetrică, $\underline{c}_{pon} = \begin{bmatrix} c_{pon_1} \\ \dots \\ c_{pon_n} \end{bmatrix} \in R^n$, $\underline{A}_{eg} = \begin{bmatrix} a_{eg_1}^t \\ \dots \\ a_{eg_m}^t \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$

cu $\{a_{eg_j} \in R^n / j \in E_{eg}\}$, $\underline{a}_{eg} = \begin{bmatrix} a_{eg_1} \\ \dots \\ a_{eg_m} \end{bmatrix} \in R^m$, $\underline{B}_{ineg} = \begin{bmatrix} b_{ineg_1}^t \\ \dots \\ b_{ineg_l}^t \end{bmatrix} \in R^{l \times n}$ cu

$\{b_{ineg_j} \in R^n / j \in I_{ineg}\}$, respectiv, $\underline{\beta}_{ineg} = \begin{bmatrix} \beta_{ineg_1} \\ \dots \\ \beta_{ineg_l} \end{bmatrix} \in R^l$, iar $m + l < n$.

Prin $E_{eg} = \{1, 2, \dots, m\}$, respectiv, $I_{ineg} = \{1, 2, \dots, l\}$ se notează mulțimea indicilor restricțiilor de tip egalitate, respectiv inegalitate.

Rezolvarea problemei de optimizare astfel definite este simplificată de îndeplinirea unor ipoteze de convexitate. Astfel, mulțimea pe care se caută minimumul funcției: $S_{con} = \{X \in R^n / \underline{A}_{eg}^t X = \underline{a}_{eg}, \underline{B}_{ineg}^t X \leq \underline{\beta}_{ineg}\}$ este o mulțime convexă întrucât restricțiile care o delimitează sunt lineare.

În plus, dacă funcția care trebuie minimizată $f(X) = \frac{1}{2} X^t \underline{H}_{pon} X + X^t \underline{c}_{pon}$ este convexă, adică matricea \underline{H}_{pon} este pozitiv definită, problema de programare linear-pătratică devine o *problemă de optimizare convexă*.

Pentru această problemă de optimizare unicul punct de minimum local, X^* , va fi determinat de condițiile de necesitate *Karush-Kuhn-Tucker* (5.2.11), care se rescriu astfel:

$$\underline{H}_{pon} X^* + \underline{c}_{pon} + \underline{A}_{eg} \underline{y} + \underline{B}_{ineg} \underline{\omega} = 0 \quad (5.3.2.a)$$

$$\underline{A}_{eg}^t X^* = \underline{a}_{eg} \quad (5.3.2.b)$$

$$\underline{B}_{ineg}^t X^* \leq \underline{\beta}_{ineg} \quad (5.3.2.c)$$

$$\underline{\omega}^t (\underline{B}_{ineg}^t X^* - \underline{\beta}_{ineg}) = 0 \quad (5.3.2.d)$$

$$\underline{\omega} \geq 0 \quad (5.3.2.e)$$

$$\underline{y} \text{ nerestricționat în semn} \quad (5.3.2.f)$$

În ceea ce privește rezolvarea problemei de optimizare pătratică convexe, trebuie reținute următoarele două observații:

- a)** Problema astfel formulată poate să nu fie fezabilă întrucât unicul punct de minimum global al funcției obiectiv $f(X)$ s-ar putea să nu fie un punct admisibil, situându-se în afara mulțimii S_{con} . Condiția de convexitate se poate relaxa în sensul considerării unei matrice \underline{H}_{pon} pozitiv semidefinite astfel încât problema de optimizare să poată admite mai multe puncte de minim local și să se poată determina un punct de minimum global pe mulțimea S_{con} considerată.

- b)** Pentru abordarea unei aplicații este importantă dimensiunea problemei. Ea se reflectă în alegerea metodelor de operare care trebuie să fie potrivite dimensiunilor matricelor folosite de metodele de rezolvare. Orientativ, o problemă este dimensional: *mică* dacă $\min(n, m+1) \cong 10^2$, *mare* dacă $\min(n, m+1) \cong 10^3$ și *uriașă* dacă $\min(n, m+1) \geq 10^5$.

Una dintre metodele de rezolvare a problemei convexe de optimizare linear pătratică (5.3.1) care conduce la o soluție, care respectă condițiile de optimalitate (5.3.1) este așa numita *metodă a mulțimii restricțiilor active* („Active Set Method”) [21]. Această metodă presupune partiționarea restricțiilor de tip inegalitate în două mulțimi și anume, o mulțime alcătuită din restricțiile de tip inegalitate care se verifică ca și egalități și care va forma împreună cu restricțiile de tip egalitate *mulțimea restricțiilor active* și o mulțime a *restricțiilor inactive* în care se includ restul de restricții de tip inegalitate care nu se verifică ca și egalități (se verifică numai ca inegalități stricte) și care sunt ignorate.

Metoda în sine presupune rezolvarea iterativă a unei probleme de optimizare pentru mulțimea restricțiilor active, mulțime care se va ajusta corespunzător din punctul de vedere al restricțiilor de tip inegalitate conținute astfel încât să fie identificată acea mulțime a restricțiilor active care verifică soluția problemei de optimizare.

La iterația de calcul k se presupune existent punctul *admisibil* \underline{x}_k pentru care se definește *mulțimea restricțiilor active* I_{ineg_k} ca fiind mulțimea indicilor restricțiilor de tip inegalitate (5.3.1.c) care sunt verificate de punctul admisibil considerat chiar ca egalități, respectiv: $I_{ineg_k} = \left\{ j \in I_{ineg} / \underline{b}_{ineg_j}^t \underline{x}_k = \beta_{ineg_j} \right\}$.

Se definește apoi *mulțimea de lucru* W_{luc_k} ca fiind mulțimea indicilor tuturor restricțiilor egalitate respectate la iterația de calcul k , de punctul admisibil \underline{x}_k , respectiv: $W_{luc_k} = E_{eg} \cup I_{ineg_k}$.

Conform celor menționate anterior, folosind notațiile adoptate, la iterația de calcul k , metoda va căuta să obțină un punct de minimum \underline{x}_{k+1} al funcției obiectiv $f(\underline{x})$ numai pe domeniul definit prin restricțiile de tip egalitate ale căror indici se găsesc în mulțimea de lucru W_{luc_k} .

Ținând seama de condițiile de optimalitate (5.3.2), pentru ca punctul admisibil \underline{x}_{k+1} să fie punctul de minimum căutat, trebuie să existe multiplicatorii Lagrange (numere reale) $\{\gamma_j / j \in E_{eg}\}$ și $\{\omega_j \geq 0 / j \in I_{ineg_k}\}$ astfel încât să fie satisfăcută și condiția:

$$\underline{H}_{pon} \underline{x}_{k+1} + \underline{c}_{pon} + \sum_{j \in E_{eg}} \gamma_j \underline{a}_{eg_j} + \sum_{j \in I_{ineg_k}} \omega_j \underline{b}_{ineg_j} = 0 \quad (5.3.3)$$

Dacă punctul \underline{x}_{k+1} găsit de metodă nu îndeplinește condiția (5.3.3) mulțimea de lucru W_{luc_k} se ajustează, folosind la noua iterație de calcul $k+1$, pentru căutarea punctului de minimum, o nouă mulțimea de lucru $W_{luc_{k+1}}$. Căutarea punctului \underline{x}_{k+1} , respectiv, ajustarea mulțimii de lucru W_{luc_k} decurg astfel:

- i. Întrucât la iterația de calcul k metoda caută punctele de minimum numai printre puncte admisibile din domeniul delimitat de restricțiile cu indicii conținuți în mulțimea de lucru curentă W_{luc_k} , vor fi satisfăcute condițiile:

$$\begin{cases} \underline{a}_{eg_j}^t \underline{X}_k = a_{eg_j}, j \in E_{eg} \\ \underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_k = \beta_{ineg_j}, j \in I_{ineg_k} \end{cases} \quad (5.3.4.a)$$

$$\begin{cases} \underline{a}_{eg_j}^t \underline{X}_{k+1} = a_{eg_j}, j \in E_{eg} \\ \underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_{k+1} = \beta_{ineg_j}, j \in I_{ineg_k} \end{cases} \quad (5.3.4.b)$$

- ii. Parametrizând pe \underline{x}_{k+1} prin $\underline{d}_{adm_k} \in R^n$, sub forma:

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + \underline{d}_{adm_k} \quad (5.3.5.a)$$

și efectuând calculele, ținând cont că \underline{H}_{pon} este simetrică, rezultă:

$$f(\underline{X}_k + \underline{d}_{adm_k}) = f(\underline{X}_k) + \frac{1}{2} \underline{d}_{adm_k}^t \underline{H}_{pon} \underline{d}_{adm_k} + \underline{d}_{adm_k}^t (\underline{c}_{pon} + \underline{H}_{pon} \underline{X}_k) \quad (5.3.5.b)$$

- iii. În felul acesta, problema găsirii punctului de minim \underline{x}_{k+1} este transformată într-o problemă de găsire a direcției \underline{d}_{adm_k} optime (descreșterea maximă a funcției criteriu $f(\underline{X}_k + \underline{d}_{adm_k})$ de-a lungul direcției alese):

$$\min_{\underline{d}_k \in R^n} \left\{ \frac{1}{2} \underline{d}_{adm_k}^t \underline{H}_{pon} \underline{d}_{adm_k} + \underline{d}_{adm_k}^t (\underline{c}_{pon} + \underline{H}_{pon} \underline{X}_k) \right\} \quad (5.3.6.a)$$

cu restricțiile:

$$\underline{a}_{eg_j}^t \underline{d}_{adm_k} = 0, j \in E_{eg} \quad (5.3.6.b)$$

$$\underline{b}_{ineg_j}^t \underline{d}_{adm_k} = 0, j \in I_{ineg_k} \quad (5.3.6.c)$$

- iv. Pentru ca direcția admisibilă \underline{d}_{adm_k} selectată pentru această problemă de optimizare să fie direcția optimă, trebuie îndeplinită condiția de optimalitate (5.3.3), rescrisă corespunzător:

$$\underline{H}_{pon} \underline{d}_{adm_k} + \underline{c}_{pon} + \underline{H}_{pon} \underline{X}_k + \sum_{j \in E_{eg}} \gamma_j \underline{a}_{eg_j} + \sum_{j \in I_{ineg_k}} \omega_j \underline{b}_{ineg_j} = 0 \quad (5.3.7)$$

- v. Avem următoarele două cazuri:

a) Cazul $\underline{d}_{adm_k} = 0$:

- Relația (5.3.7) se rescrie sub forma: $\underline{c}_{pon} + \underline{H}_{pon} \underline{X}_k + \sum_{j \in E_{eg}} \gamma_j \underline{a}_{eg_j} + \sum_{j \in I_{ineg_k}} \omega_j \underline{b}_{ineg_j} = 0$, ceea ce,

conform condiției (5.3.3), pentru $\{\omega_j \geq 0 / j \in I_{ineg_k}\}$ arată că punctul admisibil \underline{x}_k pentru problema originală (5.3.1) este punct de minim al problemei iar căutarea se oprește;

- Presupunem, pe de altă parte, că există un indice $s \in I_{ineg_k}$ astfel încât $\omega_s < 0$. Atunci, din mulțimea restricțiilor active I_{ineg_k} se înlătură restricția cu indicele s care devine o restricție inactivă, astfel încât $I_{ineg_{k+1}} = I_{ineg_k} - \{s\}$, iar noua mulțime de lucru va fi: $W_{luc_{k+1}} = E_{eg} \cup I_{ineg_{k+1}}$. Dacă sunt mai mulți indici $s \in I_{ineg_k}$ astfel încât $\omega_s < 0$, se selectează acel indice s^* care verifică condiția: $\omega_{s^*} = \min \{ \omega_j^* / j \in I_{ineg_k} \}$.
- b) Cazul $d_{adm_k} \neq 0$:**
- Dacă: $\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + d_{adm_k}$ este un punct admisibil pentru problema de optimizare (5.3.1), atunci d_{adm_k} este un segment de descreștere admisibilă, astfel încât: $f(\underline{X}_{k+1}) < f(\underline{X}_k)$. Pentru următoarea iterație de calcul, $k+1$, se păstrează mulțimea de lucru: $W_{luc_{k+1}} = W_{luc_k}$, iar căutarea se face luând drept referință noul punct admisibil \underline{X}_{k+1} .
 - Dacă: $\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + d_{adm_k}$ nu este un punct admisibil pentru problema de optimizare (5.3.1), atunci trebuie realizată o căutare de-a lungul direcției d_{adm_k} pentru a găsi cel mai bun punct admisibil pentru mulțimea de lucru curentă W_{luc_k} . Punctul $\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + d_{adm_k}$ nu mai este punct admisibil, nu prin încălcarea restricțiilor cu indicii $j \in W_{luc_k}$ (d_{adm_k} este o direcție admisibilă pentru problema de optimizare 5.3.6), ci prin încălcarea unor restricții inactice astfel încât pentru unul sau mai mulți $j \notin I_{ineg_k}$ vom avea: $\underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_{k+1} > 0 \leftrightarrow \underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_k + \underline{b}_{ineg_j}^t d_{adm_k} > 0$. Cum \underline{X}_k este un punct admisibil, respectiv $\underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_k < 0$, vom avea: $\underline{b}_{ineg_j}^t d_{adm_k} > 0$. Pentru a menține fezabilitatea punctului $\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + d_{adm_k}$ trebuie parcursă doar o cotă parte a segmentului d_{adm_k} : $\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k + \theta_k d_{adm_k}$, $\theta_k \in [0, 1]$, astfel încât punctul să fie în continuare un punct admisibil: $\underline{b}_{ineg_j}^t (\underline{X}_k + \theta_k d_{adm_k}) \leq \underline{\beta}_{ineg_j}$ pentru $j \notin I_{ineg_k}$, chiar dacă: $\underline{b}_{ineg_j}^t d_{adm_k} > 0$. Rezultă: $\theta_k \leq \frac{\underline{\beta}_{ineg_j} - \underline{b}_{ineg_j}^t \underline{X}_k}{\underline{b}_{ineg_j}^t d_{adm_k}}$ iar pasul θ_k va trebui astfel selectat încât:

$$\theta_k = \min_{\left\{j \in I_{ineg_k} / \frac{b_{ineg_j}^t d_{adm_k}}{b_{ineg_s}^t d_{adm_k}} > 0\right\}} \frac{\beta_{ineg_j} - b_{ineg_j}^t X_k \text{ def } \beta_{ineg_s} - b_{ineg_s}^t X_k}{b_{ineg_j}^t d_{adm_k}} = \frac{\beta_{ineg_s} - b_{ineg_s}^t X_k}{b_{ineg_s}^t d_{adm_k}} \quad (5.3.8)$$

În felul acesta restricția inegalitate inactivă cu indicele s , care a cauzat invalidarea punctului $\underline{x}_k + \underline{d}_{adm_k}$, devine restricție activă pentru punctul admisibil $\underline{x}_k + \theta_k \underline{d}_{adm_k}$. Indicele s va fi adăugat mulțimii indicilor restricțiilor active astfel încât, la iterația de calcul următoare $k+1$, se va rezolva din nou problema (5.3.6), luând drept referință în calcule noul punct admisibil: $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \theta_k \underline{d}_{adm_k}$, și actualizând mulțimile: $I_{ineg_{k+1}} = I_{ineg_k} \cup \{s\}$, $W_{luc_{k+1}} = E_{eg} \cup I_{ineg_{k+1}}$ și $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \theta_k \underline{d}_{adm_k}$.

În ceea ce privește problemele care apar la implementarea practică a metodei avem: calcularea unui punct inițial admisibil, rezolvarea sistemului format din ecuațiile (5.3.6.b), (5.3.6.c) și (5.3.7) asociat condițiilor de optimalitate ale problemei de optimizare (5.2.6) și actualizarea eficientă a mulțimilor restricțiilor active și de lucru la iterațiile de calcul.

5.4. Problema controlului optimal linear cu orizont de predicție fixat

În cele ce urmează se va arăta că problema de control optimal cu orizont de predicție fixat, cu restricții lineare, se poate aduce la forma unei probleme de optimizare pătratică cu restricții lineare [21] a cărei metodă de rezolvare a fost prezentată în subcapitolul anterior.

Se consideră procesul în timp discret descris de modelul linear, invariant în timp:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{A}_{prm} \underline{x}_k + \underline{B}_{prm} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = \underline{C}_{prm} \underline{x}_k + \underline{\eta}_k \end{cases} \quad (5.4.1)$$

în care: $\underline{x}_k \in R^n$ -vectorul de stare, $\underline{u}_k \in R^m$ -vectorul intrărilor, $\underline{y}_k \in R^m$ -vectorul ieșirilor, $\underline{\eta}_k \in R^m$ -vectorul perturbațiilor (se consideră că acționează de o manieră aditivă la ieșire). Se presupune că tripletul $(\underline{A}_{prm}, \underline{B}_{prm}, \underline{C}_{prm})$ este stabilizabil și detectabil, iar matricea \underline{A}_{prm} nu are nici o valoare proprie unitară.

Se pune problema urmăririi de către ieșirea \underline{y}_k a unei traiectorii $\underline{y}^* = const$ în prezența perturbațiilor \underline{v}_k , ceea ce presupune anularea erorii de ieșire:

$$\underline{e}(\underline{y})_k = \underline{y}_k - \underline{y}^* = \underline{C}_{prm} \underline{x}_k + \underline{\eta}_k - \underline{y}^* \quad (5.4.2)$$

Notăm cu $\underline{\eta}_{stat}$ valoarea de regim staționar a perturbației $\underline{\eta}_k$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\eta}_k = \underline{\eta}_{stat} \quad (5.4.3)$$

respectiv, cu \underline{u}_s , \underline{X}_{stat} , \underline{Y}_{stat} și $\underline{e}(\underline{Y})_{stat}$ valorile de regim staționar prescrise („setpoints”) pentru \underline{u}_k , \underline{X}_k , \underline{Y}_k și $\underline{e}(\underline{Y})_k$. Avem atunci:

$$\underline{Y}_{stat} = \underline{Y}^* = \underline{C}_{prm} \underline{X}_{stat} + \underline{\eta}_{stat} \quad (5.4.4)$$

$$\underline{e}(\underline{Y})_{stat} = 0 \quad (5.4.5)$$

astfel încât, ținând cont că și valorile de regim staționar trebuie să verifice ecuațiile sistemului (5.4.1), avem:

$$\underline{u}_{stat} = \left[\underline{C}_{prm} (\underline{I} - \underline{A}_{prm})^{-1} \underline{B}_{prm} \right]^{-1} (\underline{Y}^* - \underline{\eta}_{stat}) \quad (5.4.6)$$

$$\underline{X}_{stat} = (\underline{I} - \underline{A}_{prm})^{-1} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \quad (5.4.7)$$

Pentru simplificarea prezentării se consideră momentul de timp curent asociat iterației de calcul k ca momentul de timp de referință zero, adică $k \equiv 0$.

Mai presupunem că există informații suficiente pentru caracterizarea perturbației $\underline{\eta}_k$ la momentele de timp ulterioare momentului de timp zero, respectiv, pentru $k = \overline{0, N_p - 1}$, unde prin N_p s-a notat lungimea *orizontului de predicție*.

Totodată se cunoaște (prin măsurători) starea inițială: $\underline{X}_0 = \underline{X}$.

Ținând seama de cele prezentate, problema de control optimal linear pe orizont fix se definește ca problema determinării secvenței de comandă $\{\underline{u}_k / k = \overline{0, M_c - 1}\}$ și a secvențelor asociate de stare $\{\underline{X}_k / k = \overline{0, N_p}\}$, respectiv, de eroare $\{\underline{e}(\underline{Y})_k / k = \overline{0, N_p - 1}\}$, care fac ca eroarea de ieșire (5.4.2) a sistemului (5.4.1) să se anuleze în sensul minimizării funcției obiectiv:

$$F_{N_p, M_c}(\{\underline{X}_k\}, \{\underline{u}_k\}, \{\underline{e}(\underline{Y})_k\}) = \frac{1}{2} (\underline{X}_{N_p} - \underline{X}_{stat})^t \underline{P}_F (\underline{X}_{N_p} - \underline{X}_{stat}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_p-1} \underline{e}(\underline{Y})_k^t \underline{Q}_F \underline{e}(\underline{Y})_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M_c-1} (\underline{u}_k - \underline{u}_s)^t \underline{R}_F (\underline{u}_k - \underline{u}_s) \quad (5.4.8)$$

în care: $\underline{P}_F \geq 0$, $\underline{Q}_F \geq 0$, $\underline{R}_F > 0$, N_p -orizont de predicție, iar $M_c \leq N_p$ -orizontul de control, corespunzător atingerii de către semnalul de comandă \underline{u}_k , după M_c iterații, a regimului staționar $\underline{u}_{stat} : \{\underline{u}_k = \underline{u}_{stat} / k \geq M_c\}$.

Ținând seama de cele prezentate în primul subcapitol, problema de minimizare a funcției obiectiv (5.4.8) va trebui rezolvată la fiecare moment de timp discret t_k având disponibile măsurători ale stării actuale \underline{X}_k , respectiv, ale perturbațiilor $\underline{\eta}_k$. Primul eșantion \underline{u}_0 din secvența determinată de eșantioane de comandă va fi utilizată pentru efectuarea tranziției procesului la momentul de timp următor t_{k+1} , moment de timp discret la care procedura se repetă.

Impunerea unor restricții lineare asupra intrărilor și ieșirilor sistemului (5.4.1) permite transformarea și rezolvarea problemei de control optimal, definită prin minimizarea funcției obiectiv (5.4.8), ca o problemă de optimizare pătratică cu

restricții lineare. Pentru aceasta, pe orizontul de predicție N_p , folosind (5.4.1) se scriu următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \underline{X}_1 &= \underline{A}_{prm} \underline{X} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_0 \\ \underline{X}_2 &= \underline{A}_{prm}^2 \underline{X} + \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_0 + \underline{B}_{prm} \underline{u}_1 \\ &\dots \\ \underline{X}_M &= \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{X} + \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} \underline{u}_0 + \dots + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{M_c-1} \\ \underline{X}_{M_c+1} &= \underline{A}_{prm}^{M_c+1} \underline{X} + \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{B}_{prm} \underline{u}_0 + \dots + \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{M_c-1} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ &\dots \\ \underline{X}_{N_p} &= \underline{A}_{prm}^N \underline{X} + \underline{A}_{prm}^{N_c-1} \underline{B}_{prm} \underline{u}_0 + \dots + \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{M_c-1} + \sum_{i=0}^{N_p-M_c-1} \underline{A}_{prm}^i \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Întrucât $\underline{X}_{stat} = \underline{A}_{prm} \underline{X}_{stat} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat}$, se scrie un set similar de ecuații pentru valoarea de regim staționar a stării:

$$\begin{aligned} \underline{X}_{stat} &= \underline{A}_{prm} \underline{X}_{stat} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \underline{X}_{stat} &= \underline{A}_{prm} \underline{X}_{stat} + \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ &\dots \\ \underline{X}_{stat} &= \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{X}_{stat} + \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \dots + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \underline{X}_{stat} &= \underline{A}_{prm}^{M_c+1} \underline{X}_{stat} + \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \dots + \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ &\dots \\ \underline{X}_{stat} &= \underline{A}_{prm}^{N_p} \underline{X}_{stat} + \underline{A}_{prm}^{N_p-1} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \dots + \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \sum_{i=0}^{N_p-M_c-1} \underline{A}_{prm}^i \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Scăzând (5.4.10) din (5.4.9) rezultă următorul set de relații:

$$\underline{X}_{aug} - \underline{X}_{augstat} = \underline{\Gamma}_{aug} (\underline{U}_{aug} - \underline{U}_{augstat}) + \underline{\Omega}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) \quad (5.4.11)$$

în care:

$$\underline{X}_{ug} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \dots \\ \underline{X}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \underline{X}_{augstat} = \begin{bmatrix} \underline{X}_{stat} \\ \underline{X}_{stat} \\ \dots \\ \underline{X}_{stat} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \underline{U}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_1 \\ \dots \\ \underline{u}_{M_c-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mM}, \quad \underline{U}_{augstat} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{stat} \\ \underline{u}_{stat} \\ \dots \\ \underline{u}_{stat} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mM} \quad (5.4.12.a)$$

respectiv, matricele:

$$\underline{\Gamma}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{prm} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} & \underline{B}_{prm} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} & \underline{A}_{prm}^{M_c-2} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} & \underline{B}_{prm} \\ \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{B}_{prm} & \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{A}_{prm}^2 \underline{B}_{prm} & \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{A}_{prm}^{N_p-1} \underline{B}_{prm} & \underline{A}_{prm}^{N_p-2} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c+1} \underline{B}_{prm} & \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c} \underline{B}_{prm} \end{bmatrix}, \quad \underline{\Omega}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{prm} \\ \underline{A}_{prm}^2 \\ \dots \\ \underline{A}_{prm}^{N_p} \end{bmatrix} \quad (5.4.12.b)$$

Se definește, de asemenea, și vectorul perturbațiilor:

$$\underline{\eta}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 - \underline{\eta}_{stat} \\ \underline{\eta}_2 - \underline{\eta}_{stat} \\ \dots \\ \underline{\eta}_1 - \underline{\eta}_{stat} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.4.13)$$

Fie matricele diagonale:

$$\underline{\Xi}_{aug} = \text{diag} \left\{ \underline{C}_{prm}^t \underline{Q}_F \underline{C}_{prm} \quad \dots \quad \underline{C}_{prm}^t \underline{Q}_F \underline{C}_{prm} \quad \underline{P}_F \right\} \quad (5.4.14.a)$$

$$\underline{\Psi}_{aug} = \text{diag} \left\{ \underline{R}_F \quad \dots \quad \underline{R}_F \right\} \quad (5.4.14.b)$$

$$\underline{Z}_{aug} = \text{diag} \left\{ \underline{C}_{prm}^t \underline{Q}_F \quad \underline{C}_{prm}^t \underline{Q}_F \quad \dots \quad \underline{C}_{prm}^t \underline{Q}_F \right\} \quad (5.4.14.c)$$

$$\underline{\Theta}_{aug} = \text{diag} \left\{ \underline{Q}_F \quad \underline{Q}_F \quad \dots \quad \underline{Q}_F \right\} \quad (5.4.14.d)$$

Adunând termenul $-\underline{C}_{prm} \underline{X}_k - \underline{\eta}_k + \underline{y}^* = 0$ din (5.4.4) la relația (5.4.2), eroarea de ieșire se rescrie:

$$\underline{e}(\underline{y})_k = \underline{C}_{prm} (\underline{X}_k - \underline{X}_{stat}) + (\underline{\eta}_k - \underline{\eta}_{stat}) \quad (5.4.15)$$

Folosind mărimile definite prin relațiile (5.4.11.a), (5.4.13) și (5.4.14), respectiv eroarea de ieșire rescrisă sub forma (5.4.12), funcția obiectiv (5.4.8) se rescrie:

$$\begin{aligned} F_{N_p, M_c} = & \frac{1}{2} \underline{e}(\underline{y})_0^t \underline{Q}_F \underline{e}(\underline{y})_0 + \frac{1}{2} (\underline{X}_{aug} - \underline{X}_{augstat})^t \underline{\Xi}_{aug} (\underline{X}_{aug} - \underline{X}_{augstat}) + \\ & + \frac{1}{2} (\underline{U}_{aug} - \underline{U}_{augstat})^t \underline{\Psi}_{aug} (\underline{U}_{aug} - \underline{U}_{augstat}) + \\ & + (\underline{X}_{aug} - \underline{X}_{augstat})^t \underline{Z}_{aug} \underline{\eta}_{aug} + \frac{1}{2} \underline{\eta}_{aug}^t \underline{\Theta}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Substituind în (5.4.16) termenul $\underline{X}_{aug} - \underline{X}_{augstat}$ conform relației (5.4.11), rezultă:

$$\begin{aligned} F_{N_p, M_c} = & F_{stat} + \frac{1}{2} \underline{U}_{aug}^t (\underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Gamma}_{aug} + \underline{\Psi}_{aug}) \underline{U}_{aug} + \underline{U}_{aug}^t \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Omega}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) \\ & - \underline{U}_{aug}^t (\underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Gamma}_{aug} + \underline{\Psi}_{aug}) \underline{U}_{augstat} + \underline{U}_{aug}^t \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{Z}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \\ = & F_{stat} + \frac{1}{2} \underline{U}_{aug}^t \underline{H}_{aug} \underline{U}_{aug} + \underline{U}_{aug}^t \left[\underline{F}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) - \underline{H}_{aug} \underline{U}_{aug} + \underline{G}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \right] \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

în care:

$$\begin{aligned} F_{stat} = & \frac{1}{2} \underline{e}(\underline{y})_0^t \underline{Q}_F \underline{e}(\underline{y})_0 + \frac{1}{2} \underline{U}_{augstat}^t \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \left[\underline{\Gamma}_{aug} \underline{U}_{augstat} - \underline{\Omega}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) \right] \\ & + \frac{1}{2} (\underline{X} - \underline{X}_{stat})^t \underline{\Omega}_{aug}^t \left[\underline{\Omega}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) - \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Gamma}_{aug} \underline{U}_{augstat} \right] + \\ & + \underline{U}_{augstat}^t (\underline{\Psi}_{aug} \underline{U}_{augstat} - \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{Z}_{aug} \underline{\eta}_{aug}) + (\underline{X} - \underline{X}_{stat})^t \underline{\Omega}_{aug}^t \underline{Z}_{aug} \underline{\eta}_{aug} + \\ & + \frac{1}{2} \underline{\eta}_{aug}^t \underline{\Theta}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \end{aligned} \quad (5.4.18.a)$$

este independent de \underline{U}_{aug} iar:

$$\underline{H}_{aug} = \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Gamma}_{aug} + \underline{\Psi}_{aug} \quad (5.4.18.b)$$

$$\underline{F}_{aug} = \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{\Xi}_{aug} \underline{\Omega}_{aug} \quad (5.4.18.c)$$

$$\underline{G}_{aug} = \underline{\Gamma}_{aug}^t \underline{Z}_{aug} \quad (5.4.18.d)$$

Matricea H_{aug} a funcției obiectiv (5.4.17) este pozitiv definită întrucât matricea R_F a funcției obiectiv (5.4.8) s-a ales pozitiv definită [21].

Dacă nu există restricții impuse asupra problemei de optimizare definite prin funcția obiectiv (5.4.17), ținând cont că matricea H_{aug} este pozitiv definită, comanda optimă mai trebuie să verifice numai condiția de necesitate (5.2.5.a), respectiv:

$$\frac{\partial F_{N_p, M_c}}{\partial \underline{U}_{aug}}(\underline{U}_{aug}^*) = 0 \quad (5.4.19.a)$$

a căreia soluție este:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{aug}^* &= -\underline{H}_{aug}^{-1} \left[\underline{F}_{aug}(\underline{X} - \underline{X}_{stat}) - \underline{H}_{aug} \underline{U}_{aug,stat} + \underline{G}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \right] = \\ &= -\underline{H}_{aug}^{-1} \underline{F}_{aug}(\underline{X} - \underline{X}_{stat}) + \underline{U}_{aug,stat} - \underline{H}_{aug}^{-1} \underline{G}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \end{aligned} \quad (5.4.19.b)$$

Comanda care se aplică procesului descris prin sistemul de ecuații (5.4.1), pentru a efectua tranziția de la momentul de timp actual t_k , la momentul de timp discret următor t_{k+1} va avea forma:

$$\underline{u}_k = \underline{u}_0^* = -\underline{K}_u^*(\underline{X} - \underline{X}_{stat}) + \underline{u}_{stat} + \underline{K}_{aug\eta}^* \underline{\eta}_{aug} \quad (5.4.20)$$

Definim matricele $\underline{K}_u^* \in R^{m \times n}$, respectiv, $\underline{K}_{aug\eta}^* \in R^{m \times N_p}$ ca primele m -linii ale matricelor $-\underline{H}_{aug}^{-1} \underline{F}_{aug}$, respectiv, $-\underline{H}_{aug}^{-1} \underline{G}_{aug}$.

În urma aplicării comenzii (5.4.20) ecuației de stare a sistemului de ecuații (5.4.1), cu $\underline{X} = \underline{X}_k$, rezultă ecuația:

$$\underline{X}_{k+1} = (\underline{A}_{prm} - \underline{B}_{prm} \underline{K}_u^*) \underline{X}_k + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} + \underline{B}_{prm} \underline{K}_{aug\eta}^* \underline{\eta}_{aug} \quad (5.4.21)$$

Printr-o alegere corespunzătoare a ponderilor cuprinse în matricele funcției obiectiv (5.4.8), va rezulta o matrice \underline{K}_u^* , astfel încât matricea $\underline{A}_{prm} - \underline{B}_{prm} \underline{K}_u^*$ a ecuației de stare (5.4.21) va avea toate valorile proprii subunitare în modul, fiind îndeplinită condiția de stabilitate asimptotică (în sens Lyapunov) a sistemului dinamic descris de ecuația (5.4.21).

Dacă în rezolvarea problemei de optimizare (5.4.8) se impune și un set de restricții, asupra intrărilor și ieșirilor, de forma:

$$\underline{u}_{min} \leq \underline{u}_k \leq \underline{u}_{max}, k = \overline{0, M_c - 1} \quad (5.4.22.a)$$

$$\underline{y}_{min} \leq \underline{y}_k \leq \underline{y}_{max}, k = \overline{1, N_p - 1} \quad (5.4.22.b)$$

$$\delta \underline{u}_{min} \leq \underline{u}_k - \underline{u}_{k-1} \leq \delta \underline{u}_{max}, k = \overline{0, M_c - 1} \quad (5.4.22.c)$$

cu observația că $\underline{u}_{-1} = \underline{u}_{k-1}$ reprezintă comanda calculată și aplicată procesului reglat la momentul de timp discret $k-1 \equiv -1$, anterior momentului de timp actual considerat $k \equiv 0$ (conform convenției de notare făcute la începutul capitolului).

Pentru stare vor exista restricțiile:

$$\underline{X}_k \in S_{con_k} = \left\{ \underline{X} \in R^n / \underline{b}_{ineg_k} \underline{X} \leq \underline{\beta}_{ineg_k} \right\} \quad (5.4.22.d)$$

Restricțiile impuse (5.4.22) pot fi scrise compact, folosind notațiile (5.4.12.a) și ecuațiile (5.4.1) ale modelului procesului, sub forma matriceală a unei restricții lineare a semnalului de control \underline{U}_{aug} , de forma:

$$\underline{L}_{com}\underline{U}_{aug} \leq \underline{W}_{com} \quad (5.4.23)$$

în care:

$$\underline{L}_{com} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{M_c m} \\ \underline{\Phi}_{aug} \\ \underline{E}_{aug} \\ -\underline{I}_{M m} \\ -\underline{\Phi}_{aug} \\ -\underline{E}_{aug} \\ -\underline{L}_{aug} \end{bmatrix}, \quad \underline{W}_{com} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{aug_{max}} \\ \underline{Y}_{aug_{max}} \\ \delta \underline{U}_{aug_{max}} \\ \underline{U}_{aug_{min}} \\ \underline{Y}_{aug_{min}} \\ \delta \underline{U}_{aug_{min}} \\ \underline{W}_{aug} \end{bmatrix} \quad (5.4.24)$$

În (5.4.24):

$\underline{I}_{M_c m} \in R^{M_c m \times M_c m}$ reprezintă matricea unitate,

$$\underline{\Phi}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{prm} \underline{B}_{prm} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{B}_{prm} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c-2} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{B}_{prm} \\ \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c-1} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^2 \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-1} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-2} \underline{B}_{prm} & \cdot & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c+1} \underline{B}_{prm} & \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-M_c} \underline{B}_{prm} \end{bmatrix} \in R^{(N_p-1)m \times M_c m}$$

$$\underline{E}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{I}_m & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\underline{I}_m & \underline{I}_m & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & -\underline{I}_m & \underline{I}_m \end{bmatrix} \in R^{M_c m \times M_c m}, \quad \underline{L}_{aug} = \text{diag} \left\{ b_{ineg_1}^t, b_{ineg_2}^t, \dots, b_{ineg_{N_p}}^t \right\} \underline{\Gamma}_{aug},$$

cu $\underline{I}_m \in R^{m \times m}$ matrice unitate, respectiv, $\underline{\Gamma}_{aug}$ dată în relația (5.4.12.b).

Vectorii care formează vectorul \underline{W}_{com} au următoarea formă:

$$\underline{U}_{aug_{max}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{max} \\ \dots \\ \underline{u}_{max} \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_{aug_{min}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{min} \\ \dots \\ \underline{u}_{min} \end{bmatrix}, \quad \delta \underline{U}_{aug_{max}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{-1} + \delta \underline{u}_{max} \\ \delta \underline{u}_{max} \\ \dots \\ \delta \underline{u}_{max} \end{bmatrix}, \quad \delta \underline{U}_{aug_{min}} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{-1} + \delta \underline{u}_{min} \\ \delta \underline{u}_{min} \\ \dots \\ \delta \underline{u}_{min} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_{aug,max} &= \begin{bmatrix} \underline{y}_{max} - \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm} \underline{X} - \underline{\eta}_1 \\ \dots \\ \underline{y}_{max} - \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{X} - \underline{\eta}_{M_c} \\ \underline{y}_{max} - \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c+1} \underline{X} - \underline{\eta}_{M_c+1} - \underline{C}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \dots \\ \underline{y}_{max} - \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-1} \underline{X} - \underline{\eta}_{N_p-1} - \sum_{i=0}^{N_p-M_c-2} \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^i \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \end{bmatrix}, \\
 \underline{Y}_{aug,min} &= \begin{bmatrix} -\underline{y}_{min} + \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm} \underline{X} + \underline{\eta}_1 \\ \dots \\ -\underline{y}_{min} + \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{X} + \underline{\eta}_{M_c} \\ -\underline{y}_{min} + \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{M_c+1} \underline{X} + \underline{\eta}_{M_c+1} + \underline{C}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \dots \\ -\underline{y}_{min} + \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^{N_p-1} \underline{X} + \underline{\eta}_{N_p-1} + \sum_{i=0}^{N_p-M_c-2} \underline{C}_{prm} \underline{A}_{prm}^i \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \end{bmatrix}, \\
 \underline{W}_{aug} &= -diag \left\{ \underline{b}_{ineg_1}^t \quad \underline{b}_{ineg_2}^t \quad \dots \quad \underline{b}_{ineg_{N_p}}^t \right\} \begin{bmatrix} \underline{A}_{prm} \underline{X} \\ \dots \\ \underline{A}_{prm}^{M_c} \underline{X} \\ \underline{A}_{prm}^{M_c+1} \underline{X} + \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \underline{A}_{prm}^{M_c+2} \underline{X} + \underline{A}_{prm} \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \\ \dots \\ \underline{A}_{prm}^{N_p} \underline{X} + \sum_{i=0}^{N_p-M_c-1} \underline{A}_{prm}^i \underline{B}_{prm} \underline{u}_{stat} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{ineg_1} \\ \beta_{ineg_2} \\ \dots \\ \beta_{ineg_{N_p}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

În prezența restricțiilor se impune ca și valorile de regim staționar $\underline{y}_s = \underline{y}^*$, \underline{u}_{stat} și \underline{x}_{stat} să fie valori admisibile (adică să satisfacă restricțiile).

Pe baza celor prezentate, problema de optimizare a funcției obiectiv (5.4.8) cu restricțiile impuse (5.4.23) se poate echivala cu o problemă de optimizare pătratică cu restricții lineare de felul celei descrise în subcapitolul 5.3:

$$\min_{\underline{u}_{aug} \in R^{mM_c}} \left\{ f(\underline{u}_{aug}) = \frac{1}{2} \underline{u}_{aug}^t \underline{H}_{aug} \underline{u}_{aug} + \underline{u}_{aug}^t \left[\underline{F}_{aug} (\underline{X} - \underline{X}_{stat}) - \underline{H}_{aug} \underline{u}_{aug,stat} + \underline{G}_{aug} \underline{\eta}_{aug} \right] \right\} \quad (5.4.25.a)$$

$$\text{cu restricțiile: } \underline{L}_{com} \underline{u}_{aug} \leq \underline{W}_{com} \quad (5.4.25.b)$$

Întrucât termenul \underline{F}_{stat} , relația (5.4.18.a), este independent de \underline{u} , nu a mai fost inclus în problema de optimizare (5.4.25).

În urma rezolvării problemei de optimizare pătratică lineară la momentul de timp discret t_k , ținând seama de cele prezentate în subcapitolul 5.3, din soluția optimală $\underline{u}_{aug}^*(\underline{X})$ se vor reține primele m -componente care vor forma legea de comandă:

$$\underline{u}_k = \underline{K}_{lege}(\underline{x}_k, \underline{\eta}_{stat}, \underline{y}^*, \underline{\eta}_{aug}) \quad (5.4.26)$$

Această lege va conduce procesul, descris prin modelul (5.4.1), la momentul de timp discret t_{k+1} următor, moment de timp la care se va relua rezolvarea problemei de optimizare pentru determinarea unui nou semnal de comandă.

Potrivit acestui rezultat, metoda prezentată pentru rezolvarea problemei de control optimal linear cu orizont de predicție fixat se bazează pe ipoteza că mărimile de stare ale procesului condus, inclusiv perturbațiile, sunt măsurabile. Acest lucru este redat în schema din Fig. 5.4.1. Legea de comandă (5.4.26) este implementată prin reacție după stare, devenind astfel o lege de reglare.

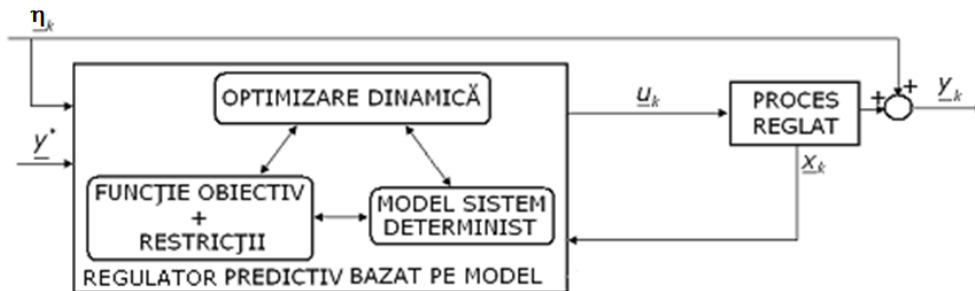


Fig. 5.4.1. Regulator predictiv bazat pe model cu reacție după starea procesului

Când starea și perturbația nu sunt măsurabile este necesară folosirea unui *observator de stare* care va furniza o estimare combinată a stării și perturbației, urmând ca valorile estimate ale acestora să fie folosite la implementarea algoritmului de control ca și cum ar fi cele adevărate, din proces. Acest lucru este ilustrat în Fig. 5.4.2, în care algoritmul de control (5.4.26) este utilizat prin folosirea valorilor estimate ale stării $\hat{\underline{x}}_k$, respectiv, ale perturbației $\hat{\underline{\eta}}_k$ ca și valori adevărate.

În [21] se arată că această abordare, cu ignorarea unor aspecte suplimentare de optimalitate, conduce la o soluție suboptimală, apropiată ca performanțe de cea optimală, suboptimalitatea admițându-se datorită reducerii efortului de calcul numeric.

Tot în [42] se arată că pentru problemele practice de implementare care necesită prezența și a unui observator de stare, în anumite ipoteze, bucla de reacție a sistemului de reglare obținut trebuie să aibă un caracter integrator pentru a asigura anularea erorii de ieșire staționare. Aceste ipoteze presupun ca sistemul de reglare în buclă închisă să atingă o stare staționară în care nici o restricție să nu fie activă astfel încât comanda staționară să verifice o relație similară cu (5.4.20). Dacă matricea $\underline{A}_{prm} - \underline{B}_{prm} \underline{K}_u^*$ (5.4.21) are toate valorile proprii subunitare, valoarea de regim staționar pe care o atinge ieșirea procesului reglat corespunde traiectoriei prescrise $\underline{y}^* = const$.

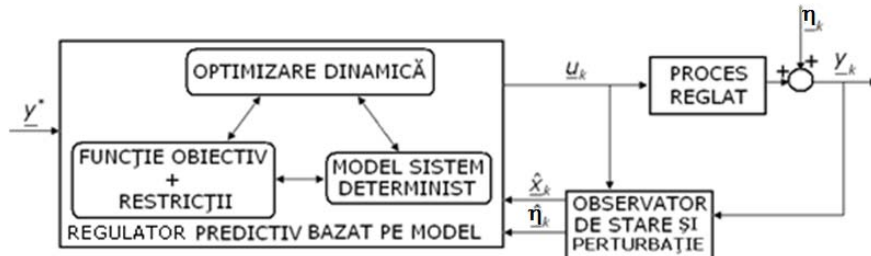


Fig. 5.4.2. Regulator predictiv bazat pe model cu observator de stare și perturbație

5.5. Implementarea algoritmului de control optimal cu orizont de predicție fixat a dinamicii presiunii de ieșire a unui tronson de conductă alimentat de la o sursă de gaze

Într-o primă fază, algoritmul de control predictiv bazat pe model, prezentat în subcapitolul precedent, va fi implementat și simulat la nivelul unui tronson de conductă.

Pentru aceasta, în figura 5.5.1.a, se consideră tronsonul de conductă de lungime L și diametru interior D , având secțiunea de curgere: $A = \frac{\pi D^2}{4}$. Între cele două capete ale tronsonului există diferența de nivel Δh . Înclinația conductei față de orizontală este $\alpha = \arcsin \frac{\Delta h}{L}$.

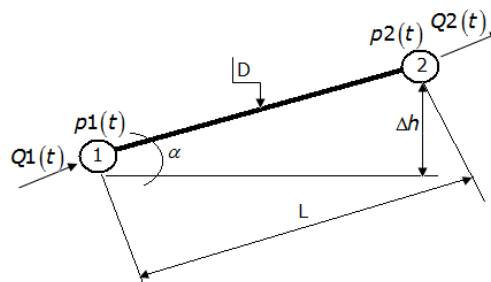


Fig. 5.5.1.a. Tronson de conductă

În nodul de intrare, notat cu ①, este conectată sursa de presiune iar în nodul de ieșire, notat cu ②, este conectat consumatorul. Se notează cu $p1(t)$ - presiunea din nodul de intrare în tronson (presiunea sursei de gaz) și cu $Q1(t)$ - debitul de intrare în tronson, respectiv, $p2(t)$ - presiunea de ieșire din tronson și $Q2(t)$ - debitul de gaz de ieșire din tronson (debitul de gaz cerut de consumator).

Ținând seama de cele expuse în cadrul capitolului 1 referitoare la automatizarea nodurilor tehnologice, în figura 5.5.1.b se prezintă o schemă tehnologică minimală, pentru implementare algoritmului de control predictiv, schemă care prezintă o structură ierarhizată, împărțită pe 3 niveluri funcționale cu scopul reducerii complexității acesteia, respectiv: nivelul proces, nivelul comunicație și nivelul dispecer.

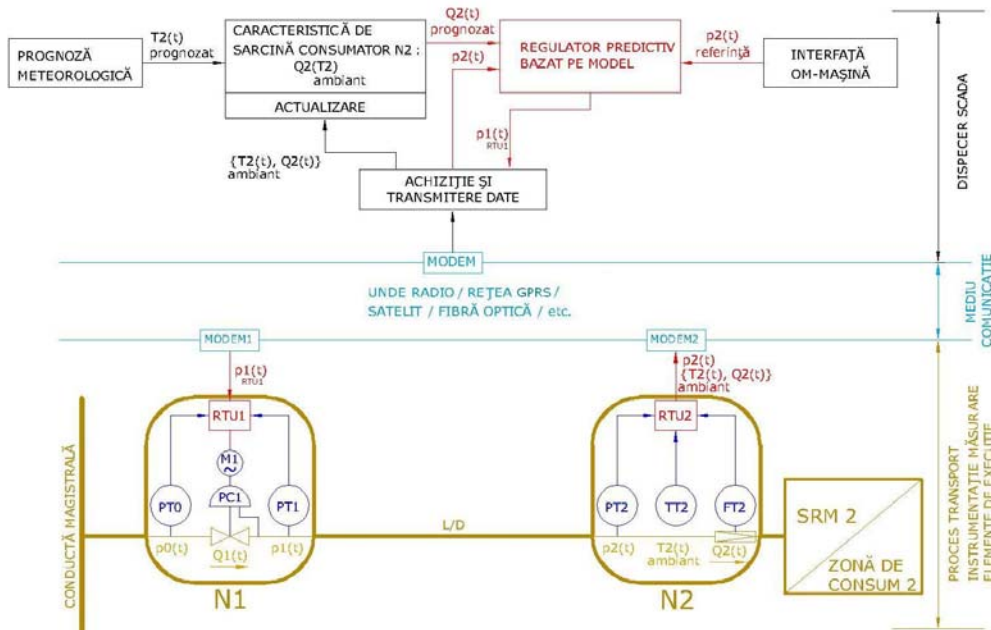


Fig. 5.5.1.b. Schemă tehnologică minimală, pentru implementare algoritmului de control predictiv bazat pe model a dinamicii presiunii de ieșire dintr-un tronson de conductă

La nivelul proces este localizat practic procesul condus împreună cu toată instrumentația de măsurare, elementele de execuție și unitățile locale de control în care sunt implementate buclele de automatizare locale a celor două noduri tehnologice $N1$ și $N2$. În felul acesta avem un control supervizat, de la distanță, a funcționării nodurilor tehnologice, prin achiziția, respectiv, transmiterea spre proces numai a unor valori de parametri de proces și anume cei necesari monitorizării acestuia, respectiv, de referință pentru cei care trebuie controlați. Menținerea parametrilor controlați la aceste valori de referință, transmise de la dispecer rămân în sarcina buclelor de automatizare locală.

Astfel, în nodul de intrare $N1$, prin intermediul traductoarele de presiune statică $PT0$ și $PT1$ și regulatorul de presiune $PC1$ cu prescrierea referinței prin motorul electric de acționare $M1$ este implementat, în unitatea de control local $RTU1$, un sistem de reglare a presiunii de ieșire $p1$ din nod, de la valoarea presiunii $p0$ a sursei de gaz (conducta magistrală) la valoarea de referință $p1_{ref}$ transmisă de către dispecerul sistemului de transport.

În schimb, automatizarea nodului de ieșire $N2$ se reduce numai la un sistem de achiziție parametrilor și anume: presiune $p2$, temperatură mediu ambiant $T2$ și debit $Q2$ consumator (stație de reglare măsurare a unui consumator sau o zonă de

consum). Acest sistem este format din traductoarele: de presiune statică $PT2$, de temperatură $TT2$ și de debit gaz $FQ2$, împreună cu unitatea locală de control $RTU2$.

Legătura informațională dintre nivelul proces și nivelul dispecer este asigurată prin intermediul nivelului comunicație care cuprinde, practic, mediul de comunicație care poate asigura transportul informației pe distanțe geografice mari (unde radio, rețea GPRS, satelit, fibră optică, etc.). Fiecare unitate de control locală sau calculatoarele dispecerului transmite informația prin conectare la un modem de interfață.

Implementarea practică a algoritmului de control predictiv, cu luarea în considerare și a aspectelor auxiliare referitoare la estimarea momentului apariției de timp al perturbației de debit descrise în capitolul 1 al lucrării se realizează la nivelul dispecerului. Practic pe baza unei prognoze meteorologice pe termen scurt (1-3zile), se poate obține o evoluție probabilă a temperaturii mediului ambiant $T2_{progn}$ al consumatorului (sau a zonei de consum) deservit de tronsonul de conductă de transport. Această prognoză, pe baza caracteristicii de sarcină a consumatorului, reprezentată de curba de dependență a debitului de gaz $Q2$ funcție cu temperatura mediului ambiant $T2_{amb}$, actualizată permanent pe baza măsurătorilor reale, permite estimarea unei evoluții a debitului de gaz consumat $Q2_{progn}$ pe durata luată în calcul în întocmirea ei. Folosind această estimare de debit consumat precum și măsurătorile valorii presiunii $p2$ la consumator, o structură de reglare predictivă implementată la nivelul calculatorului dispecerului va calcula valoarea presiunii $p1_{RTU1}$ care trebuie menținută în nodul de intrare $N1$ astfel încât presiunea la consumatorul din nodul $N2$ să se mențină la valoarea de referință $p2_{ref}$ impusă de operatorul uman în condițiile existenței perturbației de sarcină reprezentate de variația debitului consumat $Q2$ conform estimării realizate.

În cele ce urmează se va prezenta o modalitate de implementare a algoritmului de control predictiv dezvoltat în cadrul subcapitolului precedent.

Proces de curgere al gazului prin tronsonul de conductă se consideră că are loc în regim termodinamic izoterm la temperatura medie T_M , descris de modelul matematic simplificat (5.5.1):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \xi_1(p) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5.5.1.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \xi_2(p) \frac{Q|Q|}{p} + \xi_3(p)p = 0 \quad (5.5.1.b)$$

cu parametrii:

$$\xi_1(p) = \frac{(1 - \tau p)^2 R_p T_M}{A} \quad (5.5.2.a)$$

$$\xi_2(p) = \frac{(1 - \tau p) \lambda R_p T_M}{2 D A^2} \quad (5.5.2.b)$$

$$\xi_3(p) = \frac{g \cdot \sin \alpha}{(1 - \tau p) R_p T_M} \quad (5.5.2.c)$$

Semnificațiile mărimilor care intervin în scrierea parametrilor $\xi(p)$ sunt cele cunoscute din capitolul 4.

Mărimile caracteristice procesului de curgere sunt: presiunea $p(x,t)$ și debitul masic $Q(x,t)$ definite ca funcții continue pe domeniul continuu: $D = [0, L] \times [0, t_{final}]$.

Prin orientarea sistemului de ecuații diferențiale (5.5.1), potrivit condițiilor limită:

- a) inițiale: $p(x, 0), Q(x, 0)$ pentru $x \in [0, L]$;
- b) de frontieră: $p(0, t) = p1(t), Q(L, t) = Q2(t)$ pentru $t \in [0, t_{final}]$.

se obține reprezentarea sistemică p1Q2 a modelului matematic simplificat al procesului de curgere din figura 5.5.2.

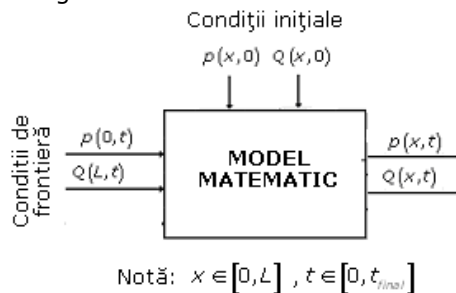


Fig. 5.5.2. Reprezentare sistemică p1Q2 asociată modelului procesului de curgere realizat la nivelul tronsonului de conductă

Pe baza acestei reprezentări sistematice și prin considerarea unei rețele de discretizare spațială uniformă a traseului tronsonului caracterizată prin împărțirea acestuia în m -puncte $\{x_1 = 0, x_2 = \Delta x, \dots, x_m = L\}$ cu pasul de discretizare $\Delta x = \frac{L}{m-1}$, și, prin discretizarea derivatelor spațiale, procesul cu parametrii distribuți descris de reprezentarea sistemică aleasă se aproximează cu un proces cu parametrii concentrați în punctele de discretizare spațială alese.

În acest context, pentru discretizarea derivatelor spațiale în nodul de intrare asociat primului punct de discretizare spațială, $j = 1$, în punctele intermediare de discretizare spațială $j = \overline{2, m-1}$, respectiv, în nodul de ieșire, asociat ultimului punct de discretizare spațială $j = m$ se vor folosi următoarele formule de discretizare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) = \frac{-3f(x_1, t) + 4f(x_2, t) - f(x_3, t)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{-3f_1(t) + 4f_2(t) - f_3(t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (5.5.3.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, t) = \frac{f_{j+1}(t) - f_{j-1}(t)}{2 \cdot \Delta x}, \quad j = \overline{2, m-1} \quad (5.5.3.b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t) = \frac{f_{m-2}(t) - 4f_{m-1}(t) + 3f_m(t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (5.5.3.c)$$

Facem următoarele notații:

- a) $\underline{X}_p = [p_2 \ p_3 \ p_4 \ \dots \ p_{m-1} \ p_m]^t$ - vectorul de stare asociat distribuției de presiune;
- b) $\underline{X}_Q = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ \dots \ Q_{m-2} \ Q_{m-1}]^t$ - vectorul de stare asociat distribuției de debit;
- c) $\underline{u} = [p_1 \ Q_m]^t$ - vectorul intrărilor astfel încât: $p_1(t) = p1(t)$, respectiv, $Q_m(t) = Q2(t)$.

Prin discretizarea spațială a ecuației presiunii (5.5.1.a) se obține un sistem de ecuații diferențiale ordinare având următoarea reprezentare matriceală:

$$\frac{d}{dt} \underline{X}_p = \underline{A}_p(\underline{X}_p) \underline{X}_Q + \underline{B}_p(\underline{X}_p) u_2 \quad (5.5.4.a)$$

în care:

$$\underline{A}_p(\underline{X}_p) = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \begin{bmatrix} \xi_{12} & 0 & -\xi_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{14} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{1m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\xi_{1m} & 4\xi_{1m} \end{bmatrix} \quad (5.5.4.b)$$

$$\underline{B}_p(\underline{X}_p) = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -\xi_{1m-1} \\ -3\xi_{1m} \end{bmatrix} \quad (5.5.5.c)$$

S-a folosit notația: $\xi_{1j} = \xi_1(p_j)$, $j = \overline{2, m}$.

Referitor la ecuația (5.5.1.b) a debitului se observă că:

$$\text{sign} \left[\frac{\xi_2(p)}{p} Q |Q| \right] = \text{sign} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} - \xi_3(p) p \right] \quad (5.5.6.a)$$

astfel că:

$$\text{sign}(Q) = \text{sign} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} - \xi_3(p) p \right] \quad (5.5.6.b)$$

Introducând pentru căderea de presiune notația:

$$\Delta p = -\frac{\partial p}{\partial x} - \xi_3(p) p, \quad (5.5.7)$$

se obține următoarea formulă pentru calcularea debitului la nivelul unui punct de discretizare spațială $j = \overline{1, m}$:

$$Q_j = \text{sign}(\Delta p_j) \sqrt{\frac{p_j}{\xi_2(p_j)}} |\Delta p_j| \quad (5.5.8)$$

Calcularea căderii de presiune Δp_j se va face ținând seama de formulele de discretizare (5.5.3).

În felul acesta, rezultă un sistem de relații algebrice de calcul a vectorului de stare asociat distribuției de debit \underline{X}_Q , funcție de vectorul de stare asociat distribuției de presiune \underline{X}_p , reprezentate vectorial prin intermediul funcției neliniare

$$\underline{\psi}_Q : R^m \rightarrow R^{m-1} :$$

$$\underline{X}_Q(t) = \underline{\psi}_Q[\underline{X}_p(t), u_1(t)] \quad (5.5.9)$$

Prin înlocuirea distribuției de debit X_Q , din relația (5.5.9) în relația (5.5.4.a) rezultă următorul model matematic nelinier de aproximare a dinamicii presiunii ca un proces cu parametri concentrați în punctele de discretizare:

$$\frac{d}{dt} X_p(t) = A_p[X_p(t)] \cdot \Psi_Q[X_p(t), u_1(t)] + B_p[X_p(t)] \cdot u_2(t) = \Psi_p[X_p(t), u(t)] \quad (5.5.10)$$

în care $\Psi_p : R^m \rightarrow R^{m-1}$ este o funcție neliniară asociată procesului.

Simularea numerică a procesului de curgere prin intermediul unui model de aproximare nelinier asociat unui proces cu parametri concentrați în punctele de discretizare se va face astfel:

- a) Inițializarea:** La momentul inițial de timp $t_1 = 0$ se procedează astfel: se alege un regim staționar de curgere caracterizat prin presiunea de intrare: $p_{1,1} = p(x_1, t_1) = p_1(0)$ și debitul staționar: $Q_{1,1} = \dots = Q_{m,1} = Q_2(0)$ pentru care trebuie calculată distribuția de presiune $\{p_{j,1}\}$ în punctele de discretizare $j = \overline{2, m}$ prin integrarea numerică a ecuației debitului (5.5.1.b) scrisă pentru regimul staționar:

$$\frac{dp_{j,1}}{dx} = -\xi_2(p_{j-1,1}) \frac{Q_{j-1,1} |Q_{j-1,1}|}{p_{j-1,1}} - \xi_3(p_{j-1,1}) p_{j-1,1} \quad (5.5.11)$$

Se formează, apoi, vectorii de stare asociați distribuției de presiune și de debit: , respectiv intrărilor:

$$X_p(t_1) = [p_{2,1} \ p_{3,1} \ p_{4,1} \ \dots \ p_{m-1,1} \ p_{m,1}]^t,$$

$$X_Q(t_1) = [Q_{1,1} \ Q_{2,1} \ Q_{3,1} \ \dots \ Q_{m-2,1} \ Q_{m-1,1}]^t, \quad u(t_1) = [p_{1,1} \ Q_{m,1}]^t.$$

- b) Tranziția $k \rightarrow k+1$:** La iterația de calcul k asociată momentului de timp t_k , având cunoscute mărimile: $X_p(t_k)$, $X_Q(t_k)$, $u(t_k)$, matricele: $A_p(t_k) = A_p[X_p(t_k)]$, $B_p(t_k) = B_p[X_p(t_k)]$, respectiv funcția neliniară de debit: $\Psi_Q[X_p(t_k), u_1(t_k)]$, din (5.5.9), se integrează numeric ecuația (5.5.10), rescrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt} X_p(t_k) = \Psi_p[X_p(t_k), u(t_k)] \quad (5.5.12)$$

pe intervalul de timp $[t_k, t_{k+1}]$ de lungime: $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, obținându-se vectorul de stare asociat distribuției de presiune de la momentul de timp următor t_{k+1} : $X_p(t_{k+1})$. Pe baza noii distribuții de presiune, cuprinsă în vectorul $X_p(t_{k+1})$ se calculează vectorul de stare asociat distribuției de debit $X_Q(t_{k+1})$, folosind relațiile (5.5.8) rescrise sub forma:

$$Q_{j,k+1} = \text{sign}(\Delta p_{j,k+1}) \sqrt{\frac{p_{j,k+1}}{\xi_2(p_{j,k+1})} |\Delta p_{j,k+1}|} \quad (5.5.13)$$

Revenind la modul în care a fost formulată problema de control prezentată în subcapitolul 5.4 precizăm că este necesară liniarizarea [27] modelului nelinier

(5.5.10) al procesului cu parametri concentrați pentru a obține un model discret liniar al procesului care să poată fi folosit conform cerințelor algoritmului.

În modelul matematic (5.5.10), neliniaritatea este introdusă de termenul $\frac{Q|Q|}{p}$. Dacă impunem condiția ca sursa de alimentare cu gaz din nodul de intrare 1 să fie doar o sursă care injectează gaz, înseamnă că nu va mai fi posibilă o schimbare a sensului de curgere al gazului prin tronson (adică $Q < 0$) astfel încât termenul neliniar devine $\frac{Q^2}{p}$. Acest termen, liniarizat prin descompunere în serie Taylor până la termenii de ordinul 1, în jurul valorilor discrete inițiale $\{p_{j,1}, Q_{j,1} / j = \overline{1, m-1}\}$, devine:

$$\frac{Q_{j,k}^2}{p_{j,k}} = -\frac{Q_{j,1}^2}{p_{j,1}^2} \tilde{p}_{j,k} + \frac{2Q_{j,1}}{p_{j,1}} \tilde{Q}_{j,k} \quad (5.5.14)$$

Revenind la ecuația (5.5.1), aproximarea derivatei parțiale $\frac{\partial p}{\partial x}$ prin folosirea formulelor de discretizare (5.5.3), respectiv, înlocuirea termenului $\frac{Q^2}{p}$, folosind relația (5.5.14) conduce la un sistem algebric de ecuații liniare de forma:

$$\begin{cases} \frac{-3\tilde{p}_{1,k} + 4\tilde{p}_{2,k} - \tilde{p}_{3,k}}{2 \cdot \Delta x} + a_{1,1}\tilde{p}_{1,k} + a_{2,1}\tilde{Q}_{1,k} = 0 \\ \frac{\tilde{p}_{j+1,k} - \tilde{p}_{j-1,k}}{2 \cdot \Delta x} + a_{1,j}\tilde{p}_{j,k} + a_{2,j}\tilde{Q}_{j,k} = 0, j = \overline{2, m-1} \end{cases} \quad (5.5.15.a)$$

în care:

$$a_{1j} = \xi_{3j} - \frac{Q_{j,k}^2}{p_{j,k}^2} \xi_{2j} \quad (5.5.15.b)$$

$$a_{2j} = \frac{2Q_{j,1}}{p_{j,1}} \xi_{2j} \quad (5.5.15.c)$$

iar: $\{\xi_{ij} = \xi_i(p_{j,1}) / i = 1, 2, 3, j = \overline{1, m-1}\}$.

Sistemul liniar de ecuații algebrice (5.5.15.a) va permite calcularea, prin intermediul unei relații liniare, a unei distribuții a debitului, notată cu $\bar{X}_Q(t_k)$, de forma:

$$\bar{X}_Q(t_k) = \underline{A}_Q [\bar{X}_p(t_1)] \bar{X}_p(t_k) + \underline{B}_Q [\bar{X}_p(t_1)] u_1(t_k) \quad (5.5.16.a)$$

în care:

$$A_Q[\bar{X}_p(t_1)] = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \frac{4}{a_{11}} & \frac{1}{a_{21}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{2\Delta x \cdot a_{12}}{a_{2,2}} & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_{2,3}} & \frac{2\Delta x \cdot a_{13}}{a_{23}} & \frac{1}{a_{23}} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{2m-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2\Delta x \cdot a_{1m-1}}{a_{2m-1}} & \frac{1}{a_{2m-1}} \end{bmatrix} = const \quad (5.5.16.b)$$

$$B_Q[\bar{X}_p(t_1)] = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \begin{bmatrix} \frac{3}{a_{21}} - \frac{2\Delta x \cdot a_{11}}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{22}} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = const \quad (5.5.16.c)$$

În aceste condiții, înlocuind din relația liniară (5.5.16.a) vectorul de stare asociat distribuției debitului $\bar{X}_Q(t_k)$, calculat la momentul de timp t_k , în ecuația presiunii (5.5.4.a), rezultă următorul sistem liniar de ecuații diferențiale ordinare, care descrie dinamica presiunii în vecinătatea setului de puncte de liniarizare $\{p_{j,1}, Q_{j,1} / j = \overline{1, m}\}$, având următoarea reprezentare matriceală:

$$\frac{d}{dt} \bar{X}_p(t_k) = A_{prm} \bar{X}_p(t_k) + B_{prm} u(t_k) \quad (5.5.17)$$

în care:

$$A_{prm} = A_p A_Q = const \quad (5.5.18.a)$$

$$B_{prm} = [A_p B_Q \quad B_p] = const \quad (5.5.18.b)$$

Ținând seama de cele prezentate în cadrul capitolelor 3 și 4, matricea A_{prm} a modelului continuu (5.5.17) are toate valorile proprii amplasate în semiplanul stâng al planului complex astfel încât procesul caracterizat prin modelul considerat este un proces asimptotic stabil (în sens Lyapunov).

Prin scăderea valorii pasului de discretizare al spațiului Δx , sistemul de ecuații (5.5.17) tinde spre un sistem inflexibil de ecuații diferențiale („stiff”) caracterizat prin valorile proprii extremale de ordine de mărime diferite ceea ce pune probleme în alegerea pasului de discretizare al timpului Δt .

Printr-o discretizare implicită în timp a ecuației (5.5.17) de forma:

$$\frac{\bar{X}_p(t_{k+1}) - \bar{X}_p(t_k)}{\Delta t} = A \bar{X}_p(t_{k+1}) + B u(t_{k+1}) \quad (5.5.19)$$

se obține sistemul de ecuații în timp discret:

$$\bar{X}_p(k+1) = \Phi_{prm} \bar{X}_p(k) + \Gamma_{prm} u(k+1), \quad (5.5.20)$$

asimptotic stabil, indiferent de valoarea pasului de discretizare al timpului Δt (vezi capitolul 3).

Matricele sistemului de ecuații discrete (5.5.20) au următoarea formă:

$$\Phi_{prm} = (I_{m-1} - \Delta t \cdot A_{prm})^{-1} \quad (5.5.21.a)$$

$$\Gamma_{prm} = \Phi_{prm} \cdot \Delta t \cdot B_{prm} \quad (5.5.21.b)$$

La rândul ei, matricea Φ_{prm} a sistemului de ecuații discrete (5.5.20) va fi o matrice care va avea toate valorile proprii subunitare (vezi subcapitolul 4.4).

Simularea numerică a procesului de curgere prin intermediul unui model de aproximare liniar asociat unui proces cu parametrii concentrați în punctele de discretizare, de forma (5.5.20) se va face astfel:

- a) Inițializarea:** La momentul inițial de timp $t_1 = 0$ se alege un regim staționar de curgere caracterizat prin presiunea de intrare: $\bar{p}_{1,1} = p_{1,1} = p(x_1, t_1) = p_1(0)$ și debitul staționar: $\bar{Q}_{1,1} = \dots = \bar{Q}_{m,1} = Q_{m,1} = Q_2(0)$. Se calculează distribuția de presiune $\{\bar{p}_{j,1}\}$ în punctele de discretizare $j = \overline{2, m}$ prin integrarea numerică a ecuației debitului (5.5.1.b), liniarizate în baza formulei (5.5.14), scrisă pentru regimul staționar:

$$\frac{d\bar{p}_{j,1}}{dx} = -a_{1j}\bar{p}_{j,1} - a_{2j}\bar{Q}_{j,1} \quad (5.5.22)$$

Cea mai simplă metodă de integrare numerică rezultă din folosirea următoarei formule de discretizare a derivatei: $\frac{d\bar{p}_{j,1}}{dx} = \frac{\bar{p}_{j+1,1} - \bar{p}_{j,1}}{\Delta x}$ care conduce la

$$\bar{p}_{j+1,1} = (1 - \Delta x a_{1j})\bar{p}_{j,1} - \Delta x a_{2j}\bar{Q}_{j,1}, \quad j = \overline{2, m} \quad (5.5.23)$$

Se formează, apoi, vectorii de stare asociați distribuției de presiune și de debit, calculați în baza unor relații liniare, respectiv, ai intrărilor:

$$\bar{X}_p(t_1) = [\bar{p}_{2,1} \quad \bar{p}_{3,1} \quad \bar{p}_{4,1} \quad \dots \quad \bar{p}_{m-1,1} \quad \bar{p}_{m,1}]^t,$$

$$\bar{X}_Q(t_1) = [\bar{Q}_{1,1} \quad \bar{Q}_{2,1} \quad \bar{Q}_{3,1} \quad \dots \quad \bar{Q}_{m-2,1} \quad \bar{Q}_{m-1,1}]^t, \quad \underline{u}(t_1) = [p_{1,1} \quad Q_{m,1}]^t,$$

precum și matricele procesului discret (5.5.17) Φ și Γ .

- b) Tranziția $k \rightarrow k + 1$:** La iterația de calcul k , asociată momentului de timp t_k , având cunoscuți vectorii de stare: $\bar{X}_p(t_k)$, $\bar{X}_Q(t_k)$, se calculează vectorii de stare $\bar{X}_p(t_{k+1})$, respectiv, $\bar{X}_Q(t_{k+1})$, la momentul de timp următor $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, folosind ecuațiile discrete (5.5.17), respectiv, (5.5.16.a), având drept mărime de intrare $\underline{u}(t_k)$.

Simulările numerice ale unui proces de curgere printr-un tronson de conductă de lungime: $L = 100 \text{ km}$, diametru interior: $D = 0,5 \text{ m}$, diferență de nivel: $\Delta h = 0 \text{ m}$ între capete, proces inițializat din starea staționară caracterizată prin presiunea de intrare: $p_1(0) = 20 \text{ bar}$ și debitul staționar: $Q_1(0) = Q_2(0) = 32.500 \text{ Nm}^3 / \text{h}$, în condițiile aplicării unor semnale de tip treaptă pentru presiunea de intrare în tronson $p_1(t)$, respectiv de debit $Q_2(t)$ cu $t > 0$ au condus la evoluțiile dinamice ale presiunii de ieșire din tronson $p_2(t)$, reprezentate în figurile următoare. S-a considerat o temperatură medie de curgere: $T_M = 10^\circ \text{C}$.

Pentru modelul neliniar al procesului s-au luat: $m = 9$ puncte de discretizare spațială, iar pentru modelul liniar discret: $\bar{m} = 5$ puncte. Pasul de discretizare a timpului s-a ales la valoarea de: $\Delta t = 240s$.

Din punct de vedere teoretic [28], după cum s-a arătat și în cadrul capitolului 3, folosirea metodei implicite de discretizare în timp, definite prin relația (5.5.19), în scopul determinării modelului discret de aproximare (5.5.20) al procesului de curgere nu impune nici un fel de restricție în alegerea pasului de discretizare al timpului Δt pentru ca soluția numerică să fie stabilă (model discret asimptotic stabil). Singura restricție teoretică care apare se referă la creșterea erorii de trunchiere (vezi capitol 3) pe măsura creșterii pasului de discretizare Δt .

Analiza numerică care urmează, cu rezultatele prezentate grafic în figurile 5.5.3, arată o eroare de trunchiere acceptabilă în imediata vecinătate a regimului staționar în jurul căruia s-a făcut liniarizare. În schimb, ca urmare a distribuției geografice relativ mari a procesului, achiziția datelor de la instrumentația locală și trimiterea semnalelor de comandă elementelor de execuție locale se poate face numai prin folosirea unui mediu de comunicație (radio, GPRS, satelit, fibră optică, etc.). Costurile de folosire ale acestui mediu vor putea impune o restricție tehnologică privind valoarea minimă a pasului de discretizare al timpului Δt .

Astfel, în figura 5.5.3.a sunt prezentate 3 cazuri de simulare numerică a evoluției în timp a presiunii de ieșire: $p_2(t)$ a modelului neliniar și a modelului liniar: $\bar{p}_2(t)$ (răspunsul indicial) obținute prin aplicarea a 3 semnale treaptă de presiune de intrare: $p_1(t) + \Delta p_1$, având amplitudinile: $\Delta p_1 = 2bar / 5bar / 10bar$, în condițiile menținerii constante la ieșire a debitului: $Q_2(t) = 32.500Nm^3 / h$.

Pentru cele 3 cazuri de simulare numerică, în figura 5.5.3.b, avem erorile relative procentuale date prin relația:

$$\varepsilon(p_2(t)) = \frac{p_2(t) - \bar{p}_2(t)}{p_2(t)} \times 100 \quad (5.5.24)$$

Din analiza curbelor de evoluție în timp a presiunii de ieșire, figura 5.5.3.a, cauzate de variația presiunii de intrare, se remarcă faptul că modelul liniarizat are o dinamică mai rapidă decât cea a modelului neliniar, care se va concretiza printr-o creștere accentuată a valorilor erorilor de modelare pe perioada regimurilor tranzitorii urmată de o scădere a acestora pe măsura stabilizării regimului dinamic al regimul procesului în sensul apropierii și încadrării într-un regim staționar de curgere.

În mod similar, în figura 5.5.4.a sunt prezentate 3 cazuri de simulare numerică a evoluției presiunii de ieșire: $p_2(t)$ a modelului neliniar și a modelului liniar: $\bar{p}_2(t)$ (răspunsul indicial), obținute prin aplicarea a 3 semnale treaptă de debit de ieșire: $Q_2(t) + \Delta Q_2$, având amplitudinile: $\Delta Q_2 = 5.000Nm^3 / h / 10.000Nm^3 / h / 15.000Nm^3 / h$, în condițiile menținerii constante, la intrare, a presiunii: $p_1(t) = 20bar$. În figura 5.5.4.b sunt reprezentate erorile relative procentuale calculate conform relației (5.5.24).

De data aceasta, evoluția în timp a presiunii de ieșire ca urmare a variației numai a debitului de ieșire, ca semnal de intrare, se remarcă aceeași dinamică mai rapidă a modelului liniarizat caracterizată prin creșterea asimptotică a erorilor de modelare spre o valoare limită de regim staționar.

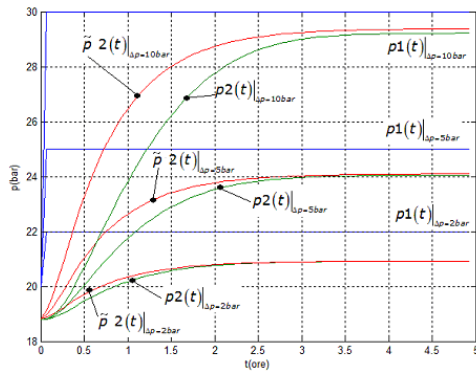


Fig. 5.5.3.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor de ieșire cauzate de variația treaptă, cu amplitudini diferite, a presiunii de intrare, obținute prin simularea numerică cu un model neliniar / liniarizat

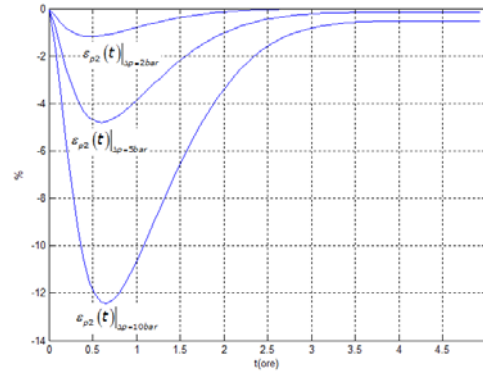


Fig. 5.5.3.b. Erorile relative procentuale în calculul presiunii de ieșire folosind un model liniarizat relativ la modelul neliniar

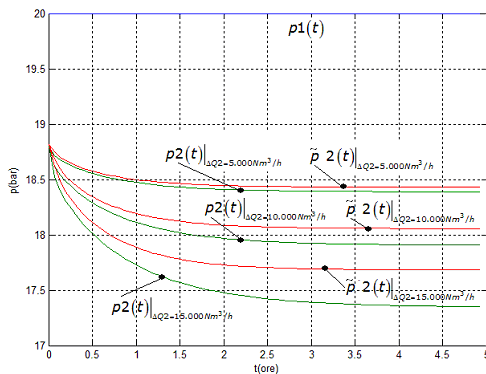


Fig. 5.5.4.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor de ieșire cauzate de variația treaptă, cu amplitudini diferite, a debitului de ieșire, obținute prin simularea numerică cu un model neliniar / liniarizat

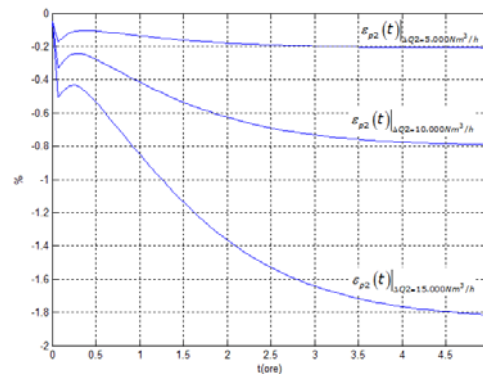


Fig. 5.5.4.b. Erorile relative procentuale în calculul presiunii de ieșire folosind un model liniarizat relativ la modelul neliniar

În concluzie, analiza valorilor erorilor din figurile 5.5.3.b și 5.5.4.b rezultate din folosirea unui model liniar, arată o creștere a acestora pe măsură ce starea procesului se „îndepărtează” de starea staționară ale cărei valori de presiune și debit au stat la baza liniarizării, ceea ce necesită o *actualizare* a modelului liniar în sensul reconsiderării unor noi stări staționare apropiate de stare curentă.

Implementarea algoritmului de control al dinamicii presiunii de ieșire din tronson se va face folosind pachetul de programe “Model Predictive Control” din mediul de lucru MATLAB [5]. Comanda se determină în sensul minimizării următoarei funcții obiectiv:

$$F_{N,M}(\{x_k\}, \{u_k\}, \{e(y)_k\}) = \sum_{k=0}^{N-1} e(y)_k^t Q_e e(y)_k + \sum_{k=0}^{M-1} \Delta u_k^t R_{\Delta u} \Delta u_k + \sum_{k=0}^{M-1} (u_k - u_s)^t R_u (u_k - u_s) \quad (5.5.25)$$

funcție obiectiv, care spre deosebire de funcția (5.4.8) ia în considerare și variația comenzii, respectiv, nu impune o stare finală fixată.

Controlul dinamicii procesului de curgere constă în manipularea presiunii de intrare $p_1(t)$, în scopul menținerii presiunii $p_2(t)$, de ieșire din tronson, la valoarea presiunii de referință $p_{2ref}(t)$ care permite respectarea condițiilor de funcționare în siguranță a consumatorului racordat la nodul ② de ieșire al tronsonului de conductă în condițiile variației (perturbației) debitului $Q_2(t)$ cerut de consumator.

Procesul condus va fi modelat prin intermediul modelului liniarizat de forma (5.5.20).

Ținând seama de modul de implementare al algoritmului de control cu model predictiv în MATLAB, intrarea $u_1(k) = p_1(k) = p_1(k)$ a modelului (5.5.20) se consideră variabila de comandă manipulată, intrarea $u_2(k) = Q_2(k) = Q_m(k)$ se consideră perturbația măsurabilă, iar ca ieșire a modelului se consideră: $y(k) = p_2(k) = p_m(k)$.

Se impun restricții privind:

- a) valoarea maximă, respectiv, minimă a presiunii sursei: $p_{1min} \leq p_1 \leq p_{1max}$;
- b) rata de variație a presiunii la sursa de presiune: $\frac{\Delta p_{1min}}{\Delta t} \leq \frac{\Delta p_1(t)}{\Delta t} \leq \frac{\Delta p_{1max}}{\Delta t}$;
- c) o valoare minimă, de siguranță, a presiunii de ieșire din tronson: $p_2(t) \geq p_{2min}$.

Simulările numerice se vor face pentru procesul de curgere prezentat anterior, aflat la momentul de timp inițial $t = 0$ în starea staționară caracterizată prin presiunea de intrare: $p_1(0) = 20bar$, debitul staționar: $Q_2(0) = 32.500Nm^3/h$. Acestui proces i se impune, la momentul $t = 3h$, o creștere a presiunii de ieșire de tip treaptă cu amplitudinea de: $\Delta p_2 = 2bar$ în condițiile păstrării neperturbate a debitului la consumator la valoarea de: $Q_2(t) = 32.500Nm^3/h$.

Pentru aceasta se consideră un sistem de control predictiv având următorii parametrii:

- a) pasul de discretizare al timpului: $\Delta t = 240s$;
- b) orizontul de predicție: $N_p = 20$;
- c) orizontul de control: $M_c = 2$;
- d) ponderile funcției obiectiv (5.5.25): $R_u = 0$, $R_{\Delta u} = 5$, $Q_e = 1$;
- e) restricțiile asupra valorii presiunii de intrare: $18bar \leq p_1(t) \leq 22bar$;
- f) restricțiile asupra ratei de variație a presiunii de intrare: $\frac{-0,15bar}{\Delta t} \leq \frac{\Delta p_1(t)}{\Delta t} \leq \frac{2bar}{\Delta t}$.

Funcția obiectiv (5.5.25) se va evalua conform formulei de calcul:

$$\begin{aligned}
 F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t) = & Q_e \sum_{i=k}^{k+N_p-1} [p2(i \cdot \Delta t) - p2_{ref}(i \cdot \Delta t)]^2 + \\
 & + R_{\Delta U} \sum_{i=k}^{k+M-1} [p1(i \cdot \Delta t) - p1((i-1) \cdot \Delta t)]^2 \\
 & + R_U \sum_{i=k}^{k+M-1} [p1(i \cdot \Delta t) - p1_{ref}(i \cdot \Delta t)]^2
 \end{aligned} \tag{5.5.26}$$

cu: $i = \overline{0, n}$ astfel încât $t_{final} = (n + 1) \cdot \Delta t$. Pentru $i < 0$ și $i > n$ se consideră că procesul se situează în regim staționar de funcționare astfel încât: $\varphi((i < 1) \Delta t) = \varphi(0)$, respectiv, $\varphi((i > n) \Delta t) = \varphi(n \cdot \Delta t)$ unde $\varphi = \{p1, p2, p2_{ref}\}$. Evoluțiile în timp ale presiunii de intrare $p1(t)$ generate de sistemul de control, respectiv, a presiunii de ieșire $p2(t)$ sunt reprezentate în figura 5.5.5.a. În figura 5.5.5.b este reprezentată grafic evoluția în timp a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$.

Se observă că presiunea de intrare este limitată superior la valoarea impusă: $p1_{max} = 22 \text{ bar}$, iar valoarea funcției obiectiv $F_{N, M}(k \cdot \Delta t)$ crește, în prima fază, de inițiere a regimului tranzitoriu, de la valoarea minimă zero, asociată regimului staționar inițial, după care, în ultima fază a regimului tranzitoriu, de stabilizare, descrește iarăși la valoarea minimă egală cu zero, asociată regimului staționar final.

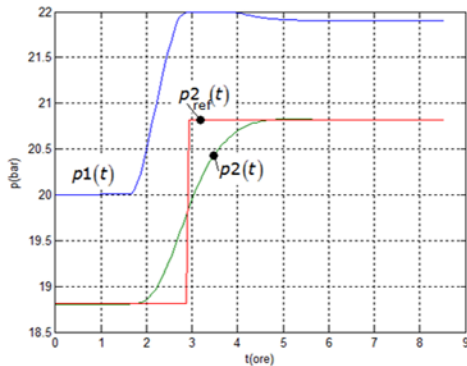


Fig. 5.5.5.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

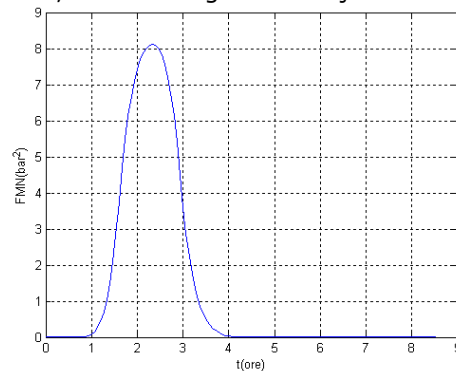


Fig.5.5.5.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Dacă se admite în schimb o valoarea maximală a presiunii de intrare de $p1_{max} = 23 \text{ bar}$, această valoare va fi suficient de mare pentru ca presiunea de intrare să evolueze nerestricționat. Acest lucru se observă în figura 5.5.6.a. Funcția obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ va avea o evoluție asemănătoare, conform figurii 5.5.6.b.

Analiza curbelor de evoluție în timp a presiunii de intrare $p1(t)$, care reprezintă mărimea de comandă, și, respectiv, a presiunii de ieșire $p2(t)$, care reprezintă mărimea reglată, reprezentate grafic în figurile 4.4.4.a și 5.5.6.a, indică

variația acestor mărimi înainte de momentul de timp: $t = 3h$ la care survine modificarea în treaptă a valorii de referință $p_{2ref}(t)$ care trebuie urmărită de către presiunea reglată $p_2(t)$. Acest lucru se datorează orizontului de predicție în timp a algoritmului de control care permite luarea cu anticipația dată de această durată de timp a măsurilor compensatorii. Pentru cazul numeric prezentat durata în timp a orizontului de predicție este de: $T_{pred} = N_p \cdot \Delta t \cong 1,33h$, iar creșterea presiunii intrare $p_1(t)$ are loc înainte cu $T_{pred} = 1,33h$ față de momentul de timp $t = 3h$ la care se produce modificarea tip treaptă a valorii de referință $p_{2ref}(t)$ a presiunii reglate, respectiv, începând cu momentul de timp $t \cong 1,67h$.

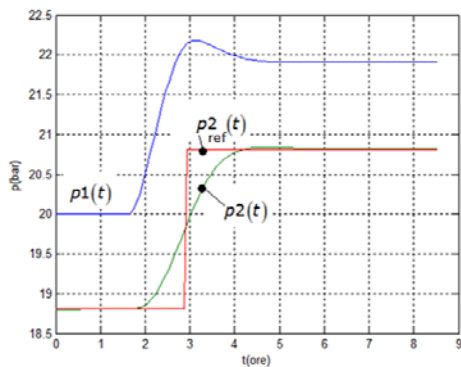


Fig. 5.5.6.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

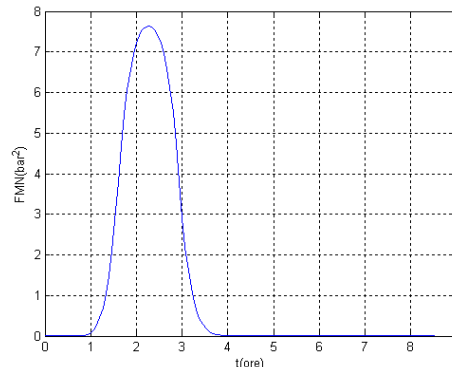


Fig. 5.5.6.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Pentru comparație, în figura 5.5.7.a sunt prezentate curbele de evoluție în timp a presiunii de intrare, respectiv, a presiunii de ieșire în situația unui orizont de predicție de: $N_p = 3$, respectiv, având o durată în timp de: $T_{pred} \cong 0,2h$, iar în figura 5.5.7.b evoluția în timp a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$. Creșterea presiunii de intrare cu anticipația de timp dată de durata orizontului de predicție de numai: $T_{pred} \cong 0,2h$, față de momentul de timp al apariției perturbației (schimbarea valorii de referință a presiunii reglate) nu va mai fi suficientă pentru compensarea în timp util a perturbației, rezultând, conform simulării numerice, creșterea perioadei de timp necesare reglării, și implicit creșterea constantelor de timp ale sistemului în buclă închisă.

În aceste condiții apare deosebit de importantă relația de calcul (4.3.18) a duratei regimului tranzitoriu în estimarea valorii orizontului de predicție. În cazul de față această durată a regimului tranzitoriu este de aproximativ: $t_{final} = 1,68h$.

În condițiile impunerii unei trepte de presiune negative cu amplitudinea de $\Delta p_2 = -5bar$, corelată cu o valoare minimală $p_{1min} = 10bar$, la momentul de timp $t = 3h$, în condițiile păstrării neperturbate a debitului la consumator la valoarea de: $Q_2(t) = 32.500Nm^3/h$, limitarea inferioară impusă ratei de variație a presiunii de

intrare: $\frac{\Delta p1_{inf}}{\Delta t} = \frac{-0,15bar}{\Delta t}$ nu va permite o scădere suficient de rapidă a presiunii de intrare $p1(t)$ care să conducă la o schimbare de a sensului de curgere al gazului, după cum se observă din figurile 5.5.8.

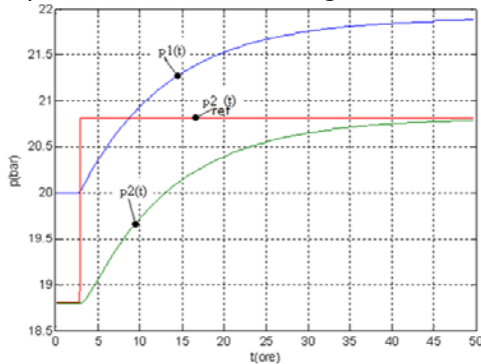


Fig. 5.5.7.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

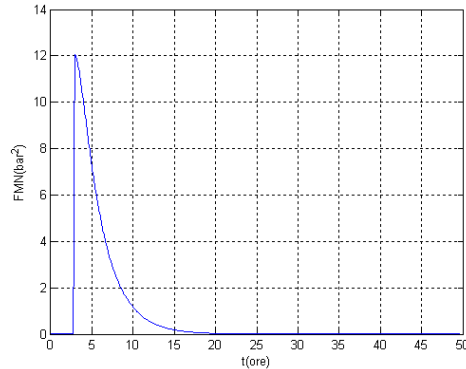


Fig. 5.5.7.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

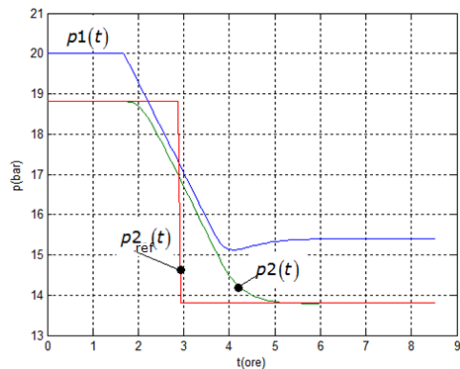


Fig. 5.5.8.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

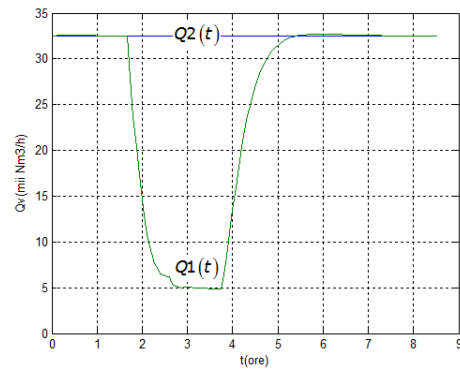


Fig. 5.5.8.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă

Evoluția în timp a funcției obiectiv $F_{Np,Mc}(k \cdot \Delta t)$ este prezentată în figura 5.5.8.d.

Dacă în schimb se impune menținerea unei valori de referință constante pentru presiunea de ieșire $p2(t)$ de aproximativ 18,8bar, în condițiile anticipării apariției unei perturbații de debit de tip treaptă cu amplitudinea $\Delta Q2 = 5.000Nm^3/h$, la momentul de timp $t = 4h$, în urma simulării numerice rezultă curbele din figura 5.5.9.a. Și în acest caz se observă, pentru sistemul de control, anticiparea în luarea unor măsuri compensatorii, prin inițierea creșterii presiunii de intrare la momentul de timp la un moment de timp anterior momentului de timp apariției perturbației de debit.

Corespunzător creșterii presiunii de intrare $p1(t)$ are loc o injecție de debit în conductă $Q1(t)$, conform curbei din figura (5.5.9.b) urmată de o stabilizare a acestuia la noua valoare $Q2 + \Delta Q2$ necesară menținerii noului regim staționar.

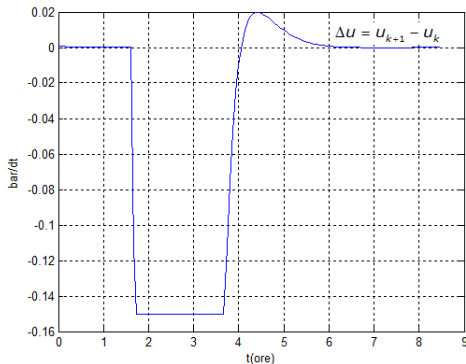


Fig. 5.5.8.c. Evoluția în timp a ratei de variație a presiunii de comandă

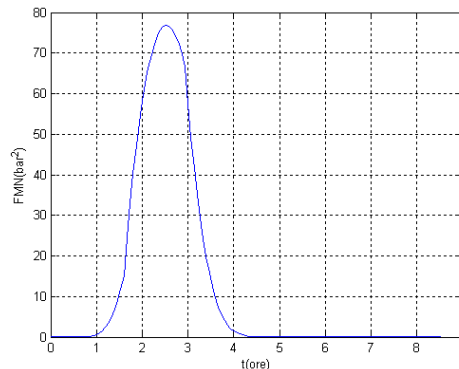


Fig. 5.5.8.d. Evoluția în timp a funcției obiectiv

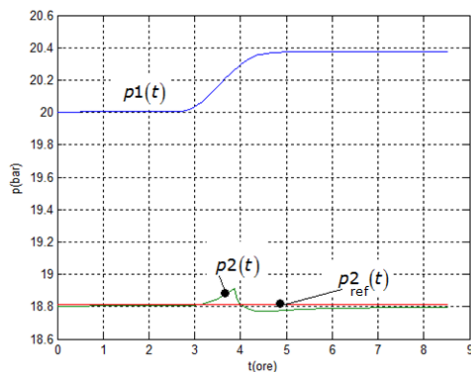


Fig. 5.5.9.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

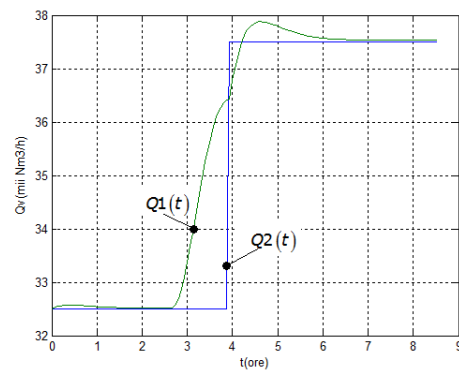


Fig. 5.5.9.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă

Evoluția în timp a funcției obiectiv $F_{Np,Mc}(k \cdot \Delta t)$ este reprezentată, în acest caz în figura 5.5.9.c.

Dacă se impune creșterea în treaptă, cu amplitudinea $\Delta p2 = 10bar$, a presiunii de ieșire la momentul $t = 3h$, în condițiile reconsiderării valorii maxime a presiunii de intrare la noua valoare $p1_{max} = 30bar$, simularea numerică conduce la evoluțiile dinamice ale presiunii de intrare, respectiv, de ieșire din tronson din figura 5.5.10.a. Evoluția funcției obiectiv $F_{Np,Mc}(k \cdot \Delta t)$ este reprezentată în figura 5.5.10.b.

Dacă se anticipează o creștere treaptă, cu amplitudinea $\Delta Q2 = 15.000Nm^3/h$, a debitului de ieșire la momentul $t = 4h$, în condițiile reconsiderării valorii maxime a presiunii de intrare la noua valoare $p1_{max} = 30bar$, simularea numerică conduce la evoluțiile dinamice ale debitului de intrare, presiunii

de intrare, respectiv, de ieșire din tronson din figurile 5.5.11 a și 5.5.11.b. Funcția obiectiv $F_{N,M}(k \cdot \Delta t)$ va evolua în timp conform figurii 5.5.11.c.

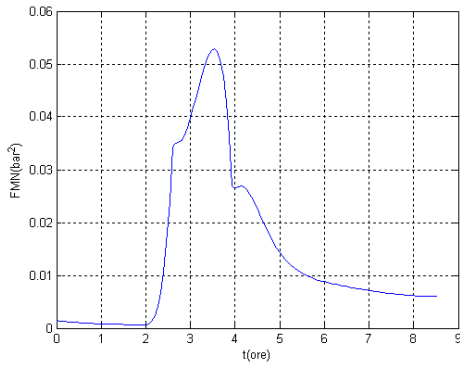


Fig. 5.5.9.c. Evoluția în timp a funcției obiectiv

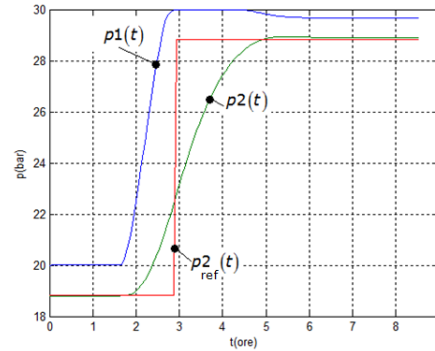


Fig. 5.5.10.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

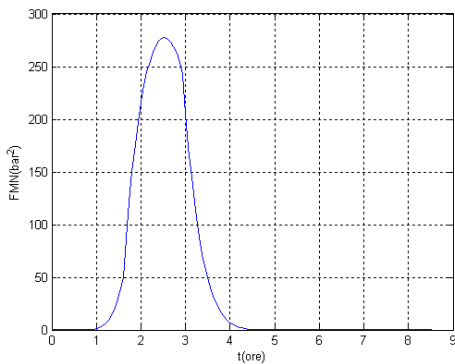


Fig. 5.5.10.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

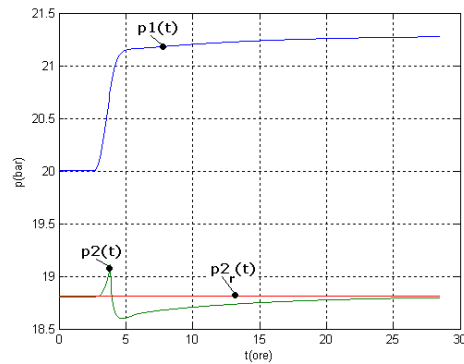


Fig. 5.5.11.a. Evoluția în timp a presiunii de comandă, respectiv, a presiunii de ieșire reglate comparativ cu cea de referință

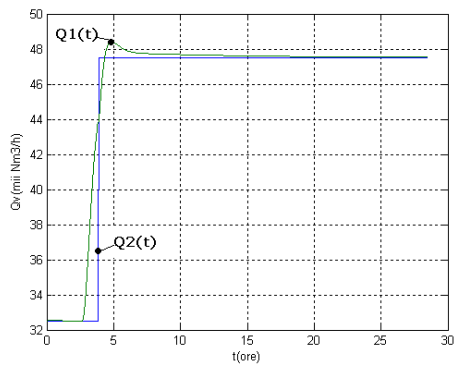


Fig. 5.5.11.b. Evoluțiile în timp ale debitelor de la capetele tronsonului de conductă

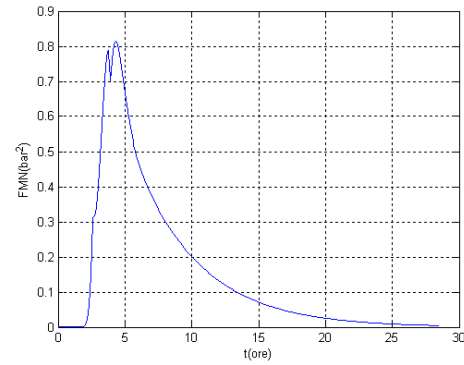


Fig. 5.5.11.c. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Rezultatele de simulare numerică sunt prezentate grafic în figurile 5.5.11 și arată o creștere a duratei de timp necesare anulării erorii de reglare cauzată de

creșterea erorii de modelare, prin folosirea în algoritmul de control a modelului liniarizat pentru aproximarea procesului aflat într-un regim de funcționare prea îndepărtat de regimul staționar de funcționare folosit pentru liniarizare (perturbația de tip treaptă de debit ΔQ_2 cu amplitudinea de aproximativ 50% din valoarea debitului staționar Q_2).

Scăderea acestora este posibilă prin actualizarea modelului liniarizat al procesului, ceea ce e similar cu adăugarea unei bucle suplimentare de adaptare sistemului de control.

În schimb, în cazul unei perturbații de tip treaptă de presiune Δp_1 de aproximativ 50% din valoarea inițială p_1 de regim staționar, sistemul de reglare nu are nevoie de timpi suplimentari pentru anularea erorii de reglare, după cum rezultă din figura 5.5.5.10.a. Vom avea o influență mai scăzută a erorii de modelare asupra performanțelor sistemului de reglare, în cazul operării la valori ale presiunii la fel de îndepărtate, relativ vorbind, comparativ cu valorile de debit din situația precedentă, față de valoarea presiunii în jurul căreia s-a făcut liniarizarea.

În toate cazurile de simulare numerică studiate, algoritmul de control predictiv realizează aducerea valorii funcției obiectiv (pătratică) (5.5.25) la valoarea minimă (zero) pe măsură ce compensează perturbația (deși nu întotdeauna în timp util).

5.6. Problematika controlului dinamicii presiunilor de ieșire ale unui sistem de transport de gaze naturale

Se consideră sistemul de transport de gaze naturale din figura 5.6.1.a care alimentează consumatorii racordați în nodurile de ieșire N_2 și N_4 care din sursa localizată în nodul de intrare N_1 sunt alimentați.

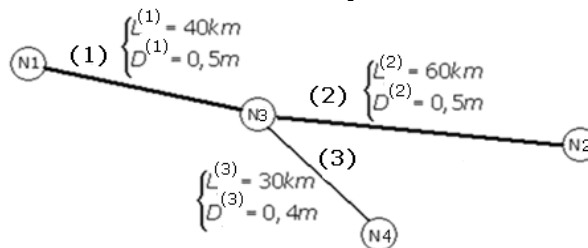


Fig. 5.6.1.a. Sistem de transport cu o singură sursă de gaz și doi consumatori

Tronsoanele orizontale de conductă ale sistemului de transport, numerotate cu (1), (2) și (3), de rugozitate interioară $k_a = 0,2 \text{ mm}$, sunt interconectate prin intermediul nodului tehnologic N_3 . Curgerea gazului se consideră că are loc în regim termodinamic izoterm la temperatura medie: $T_M = 10^0 \text{ C}$.

Pentru consumatorii deserviți de sistemul de transport prezentat trebuie respectate următoarele cerințe și anume: consumatorului principal, alimentat din nodul de ieșire N_2 trebuie să i se asigure presiunea de alimentare de minim $p_{2min} = 9 \text{ bar}$ în condițiile variației debitului de gaze cerut de consumator în limitele:

$15.000Nm^3/h \leq Q_2 \leq 60.000Nm^3/h$ (anotimp cald-anotimp rece), respectiv, consumatorului secundar, alimentat din nodul de ieșire $N4$ presiunea minimă de $p_{4min} = 6bar$ pentru $7.500Nm^3/h \leq Q_4 \leq 30.000Nm^3/h$.

O schemă tehnologică minimală care permite implementarea unui algoritm de control predictiv al procesului de curgere desfășurat la nivelul sistemului de transport considerat în figura 5.6.1.a este prezentată în figura 5.6.1.b.

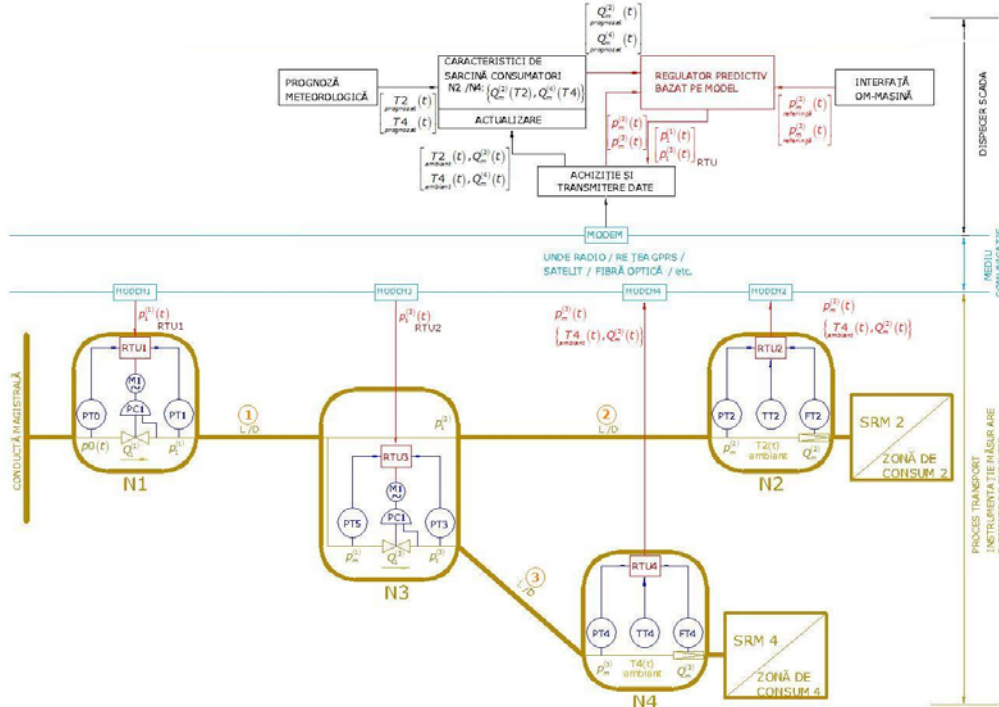


Fig. 5.6.1.b. Schemă tehnologică minimală, pentru implementare algoritmului de control predictiv bazat pe model a dinamicii presiunilor de ieșire din sistemul de transport cu o sursă de gaz și doi consumatori

Ca și structură, funcționalitate și elemente de automatizare amplasate la nivelul nodurilor tehnologice schema tehnologică este similară cu cea prezentată în figura 5.5.1.a pentru controlul procesului de transport la nivelul unui singur tronson. Logica de amplasare a sistemului de reglare locală a presiunii din nodul tehnologic de interconectare $N3$ pe direcția de ieșire spre tronsonul de conductă (3) este prezentată în cele ce urmează.

Regimul de funcționare al unui sistem de transport gaze naturale se poate situa între două limite asociate unor de regimuri de funcționare extremale din punct de vedere al încărcării sistemului, respectiv, al valorilor debitelor de gaz de gaz cerute de consumatori și al presiunilor medii necesare vehiculării acestor debite.

Distingem în acest sens regimul de funcționare al sistemului la capacitatea nominală (încărcare nominală) la care a fost proiectat și care corespunde, de regulă, funcționării pe perioada anotimpului rece, respectiv, regimul de funcționare la capacitate minimală care corespunde funcționării pe perioada anotimpului cald.

În figurile 5.6.2, pentru cele două tipuri de regimuri de funcționare sunt prezentate, pe schema simplificată a sistemului de transport, valorile debitelor și ale presiunilor în nodurile tehnologice.

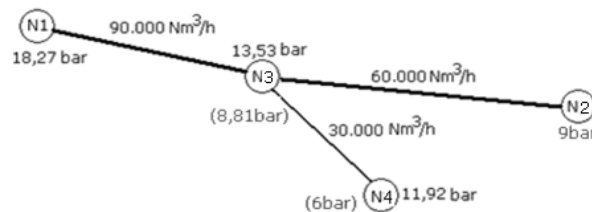


Fig. 5.6.2.a. Distribuția de presiune pe sistemul de transport în perioada de consum maxim

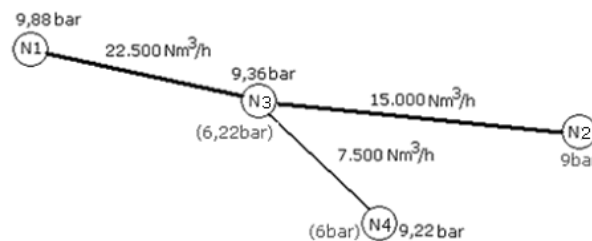


Fig. 5.6.2.b. Distribuția de presiune pe sistemul de transport în perioada de consum minim

Valorile figurate au fost obținute în ipoteza că nodul tehnologic *N3* este un simplu nod de interconectare fără a avea amplasate elemente de reglare a presiunii pe vreuna din cele două ieșiri din nod, pe direcțiile de consum reprezentate de tronsoanele de ieșire (2) și (3).

Analizând distribuțiile de presiune de-a lungul tronsoanelor de conductă ale sistemului considerat, pentru cele două valori extremale ale debitului total furnizat la consumatorii racordați la sistem se observă că, reglarea presiunii la consumatorul racordat în nodul *N2*, în condițiile variației debitului cerut de acesta se poate face numai prin comanda presiunii sursei de gaz racordată în nodul de intrare *N1*.

În schimb, reglarea presiunii consumatorului racordat în nodul de ieșire *N4* necesită, pe lângă comanda presiunii sursei de gaz din nodul *N1* și comanda, la nivelul nodului tehnologic *N3*, a presiunii gazului furnizate tronsonului (2).

Acest lucru impune amplasarea la nivelul nodului tehnologic *N3* a sistemului de reglare locală a presiunii gazului pe direcția de consum alimentată prin tronsonul (2), care modifică valoarea de ieșire a presiunii din nodul tehnologic *N3* în direcția tronsonului (3) la valorile figurate în paranteze, eliminându-se o încărcare suplimentară în presiune a acestui tronson.

Ținând seama de cele prezentate în paragraful anterior, procesul de curgere izotermă a gazului prin sistemul de transport din figura (5.6.1) va putea fi simulat numeric de un model de proces cu parametri concentrați format din modelele individuale ale tronsoanelor de conductă componente, date de ecuațiile matriceale (5.5.4.a) și (5.5.9) scrise pentru fiecare din tronsoanele de conductă $i = \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{d}{dt} X_p^{(i)} = A_p^{(i)} \left(X_p^{(i)} \right) X_Q^{(i)} + B_p^{(i)} \left(X_p^{(i)} \right) u_2^{(i)} \quad (5.6.1.a)$$

$$\underline{X}_Q^{(i)}(t) = \underline{Y}_Q^{(i)} \left[\underline{X}_p^{(i)}(t), u_1^{(i)}(t) \right] \quad (5.6.1.b)$$

modele care sunt interconectate folosind relațiilor de legătură care descriu interconectarea tehnologică a tronsoanelor de conductă în nodul $N2$:

$$u_2^{(1)} = Q_m^{(1)} = Q_1^{(2)} + Q_1^{(3)} \quad (5.6.1.c)$$

$$u_1^{(2)} = p_1^{(2)} = p_m^{(1)} \quad (5.6.1.d)$$

Notă: Pentru a nu încărca excesiv reprezentarea mărimilor asociate punctelor rețelei de discretizare spațială ale sistemului de transport, mărimile $z = \{p, Q\}$ din punctul $m^{(j)}$ al rețelei de discretizare a tronsonului $j = 1, 2, 3$, care apar în relațiile (5.6.1), s-au notat cu $z_m^{(j)}$. Regula se păstrează pentru orice altă mărime care intervine în relații sau ca notație în reprezentările grafice din cadrul prezentării.

Din punct de vedere al interconectării, modelul sistemului de transport va avea reprezentarea schematică din figura 5.6.3.

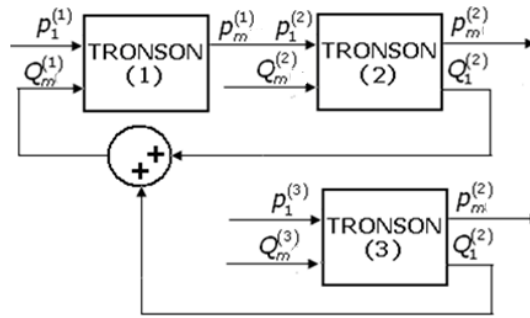


Fig. 5.6.3. Reprezentarea sistemică asociată modelului procesului de curgere realizat la nivelul sistemului de transport

Reprezentarea va permite obținerea și a modelului liniarizat al sistemului de transport din figura (5.6.1.a), necesar implementării algoritmului de control predictiv. Acest lucru se realizează prin interconectarea modelelor liniarizate ale fiecărui tronson component. Aceste modele sunt descrise prin ecuații de stare de forma (5.5.17) care trebuie completate cu ecuații necesare calculării semnalului de ieșire, respectiv:

$$\bar{p}_m^{(1)}(t_k) = \underline{C}_{prm}^{(1)} \bar{X}_p^{(1)}(t_k) + \underline{D}_{prm}^{(1)} u^{(1)}(t_k) \quad (6.6.2.a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_m^{(j)} \\ \bar{Q}_1^{(j)} \end{bmatrix} (t_k) = \underline{C}_{prm}^{(j)} \bar{X}_p^{(j)}(t_k) + \underline{D}_{prm}^{(j)} u(t_k), \quad j = 2, 3 \quad (5.6.2.b)$$

În aceste relații $\underline{C}_{prm}^{(j)}$ este un vector linie având același număr de componente ca și vectorul $\bar{X}_p^{(j)}$ și $\underline{D}_{prm}^{(j)} = [0 \ 0]$, $\underline{C}_{prm}^{(j)}$ este o matrice având două linii și numărul de coloane egal cu numărul componentelor vectorului $\bar{X}_p^{(j)}$ iar $\underline{D}_{prm}^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pentru $j=2,3$.

Ținând seama de semnalele de intrare: $\{p_1^{(1)}, p_1^{(3)}, Q_m^{(2)}, Q_m^{(3)}\}$, respectiv, de ieșire: $\{p_m^{(2)}, p_m^{(3)}\}$ în urma interconectării modelelor de intrare-stare-ieșire asociate fiecărui tronson al sistemului va rezulta un model continuu liniarizat, de forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{X}_{SIS}(t_k) = \underline{A}_{SIS} \bar{X}_{SIS}(t_k) + \underline{B}_{SIS} \bar{u}_{SIS}(t_k) \\ \bar{Y}_{SIS}(t_k) = \underline{C}_{SIS} \bar{X}_{SIS}(t_k) + \underline{D}_{SIS} \bar{u}_{SIS}(t_k) \end{cases} \quad (5.6.3)$$

în care:

$$\bar{u}_{SIS} = \begin{bmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(3)} & Q_m^{(2)} & Q_m^{(3)} \end{bmatrix}^t \in R^4 \text{ - vectorul intrărilor;}$$

$$\bar{X}_{SIS} = \begin{bmatrix} \bar{X}_p^{(1)} & \bar{X}_p^{(2)} & \bar{X}_p^{(3)} \end{bmatrix}^t \in R^{m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3} \text{ - vectorul de stare;}$$

$$\bar{Y}_{SIS} = \begin{bmatrix} p_m^{(2)} & p_m^{(3)} \end{bmatrix}^t \in R^2 \text{ - vectorul ieșirilor}$$

$$\underline{A}_{SIS} \in R^{(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3) \times (m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3)}, \underline{B}_{SIS} \in R^{(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3) \times 4},$$

$$\underline{C}_{SIS} \in R^{(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3) \times 2}, \underline{D}_{SIS} = \underline{0}^{(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}-3) \times 4} \text{ matricele modelului.}$$

Modelul descris prin ecuațiile (5.6.3) va fi un model asimptotic stabil întrucât fiecare dintre modele componente are această proprietate iar interconectarea s-a realizat în buclă deschisă prin relații liniare.

Modelul discret al sistemului de transport va rezulta, în mod similar, în urma unei discretizări implicite a modelului continuu (5.6.3) printr-o relație de forma (5.5.19). Matricele sistemului discret vor avea forma dată prin relațiile (5.5.21).

În vederea simulării numerice se construiește o rețea de discretizare spațială, pentru fiecare tronson, formată din: $m^{(1)}=5$, $m^{(2)}=7$, respectiv, $m^{(3)}=4$, puncte de discretizare. Sistemul de transport se consideră, inițial, în starea staționară caracterizată de presiunile de intrare: $p_1^{(1)}=12,51bar$, $p_1^{(3)}=6,72bar$, debitele de ieșire: $Q_m^{(2)}=35.00Nm^3/h$, $Q_m^{(3)}=15.000Nm^3/h$, respectiv, presiunile de ieșire: $p_m^{(2)}=9bar$, $p_m^{(3)}=6bar$.

În figurile 5.6.4-5.6.7 sunt prezentate răspunsuri la semnal treaptă ale modelului neliniar al procesului de curgere al gazului prin sistemul de transport considerat, considerat inițial în starea staționară menționată mai sus.

Astfel, o creștere treaptă a presiunii $p_1^{(1)}(t)$ în nodul de intrare $N1$ de $\Delta p_1^{(1)}=1,48bar$ conduce, după cum se observă în figura 5.6.4 a, la o modificare a

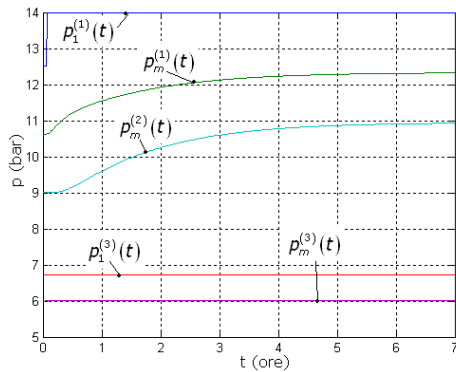


Fig. 5.6.4.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a presiunii de comandă din nodul $N1$ cu menținerea constantă a debitelor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$

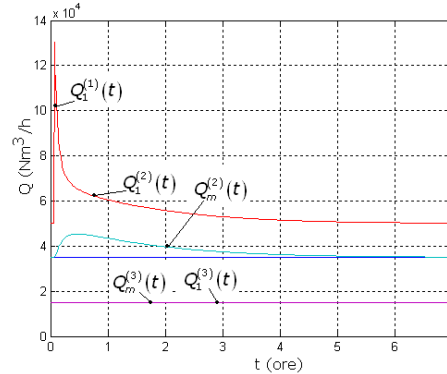


Fig. 5.6.4.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a presiunii din nodul $N1$

presiunilor de-a lungul tronsoanelor de conductă (1) și (2), presiunea la nivelul tronsonului (3) rămânând neschimbată ca urmare a condiției de reglare a presiunii impuse la nivelul ieșirii din nodul $N2$, pe direcția tronsonului (3). Această creștere a presiunilor la nivelul celor două tronsoane de conducte menționate mai sus are loc ca urmare a injectării unui volum suplimentare de gaze în cele două tronsoane. Această injecție este caracterizată prin variația debitelor de intrare în cele două tronsoane $Q_1^{(1)}(t)$ și $Q_2^{(1)}(t)$ în condițiile în care debitele cerute de consumatori racordați la sistemul de transport, $Q_m^{(2)}(t)$ și $Q_m^{(3)}(t)$, rămân constante.

În schimb, după cum rezultă din caracteristicile dinamice ale presiunii și debitului reprezentate în figurile 5.6.5, o creștere treaptă cu amplitudinea $\Delta p_1^{(3)} = 1,28 \text{ bar}$ a presiunii de intrare $p_1^{(3)}(t)$ în tronsonul (3) va conduce la creșterea presiunii de-a lungul tronsonului de conductă menționat, însă va dezechilibra, în prima parte, echilibrul presiunilor la nivelul celorlalte două tronsoane componente ale sistemului de transport ca urmare a vârfului de debit de intrare $Q_1^{(3)}(t)$ cerut de realizarea creșterii treaptă a presiunii.

În această prima parte, ca urmare a redirectionării debitului de gaze la nivelul nodului $N2$ în direcția tronsonului (3), va avea loc o scădere a debitului de gaze $Q_1^{(2)}(t)$ furnizat tronsonului (2) iar debitul de gaze $Q_m^{(2)}(t)$ furnizat consumatorului va fi asigurat, în prima parte, prin consumarea zestrei tronsonului (2) de transport, fapt care poate fi constatat și de scăderea presiunii $p_m^{(2)}(t)$ de ieșire din tronson.

Întrucât noua presiune de intrare a tronsonului (3) se situează sub valoarea presiunii de intrare $p_1^{(2)}(t)$ în tronsonul (2), necesară susținerii debitului $Q_m^{(2)}(t)$ cerut de consumatorul racordat la ieșirea tronsonului, presiunea de-a lungul celor două tronsoane de conductă (1) și (2) se va reface după un timp dictat de dinamica procesului de transport.

Creșterea treaptă $\Delta Q_m^{(2)} = 7.500 Nm^3 / h$ a debitului de ieșire $Q_m^{(2)}(t)$, cu menținerea constantă a presiunii de intrare $p_1^{(1)}(t)$ va conduce, conform curbelor de evoluție dinamică ale presiunilor și debitelor reprezentate grafic în figurile (5.6.6), la scăderea presiunii de ieșire $p_m^{(2)}(t)$ de furnizare a noului debit $Q_m^{(2)}(t) + \Delta Q_m^{(2)}$. Distribuția presiunilor la nivelul sistemului de transport se va modifica numai de-a lungul tronsoanelor (1) și (2), rămânând neschimbată de-a lungul tronsonului de conductă (3) din cauza impunerii reglării presiunii la ieșirea din nodul N2 pe direcția tronsonului (3) și a menținerii presiunii $p_m^{(1)}(t)$ la o valoare suficient de mare realizării corespunzătoare reglajului de presiune ($p_m^{(1)}(t) > p_1^{(3)}(t)$).

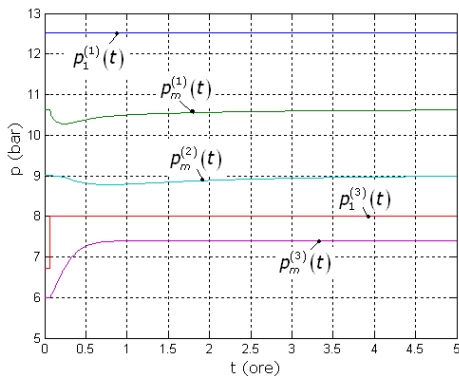


Fig. 5.6.5.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a presiunii de comandă din nodul N3 cu menținerea constantă a debitelor din nodurile de ieșire N2 și N4

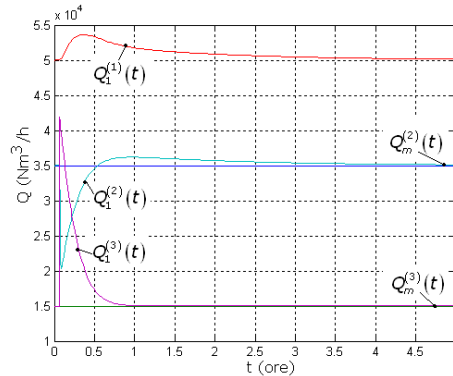


Fig. 5.6.5.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a presiunii din nodul N1

În schimb, creșterea treaptă, cu valoarea de $\Delta Q_m^{(3)} = 5.000 Nm^3 / h$, a debitului de ieșire $Q_m^{(3)}(t)$ va conduce, conform curbelor de evoluție dinamică ale presiunilor și debitelor reprezentate grafic în figurile 5.6.7, la o scădere a presiunii $p_m^{(3)}(t)$ de furnizare a noului debit $Q_m^{(3)}(t) + \Delta Q_m^{(3)}$ consumatorului racordat, perturbând însă și presiunea $p_m^{(2)}(t)$ de furnizare a debitului $Q_m^{(2)}(t)$ ca urmare a scăderii valorilor presiunilor de-a lungul tronsonului (1) cauzate de adaptarea distribuției de presiune la noua valoare, mai mare, a debitului transportat: $Q_1^{(1)}(t) + \Delta Q_m^{(3)}$.

Implementarea în mediul de lucru MATLAB a unui algoritm de control predictiv a dinamicii procesului de curgere desfășurat la nivelul sistemului de transport din figura 5.6.1 va urmări menținerea presiunilor de ieșire din tronsoanele (2) și (3), respectiv, $p_m^{(2)}(t)$ și $p_m^{(3)}(t)$, la valorile presiunilor de referință $p_m^{(2)}(t)_r$ și $p_m^{(3)}(t)_r$, necesare funcționării în condiții de siguranță a consumatorilor racordați

la sistemul de transport, prin manipularea presiunilor de intrare $p_1^{(1)}(t)$ și $p_1^{(3)}(t)$, în condițiile variațiilor (perturbațiilor) debitelor $Q_m^{(2)}(t)$ și $Q_m^{(3)}(t)$ cerute de consumatori.

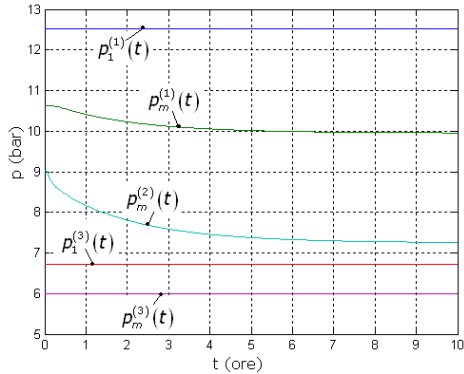


Fig. 5.6.6.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a debitului din nodul de ieșire N2 cu menținerea constantă a presiunilor de comandă din nodurile N1 și N3

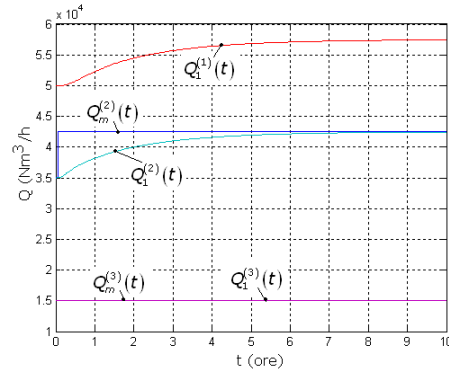


Fig. 5.6.6.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a debitului din nodul N2

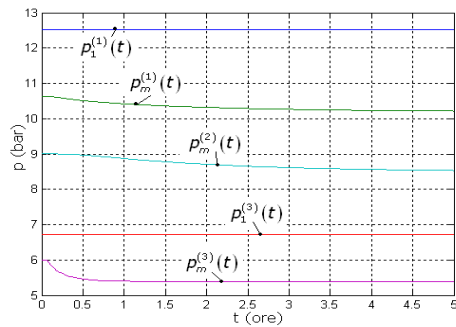


Fig. 5.6.7.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de variația treaptă a debitului din nodul de ieșire N4 cu menținerea constantă a presiunilor de comandă din nodurile N1 și N3

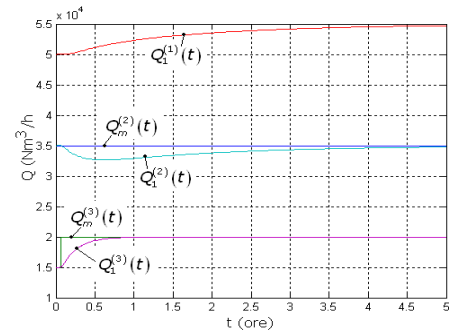


Fig. 5.6.7.b. Evoluțiile în timp ale debitelor din nodurile sistemului de transport ca urmare a variației treaptă a debitului din nodul N4

Ținând seama de implementarea realizată în subcapitolul precedent, s-au considerat următoarele valori de proiectare ale algoritmului:

- a)** $\Delta t = 240s$; **b)** $R_U = [0 \ 0]$; **c)** $R_{\Delta U} = [5 \ 5]$; **d)** $Q_e = [1 \ 1]$; **e)** $M_c = 2$.

respectiv restricțiile în care trebuie respectate de mărimile de comandă și anume:

f) $9,5bar \leq p_1^{(1)}(t) \leq 20bar$;

g) $6bar \leq p_1^{(3)}(t) \leq 9,5bar$;

h)
$$\frac{-0,15\text{bar}}{\Delta t} \leq \frac{\Delta p_1^{(1)}(t)}{\Delta t} \leq \frac{2\text{bar}}{\Delta t};$$

i)
$$\frac{-0,15\text{bar}}{\Delta t} \leq \frac{\Delta p_1^{(3)}(t)}{\Delta t} \leq \frac{2\text{bar}}{\Delta t}.$$

În figurile 5.6.8 și 5.6.9 este prezentat cazul impunerii, la momentul de timp $t = 3h$, a unei variații de tip treaptă cu amplitudinea de $\Delta p_m^{(2)}_{ref} = 1,8\text{bar}$ a referinței $p_m^{(2)}(t)_{ref}$ a presiunii de ieșire $p_m^{(2)}(t)$.

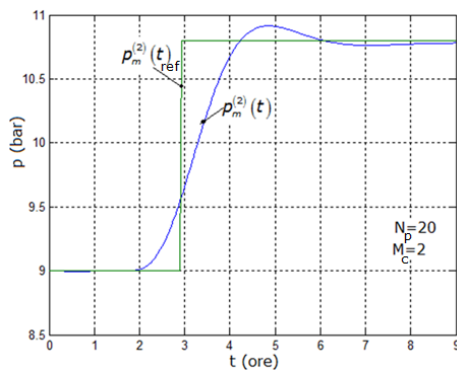


Fig. 5.6.8.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire N2 pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință

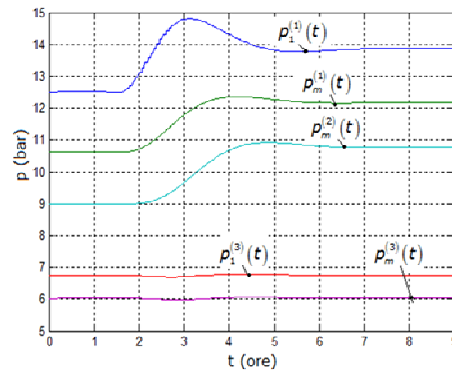


Fig. 5.6.8.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință

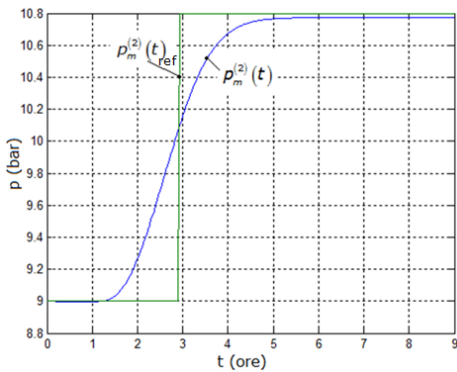


Fig. 5.6.9.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire N2 pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință

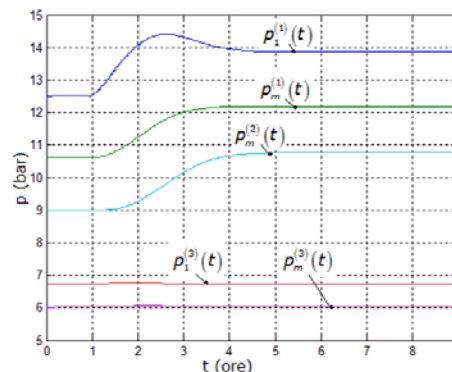


Fig. 5.6.9.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință

Cele două simulări numerice diferă prin alegerea orizontului de predicție a mărimii de comandă, respectiv, pentru simularea numerică care a condus la dinamica presiunilor din figurile 5.6.8, un orizont de predicție mai mic de $N_p = 20 (T_{pred} = 1,33h)$ în calcularea mărimii de comandă $p_1^{(1)}(t)$ conduce la o dinamică mai rapidă a presiunii $p_m^{(2)}(t)$ caracterizată de un ușor suprareglaj, spre

deosebire de cazul de simulare numerică asociat figurilor 5.6.9, unde s-a ales un orizont de predicție mai mare de $N_p = 30 (T_{pred} = 2h)$ care conduce la o anticipare mai bună în calcularea mărimii de comandă.

Valoarea presiunii reglate $p_m^{(3)}(t)$ va rămâne neafectată de modificarea distribuțiilor de presiune de-a lungul tronsoanelor de conductă (1) și (2) ca urmare a elementului de reglare existent la nivelul nodului de interconectare N2 și care funcționează normal atâta timp cât presiunea amonte regulator $p_m^{(1)}(t)$ rămâne mai mare decât presiunea reglată $p_1^{(3)}(t)$ necesară furnizării, cu presiunea $p_m^{(3)}(t)$, a debitului $Q_m^{(3)}(t)$ la consumatorul racordat în nodul de ieșire N4.

În figurile 5.6.10.a, respectiv, 5.6.10.b sunt prezentate curbele de evoluție în timp, pe durata regimului tranzitoriu a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ pentru cele două exemple de simulare numerică cu rezultatele reprezentate grafic în figurile 5.6.8, respectiv, 5.6.9.

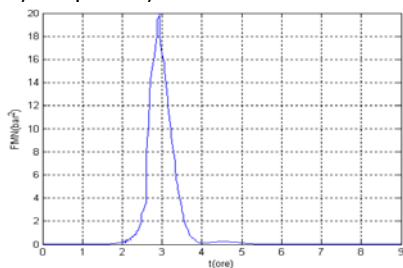


Fig. 5.6.10.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv

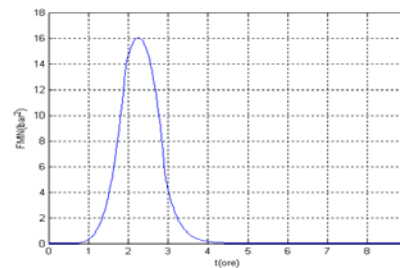


Fig. 5.6.10.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

În ambele exemple de simulare numerică se remarcă o readucere a funcției obiectiv la valoarea minimă după încheierea regimului tranzitoriu, respectiv, zero.

Impunerea, la momentul de timp $t = 3h$, a unei variații de tip treaptă, cu amplitudinea de $\Delta p_{m,ref}^{(3)} = 1,4bar$, a referinței $p_m^{(3)}(t)_{ref}$ a presiunii de ieșire $p_m^{(3)}(t)$, conduce la curbele de evoluție dinamică ale presiunilor din figurile 5.6.11, respectiv, 5.6.12, care diferă între ele prin orizontul de predicție. Astfel pentru rezultatele de simulare numerică reprezentate grafic în figurile 5.6.11 s-a ales un orizont de predicție de $N_p = 10 (T_{pred} = 0,67h)$ având în vedere dinamica mai rapidă (un timp de stabilizare de $0,41h$ conform relației (4.3.18)) a procesului de curgere desfășurat prin tronsonul (3) cu o lungime de conductă de numai $30km$, durată a orizontului de predicție care însă nu este suficient de mare ca să prevină, prin modificarea cu anticipație a valorii mărimii de comandă $p_1^{(1)}(t)$, a perturbării valorii presiunii $p_m^{(2)}(t)$ reglate la cealaltă ieșire a sistemului de transport. Creșterea orizontului de predicție de $N_p = 30 (T_{pred} = 2h)$ va permite compensarea acestor perturbații a valorii presiunii $p_m^{(2)}(t)$, prin creșterea, la un moment de timp mai anterior a presiunii de comandă $p_1^{(1)}(t)$, după cum se observă în curbele din figurile 5.6.12.

Valoarea orizontului de predicție de $N_p = 30 (T_{pred} = 2h)$ ar părea, ținând seama de simulările realizate, cea mai potrivită pentru diminuarea perturbării reciproce a celor două canale de ieșire asociate celor două presiuni reglate.

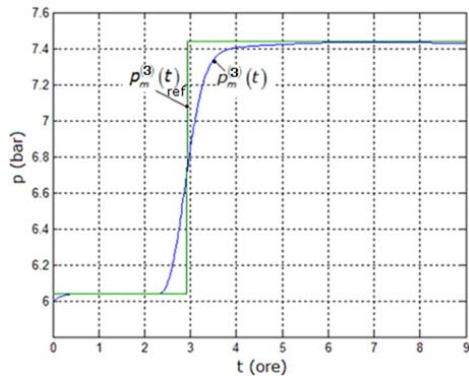


Fig. 5.6.11.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N4$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință

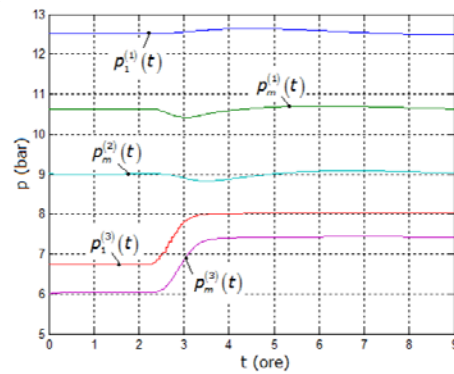


Fig. 5.6.11.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință

În figurile 5.6.13.a, respectiv, 5.6.13.b sunt prezentate curbele de evoluție în timp, pe durata regimului tranzitoriu a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ pentru cele două exemple de simulare numerică cu rezultatele reprezentate grafic în figurile 5.6.11, respectiv, 5.6.12. Și pentru aceste două exemple de simulare numerică funcția obiectiv este readusă la valoarea minimă după încheierea regimului tranzitoriu.

Impunerea, simultană, la momentul de timp $t = 3h$, a unor variații de tip treaptă cu amplitudinea de $\Delta p_{m, ref}^{(2)} = 1,8bar$, respectiv, $\Delta p_{m, ref}^{(3)} = 1,4bar$ a referințelor $p_m^{(2)}(t)_{ref}$, respectiv, $p_m^{(3)}(t)_{ref}$ care trebuie urmărite de către presiunile de ieșire $p_m^{(2)}(t)$, respectiv, $p_m^{(3)}(t)$ conduce la curbele de evoluție dinamică din figura 5.6.14.a. Vom avea valori diferite ale timpilor de stabilizare ale presiunilor reglate cauzate de timpii de reacție diferiți ai tronsoanelor componente. Funcția obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ va evolua pe durata regimului tranzitoriu după curba reprezentată în figura 5.6.14.b, valoarea acesteia fiind readusă la zero, valoarea minimă după terminarea regimului tranzitoriu.

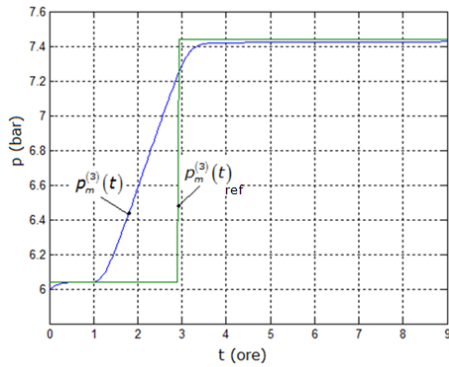


Fig. 5. 6. 12.a. Evoluția în timp a presiunii reglate din nodul de ieșire $N4$ pentru o variație de tip treaptă a presiunii de referință

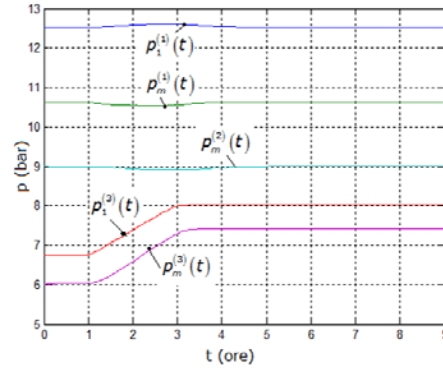


Fig. 5. 6. 12.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor de comandă, respectiv, ale presiunilor de ieșire reglate comparativ cu cele de referință

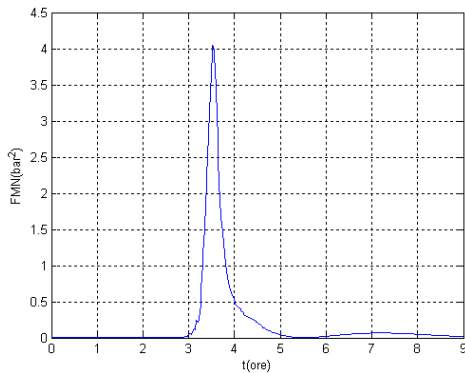


Fig. 5. 6. 13.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv

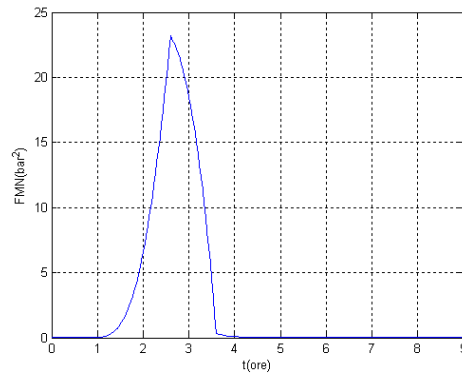


Fig. 5. 6. 13.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

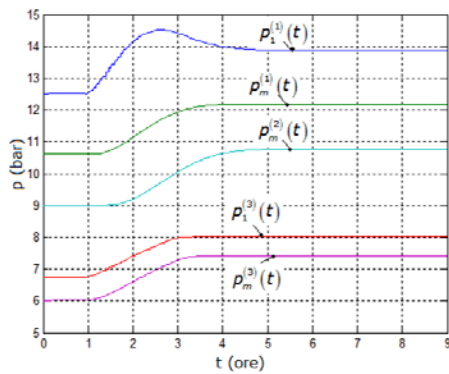


Fig. 5.6.14.a. Evoluția în timp a presiunilor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ pentru variații de tip treaptă a presiunilor de referință

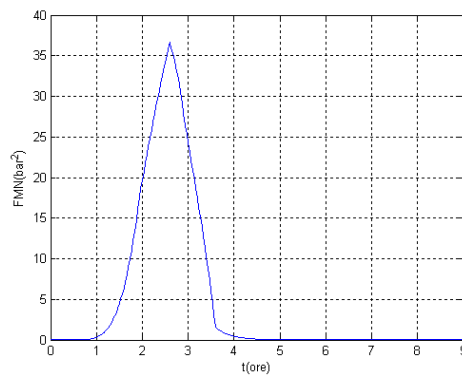


Fig. 5.6.14.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Apariția unei perturbații de debit la momentul de timp $t = 3h$ cauzată de creșterea de tip treaptă cu amplitudinea $\Delta Q_m^{(2)} = 7.500Nm^3/h$ a debitului cerut de consumatorul racordat în nodul de ieșire $N3$, respectiv, de $\Delta Q_m^{(3)} = 5.000Nm^3/h$ pentru consumatorul racordat în nodul de ieșire $N4$ conduce la curbele de evoluție dinamică a presiunilor din figurile 5.6.15, respectiv, 5.6.16.

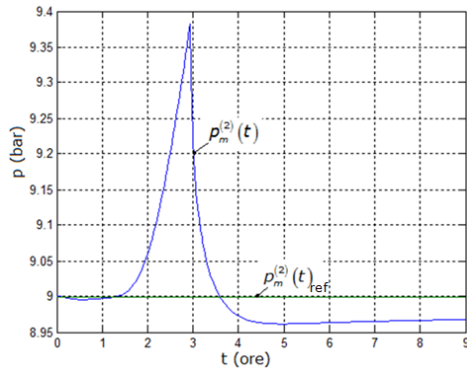


Fig. 5.6.15.a. Evoluția în timp a presiunii reglare din nodul $N2$ cauzată de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N2$

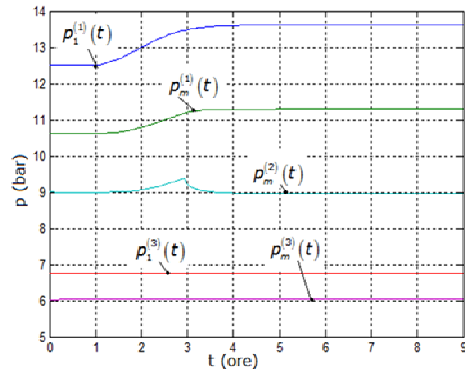


Fig. 5.6.15.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N2$

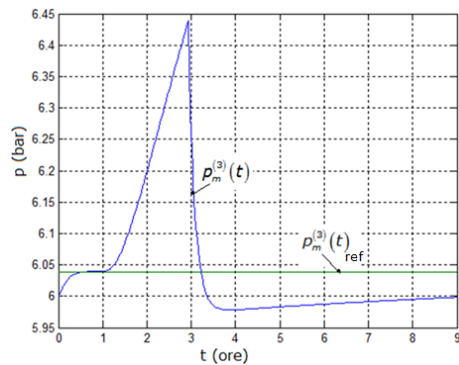


Fig. 5.6.16.a. Evoluția în timp a presiunii reglare din nodul $N4$ cauzată de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N4$

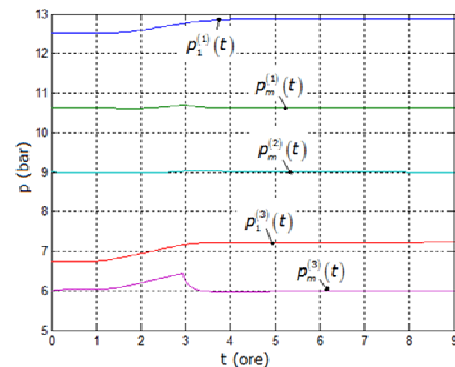


Fig. 5.6.16.b. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de o perturbație de tip treaptă a debitului din nodul $N4$

Similar cu cazul controlului predictiv al presiunii de ieșire dintr-un singur tronson de conductă, prezentat în subcapitolul anterior, sistemul de control reacționează anticipativ în sensul creșterii presiunii de ieșire ($p_m^{(2)}(t)$, respectiv, $p_m^{(3)}(t)$) până la o valoare suficient de mare astfel încât, în momentul apariției perturbației de debit, presiunea de ieșire să nu scadă sub valoarea reglată. În figurile 5.6.17.a, respectiv, 5.6.17.b sunt prezentate curbele de evoluție în timp, pe durata regimului tranzitoriu, a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ pentru cele două

exemple de simulare numerică cu rezultatele reprezentate grafic în figurile 5.6.15, respectiv, 5.6.16. Se remarcă că readucerea la valoarea minimă zero a funcției obiectiv nu se mai realizează în același timp ca și pentru exemplele de simulare numerică prezentate anterior, ca urmare a erorilor de modelare cauzate de folosirea unui model liniarizat pentru aproximarea unui regim de funcționare al procesului, prea îndepărtat de regimul de funcționare luat în considerare pentru realizarea operației de liniarizare (amplitudinea prea mare a perturbației de debit). Tendința de variație a funcției obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ este descrescătoare, iar atingerea valorii de minim necesită un timp ceva mai îndelungat.

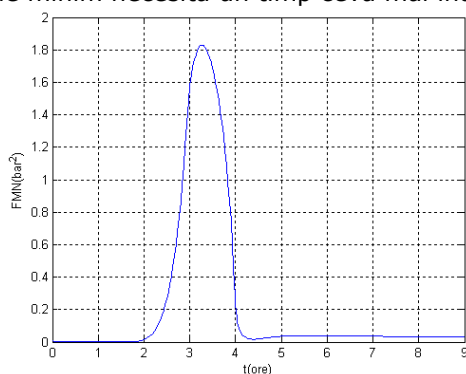


Fig. 5 6 17.a. Evoluția în timp a funcției obiectiv

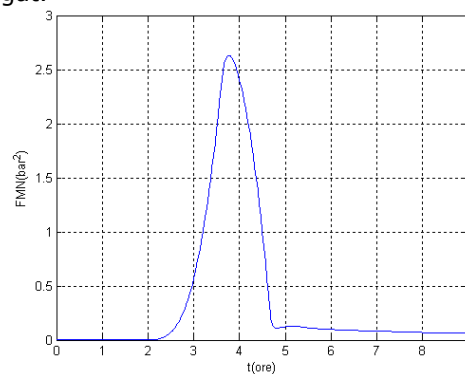


Fig. 5 6 17.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Perturbarea simultană, la momentul de timp $t = 3h$, a debitelor de ieșire din sistem cu valorile $\Delta Q_m^{(2)} = 7.500Nm^3/h$, respectiv, $\Delta Q_m^{(3)} = 5.000Nm^3/h$ conduce la curbele de evoluție dinamică ale presiunii din figura 5.6.18.a.

Funcția obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ va evolua, pe durata regimului tranzitoriu, după curba reprezentată în figura 5.6.18.b. Valoarea acesteia nu va fi readusă la valoarea minimă în timpul alocat simulării numerice ca urmare tot a erorilor de modelare cauzate de folosirea unui model liniarizat al procesului aflat într-un regim de funcționare prea îndepărtat de regimul staționar luat în considerare la obținerea modelului liniarizat.

Impunerea unor perturbații de tip treaptă, cu amplitudini negative asupra presiunilor de ieșire din sistem de: $\Delta p_m^{(2)} = -1,8bar$ și $\Delta p_m^{(3)} = -1,4bar$ (însoțită de micșorarea valorii minime a presiunii $p_1^{(3)}$ la valoarea de 5bar pentru a putea permite atingerea de către presiunea de ieșire $p_m^{(3)}$ a valorii de 4,6bar), respectiv, asupra debitelor de ieșire, cu amplitudinile $\Delta Q_m^{(2)} = -7.500Nm^3/h$, $\Delta Q_m^{(3)} = -5.000Nm^3/h$ conduce la curbele de evoluție dinamică ale presiunii din figurile 5.6.19.a, respectiv, 5.6.20.a.

În figurile 5.6.19.b, respectiv, 5.6.20.b sunt prezentate curbele de evoluție în timp, pe durata regimului tranzitoriu a funcției obiectiv $F_{N, M}(k \cdot \Delta t)$ asociate celor

cele două exemple de simulare numerică cu rezultatele reprezentate grafic în figurile 5.6.19.a, respectiv, 5.6.20.a.

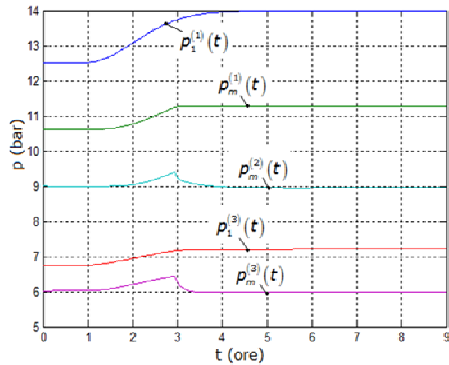


Fig. 5.6.18.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de perturbații de tip treaptă a debitelor din nodurile $N2$ și $N4$

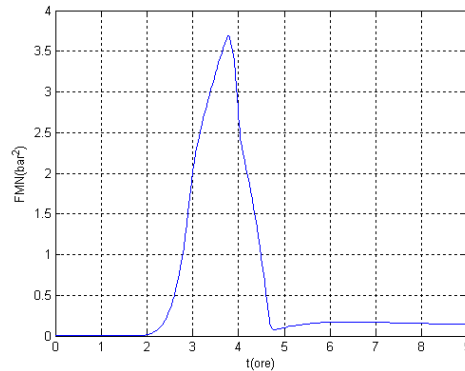


Fig. 5.6.18.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Din analiza curbei reprezentată în figura 5.6.19.b se remarcă că funcția obiectiv $F_{N_p, M_c}(k \cdot \Delta t)$ este readusă la valoarea minimă zero întrucât valoarea amplitudinii perturbației de presiune nu este suficient de mare ca să scoată regimul de funcționare al procesului din vecinătatea regimului staționar luat în considerare la obținerea modelului liniarizat. În schimb, analiza curbei din figura 5.6.20.b arată că funcția obiectiv $F_{N_p, M_p}(k \cdot \Delta t)$ nu este readusă la valoarea minimă zero în timpul

alocat simulării numerice ca urmare a erorii de modelare cauzate de folosirea unui model liniarizat al procesului aflat într-un regim de funcționare prea îndepărtat de regimul staționar luat în considerare la obținerea modelului liniarizat.

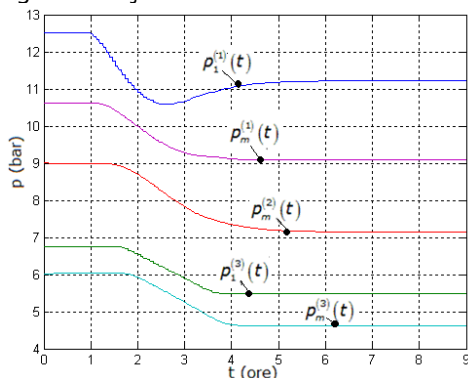


Fig. 5.6.19.a. Evoluția în timp a presiunilor din nodurile de ieșire $N2$ și $N4$ pentru variații de tip treaptă negativă a presiunilor de referință

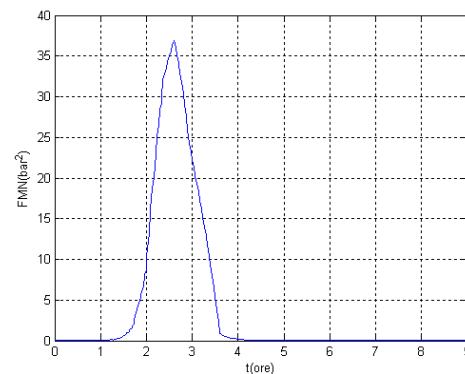


Fig. 5.6.19.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

Simulările numerice pentru ambele studii de caz au fost realizate prin intermediul unor scheme SIMULINK implementate sub mediul de lucru MATLAB. Modul de realizare al acestor schema este prezentat în Anexa A.6.

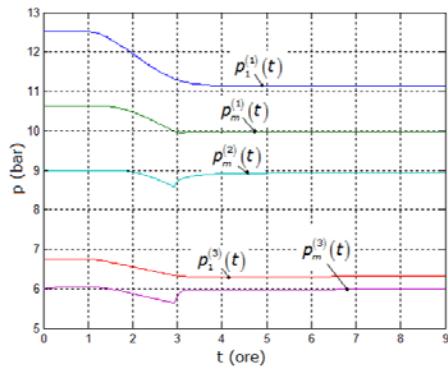


Fig. 5.6.20.a. Evoluțiile în timp ale presiunilor din nodurile sistemului de transport cauzate de perturbații de tip treaptă negativă a debitelor din nodurile N2 și N4

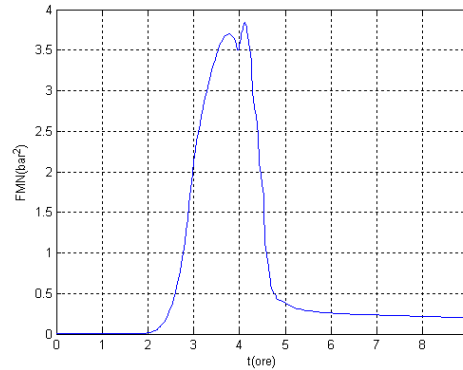


Fig. 5.6.20.b. Evoluția în timp a funcției obiectiv

5.7. Concluzii

Obiectivul acestui capitol l-a constituit prezentarea aspectelor esențiale care trebuie luate în considerare în implementare unui sistem de reglare automată a dinamicii unui sistem de transport gaze naturale.

Astfel, întrucât incertitudinile privind modelarea procesului condus, respectiv, a dinamicii perturbațiilor de sarcină nu pot fi luate în calcul, în mod complet, în faza de proiectare a algoritmului de reglare, ca metodă de proiectare a unui astfel de sistem de reglare automată s-a luat în considerare metoda controlului predictiv bazat pe model ce conduce la sisteme de reglare optimală care pot face față atât incertitudinilor menționate cât și restricțiilor asupra mărimilor procesului ce apar ca urmare a limitărilor tehnologice.

Pentru înțelegerea și aprofundarea aspectelor matematice și sistemice ale acestei metode de proiectare s-a procedat la o abordare graduală pornind de la principiul de bază care stă la baza acesteia, respectiv, tratarea problemei de control predictiv ca o secvență de probleme de optimizare care se rezolvă „on-line” la momente de timp discrete, consecutive.

Din punctul de vedere al teoriei optimalității avem de a face cu o problemă de optimizare cu restricții. S-a considerat necesară o prezentare sumară a aspectelor matematice ale acestui tip de problemă din perspectiva formulării condițiilor de optimalitate.

Tratarea problemei de control predictiv ca o problemă de optimizare, a cărei soluție să respecte condițiile de optimalitate enunțate este posibilă prin formularea problemei de control ca problemă de optimizare convexă și pătratică, cu restricții liniare, rezolvabilă pe un orizont de predicție fixat, prin metoda mulțimii restricțiilor active.

În acest sens, s-a arătat cum se poate face această transformare a problemei de control predictiv, pornind de la descrierea procesului reglat printr-un model discret liniar, invariant în timp și scrierea funcției obiectiv asociată problemei de obținere a unei comenzi (sub)optimale care asigură urmărirea unei referințe

impuse de către ieșirea procesului reglat cu respectarea unor restricții lineare asupra intrărilor și ieșirilor acestuia.

În ipoteza că mărimile de stare ale procesului condus sunt măsurabile legea de comandă astfel obținută se poate implementa prin reacție după stare. În caz contrar, este nevoie de folosirea suplimentară a unui observator de stare care să furnizeze starea estimată necesară implementării algoritmului.

Prin simularea numerică a algoritmilor de control predictiv a proceselor de curgere care au loc la nivelul unui tronson de conductă care asigură alimentarea cu gaz dintr-o singură sursă a unui consumator, respectiv, la nivelul unui sistem de transport format din 3 tronsoane de conductă care asigură alimentarea cu gaze a doi consumatori dintr-o sursă unică de gaz, s-a verificat caracterul anticipativ al algoritmului în generarea mărimilor de control, funcție de durata orizontului de predicție. Selecția duratei orizontului de predicție a fost corelată cu timpul de stabilizare al procesului de curgere. Simulările numerice au mai urmărit și verificarea restricțiilor impuse, respectiv: limitarea inferioară și superioară a amplitudinii și a vitezei de variație a semnalului de comandă.

Pentru cele două studii de caz s-au prezentat și schemele tehnologice care permit implementarea algoritmului de control predictiv prin integrarea într-o structură informațională de tip SCADA. Această structură va asigura achiziția și transmisia la distanță a valorilor parametrilor de proces folosiți în implementarea algoritmului.

Din analiza curbelor de evoluție ale funcției obiectiv asociate problemei de optimizare se constată valabilitatea algoritmului de control predictiv folosit în minimizarea valorii acestei funcții în condițiile păstrării regimului de funcționare al procesului în vecinătatea regimului staționar de funcționare luat în considerare pentru obținerea modelului liniarizat de aproximare al procesului folosit în implementarea algoritmului.

Capitolul 6: Concluzii, contribuții și direcții de studiu

Modelarea matematică și simularea numerică a procesului de curgere a gazelor naturale realizată la nivelul unui sistem de transport, precum și conducerea în timp real a sistemului alcătuiesc un domeniu deschis cercetării științifice, atât ca urmare a necesității rezoluționării unor probleme existente, cât și ca urmare a formulării unor noi, într-un context tehnologic în continuă schimbare și care trebuie să facă față cerințelor de calitate, în creștere, ale activității de operare a sistemului.

O eficientizare a acestei activități, în privința încărcării optime în presiune a conductelor de transport în funcție de cerințele reale ale consumatorilor de gaze în scopul reducerii pierderilor de gaze direct proporționale cu presiunea din sistem sau dirijarea optimă a fluxurilor de gaze între surse și consumatori de-a lungul conductelor componente ale sistemului cu timpii de răspuns cei mai mici pentru realizarea echilibrării fizice a sistemului, concretizată prin diminuarea costurilor totale de exploatare ale sistemului cu numai câteva procente se traduce, în termeni financiari, la nivelul unei țări ca România, în sume care pot începe de la câteva milioane și pot ajunge până la zeci de milioane de euro, sume care pot amortiza costurile inițiale ale unor investiții tehnologice importante. Pentru a justifica astfel de investiții în sistem, calculele economice trebuie să fie însoțite în mod obligatoriu și de o fundamentare tehnică corespunzătoare.

În acest context, obiectivul principal al acestei lucrări l-a constituit realizarea unei investigații amănunțite a tuturor aspectele care țin atât de modelarea matematică și simularea numerică a procesului de curgere a gazelor naturale realizat la nivelul unui sistem de transport, cât și de implementarea unui sistem de reglare automată a procesului cu luarea în considerare a restricțiilor asupra mărimilor din proces impuse de limitările tehnologice. Această investigație amănunțită cu caracter științific interdisciplinar cauzat de complexitatea tehnologică a oricărui sistem de transport de gaze naturale a avut ca punct de plecare experiența autorului dobândită pe parcursul derulării activității de cercetare aplicativă desfășurate în cadrul Departamentului Proiectare și Cercetare al „Societății Naționale de Transport Gaze Naturale TRANSGAZ S.A. Mediaș” și a fost finalizată pe durata colaborării cu Departamentul de Automatică și Informatică Aplicată al Universității „Politehnica” din Timișoara.

În paragraful 6.1 se prezintă maniera în care autorul a îndeplinit obiectivul propus, pe capitole. Paragraful 6.2. sintetizează cele mai importante contribuții ale autorului la tema studiată. În fine, paragraful 6.3. enumără câteva direcții de cercetare, în continuarea tezei, pe tematica abordată.

6.1. Concluzii finale

Investigarea tematicii tezei de doctorat a fost eșalonată pe parcursul a 5 capitole principale.

Capitolul 1, de racordare la problematica automatizării sistemelor de transport de gaze naturale creează, pe baza literaturii de specialitate, referențialul în care sunt formulate obiectivele tezei și maniera de lucru.

Problema conducerii unui sistem de transport de gaze naturale s-a formulat, pornind de la definirea elementelor structurale ale sistemelor de transport, ca o problemă ierarhizată de reglare și monitorizare automată. Detalierea problemei de conducere la nivelul unor elemente structurale ale sistemului de transport, cum sunt nodurile tehnologice și stațiile de reglare măsurare, a avut atât rolul de a introduce o serie de instrumente matematice necesare soluționării problemei cât și de a contura nivelurile ierarhice ale problemei de implementare a soluției de automatizare prin scheme tehnologice, a căror structură trebuie să fie compatibilă cu structura tehnologică de tip SCADA folosită în mod curent în administrarea informației sistemului de transport.

Capitolul 2, orientat pe deducerea modelului continuu al procesului de curgere a gazului natural prin conductele de transport realizează, prin sistematizarea unor aspecte teoretice de natură mecanică, cinematică și termodinamică ale curgerii, combinată cu o serie de observații empirice care țin de caracteristicile gazelor reale, familiarizarea cu ecuațiile curgerii fluidelor utilizate în modelare. Este vorba despre ecuații diferențiale cu derivate parțiale care corespund unui sistem cu parametrii distribuiți.

Folosirea acestor ecuații pentru deducerea modelului matematic al procesului de curgere a gazului la nivelul unei conducte de transport, potrivit unei orientări alese a modelului (alegerea mărimilor de intrare și de ieșire), reprezintă una dintre cele două modalitățile de obținere a unui model al procesului condus. Rezultatul obținut este un model explicit din punctul de vedere al structurii, mărimilor și parametrilor sistemului.

Natura complexă a procesului de curgere necesită o bună cunoaștere a tuturor aspectelor menționate pentru a selecta numai acelea care, în diferitele condiții de funcționare a procesului de curgere desfășurat la nivelul sistemului de transport, generează comportamentul dominant al acestuia.

Pe această bază se pot obține modele matematice mai mult sau mai puțin simplificate, cu diverse grade de aproximare, eficiente din punct de vedere al implementării în algoritmi de rezolvare a problemelor specifice activităților de exploatare și operare a sistemului de transport.

Capitolul 3, prezintă metode analitice și numerice utilizate pentru studiul procesului de curgere descris prin modele continue, având rolul de stabili aspectele relevante privind aplicabilitatea practică a acestor modele din perspectiva existenței unor metode matematice de soluționare.

Întrucât o structură completă a modelului procesului necesită metode matematice de soluționare complexe și laborioase, a fost necesară identificarea aspectele de comportament relevante pentru studierea procesului de curgere prin reținerea cărora modelele exacte pot fi simplificate, permițând soluționarea problemei de control propusă ca obiectiv. În acest sens au fost prezentate o serie de ipoteze care au condus la modele ale procesului cu structuri simplificate. Unele dintre formele simplificate ale modelului matematic au fost utilizate pentru studierea comportamentului staționar și dinamic al procesului de curgere, folosind metode analitice, specifice teoriei matematice a ecuațiilor diferențiale. Soluția analitică astfel determinată evidențiază modurile de comportament dinamic ale procesului de curgere și face posibilă obținerea unor relații de calcul aproximativ a constantelor de timp ale procesului. Totodată, s-a putut face o estimare a efortului de calcul numeric.

Pentru celelalte forme de modele matematice, nesimplificate sau doar parțial simplificate, s-au putut obține numai soluții numerice prin utilizarea unor metode numerice de soluționare bazate pe diferențe finite. Utilizarea diferențelor finite a avut la bază atât instrumentele care au stat la dispoziția autorului cât și experiența acestuia în folosirea lor. În acest scop, ecuațiile curgerii folosite în construirea modelelor matematice ale procesului de curgere au fost exprimate într-o formă diferențiabilă care permite efectuarea aproximărilor bazate pe diferențe finite.

Lipsa unei soluții exacte pentru toate formele modelului matematic al procesului nu a permis realizarea unei analize comparative directe privind calitatea soluției aproximative. Indirect, aceasta a putut fi apreciată prin respectarea criteriilor de convergență ale metodei numerice, oferindu-se o interpretare sistemică în acest sens. S-a făcut și o analiză a avantajelor și dezavantajelor, cunoscute din literatura de specialitate, pentru celor două tipuri de metode numerice, implicite și explicite. Din această analiză a rezultat o creștere drastică a efortului de calcul numeric ca urmare a unor caracteristici matematice speciale ale sistemului de ecuații rezultat prin discretizarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale ale procesului de curgere. Acest dezavantaj este compensat de metodele numerice implicite, prin natura metodei, iar de cele explicite, prin creșterea limitei de stabilitate. În acest sens s-a prezentat algoritmul metodei Runge-Kutta-Chebyshev.

Capitolul 4, studiază proprietățile modelelor matematice de aproximare obținute prin discretizarea modelelor, mai mult sau mai puțin simplificate, bazate pe ecuații diferențiale cu derivate parțiale, pentru abordarea problemei de conducere a sistemului de transport. Modelele de aproximare studiate și dezvoltate reprezintă sisteme cu parametri concentrați Prin simulări numerice s-a arătat că aceste modele caracterizează, cu o precizie satisfăcătoare, comportamentul dinamic al procesului de curgere. Cunoașterea dinamicii procesului de curgere din perspectiva cerințelor de implementare a algoritmului de control predictiv a fost completată prin prezentarea unei relații de calcul aproximativ a timpului de răspuns al procesului.

S-au prezentat o serie de teoreme care permit analiza stabilității pe baza proprietăților structurale ale unui model liniarizat de aproximare al procesului de curgere desfășurat la nivelul unui sistem de transport.

Modelele de aproximare au fost validate în baza unor analize comparative între rezultatele obținute prin simulare numerică și cele obținute prin măsurători experimentale. Experimentările au condus la identificarea unor corelații între mărimile măsurabile ale procesului de curgere care pot fi folosite la implementarea unor metode sistematice de estimare a parametrilor modelului.

Capitolul 5, tratează problematica implementării unui algoritm de reglare automată a dinamicii unui sistem de transport gaze naturale, folosind, pentru proiectarea sistemului de reglare automată, o variantă de metodă de control predictiv bazată pe model. Această variantă ia în considerare incertitudinile de modelare, perturbațiilor de sarcină și restricțiilor asupra mărimilor procesului condus.

Prezentarea metodei de sinteză a regulatorului predictiv s-a realizat gradual pornind de la principiul metodei și continuând cu dezvoltarea aspectelor matematice ale problemei de optimizare pătratică cu orizont de predicție fixat și restricții lineare care trebuie rezolvată în final. Pentru aplicarea acesteia sunt necesare transformări și particularizări, specifice problemei de transport abordate.

Legea de comandă obținută se poate implementa prin reacție după stare.

Algoritmul de control predictiv rezultat a fost studiat, din punctul de vedere al îndeplinirii cerințelor și a performanțelor de reglare, prin intermediul a două exemple de simulare numerică privind controlul dinamicii procesului de curgere

desfășurat la nivelul unui tronson de conductă, respectiv a unui sistem simplificat de transport. Prin cele două studii de caz, de complexitate diferită, din punctul de vedere al structurii sistemului de transport s-a verificat caracterul anticipativ al algoritmului în generarea mărimilor de control funcție de durata orizontului de predicție, s-a corelat timpul de răspuns al procesului cu durata orizontului de predicție și s-a analizat maniera în care, pe parcursul aplicării algoritmului se minimizează funcția obiectiv și se respectă restricțiile impuse asupra mărimilor procesului.

Implementarea, la nivel de simulare numerică a fost realizată prin intermediul unor schemele tehnologice care se pot integra într-o structură informațională de tip SCADA care poate asigura achiziția și transmisia la distanță a valorilor parametrilor de proces folosiți în implementarea algoritmului.

Teza se bazează pe 79 de referințe bibliografice, citate în întregime pe parcursul lucrării. Orizontul de timp pe care se așează aceste lucrări arată că tematica studiată în cadrul tezei, deși deschisă de mult timp, este de actualitate, cu numeroase ramificații în prezent și cu importante perspective de viitor.

Lucrarea este însoțită de anexe care aduc o serie de completări privind înțelegerea anumitor aspecte matematice sau care privesc implementarea programelor de simulare numerică folosite în studiile de caz.

6.2. Contribuții personale

Problematika prezentată în cadrul acestei teze de doctorat se poate constitui într-un punct de plecare pentru fundamentarea strategiei de integrare a metodelor de conducere sistemică ca și componente ale sistemelor informatice de tip SCADA, destinate managementului conducerii sistemelor de transport de gaze naturale în conformitate cu exigențele specifice de automatizarea a sistemelor de transport.

O primă contribuție a autorului apare în capitolul 1, în contextul rezolvării acestor exigențe, prin formularea problemei de conducere a unui sistem de transport de gaze naturale ca problemă de reglare a presiunilor de ieșire din sistem, în condițiile acțiunii unor perturbații de sarcină cauzate de variația debitelor consumatorilor racordați la ieșirile sistemului și a respectării unor restricții tehnologice impuse mărimilor procesului reglat.

Abordarea s-a făcut, în primul rând, din perspectiva asigurării continue a alimentării cu gaze naturale, reflectată în echilibrarea fizică a sistemului, în condiții de siguranță a consumatorilor deserviți de sistem. Spre deosebire de abordările din [4], [61] care se bazează prioritar pe aspecte economice, abordarea de față ține seamă, în primul rând, de specificul sistemului analizat. Introducerea unor criterii de optimizare de natură economică devine fezabilă numai după rezolvarea problemei echilibrării fizice automate a sistemului.

În al doilea rând, au fost identificate o multitudine de aspecte teoretice și practice care au condus la o variantă de soluționare a problemei de reglare automată. Prin schema tehnologică propusă, care respectă cerințele de implementare ale unei arhitecturi de sistem de tip SCADA, s-a evidențiat că se poate asigura, în mod automat, echilibrarea fizică a sistemului de transport.

Totodată s-a propus și o schemă complexă de înzestrare cu elemente de automatizare (senzori, transductoare, elemente de execuție) a unei stații de reglare și măsurare gaze care este prezentă, de regulă, în nodurile tehnologice consumator ale unui sistem de transport. Schema ține seama de nivelul tehnic existent de

dotare cu aparatură de reglare și protecție al stațiilor existente și de cerințele de integrare a structurii de automatizare rezultate într-o arhitectură de sistem de tip SCADA.

În capitolul 2 contribuția autorului a constat în: stabilirea de o manieră sistematică a ecuațiilor utilizabile pentru sintetizarea modelelor matematice ale procesului de curgere a fluidelor reale, particularizarea acestora pentru cazul sistemelor de transport și analiza celor mai importante aspecte ale procesului de curgere unidimensională a gazelor naturale prin astfel de conducte. Totodată, s-a ilustrat modul în care formă canonică generală a modelului de curgere, de tip sistem cu parametrii distribuiți, furnizează prin diverse orientări, interpretări sistemice pentru procesul de curgere unidimensională a gazului, în funcție de contextul aplicativ, exprimat prin alegerea condițiilor de frontieră ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale.

În capitolul 3, o primă contribuție a autorului o reprezintă utilizarea unei soluții analitice a unui model matematic simplificat a dinamicii presiunii dintr-un tronson înclinat de conductă, bazată pe o descompunere modală, pentru sintetizarea unor informații de bază privind natura comportamentului dinamic al procesului de curgere. În felul acesta a putut fi evidențiată posibilitatea apariției, în urma discretizării spațiale, cu precizie ridicată, a sistemului de ecuații cu derivate parțiale asociat modelului matematic al procesului de curgere, a unor sisteme inflexibile de ecuații diferențiale cu derivate ordinare care impun condiții suplimentare pentru implementarea eficientă a metodelor numerice explicite, din punctul de vedere al efortului de calcul numeric.

O a doua contribuție a autorului o reprezintă realizarea unei abordări sistemice a problemei analizei convergenței metodelor numerice cu diferențe finite folosite pentru obținerea unor soluții numerice a modelului matematic al procesului de curgere, prin tratarea acesteia ca o problemă de analiză a limitei de stabilitate a sistemului cu parametri concentrați obținut în urma aplicării unor formulelor consistente de derivare numerică.

În capitolul 4 contribuția autorului a constat, în primul rând, în construirea unor modele de aproximare ale procesului de curgere prin aplicarea tehnicilor de discretizare specifice metodelor numerice cu diferențe finite, iar în al doilea rând, în utilizarea acestor modele pentru demonstrarea, prin simulări numerice, a valabilității ipotezelor simplificatoare prezentate în capitolul 2. În acest sens au fost scrise programe de simulare numerică în MABLAB, structurate pentru o dezvoltare ulterioară, conform listing-ului prezentat în Anexa A.5. Validarea modelelor s-a făcut pe baza diferențelor dintre simulările pe modelul nesimplificat și simulările pe modelele simplificate. Totodată au fost validate și experimental modelele de aproximare pe baza unor valori de presiuni și debite măsurate în condiții reale de funcționare a procesului de curgere. Și în acest caz criteriul de validare l-a constituit eroarea de modelare. Rezultatele obținute sunt similare celor furnizate de studii de specialitate de referință.

În capitolul 5 contribuția autorului a constat în verificarea performanțelor algoritmului de control predictiv prin simularea numerică a două scheme tehnologice de complexitate diferită (din punctul de vedere al structurii sistemului de transport considerat). Simulările numerice au evidențiat, totodată, posibilitatea corelării, în scopul eficientizării calculului numeric, a duratei orizontului de predicție al algoritmului de control, ales empiric în alte studii de specialitate, cu valoarea timpului de răspuns al procesului de curgere.

Pentru realizarea programelor de simulare numerică a proceselor de curgere desfășurate la nivelul unor structuri de sisteme de transport au fost realizate blocuri

SIMULINK pentru simularea numerică a procesului de curgere printr-un tronson de conductă care au fost apoi conectate funcțional, respectându-se sistemului de transport supus analizei. Modul de construire al acestor blocuri, respectiv al modelelor virtuale ale sistemelor de transport este prezentate în Anexa A.6. Recurgerea la această posibilitate de simulare reprezintă o altă contribuție adusă prin teză.

Cercetarea la care se referă teza de doctorat este strâns legată de activitatea de cercetare aplicativă desfășurată de autor în cadrul Departamentului Proiectare și Cercetare al „Societății Naționale de Transport Gaze Naturale TRANSGAZ S.A. Mediaș”, prin participarea la elaborarea și finalizarea unor studii de cercetare referitoare la dezvoltarea și implementarea unui model de control predictiv la nivelul sistemului național de transport de gaze naturale, cu luarea în considerare a aspectelor specifice de exploatare și operare ale acestuia, respectiv referitoare la problematica automatizării stațiilor de reglare și măsurare gaze naturale din perspectiva integrării acestora într-un sistem de achiziție și monitorizare parametrii de tip SCADA. Studiile au fost finalizate prin avizarea rapoartele interne de cercetare [43], [44], [49], [50], [55], respectiv, [46], [47], [48]. O parte dintre rezultatele obținute pe această cale au fost diseminate prin publicarea a 8 articole informative în revista de Automatizări și Instrumentație, [45], [51], [52], [53], [56], [57], [58], [59], susținerea unor comunicări pe tematica controlului predictiv în cadrul unor conferințe de specialitate desfășurate în România [54], [60].

Aspectele referitoare la modelarea și simularea sistemelor de transport de gaze naturale, dezvoltate în capitolele 3 și 4 ale tezei, au făcut obiectul unui articol în două părți publicat în revista CEAI ([7], [8]). Rezultatele referitoare la determinarea duratei regimului tranzitoriu al proceselor de curgere desfășurate prin conductele unui sistem de transport și rolul acesteia în implementarea unui algoritm de control predictiv au fost prezentate în lucrarea [9] apărută în Proceeding-ul CSCS 17.

6.3. Direcții viitoare de studiu

Cercetarea la care se referă prezenta teză se pretează, ca urmare a amplitudinii tematicii investigate, la noi dezvoltări. Ele sunt enumerate mai jos și vizează, pe de o parte, aprofundări ale unor situații tratate în această lucrare, iar pe de altă parte, o serie de probleme care nu au fost abordate. În opinia autorului trebuie luate în considerare următoarele aspecte:

- a) Dezvoltarea modelelor matematice ale altor componente tehnologice ale sistemului de transport (de exemplu: robinete, regulatoare, stații de comprimare gaze, etc.) și extinderea schemelor de simulare numerică SIMULINK pentru analiza și a altor aspecte ale problemei exploatarei și operării unui sistem de transport gaze naturale;
- b) Extinderea problemei de optimizare asociate problemei de conducere a sistemului de transport prin includerea și a unor obiective de ordin economic (de exemplu: costurile de exploatare ale stațiilor de comprimare gaze);
- c) Reformularea problemei de conducere a sistemului de transport ca problemă de asigurare a calității gazului furnizat consumatorilor din surse de gaze de calitate diferită;
- d) Studiul și a altor metode de rezolvare a problemei de optimizare (de exemplu: metoda punctului interior pentru soluționarea problemei de optimizare pătratică cu restricții lineare);

- e) Studierea metodelor de control neliniar predictiv;
- f) Implementarea unor estimatori ai parametrilor conductelor de transport pornind de la corelațiile prezentate între mărimile măsurabile ale procesului;
- g) Construirea unor estimatori ai stării sistemului de transport necesari implementării ca reacție după stare a algoritmului de control, pornind de la structura modelelor de aproximare dezvoltate;
- h) Studierea unor forme eficiente de implementare practică a algoritmului de control predictiv în condițiile modernizării infrastructurii tehnologice și informatice a sistemului național de transport gaze naturale.

Anexe

A.1. Elemente de teoria câmpurilor

Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un deschis fixat și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ punctul curent în \mathbb{R}^n . O formă diferențială de gradul I în U este o expresie de tipul: $\omega = P_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$ unde $\{P_i / i = \overline{1, n}\}$ sunt coeficienții formei ω .

Forma diferențială de ordinul I ω se numește *exactă* dacă există o funcție derivabilă pe U astfel încât $\omega = df$, adică $\left\{ P_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) / i = \overline{1, n} \right\}$

$(\forall) x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$.

Forma diferențială de ordinul I ω se numește *închisă* dacă este derivabilă și în plus $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x) \quad (\forall) x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, cu $\{i, j = \overline{1, n}\}$.

Fie câmpul vectorial $\underline{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\underline{i} + Q(x, y, z)\underline{j} + R(x, y, z)\underline{k}$ definit pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^3$.

Forma diferențială asociată $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ este *exactă* dacă și numai dacă există o funcție f derivabilă pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$,

$R = \frac{\partial f}{\partial z}$. În acest caz $\underline{v} = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k}$ adică $\underline{v} = \text{grad}(f)$, caz în care se spune că \underline{v} este un *câmp de gradienti* în U .

Forma diferențială ω este *închisă* dacă și numai dacă P, Q, R sunt derivabile

pe U și dacă $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$, caz în care câmpul \underline{v} este un câmp conservativ în U .

Orice formă diferențială exactă $\omega = df$ este *închisă*.

Orice *câmp de gradienti* este *conservativ*.

Fie forma diferențială continuă $\omega = P_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$

definită pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^n$. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

- ω este exactă;
- pentru orice drum închis γ având urma conținută în U , $\int_{\gamma} \omega = 0$;
- dacă A și B sunt două puncte oarecare din U , atunci pentru orice două drumuri parametrizate γ_1, γ_2 având urmele situate în U , având aceleași

capete A și B , are loc relația: $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$. Integrala formei ω este independentă de drumul de integrare, depinzând numai de capetele drumului.

Fie câmpul vectorial \underline{v} definit pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- a) \underline{v} este un câmp de gradienti în U ;
- b) integrala $\int_{\gamma} \underline{v} \cdot d\underline{r}$ de-a lungul drumului închis γ , având urma conținută în U este nulă;
- c) integrala $\int_{\gamma} \underline{v} \cdot d\underline{r}$ pe orice două drumuri având urmele conținute în U , având aceleași capete este aceeași.

Un câmp vectorial \underline{v} având componentele funcții derivabile peste un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$, se numește *irotațional* în U dacă $\text{rot}_a(\underline{v}) = 0$ pentru orice punct $a \in U$. Câmpul \underline{v} este irotațional dacă și numai dacă este conservativ, adică forma diferențială $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ este închisă în U .

Un câmp vectorial \underline{v} având componentele funcții derivabile peste un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$, se numește *solenoidal* în U dacă $\text{div}_a \underline{v} = 0$ pentru orice punct $a \in U$.

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis fixat. Prin *câmp scalar* definit pe U se înțelege orice funcție $\varphi(x, y, z)$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, iar un *câmp vectorial* de componente P, Q, R este o asociere de forma $\underline{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\underline{i} + Q(x, y, z)\underline{j} + R(x, y, z)\underline{k}$, unde $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ este baza de versori a spațiului vectorial definit peste mulțimea numerelor reale \mathbb{R}^3 . Câmpurile vectoriale se identifică prin triplete de câmpuri scalare componente.

Pentru orice $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ *gradientul câmpului scalar* $\varphi(x, y, z)$ în punctul a este vectorul: $\text{grad}_a \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\underline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a)\underline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a)\underline{k}$. Vectorul $\text{grad}_a \varphi$ reprezintă câmpul de gradienti asociat câmpului scalar φ .

Fie vectorul de poziție $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ al punctului curent și $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ un vector constant. Atunci produsul scalar $\varphi = \underline{a} \cdot \underline{r}$ are gradientul $\text{grad}(\varphi) = \text{grad}(\underline{a} \cdot \underline{r}) = \underline{a}$.

În mod similar se poate arăta: $\text{grad}(r) = \frac{\underline{r}}{r}$ unde $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dacă φ este o funcție derivabilă pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$ și \underline{s} este un versor fixat, atunci: $\frac{d\varphi}{ds}(a) = \underline{s} \cdot \text{grad}_a \varphi$.

Fie $\underline{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\underline{i} + Q(x, y, z)\underline{j} + R(x, y, z)\underline{k}$ un câmp vectorial, având componentele funcții derivabile definite pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^3$. Pentru orice punct $a \in U$ se definește:

a) scalarul $div_a(\underline{v}) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a)$ numit *divergența* lui \underline{v} în a ;

b) vectorul $rot_a(\underline{v}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ numit *rotorul* lui \underline{v} în a .

Prin introducerea operatorului simbolic $\nabla = \underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial}{\partial z}$ numit *operatorul nabla*, operatorii diferențiali de ordinul I se exprimă astfel:

a) $grad(\varphi) = \nabla \varphi$ - produs între câmpul scalar φ și vectorul nabla;

b) $div(\underline{v}) = \nabla \cdot \underline{v}$ - produs scalar între vectorul nabla și vectorul \underline{v} ;

c) $rot(\varphi) = \nabla \times \varphi$ - produs vectorial între vectorul nabla și vectorul \underline{v} .

Derivata după un versor $\underline{s} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{k}$ se exprimă cu ajutorul operatorului

nabla $\frac{d\varphi}{ds} = \underline{s} \cdot (\nabla \varphi) = (\underline{s} \cdot \nabla) \varphi$.

Reguli de calcul cu nabla:

a) $\nabla c = 0$ dacă c este o constantă scalară;

b) $\nabla \cdot \underline{c} = 0$, $\nabla \times \underline{c} = 0$ dacă \underline{c} este un vector constant;

c) $\nabla \cdot (\varphi \underline{v}) = (\nabla \varphi) \cdot \underline{v} + \varphi (\nabla \cdot \underline{v})$;

d) $\nabla \times (\varphi \underline{v}) = (\nabla \varphi) \times \underline{v} + \varphi (\nabla \times \underline{v})$;

e) $\nabla \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = (\nabla \times \underline{w}) \cdot \underline{v} + \underline{w} \cdot (\nabla \times \underline{v})$;

f) $div[rot(\underline{v})] = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = 0$;

g) $rot[grad(\varphi)] = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$;

h) $div[grad(\varphi)] = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$;

Fluxul unui câmp vectorial printr-o porțiune de suprafață se definește pornind de la relație de definire a integralei de suprafață astfel:

Fie $\Delta \in R^2$ un deschis și $s: \Delta \rightarrow R^3$ o suprafață parametrizată prin ecuațiile: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ unde $(u, v) \in \Delta$. Pentru submulțimea $M \subset \Delta$ se consideră porțiunea de suprafață $\Sigma = s(M)$ și fie $F(x, y, z)$ o funcție continuă definită pe deschisul $U \subset R^3$ care conține porțiunea de suprafață Σ .

Integrala de suprafață a funcției F pe porțiunea de suprafață Σ este numărul real:

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_M F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| du dv.$$

în care expresia diferențială: $d\sigma = \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| du dv$ reprezintă elementul de suprafață.

Integrala de suprafață este independentă de parametrizarea suprafeței Σ , în sensul că, pentru două parametrizări echivalente valoarea integralei este aceeași.

Vectorii \underline{r}_u , \underline{r}_v au următoarea semnificație: Fixăm $(u_0, v_0) \in \Delta$ și fie $Q(x_0, y_0, z_0)$ punctul $s(x_0, y_0)$ de pe urma $\Sigma = s(\Delta)$ a suprafeței s . Notăm cu $u = u_0$, respectiv $v = v_0$ curbele parametrice care trec prin Q și sunt situate pe Σ . Vectorii tangenți în

Q la aceste curbe sunt $\underline{r}_u = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \underline{k}$, respectiv $\underline{r}_v = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \underline{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \underline{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \underline{k}$, vectori care generează planul tangent în Q la suprafața s .

Există doi versori normali la suprafața Σ în punctul Q , și anume: $\underline{n} = \pm \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|}$.

Considerând câmpul vectorial $\underline{v}(x, y, z) = P(x, y, z) \underline{i} + Q(x, y, z) \underline{j} + R(x, y, z) \underline{k}$, având componentele funcții continue pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ care conține suprafața Σ , pe baza normalei la suprafața Σ fluxul câmpului vectorial \underline{v} prin suprafața Σ se va defini astfel: $\Phi_{\Sigma}(\underline{v}) = \int_{\Sigma} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma$.

Formula Gauss-Ostrogradski stabilește legătura dintre integrala de suprafață și integrala de volum: $\int_{\Sigma} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} [\text{div}(\underline{v})] dx dy dz$ în care $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime compactă având frontiera suprafața închisă Σ , $\underline{v}(x, y, z) = P \underline{i} + Q \underline{j} + R \underline{k}$ un câmp vectorial definit pe un deschis care conține Ω .

Formula lui Stokes: stabilește legătura dintre integrala curbilinie și integrala de suprafață: $\int_C \underline{v} \cdot d\underline{r} = \int_S \text{rot}(\underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma$, în care $S \subset \mathbb{R}^3$ o porțiune de suprafață elementară delimitată de curba închisă C .

A.2. Ecuații diferențiale ordinare cu condiții limită inițiale și finale

Problema găsirii unei soluții $y(x)$ a ecuației diferențiale de forma: $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0$ pe intervalul: $x \in [a, b]$ cu respectarea condițiilor

de frontieră: $\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$ se numește problemă de tip Sturm-Liouville [19].

Sunt cunoscute, funcțiile $p(x) > 0$, $q(x)$, respectiv funcția pondere, $r(x)$ și constantele a_1, a_2, b_1, b_2 . Parametrul λ nu este specificat.

Soluțiile netriviiale (nenule) $\{\phi_n(x) / x \in [a, b], n = 1, 2, 3, \dots\}$ ale problemei există numai pentru anumite valori reale nenegative $\{\lambda_n / n = 1, 2, 3, \dots\}$, care se numesc valori proprii, iar funcțiile soluție asociate, funcții proprii.

Funcțiile proprii $\{\phi_n(x) / x \in [a, b], n = 1, 2, 3, \dots\}$ ale problemei sunt

ortogonale două câte două astfel: $\int_a^b r(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$ dacă $m \neq n$ și $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

O mulțime completă de funcții proprii $\{\Phi_n(x) / x \in [a, b], n = 1, 2, 3, \dots\}$ formează o mulțime ortogonală completă astfel încât o funcție continuă pe porțiuni $f(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ poate fi exprimată funcție de elementele mulțimii prin următoarea serie infinită:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \text{ este punct de continuitate} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, & \text{dacă } x \text{ este punct de discontinuitate} \end{cases}.$$

Coeficienții seriei se calculează după relația:
$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) \Phi_n(x) dx}{\int_a^b r(x) \Phi_n(x) \Phi_n(x) dx}.$$

Proprietatea de a fi completă a mulțimii funcțiilor proprii face ca fiecare funcție continuă pe porțiuni să poată să fie exprimată ca o serie de funcții proprii, elemente ale mulțimii. Ortogonalitatea elementelor mulțimii asigură unicitatea și compactitatea seriei respective (neexistența unor termeni redundanți). Aceste proprietăți generalizează conceptul de serie Fourier convențională de forma $\sin \lambda_n x$ sau $\cos \lambda_n x$, seriile cu termeni de forma $\Phi_n(x)$, cu proprietățile menționate fiind numite serii Fourier generalizate. Metoda de formare a unei soluții pe baza unei serii Fourier generalizate poartă numele de metoda seriilor de funcții proprii și este una din metodele care permit rezolvarea analitică a ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale.

A.3. Caracteristicile ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale cvasiliniare și neomogene

Există o varietate largă de ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Fiecare problemă fizică este caracterizată de propria ecuație sau sistem de ecuații cu derivate parțiale ce prezintă propriile sale particularități care impun o tratare individuală.

În cazul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale cvasiliniare și neomogene, clasificarea acestora este strâns legată de caracteristicile lor.

În spațiul bidimensional R^2 caracteristicile sunt curbe în domeniul soluției $D \subset R^2$ de-a lungul cărora se propagă informația [28], [19]. Dacă ecuația cu derivate parțiale posedă caracteristici reale informația se va propaga de-a lungul acestora. Dacă nu posedă caracteristici reale nu vor exista traiectorii preferate de propagare a informației.

Pentru a înțelege mai bine conceptul de propagare a informației să considerăm fenomenul de convecție a unei proprietăți fizice a unei substanțe fenomen care reprezintă procesul de propagare, în spațiu, a proprietății fizice ca urmare a deplasării, în spațiu, a mediului de substanță. Un astfel de proces are loc în cazul mișcării fluidelor. Convecția proprietății f a unei particule de fluid care se deplasează cu viteza u , într-o singură dimensiune, este descrisă matematic de o ecuație cu derivate parțiale de forma:

$$f_t + uf_x = 0 \quad (\text{A.3.1})$$

Proprietatea transportată poate fi masa, momentul de mișcare sau energia particulei.

Localizarea $x(t)$ a particulei de fluid este dată prin ecuația de mișcare:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (\text{A.3.2})$$

Prin rezolvarea ecuației de mișcare (A.3.2) obținem traiectoria particulei de fluid:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (\text{A.3.3})$$

De-a lungul acestei traiectorii ecuația cu derivate parțiale (A.3.1) se poate rescrie:

$$f_t + uf_x = f_t + \frac{dx}{dt} f_x = \frac{df}{dt} = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

expresie în urma integrării căreia rezultă: $f = \text{const}$.

Practic proprietatea f a fluidului este transportată de-a lungul traiectoriei caracteristice (A.3.3) având ecuația caracteristică (A.3.2).

Curbele caracteristice pentru o ecuație cu derivate parțiale cvasiliniară se definesc ca fiind curbele de-a lungul cărora derivatele parțiale de ordinul cel mai mare al ecuației considerate nu sunt definite [19] (multivalori sau discontinue).

Pentru ecuația cvasiliniară de ordinul 2, neomogenă de forma:

$$Af_{tt} + Bf_{tx} + Cf_{xx} + Df_t + Ef_x + Ff = G \quad (\text{A.3.5})$$

ecuația caracteristică rezultă din impunerea condiției de nedeterminare sistemului de ecuații algebrice format din ecuația diferențială (A.3.5) și relațiile de determinare a diferențialelor totale $d(f_x)$ și $d(f_t)$:

$$d(f_t) = f_{tt}dt + f_{tx}dx \quad (\text{A.3.6.a})$$

$$d(f_x) = f_{xt}dt + f_{xx}dx \quad (\text{A.3.6.b})$$

În formă matriceală, sistemul de ecuații liniare și algebrice în necunoscutele f_{xx} , f_{xt} și f_{tt} este:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ dt & dx & 0 \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{tt} \\ f_{tx} \\ f_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Df_t - Ef_x - Ff + G \\ d(f_t) \\ d(f_x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

Sistemul este nedeterminat, dacă:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dt & dx & 0 \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.3.8})$$

Rezultă atunci ecuația diferențială:

$$A(dx)^2 - B(dx)(dt) + C(dt)^2 = 0 \quad (\text{A.3.9})$$

din care se deduce ecuația caracteristică:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{A.3.10})$$

Ecuația caracteristică (A.3.10) reprezintă ecuația diferențială a două familii de curbe în planul xt asociate semnului \pm . De-a lungul acestor curbe derivatele de ordinul al 2-lea a funcției $f(x,t)$ sunt nedefinite (nedeterminate, au multivalori sau sunt discontinue).

Ținând seama de semnul discriminantului $\Delta = B^2 - 4AC$ ecuațiile de forma (A.3.5) pot avea:

- a)** caracteristici reale dacă $\Delta > 0$, caz în care ecuațiile poartă numele de ecuații hiperbolice;
- b)** caracteristici reale și confundate dacă $\Delta = 0$, caz în care ecuațiile poartă numele de ecuații parabolice;
- c)** caracteristici complexe dacă $\Delta < 0$, caz în care ecuațiile poartă numele de ecuații eliptice.

În cazul unui sistem cvasiliniar de ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1, neomogene, de forma:

$$\begin{cases} af_t + bf_x + cg_t + df_x = f \\ Af_t + Bf_x + Cg_t + Df_x = F \end{cases} \quad (\text{A.3.11})$$

trajectoriile caracteristice sunt acele curbe din domeniul $D(x,t) \subset R^2$ de-a lungul cărora derivatele f_t , f_x , g_t și g_x sunt nedeterminate. Ecuațiile diferențiale ale trajectoriilor caracteristice rezultă impunând ca următorul sistem de ecuații algebrice să fie nedeterminat:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ f_x \\ g_t \\ g_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ E \\ df \\ dg \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.12})$$

adică:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.3.13})$$

care conduce la ecuația diferențială:

$$\bar{A}(dx)^2 - \bar{B}(dx)(dt) + \bar{C}(dt)^2 = 0 \quad (\text{A.3.14})$$

cu:

$$\bar{A} = aC - Ac \quad (\text{A.3.15.a})$$

$$\bar{B} = aD - Ad + bC - Bc \quad (\text{A.3.15.b})$$

$$\bar{C} = bD - Bd \quad (\text{A.3.15.c})$$

Rezultă ecuația caracteristică:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}}}{2\bar{A}} \quad (\text{A.4.16})$$

similară ca formă cu ecuația (A.3.10) rezultând și aceeași clasificare a sistemului de ecuații după caracteristicile sistemului.

În cazul general al unui un sistem de ecuații cu derivate parțiale de forma:

$$u_t + \underline{A}(x,t)u_x + \underline{B}(x,t)u = \underline{F}(x,t) \quad (\text{A.4.17})$$

spunem despre acest sistem că este hiperbolic dacă există matricea funcție $\underline{P}(x, t)$

astfel încât: $\underline{P}(x, t)\underline{A}(x, t)\underline{P}(x, t)^{-1} = \underline{\Lambda}(x, t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x, t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda_n(x, t) \end{bmatrix}$ este o matrice

diagonală de valori: $\{\lambda_i \in \mathbb{R} / i = \overline{1, n}\}$, pur reale, iar normele matricelor $\underline{P}(x, t)$ și $\underline{P}(x, t)^{-1}$ sunt mărginite pentru $x \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$. Notând cu: $\underline{v} = \underline{P}\underline{u}$, sistemul A.4.17 se aduce la forma canonică (decuplată):

$$\underline{v}_t + \underline{\Lambda}\underline{v}_x = \underline{P}\underline{F} + \underline{G}\underline{v} \quad (\text{A.4.18})$$

în care: $\underline{G} = (\underline{P}_t + \underline{\Lambda}\underline{P}_x - \underline{P}\underline{B})\underline{P}^{-1}$.

Ecuțiile caracteristice ale sistemului (A.4.17) vor avea forma:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t), \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{A.4.19})$$

Caracteristicile ecuațiilor / sistemelor de ecuații cu derivate parțiale joacă un rol important în buna alegere condițiilor de frontieră. De exemplu, în cazul unui sistem de ecuații cu derivate parțiale hiperbolic de forma (A.4.17), prezența unor valori proprii reale ale matricei \underline{A} strict pozitive indică viteze de deplasare pozitive ale informației, de-a lungul traiectoriilor caracteristice, de la stânga la dreapta domeniului pe care se caută soluția, corespunzător sensului pozitiv al axei reale. În acest caz toate condițiile de frontieră, ca să fie bine puse trebuie specificate numai în partea stângă a domeniului pe care se caută soluția.

Prezența traiectoriilor caracteristice în domeniul $D(x, t) \subset \mathbb{R}^2$ de definire al soluției conduce la conceptele de domeniu de dependență și rază de influență. Pentru prezentarea acestor concepte se consideră un punct P din domeniul D . Domeniul de dependență al punctului P este definit ca mulțimea punctelor din domeniul soluției de care depinde soluția ecuației exprimată în acel punct: $f(x_p, t_p)$. În schimb raza de influență a punctului P se referă la mulțimea punctelor din domeniul soluției care sunt influențate de soluția $f(x_p, t_p)$ din punctul P .

Traietoriile caracteristice vor determina domeniul de dependență și raza de influență pentru cele trei tipuri de ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare, conform figurilor A.3.1 [28].

Cazul de domeniul de dependență și rază de influență reprezentat în figura A.3.1.c va fi exemplificat prin ecuația undelor care se întâlnește în mișcarea fluidelor:

$$p_{tt} = u^2 p_{xx} \quad (\text{A.3.20})$$

Ținând seama de cele prezentate anterior avem următoarea ecuație caracteristică:

$$\frac{dx}{dt} = \pm u_0 \quad (\text{A.3.21})$$

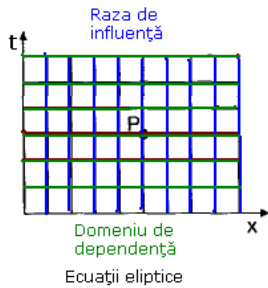


Fig. A.3.1.a. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale eliptice

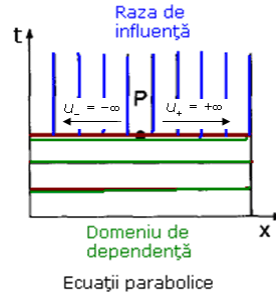


Fig. A.3.1.b. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale parabolice

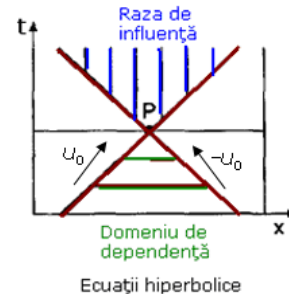


Fig. A.3.1.c. Domeniul de dependență și raza de influență a ecuațiilor cu derivate parțiale hiperbolice

Vom avea cele două traiectorii caracteristice reprezentate în figura (A.3.1.c), descrise prin relațiile:

$$x(t) = x(t_0) \pm u_0 t \tag{A.3.22}$$

De-a lungul acestor două traiectorii caracteristice propagarea (convecția) presiunii p va avea loc cu viteza:

$$c = \frac{dx}{dt} = \pm u_0 \tag{A.3.23}$$

Conform figurii A.3.1.c presiunea p în punctul P depinde numai de presiunile din punctele fizice ale domeniului de dependență și influențează numai presiunile din punctele fizice din raza de influență.

Rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale printr-o metodă numerică bazată pe diferențe finite necesită construirea unei rețele de discretizare spațio-temporală și selectarea unei metode de discretizare, faze ale metodei în care trebuie să se țină seama de domeniul de dependență și de raza de influență a ecuației considerate [28].

Astfel, din punct de vedere al modului de calcul al soluției numerice *metodele explicite* cu diferențe finite sunt acele metode în care soluția din punctul P la momentul de timp t_{n+1} depinde numai de soluția din punctele vecine momentului de timp t_n , fiind caracterizate de viteze numerice de propagare a informației finite:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ în care } \Delta x, \Delta t \text{ sunt pașii de discretizare ai spațiului, respectiv, ai timpului.}$$

În schimb în cazul *metodelor implicite* cu diferențe finite, soluția din punctul P , la momentul de timp t_{n+1} depinde și de soluțiile la momentele de timp t_{n+1} . Metoda implicită va fi caracterizată de viteze numerice infinite de propagare a informației.

Din punct de vedere al sensului de executare al calculelor, ambele metode se caracterizează prin aceea că soluționarea se face înainte în timp de la nivelul de timp actual la cel următor, însă diferă prin viteza numerică de propagare: finită în cazul metodelor explicite și infinită în cazul celor implicite.

O schemă de discretizare cu viteză finită de propagare, asociată unei metode explicite, nu va modela corespunzător viteza fizică de propagare a informației asociată unei ecuații parabolice.

Ar rezulta că metodele implicite par a fi cele mai potrivite pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor parabolice pe când, cele explicite, pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor hiperbolice.

În realitate numai o mică parte din informația fizică se propagă cu viteză fizică infinită, grosul informației propagându-se cu viteză finită.

Experiența în rezolvarea numerică celor două tipuri de ecuații a arătat că ambele tipuri de metode s-au putut aplica cu succes în cazul ambelor tipuri de ecuații [28].

A.4. Tipuri de matrici și teoreme importante referitoare la structura matricilor sistemelor de ecuații inflexibile

Matrice *diagonale dominante*: O matrice pătratică \underline{A} de tipul $n \times n$ este:

a) (slab) diagonal dominantă dacă: $|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ pentru $j = \overline{1, n}$;

b) strict diagonal dominantă dacă: $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ pentru $j = \overline{1, n}$;

c) ireductibil diagonal dominantă dacă \underline{A} este ireductibilă și inegalitatea

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1, \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

este strict satisfăcută, cel puțin, pentru un indice j .

Observație: Matricea \underline{A} este reductibilă dacă poate fi adusă, printr-o serie de operații de permutare simetrice, la forma triunghiulară superioară:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{pp} \end{bmatrix},$$

astfel încât rezolvarea sistemului de ecuații descris prin

intermediul matricei \underline{A} se transformă într-o secvență de rezolvări de subsisteme descrise de matricele $\{A_{pp}, i = p, p-1, \dots, 1\}$. (simplificări de calcule).

O matrice \underline{A} este o matrice *tridiagonală* dacă toate elementele ale căror indici satisfac relația: $|i - j| > 1$ sunt nule, adică $a_{ij} = 0$.

Conceptul de diagonalitate dominantă este strâns legat de un rezultat important în algebra lineară numerică și anume *teorema Gershgorin*. Teorema permite determinarea brută a unei zone (discurile Gershgorin) unde sunt localizate toate valorile proprii ale matricei \underline{A} .

Teorema Gershgorin: Orice valoare proprie λ a matricei \underline{A} este localizată într-unul din discurile planului complex cu centrul în a_{ii} și având raza $\rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

Cu alte cuvinte, notând cu $\sigma(\underline{A})$ spectrul matricei \underline{A} : $(\forall) \lambda \in \sigma(\underline{A}), (\exists) i \in \{1, \dots, n\}$

astfel încât: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

Corolar la teorema Gershgorin: Dacă o matrice A este strict diagonal dominantă sau ireductibil diagonal dominantă, atunci ea este o matrice nesingulară (de rang maxim).

Teoremă: O matrice tridiagonală M care are următoarele proprietăți:

- a) diagonal dominantă cu o inegalitate strictă pentru o linie $i = s$;
- b) elementele de pe diagonalele secundare m_{ij} cu $|i - j| = 1$ nenule și de semn opus cu elementele de pe diagonala principală; este o matrice nesingulară (de rang maxim).

Teoremă: O matrice A strict diagonal dominantă este nesingulară.

Teoremă: O matrice tridiagonală reală A care are elementele de pe diagonalele secundare a_{ij} cu $|i - j| = 1$ nenule și toate pozitive sau toate negative, este o matrice care are toate valorile proprii reale.

A.5. Simularea numerică a modelelor de aproximare ale procesului de curgere folosind mediul de lucru MATLAB

Programul de simulare numerică pentru modelul de aproximare asociat realizării sistemice $p1Q2$ a modelului matematic (4.3.1.b) al procesului de curgere printr-un tronson de conductă este cuprins în fișierul MATLAB „*simulare_model_p1Q2_01.m*” și este format dintr-o funcție principală, având același nume ca și fișierul care o conține și o colecție de funcții auxiliare structurate conform reprezentării grafice din figura A.5.1, respectiv, detaliată în listingul care urmează.

Datele de inițializare ale simulării numerice și anume: caracteristicile fizice ale tronsonului, parametrii fizici ai gazului, parametrii rețelei de discretizare spațio-temporale se introduc prin folosirea editorului de text al mediului de lucru MATLAB în corpul funcției principale a programului. Prin intermediul funcțiilor auxiliare sunt calculate o serie de mărimi necesare inițializării simulării numerice, respectiv: factorul de frecare hidraulică λ care rămâne constant pe durata simulării numerice, distribuția inițială de presiune.

Programul afișează curbele de evoluție dinamică în timp ale presiunii de ieșire $p2$, respectiv, ale debitului de intrare $Q1$ cauzate de variația presiunii de intrare $p1$ și a debitului de ieșire $Q2$. Sunt afișate, comparativ, atât curbele de evoluție dinamică folosind atât un model neliniar de aproximare cât și un model liniarizat de aproximare. Pentru efectuarea unor comparații numerice se mai afișează de asemenea eroarea relativă procentuală dintre valorile presiunii de ieșire calculate prin folosirea modelului neliniarizat și a modelului liniarizat.

Report for File simulare_model_p1Q2_01

| M-files | Children (called functions) |
|--|--|
| simulare_model_p1Q2_01 | subfunction : ZHY subfunction : tauHY subfunction : densitate subfunction : fun_PROCES_stationar subfunction : fun_PROCES_csi subfunction : fun_const_timp subfunction : fun_MODEL_stationar subfunction : fun_MODEL_matrici subfunction : fun_PROCES_dinamic subfunction : fun_MODEL_dinamic |
| simulare_model_p1Q2_01>funHY | |
| simulare_model_p1Q2_01>ZHY | |
| simulare_model_p1Q2_01>tauHY | subfunction : ZHY |
| simulare_model_p1Q2_01>ZL | |
| simulare_model_p1Q2_01>viteza | |
| simulare_model_p1Q2_01>viscozitate | |
| simulare_model_p1Q2_01>reynolds | |
| simulare_model_p1Q2_01>lamH | subfunction : viscozitate subfunction : densitate subfunction : viteza subfunction : reynolds |
| simulare_model_p1Q2_01>densitate | subfunction : ZHY |
| simulare_model_p1Q2_01>derivata | |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_PROCES_stationar | subfunction : lamH subfunction : fun_PROCES_csi subfunction : fun_PROCES_dpdx subfunction : ZL subfunction : densitate subfunction : viteza |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_PROCES_csi | |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_PROCES_dpdx | |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_PROCES_dinamic | subfunction : fun_PROCES_dpdx subfunction : fun_PROCES_csi subfunction : derivata |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_PROCES_dpdx | subfunction : derivata |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_MODEL_stationar | subfunction : fun_MODEL_csi_alfa |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_MODEL_csi_alfa | |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_MODEL_matrici | |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_MODEL_dinamic | subfunction : fun_MODEL_csi_alfa subfunction : fun_MODEL_matrici |
| simulare_model_p1Q2_01>fun_const_timp | subfunction : fun_PROCES_csi |

Fig. A.5.1. Structura programului de simulare numerică

Listing program de simulare numerică:

```

%=====
function simulare_model_p1Q2_01
clc,close all,
%unitati de masura diferite de SI
inch=0.025; %inchi rotunjiti
mm=1e-3; %milimetri
cm=1e-2; %centimetri
bar=1e5; %Pascal
km=10^3; %kilometrimetri
ora=3600; %ora
Rug=8310; %constanta universala a gazelor perfecte J/(kmol.K)
SN.T0=273.15; %Stare Normala.temperatura absoluta K
SN.p0=1.01325*bar; %%Stare Normala.presiunea atmosferica Pa

```

```

p1=20*bar+SN.p0;   %(Pa)
Qv_stat=50000/ora;   %(Nm3/s)
Tmed=10+SN.T0;     %(K)

SR.pR=SN.p0; %Stare Termodinamica.presiune referinta
SR.TR=SN.T0; %Stare Termodinamica.temperatura de referinta

GAZ.Mg=16; %masa molară a gazului
GAZ.Rg=Rug/GAZ.Mg; %constanta specifica a gazului
GAZ.pcr=45.99*bar+SN.p0; %Presiunea critica
GAZ.Tcr=190.55; %Temperatura critica
GAZ.miu0=1.035*1e-5; %viscozitatea dinamică la 273.15
GAZ.C=164; %constanta de calcul in relatia variatiei viscozitatii cu temperatura
GAZ.ZR=ZHY(SR.pR,SR.TR,GAZ);
GAZ.tau=tauHY(p1,Tmed,GAZ);
GAZ.roR=densitate(SR.pR,SR.TR,GAZ);

Qm_stat=Qv_stat*GAZ.roR; %debitul masic stationar

TRONS.L=100*km; %lungime tronson de conducta
TRONS.D=0.5; %diametrul interior
TRONS.A=pi*TRONS.D^2/4; %sectiunea de curgere
TRONS.k=0.2*mm; %rugozitatea relativa interioră
TRONS.dh=0; %diferenta de nivel intre capete
TRONS.alfa=asin(TRONS.dh/TRONS.L); %unghiul mediu de inclinatie cu orizontala
TRONS.m=7;
TRONS.dx=TRONS.L/(TRONS.m-1);
TRONS.X=(0:TRONS.dx:TRONS.L)';

dt=240;
n=5*ora/dt;
t=(0:n-1)*dt;
dp=2*bar;
p1t=p1*ones(n,1); for k=1:n p1t(k)=p1t(k)+dp; end

dQ=15000/ora*GAZ.roR;
Q2t=Qm_stat*ones(n,1); %for k=2:n Q2t(k)=Q2t(k)+dQ;end

Xi_PRO=fun_PROCES_stationar(p1,Qm_stat,Tmed,GAZ,TRONS,SR,SN); %stare stationara
initiala proces curgere
X_PRO.Xp=Xi_PRO.px(2:TRONS.m); %vector stare presiune
X_PRO.XQ=ones(TRONS.m-1,1)*Xi_PRO.Qmed; %vector stare debit
X_PRO.csi=fun_PROCES_csi(Xi_PRO.px,Tmed,Xi_PRO.lammed,GAZ,TRONS);%parametri

%constanta de timp proces
taup_PRO=fun_const_timp(Xi_PRO,Tmed,GAZ,TRONS);

%constante model matematic sistemic
const_MOD.L=TRONS.L;
const_MOD.D=TRONS.D;
const_MOD.A=TRONS.A;
const_MOD.alfa=TRONS.alfa;
const_MOD.m=5;
const_MOD.dx=const_MOD.L/(const_MOD.m-1);
const_MOD.X=(0:const_MOD.dx:const_MOD.L)';

```

```

const_MOD.lam=Xi_PRO.lammed;

X_MOD=fun_MODEL_stationar(p1,Qm_stat,Tmed,GAZ,const_MOD);
MATR_MOD=fun_MODEL_matrici(dt,X_MOD.csi,X_MOD.alfa,const_MOD);

p2t_PRO=zeros(n,1);
Q1t_PRO=zeros(n,1);
p2t_PRO(1)=X_PRO.Xp(TRONS.m-1);
Q1t_PRO(1)=X_PRO.XQ(1);

p2t_MOD=zeros(n,1);
Q1t_MOD=zeros(n,1);
p2t_MOD(1)=X_MOD.Xp(const_MOD.m-1);
Q1t_MOD(1)=X_MOD.XQ(1);

C=zeros(1,const_MOD.m-1);
C(const_MOD.m-1)=1;
D=0;

for k=1:n-1
    %====tranzitie proces
    X_PRO(k+1)=fun_PROCES_dinamic(dt,p1t(k+1),Q2t(k+1),Tmed,X_PRO(k),Xi_PRO,GAZ,TRONS);
    p2t_PRO(k+1)=X_PRO(k+1).Xp(TRONS.m-1); %marime de iesire proces
    Q1t_PRO(k+1)=X_PRO(k+1).XQ(1); %marime de iesire proces
    %====tranzitie model

    [X_MOD(k+1),MATR_MOD]=fun_MODEL_dinamic(dt,p1t(k+1),Q2t(k+1),X_MOD(k),p1t(k),Q2t(k),MATR_MOD,Tmed,GAZ,const_MOD);
    p2t_MOD(k+1)=X_MOD(k+1).Xp(const_MOD.m-1); %marime de iesire model
    Q1t_MOD(k+1)=X_MOD(k+1).XQ(1); %marime de iesire model
    n-1-k,
end

figure(1),plot(t/ora,p1t/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2t_PRO/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2t_MOD/bar-SN.p0/bar),grid,
title('p1(t)-blue, p2Proces(t)-green, p2Model(t)-red'),xlabel('t(ore)'),ylabel('p(bar)');
figure(2),plot(t/ora,Q2t/GAZ.roR*ora/1000,t/ora,Q1t_PRO/GAZ.roR*ora/1000,t/ora,Q1t_MOD/GAZ.roR*ora/1000),grid,
title('Q2(t)-blue, Q1Proces(t)-green, Q1Model(t)-red'),xlabel('t(ore)'),ylabel('Qv(mii Nm3/h)');
errp=(p2t_PRO-p2t_MOD)./p2t_PRO*100;
figure(3),plot(t/ora,errp),grid,
title('(p2Proces(t)-P2Model(t))/p2Proces(t)*100'),xlabel('t(ore)'),ylabel('%');

%durata regim tranzitoriu 98%
timp_PRO_formula=2.3*taup_PRO/ora
taup_vp=1/min(abs(real(eig(MATR_MOD.A)))));
timp_PRO_vp=2.3*taup_vp/ora

dp2=p2t_PRO(n)-p2t_PRO(1);
p2stab1=(p2t_PRO(1)+0.9*dp2)*ones(n,1);
p2stab2=p2t_PRO(n)*ones(n,1);
figure(4),plot(t/ora,p1t/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2t_PRO/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2stab1/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2stab2/bar-SN.p0/bar,t/ora,p2t_MOD/bar-SN.p0/bar),grid,
xlabel('t(ore)'),ylabel('p(bar)');
keyboard

```



```

return

%FUNCTII FOLOSITE IN CADRUL PROGRAMULUI DE SIMULARE NUMARICA
%=====
%FUNCTII GENERALE-----
%=====compresibilitate
function fHY=funHY(y,pr,Tir)
fHY=-0.06125*pr*Tir*exp(-1.2*(1-Tir)^2)+(y+y^2+y^3-y^4)/(1-y)^3-...
(14.76*Tir-9.76*Tir^2+4.58*Tir^3)*y^2+(90.7*Tir-242.2*Tir^2+...
42.4*Tir^3)*y^(2.18+2.82*Tir);
return
%=====
function Z=ZHY(p,T,GAZ)
pr=p/GAZ.pcr;
Tir=GAZ.Tcr/T;
y0=[0;0.1];
y=fzero(@(y) funHY(y,pr,Tir),y0);
Z=0.06125*pr*Tir/y*exp(-1.2*(1-Tir)^2);
return
%=====
function tau=tauHY(p,T,GAZ)
p1=p-p/2;
p2=p+p/2;
Z1=ZHY(p1,T,GAZ);
Z2=ZHY(p2,T,GAZ);
tau=(Z1-Z2)/(p2-p1);
return
%=====
function Z=ZL(p,GAZ)
Z=1-GAZ.tau*p;
return
%=====viteza de curgere
function v=viteza(p,Qm,ro,TR)
v=Qm./(ro*TR.A);
return
%=====viscozitate functie temperatura
function miu=viscozitate(T,GAZ,SN)
miu=GAZ.miu0*(SN.T0+GAZ.C)/(T+GAZ.C).*(T./SN.T0).^(2/3);
return
%=====numarul Reynolds
function Re=reynolds(v,ro,miu,D)
Re=D*abs(v).*ro./miu;
return
%=====rezistenta hidraulica
function lam=lamH(p,Qm,T,GAZ,TR,SN)
miu=viscozitate(T,GAZ,SN);
ro=densitate(p,T,GAZ);
v=viteza(p,Qm,ro,TR);
Re=reynolds(abs(v),ro,miu,TR.D);
lam=( 1.8*log10( (TR.k/(3.71*TR.D))^1.11+6.9/Re ))^(-2);
return
%=====densitatea
function ro=densitate(p,T,GAZ)
Z=ZHY(p,T,GAZ);
ro=p./(Z.*GAZ.Rg.*T);

```

```

return
%=====calcul derivata
function dudx=derivata(u,dx)
m=length(u);
dudx=zeros(m,1);
dudx(1)=(-u(3)+4*u(2)-3*u(1))/(2*dx);
dudx(2:m-1)=(u(3:m)-u(1:m-2))/(2*dx);
dudx(m)=(u(m-2)-4*u(m-1)+3*u(m))/(2*dx);
return
%=====
%FUNCTII ASOCIATE SIMULARII PROCESULUI DE CURGERE-----
%=====starea stationara
function SS=fun_PROCES_stationar(p,Q,T,GAZ,TR,SR,SN)
SS.Qmed=Q;
SS.px=zeros(TR.m,1);
SS.px(1)=p;
for j=1:TR.m-1
    lam=lamH(SS.px(j),SS.Qmed,T,GAZ,TR,SN);
    csi=fun_PROCES_csi(SS.px(j),T,lam,GAZ,TR);
    [x,Ubuf]=ode15s(@fun_PROCES_dpdx,TR.X(j:j+1),SS.px(j),[],...
        SS.Qmed,T,lam,csi');
    n=length(Ubuf);
    SS.px(j+1)=Ubuf(n);
end
SS.pmed=2/3*(SS.px(1)+SS.px(TR.m)^2/(SS.px(1)+SS.px(TR.m)));
SS.Zmed=ZL(SS.pmed,GAZ);
SS.romed=densitate(SS.pmed,T,GAZ);
SS.vmed=viteza(SS.pmed,SS.Qmed,SS.romed,TR);
SS.Bmed=TR.A*TR.L*SS.romed/GAZ.roR;
SS.tmed=TR.L/SS.vmed;
SS.cmed=SS.Zmed*sqrt(GAZ.Rg*T);
SS.lammed=lamH(SS.pmed,Q,T,GAZ,TR,SN);
return
%=====parametrii proces curgere
function csi=fun_PROCES_csi(px,Tmed,lam,GAZ,TR)
csi(:,1)=((1-GAZ.tau.*px).^2.*GAZ.Rg.*Tmed/TR.A);
csi(:,2)=((1-GAZ.tau.*px).*lam.*GAZ.Rg.*Tmed/(2*TR.D*TR.A^2));
csi(:,3)=(9.81*sin(TR.alfa)./(1-GAZ.tau.*px)*GAZ.Rg*Tmed));
return
%=====variata presiunii in regim stationar
function dpdx=fun_PROCES_dpdx(x,p,Qm,Tmed,lam,csi)
dpdx=-csi(2,:)*abs(Qm)*Qm/p-csi(3,:).*p;
return
%=====procesul nelinier dinamic
function prof=fun_PROCES_dinamic(dt,p1i,Q2i,T,proi,SSi,GAZ,TR)
prof=proi;
Ap=diag(proi.csi(2:TR.m,1),0)-diag(proi.csi(2:TR.m-2,1),2);
Ap(TR.m-1,TR.m-1)=4*Ap(TR.m-1,TR.m-1);
Ap(TR.m-1,TR.m-2)=-proi.csi(TR.m,1);
Ap=Ap/(2*TR.dx);
Bp=zeros(TR.m-1,1);
Bp(TR.m-2)=-proi.csi(TR.m-1,1)/(2*TR.dx);
Bp(TR.m-1)=-3*proi.csi(TR.m,1)/(2*TR.dx);
[t,XPbuf]=ode15s(@fun_PROCES_dpdx,t,[0;dt],proi.Xp,[],p1i,Q2i,proi.csi,TR.dx,TR.m,Ap,Bp);
XPbuf=XPbuf';
n=length(XPbuf(1,:));

```

```

prof.Xp=XPbuf(:,n);
pxf=[p1i;prof.Xp];
prof.csi=fun_PROCES_csi(pxf,T,SSi.lammed,GAZ,TR);
dpxf=derivata(pxf,TR.dx);
buf=-pxf./prof.csi(:,2).*(dpxf+prof.csi(:,3).*pxf);
XQbuf=sqrt(abs(buf)).*sign(buf);
prof.XQ=XQbuf(1:TR.m-1);
return
%=====variata presiunii in regim nestationar
function dpx_dt=fun_PROCES_dpdx(t,Xpi,p1f,Q2f,csi,dx,m,Ap,Bp)
px=[p1f;Xpi];
dpx=derivata(px,dx);
buf=-px./csi(:,2).*(dpx+csi(:,3).*px);
XQ=sqrt(abs(buf)).*sign(buf);
XQ(m)=[];
dpx_dt=Ap*XQ+Bp*Q2f;
return
%=====
%FUNCTII ASOCIATE MODELULUI SISTEMIC-----
%=====stare stationara model sistemic
function X=fun_MODEL_stationar(p,Q,Tmed,GAZ,const_model)
X.Xp=zeros(const_model.m-1,1);
X.XQ=ones(const_model.m-1,1)*Q;
X.csi=zeros(const_model.m,3);
X.alfa=zeros(const_model.m,2);
px=zeros(const_model.m,1);
px(1)=p;
[X.csi(1,:),X.alfa(1,:)]=fun_MODEL_csi_alfa(px(1),px(1),Q,Tmed,GAZ,const_model);
for j=1:const_model.m-1
    px(j+1)=px(j)*(1-const_model.dx*X.alfa(j,1))-const_model.dx*X.alfa(j,2)*Q;
    [X.csi(j+1,:),X.alfa(j+1,:)]=fun_MODEL_csi_alfa(px(j+1),px(j),Q,Tmed,GAZ,const_model);
    X.Xp(j)=px(j+1);
end
return
%=====parametrii model sistemic
function [csi,alfa]=fun_MODEL_csi_alfa(px,px0,Qx0,Tmed,GAZ,const_model)
csi(:,1)=((1-GAZ.tau.*px).^2.*GAZ.Rg.*Tmed/const_model.A);
csi(:,2)=((1-
GAZ.tau.*px).*const_model.lam.*GAZ.Rg.*Tmed/(2*const_model.D*const_model.A^2));
csi(:,3)=(9.81*sin(const_model.alfa)./((1-GAZ.tau.*px)*GAZ.Rg*Tmed));
alfa(:,1)=csi(:,3)-csi(:,2).*Qx0.^2./px0.^2;
alfa(:,2)=csi(:,2).*2.*Qx0./px0;
return
%=====matrici model sistemic
function MATR=fun_MODEL_matrici(dt,csi,alfa,const_model)
m=const_model.m;
dx=const_model.dx;
Ap=diag(csi(2:m,1),0)-diag(csi(2:m-2,1),2);
Ap(m-1,m-1)=4*Ap(m-1,m-1);
Ap(m-1,m-2)=-csi(m,1);
Ap=Ap/(2*dx);
Bp=zeros(m-1,1);
    Bp(m-2)=-csi(m-1,1)/(2*dx);
    Bp(m-1)=-3*csi(m,1)/(2*dx);

```

```

AQ=diag(-1./(2*alfa(1:m-1,2)*dx),0)+diag(-alfa(2:m-1,1)./alfa(2:m-1,2),-
1)+diag(1./(2*alfa(3:m-1,2)*dx),-2);
AQ(1,1)=4*AQ(1,1); AQ(1,2)=1/(2*alfa(1,2)*dx);
BQ=zeros(m-1,1);
BQ(1)=3/(2*alfa(1,2)*dx)-alfa(1,1)/alfa(1,2);
BQ(2)=1/(2*alfa(2,2)*dx);
MATR.A=Ap*AQ;
MATR.B=[Ap*BQ Bp];
MATR.AQ=AQ;
MATR.BQ=BQ;
MATR.fi=inv(eye(m-1,m-1)-dt*MATR.A);
MATR.gama=MATR.fi*dt*MATR.B;
return
%=====tranzitie model dinamic
function
[Xf,MATRf]=fun_MODEL_dinamic(dt,p1f,Q2f,Xi,p1i,Q2i,MATRi,Tmed,GAZ,const_model)
m=const_model.m;
Xf.Xp=zeros(m-1,1);
Xf.XQ=ones(m-1,1);
Xf.csi=zeros(m,3);
Xf.alfa=zeros(m,2);
px0=[p1i;Xi.Xp];
Qx0=[Xi.XQ;Q2i];
Xf.Xp=MATRi.fi*Xi.Xp+MATRi.gama*[p1f;Q2f];
pxf=[p1f;Xf.Xp];
[Xf.csi,Xf.alfa]=fun_MODEL_csi_alfa(pxf,px0,Qx0,Tmed,GAZ,const_model);
MATRf=fun_MODEL_matrici(dt,Xf.csi,Xf.alfa,const_model);
Xf.XQ=MATRf.AQ*Xf.Xp+MATRf.BQ*p1f;
MATRf=MATRi;
return
%=====constanta de timp
function taup=fun_const_timp(SS,Tmed,GAZ,TR)
csi=fun_PROCES_csi(SS.pmed,Tmed,SS.lammed,GAZ,TR);
taup=sqrt(csi(2)*TR.L^3)*sqrt((1-csi(3)*TR.L)*SS.px(1)^2-SS.pmed^2)/csi(1)/SS.pmed;
return
%=====

```

Integrarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale asociat modelului de aproximare neliniar se face folosind funcția MATLAB ode15s aplicabilă sistemelor de ecuații cu grad redus de inflexibilitate.

Modelul liniarizat de aproximare este un model discret rezultat în urma unei metode numerice implicite de discretizare.

O astfel de implementare a simulării numerice a oricărei realizări sistemice a modelelor matematice folosite în cadrul lucrării a permis efectuarea tuturor analizelor numerice menționate în cadrul lucrării.

Întrucât se pune și problema simulării numerice a unor procese de curgere desfășurate la nivelul unor sisteme de transport formate din interconectarea tehnologică a mai multor tronsoane de conductă s-a realizat și o implementare în SIMULINK sub forma unor blocuri funcționale care să permită crearea unor modele virtuale de sisteme de transport gaze care să permită studiul dinamicii acestora. În felul acesta complexitatea implementării trece în sarcina SIMULINK-ului, utilizatorul trebuind să realizeze numai legăturile funcționale corecte între blocurile de simulare ale tronsoanelor.

Un astfel de bloc funcțional, notat cu „Tronson 6m/5dx” care permite simularea modelului de aproximare neliniar asociat realizării sistemice p1Q2 a

modelului matematic simplificat (4.3.1.b) este prezentat în figura A.5.2 într-o schema de simulare „*SimulareTronsonSimplificat.mdl*” care permite analiza dinamicii unui tronson de conductă discretizat spațial prin $m = 6$ puncte.

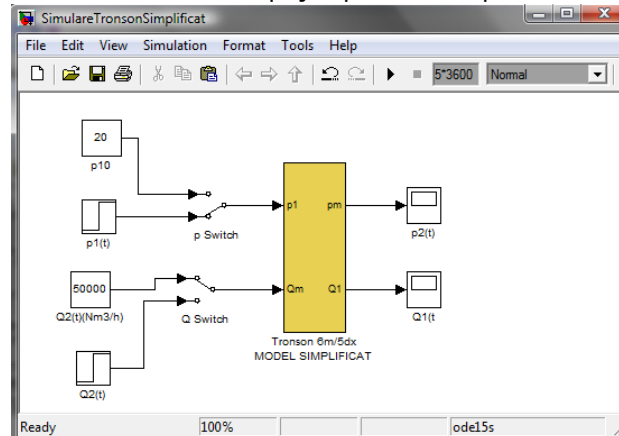


Fig. A.5.2. Schema SIMULINK simulare proces de curgere realizat la nivelul unui tronson de conductă

Parametrii necesari simulării sunt introduși prin intermediul controalelor grafice existente în masca blocului funcțional (figura A.5.3)

Inițializarea simulării numerice este realizată prin apelarea unei funcții de inițializare cuprinsă în fișierul „*fun_inițializare_ModelSimplificat.m*” care folosește o parte din liniile de program de inițializare ale funcției „*simulare_model_p1Q2_01.m*”, având drept argumente parametrii care se introduc de către utilizator după cum s-a precizat anterior (figura A.5.4).

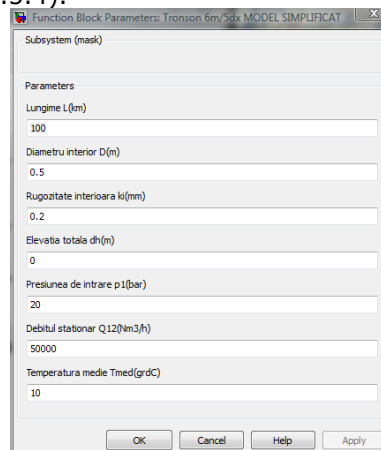


Fig. A.5.3. Controale grafice de introducere parametrii de simulare numerică

Implementarea ecuațiilor modelului de aproximare se face prin schema de simulare din figura A.5.5 obținută prin multiplicarea unor blocuri funcționare asociate schemelor de simulare ale ecuațiilor modelului din nodul de intrare $j = 1$,

figura A.5.6, punctelor intermediare de discretizare $j = 2, 3, 4, 5$, figura A.5.7, și nodul de ieșire $j = 6$, figura A.5.8.

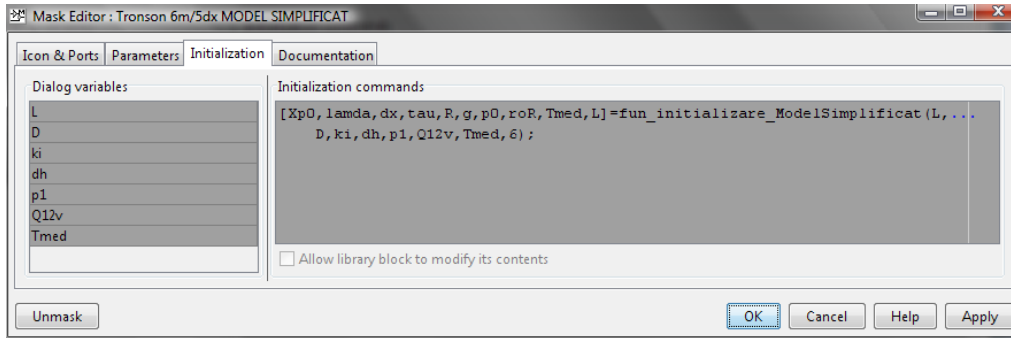


Fig. A.5.4. Parametri inițializare simulare numerică

Fiecare dintre cele 3 scheme de simulare din figurile A.5.5, A.5.6, A.5.6 este formată prin multiplicarea, cu realizarea legăturilor ale unor blocuri funcționale asociate schemei de simulare ale ecuației debitului, figura A.5.9, presiunii, figura A.5.10, respectiv, coeficienților modelului $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, figurile A.5.11, 12, 13.

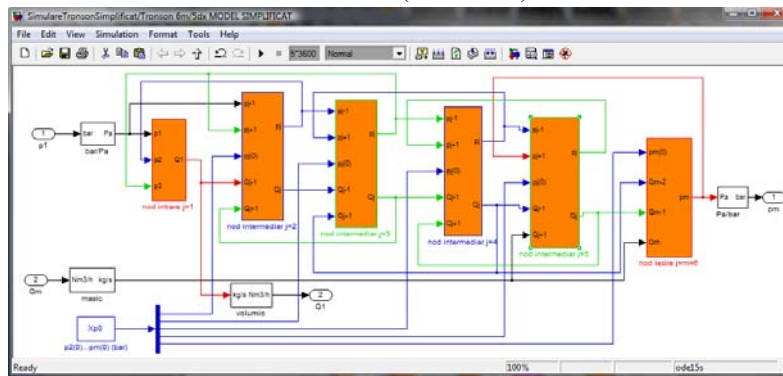


Fig. A.5.5. Schema SIMULINK modelare proces de curgere

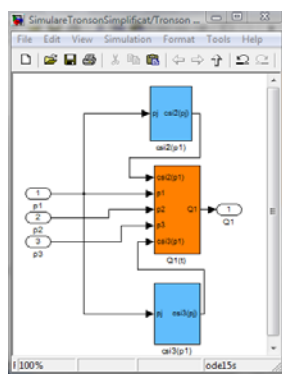


Fig. A.5.6. Schema SIMULINK modelare nod de intrare

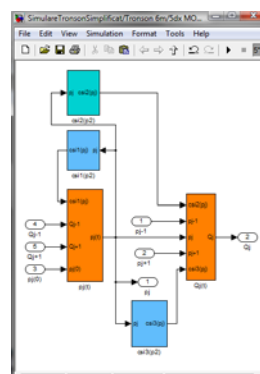


Fig. A.5.7. Schema SIMULINK modelare punct intermediar

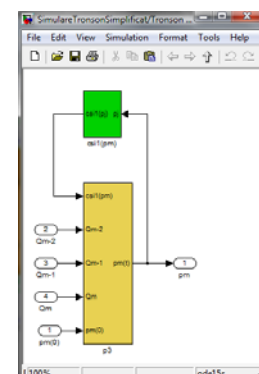


Fig. A.5.8. Schema SIMULINK modelare nod de ieșire

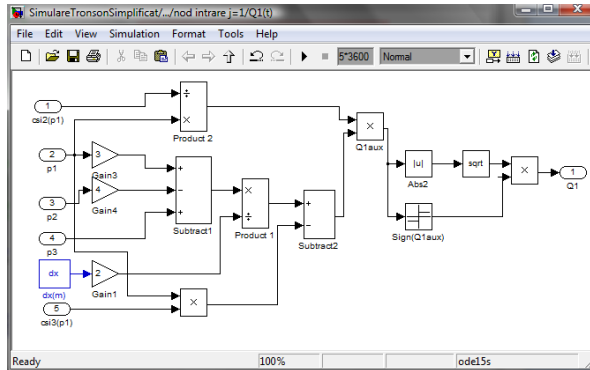


Fig. A.5.9. Schemelor SIMULINK de modelare a ecuației debitului

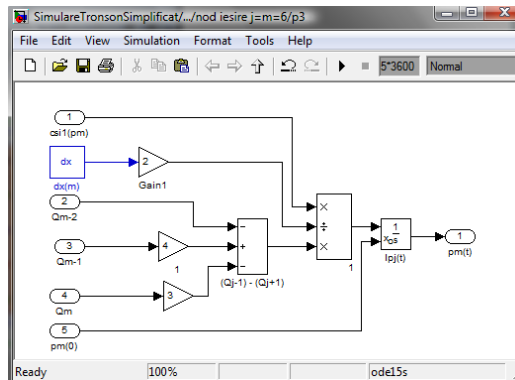


Fig. A.5.10. Schemelor SIMULINK de modelare al ecuației presiunii

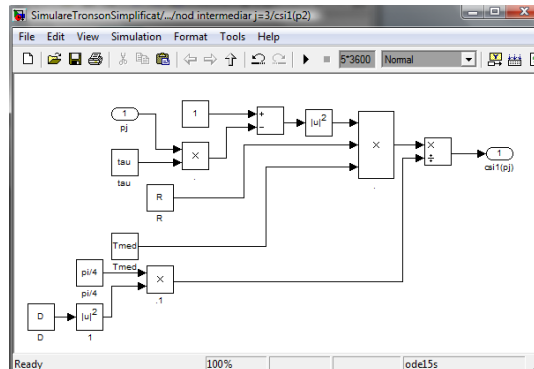


Fig. A.5.11. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_1

Pentru cele două tipuri de implementări a simulării numerice în figurile următoare se prezintă o analiză numerică comparativ referitoare la diferențele relative procentuale între curbele de variație dinamică ale presiunii de ieșire p_2 cauzată numai de variația treaptă cu amplitudinea $\Delta p = 2\text{bar}$ a presiunii de intrare p_1 dintr-un tronson de lungime $L = 100\text{km}$, diametru interior $D = 0,5\text{m}$, elevație

totală $\Delta h = 0$, rugozitate interioară $k = 0,2\text{mm}$, inițial aflat în regimul staționar caracterizat prin presiunea de intrare $p_1 = 20\text{bar}$, debitul staționar la consumator

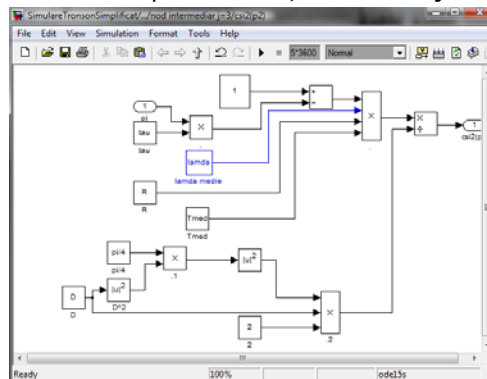


Fig. A.5.12. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_2

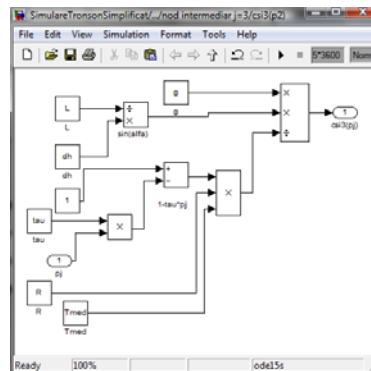


Fig. A.5.13. Schema SIMULINK de modelare a coeficientului ξ_3

$Q_2 = 50.000\text{Nm}^3/h$ și temperatura medie $T_M = 10^0\text{C}$, curbe generate pentru simularea numerică folosind:

- programul „simulare_model_p1Q2_01.m” pentru $m = 60$ puncte de discretizare spațială;
- programul „simulare_model_p1Q2_01.m” pentru $m = 6$ puncte de discretizare spațială;
- schema de simulare SIMULINK „SimulareTronsonSimplificat.mdl” formată pentru $m = 6$ puncte de discretizare spațială.

Au fost reprezentate grafic următoarele diferențe relative:

$$\text{a) } \varepsilon_1 = \frac{p_2(t)|_{m=6}^{\text{PROGRAM}} - p_2(t)|_{m=6}^{\text{SCHEMĂ}}}{p_2(t)|_{m=6}^{\text{PROGRAM}}} \times 100 \text{ în figura A.5.14;}$$

$$\text{b) } \varepsilon_2 = \frac{p_2(t)|_{m=60}^{\text{PROGRAM}} - p_2(t)|_{m=6}^{\text{SCHEMĂ}}}{p_2(t)|_{m=60}^{\text{PROGRAM}}} \times 100 \text{ în figura A.5.15;}$$

$$c) \quad \varepsilon_3 = \frac{p_2(t)|_{m=60}^{PROGRAM} - p_2(t)|_{m=6}^{PROGRAM}}{p_2(t)|_{m=60}^{PROGRAM}} \times 100 \text{ în figura A.5.16.}$$

Simularea numerică realizată cu schema de simulare numerică generează rezultate numerice cu o eroare relativă sub $|\varepsilon| < 0,045\%$ (figura A.5.14) față de cele rezultate în urma folosirii programului de simulare.

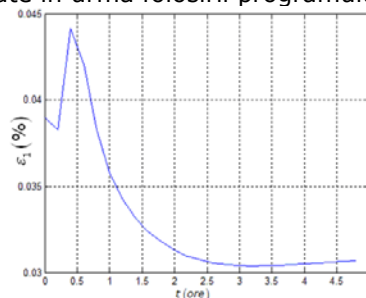


Fig. A.5.14. Eroarea de modelare a schemei SIMULINK cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 60$ puncte de discretizare spațială

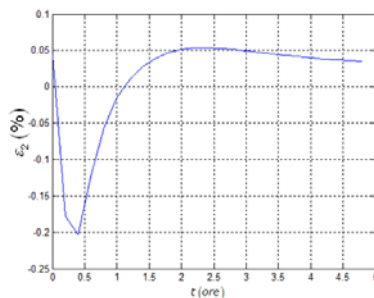


Fig. A.5.15. Eroarea de modelare a schemei SIMULINK cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 60$ puncte de discretizare spațială

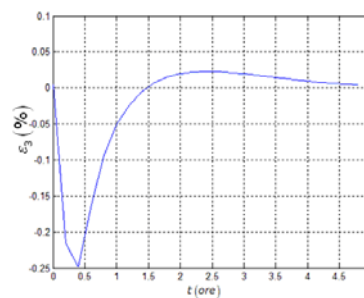


Fig. A.5.16. Eroarea de modelare a programului MATLAB cu $m = 6$ puncte de discretizare spațială relativ la programul MATLAB cu $m = 60$ puncte de discretizare spațială

Eroarea de trunchiere introdusă de numărul cele $m = 6$ puncte de discretizare spațială ale schemei de simulare comparativ cu un program de simulare ce folosește $m = 60$ puncte de discretizare spațială nu este aproape aceeași cu cea a programului de simulare numerică ce folosește același număr de puncte de discretizare spațială ca și schema de simulare, respectiv, se situează, în valoarea absolută sub $0,25\%$.

A.6. Simularea numerică a algoritmului de control predictiv bazat pe model folosind mediul de lucru MATLAB

Simularea numerică a algoritmului de control predictiv bazat pe model s-a realizat prin intermediul schemei SIMULINK, reprezentată grafic în figura A.6.1.: „Control_SistemTransport_ModelSimplificat.mdl”.

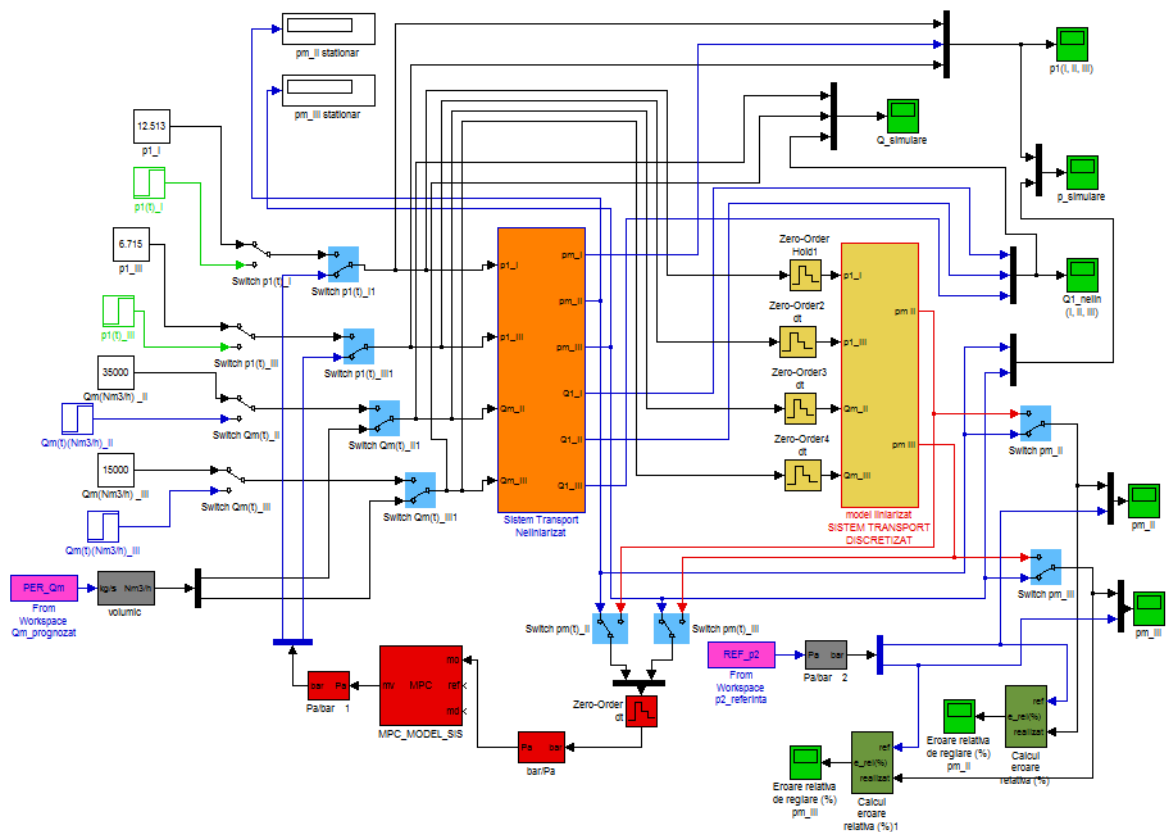


Fig. A.6.1. Schema SIMULINK de modelare a algoritmului de control predictiv bazat pe model a presiunilor de ieșire dintr-un sistem de transport

Schema SIMULINK conține, în principal, blocurile funcționale care implementează:

- schema de simulare numerică a procesului de curgere realizat la nivelul unui sistem de transport, figura A.6.2, schema care este formată prin interconectarea blocurilor funcționale care implementează schemele de simulare numerică a proceselor de curgere prin tronsoanele de conductă componente ale sistemului de transport;
- schema de simulare numerică a modelului liniarizat al procesului de curgere, figura A.6.3;
- schema de simulare predefinită în SIMULINK care implementează un regulator predictiv, care este integrată în schema de simulare prin realizarea legăturilor funcționale și introducerea parametrilor regulatorului prin masca blocului funcțional care-l implementează, figura A.6.4;
- schema de simulare numerică de calcul a erorii relative între diferitele mărimi supuse analizei, figura A.6.5.

Schema de simulare a fiecărui tronson de conductă component al sistemului de transport este inițializat prin funcția „fun_inicializare_SimulareSistem.m” similară cu cea prezentată în subcapitolul anterior.

Algoritmul de control predictiv va fi inițializat în secțiunea de apelare funcții, conform figurii A.6.6., prin funcția „fun_inicializare_ControlSistem.m”, cu listingul prezentat în continuare.

La nivelul acestei funcții de inițializare vor trebui introduse, folosind editorul de funcții, traiectoriile anticipative ale perturbației de sarcină, respectiv, ale referinței care vor fi preluate prin blocuri corespunzătoare în schema de simulare din figura A.6.1.

Prin comutatoarele existente în cadrul schemei din figura A.6.1 se poate studia atât dinamica procesului de curgere, cât și a sistemului de reglare predictiv bazat pe model.

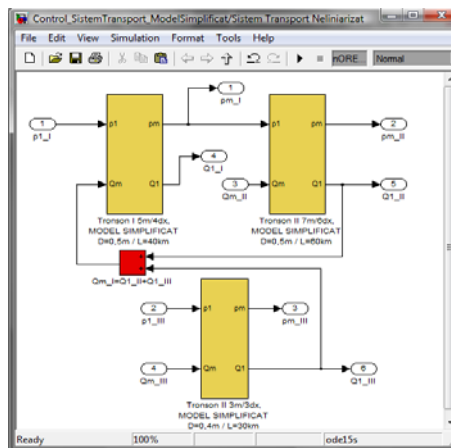


Fig. A.6.2. Schema SIMULINK de modelare procesului de curgere realizat la nivelul unui sistem de transport

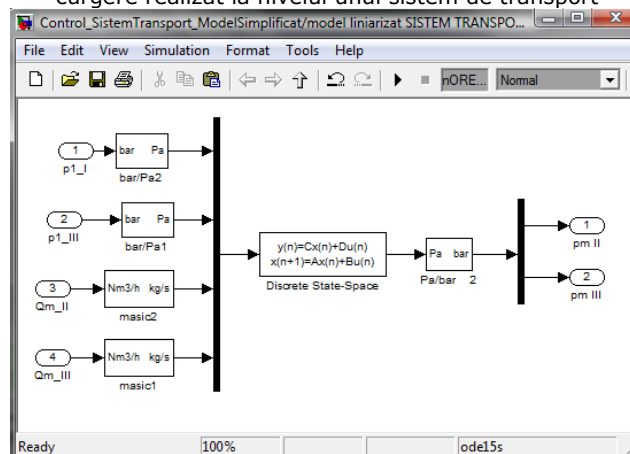


Fig. A.6.3. Schema SIMULINK a modelului liniarizat al procesului de curgere realizat la nivelul unui sistem de transport

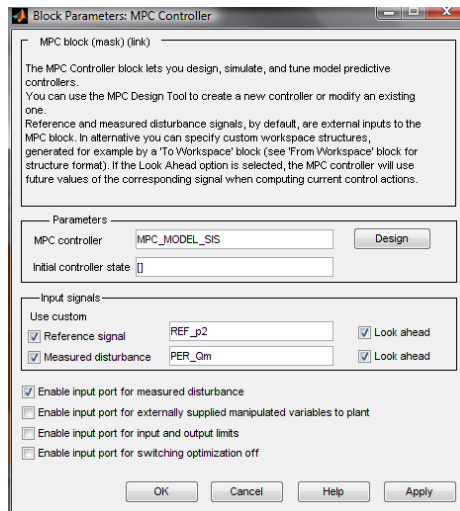


Fig. A.6.4. Mască bloc SIMULINK regulator predictiv bazat pe model

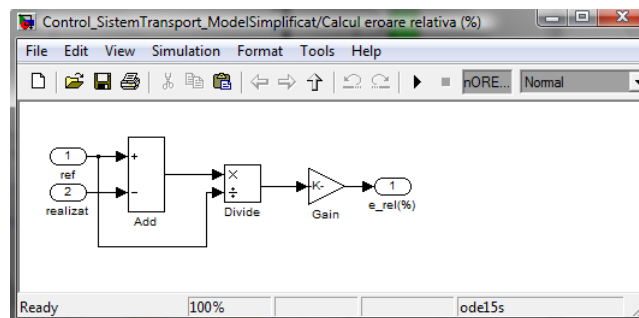


Fig. A.6.5. Schemă SIMULINK pentru calcularea erorii de reglare

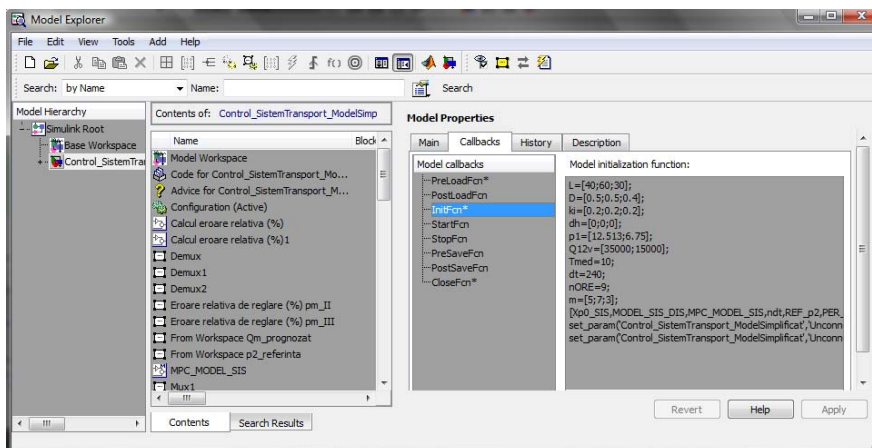


Fig. A.6.6. Secțiunea de apelare funcție inițializare schemă SIMULINK modelare algoritm de control predictiv bazat pe model

```

function [Xp0_SIS,MODEL_SIS_DIS,MPC_MODEL_SIS,ndt,REF_p2,PER_Qm,p0,roR]=
fun_initalizare_ControlSistem(L,D,ki,dh,p1,Q12v,Tmed,m,dt,nORE)
%unitati de masura diferite de SI
mm=1e-3; %milimetru
cm=1e-2; %centimetri
bar=1e5; %Pascal
km=10^3; %kilometru
ora=3600; %ora
SN.T0=273.15; %Stare Normala.temperatura absoluta K
SN.p0=1.01325*bar; %%Stare Normala.presiunea atmosferica Pa

p1=p1*bar+SN.p0; %(Pa)
Qv_stat=Q12v/ora; %(Nm3/s)
Tmed=Tmed+SN.T0; %(K)

SR.pR=SN.p0; %Stare Termodinamica.presiune referinta
SR.TR=SN.T0; %Stare Termodinamica.temperatura de referinta

GAZ.Rg=518.35; %constanta specifica a gazului
GAZ.pcr=47.01*bar; %Presiunea critica
GAZ.Tcr=190.56; %Temperatura critica
GAZ.miu0=1.035*1e-5; %viscozitatea dinamica la 273.15
GAZ.C=164; %constanta de calcul in relatia variatiei viscozitatii cu temperatura
GAZ.ZR=Zaga(SR.pR,SR.TR,GAZ);
GAZ.tau=tauaga(Tmed,GAZ);
GAZ.roR=densitate(SR.pR,SR.TR,GAZ);

Qm_stat=Qv_stat*GAZ.roR; %debitul masic stationar

for i=1:3
    TRONS(i).L=L(i)*km; %lungime tronson de conducta
    TRONS(i).D=D(i); %diametrul interior
    TRONS(i).A=pi*TRONS(i).D^2/4; %sectiunea de curgere
    TRONS(i).ki=ki(i)*mm; %rugozitatea relativa interioara
    TRONS(i).dh=dh(i); %diferenta de nivel intre capete
    TRONS(i).alfa=asin(TRONS(i).dh/TRONS(i).L); %unghiul mediu de inclinatie cu orizontala
    TRONS(i).m=m(i); %numarul punctelor de discretizare spatiala
    TRONS(i).dx=TRONS(i).L/(TRONS(i).m-1); %pasul de discretizare spatial
    TRONS(i).X=(0:TRONS(i).dx:TRONS(i).L)'; %coordonata x
    TRONS(i).g=9.81;
end

%TRONSON I
Xi_PRO(1)=fun_PROCES_stationar(p1(1),Qm_stat(1)+Qm_stat(2),Tmed,GAZ,TRONS(1),SR,S
N);
TRONS(1).lam=Xi_PRO(1).lammed;
Xp0_SIS(1).Xp0=Xi_PRO.px(2:TRONS(1).m);
%TRONSON II
interm_p1=Xi_PRO.px(TRONS(1).m);
Xi_PRO(2)=fun_PROCES_stationar(interm_p1,Qm_stat(1),Tmed,GAZ,TRONS(2),SR,SN);
TRONS(2).lam=Xi_PRO(2).lammed;
Xp0_SIS(2).Xp0=Xi_PRO.px(2:TRONS(2).m);
%TRONSON III
Xi_PRO(3)=fun_PROCES_stationar(p1(2),Qm_stat(2),Tmed,GAZ,TRONS(3),SR,SN);
TRONS(3).lam=Xi_PRO(3).lammed;
Xp0_SIS(3).Xp0=Xi_PRO(3).px(2:TRONS(3).m);

```

```

%matrici MODEL liniarizat

%TRONSON I: (p1,Qm)->Xp->pm
[csi,alfa]=fun_MODEL_csi_alfa(Xi_PRO(1).px,Xi_PRO(1).px,Qm_stat(1)+Qm_stat(2),Tmed,GAZ,TRONS(1));
MATR_MOD=fun_MODEL_matrici(dt,csi,alfa,TRONS(1));
C_MOD=zeros(1,TRONS(1).m-1); C_MOD(TRONS(1).m-1)=1;
D_MOD=zeros(1,2);
%MODEL_TRONS(1).MODEL=ss(MATR_MOD.fi,MATR_MOD.gama,C_MOD,D_MOD,dt);
MODEL_TRONS(1).MODEL=ss(MATR_MOD.A,MATR_MOD.B,C_MOD,D_MOD); %generare
model continuu

%TRONSON II, III: (p1,Qm)->Xp->(pm,Q1) forma necesara realizarii cuplajului
for i=1:2

[csi,alfa]=fun_MODEL_csi_alfa(Xi_PRO(i+1).px,Xi_PRO(i+1).px,Qm_stat(i),Tmed,GAZ,TRONS(
i+1));
MATR_MOD=fun_MODEL_matrici(dt,csi,alfa,TRONS(i+1));
C_MOD=zeros(2,TRONS(i+1).m-1); C_MOD(1,TRONS(i+1).m-1)=1;
C_MOD(2,1)=-2/TRONS(i+1).dx/alfa(1,2);
C_MOD(2,2)=1/2/TRONS(i+1).dx/alfa(1,2);
D_MOD=zeros(2,2);
D_MOD(2,1)=-1/alfa(1,2)*(-3/2/TRONS(i+1).dx+alfa(1,1));
%MODEL_TRONS(i+1).MODEL=ss(MATR_MOD.fi,MATR_MOD.gama,C_MOD,D_MOD,dt);
MODEL_TRONS(i+1).MODEL=ss(MATR_MOD.A,MATR_MOD.B,C_MOD,D_MOD);
end
p0=SN.p0;
roR=GAZ.roR;

buf_SIS=append(MODEL_TRONS(1).MODEL,MODEL_TRONS(2).MODEL,MODEL_TRONS(3).MO
DEL);
Qconexiuni=[2 3 5;3 1 0];
inputs=[1 5 4 6];
outputs=[2 4];
MODEL_SIS=connect(buf_SIS,Qconexiuni,inputs,outputs);
fi=inv(eye(size(MODEL_SIS.a))-dt*MODEL_SIS.a);
gama=fi*dt*MODEL_SIS.B;
MODEL_SIS_DIS=ss(fi,gama,MODEL_SIS.c,MODEL_SIS.d,dt);

MODEL_SIS_DIS.InputName={'p1_I','p1_III','Qm_II','Qm_III'};
MODEL_SIS_DIS.OutputName={'pm_II','pm_III'};
MODEL_SIS_DIS=setmpcsignals(MODEL_SIS_DIS,'MV',[1 2],'MD',[3 4]);

%initializare controller MPC_MODEL
Nominal.X=[Xp0_SIS(1).Xp0;Xp0_SIS(2).Xp0;Xp0_SIS(3).Xp0];
Nominal.DX=zeros(size(Nominal.X));
Nominal.U=[p1;Qm_stat];
Nominal.Y=[Xp0_SIS(2).Xp0(TRONS(2).m-1);Xp0_SIS(3).Xp0(TRONS(3).m-1)];
pred=30;%orizontul de predictie
manip=2;%orizontul de control
weigs=struct('MV',[0 0],'MVRate',[5 5],'OV',[1 1]); %setare ponderi variabila manipulata si
variabila de iesire
MV(1)=struct('Min',9.5*bar+SN.p0,'Max',20*bar+SN.p0,'RateMin',-
0.15*bar,'RateMax',0.15*bar);
MV(2)=struct('Min',6*bar+SN.p0,'Max',9.2*bar+SN.p0,'RateMin',-
0.15*bar,'RateMax',0.15*bar);

```


Bibliografie

1. * * *, *Codul Rețelei Pentru Sistemul Național De Transport Al Gazelor Naturale*, ANGN, 2007 (<http://www.anre.ro/download.php?id=425>, iulie 2009)
2. * * *, Pipeline Research Council International, www.prci.org
3. * * *, Pipeline Simulation Interest Group, www.psig.org
4. Aalto, H., *Real-time Receding Horizon Optimisation Of Gas Pipeline Networks*, phd thesis, University Of Technology, Helsinki, 2005
5. Bemporad A., Morari M., Ricker N. L., *Model Predictive Control Toolbox™ 3, User's Guide*, The MathWorks, Inc, 2009, (http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/mpc/mpc_ug.pdf, iulie 2009)
6. Berbente, C. și alții, *Metode numerice*, Ed. Tehnică, București, 1997
7. **Bichiș C-D.**, Dragomir, T-L, *On Modelling and Simulating Natural Gas Transmission Systems part I*, Journal of Control Engineering and Applied Informatics, vol. 10, No.3 , pp.27-36, 2008
8. **Bichiș C-D.**, Dragomir, T-L, *On Modelling and Simulating Natural Gas Transmission Systems part II*, Journal of Control Engineering and Applied Informatics, No. 4, pp. 42-48, 2008
9. **Bichiș C-D.**, *Transient Time Evaluation of the Dynamic Gas Flow Process in the Context of Implementing a Model Predictive Control*, CSCS-17, „17th International Conference on Control Systems and Computer Science”, Proceedings, vol. 1, Ed. Politehnica Press, Bucharest, pp. 291-297, 2009
10. Boyd, S., Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, USA, 2004
11. Brădeanu, P., *Mecanica fluidelor* , Ed. Tehnică, București, 1973
12. Cameron, I., *Using an Excel-Based Model for Steady-State and Transient Simulation*, TransCanada Transmission, Canada, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9904.pdf>, iulie 2009), 1999
13. Carter, R. G., *Pipeline Optimization: Dynamic Programming Adter 30 years*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9803.pdf>, iulie 2009), 1998

14. Carter, R. G., Rachford jr. H. H., *Optimizing Line-Pack Management to Hedge against Future Load Uncertainty*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0306.pdf>, iulie 2009), 2003
15. Coelho P. M., Pinho, C., *Considerations About Equations for Steady State Flow in Natural Gas Pipelines*, *Journal Braz. Soc. Mech. Sci. and Eng*, Vol. XXIX, No. 3, pp. 262-273, 2007
16. Dragomir, T-L., *Elemente de Teoria Sistemelor*, Ed. Politehnica, Timișoara, 2004
17. Drug, V., *Transportul gazelor naturale*, Ed. Tehnică, București, 1972
18. Ehrhardt, K., Steinbach, M. C., *Nonlinear Optimization in Gas Networks*, Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, ZIB-Report 03-46, (<http://www.zib.de/Publications/Reports/ZR-03-46.pdf>, iulie 2009), 2003
19. Evans G. A., Blackledge J. M., Yardley P., *Analytic methods for partial differential equations*, Springer-Verlag London Limited, 1999
20. Fournier, A., Kuper, K., *Determining Actual Wall Roughness from Operational Data*, Gasunie-Netherlands, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9404.pdf>, iulie 2009), 1994
21. Goodwin, G. C., Seron, M. M., De Dona, J.A., *Constrained Control and Estimation, An Optimisation Approach*, Springer-Verlag London Limited, 2005
22. Halbert, P. W., Lolito, L. A., *The Simulation Of Gas Flow Dynamics in Pipeline Network*, Design, Construction and Operations Committee Of Pipeline Research Council International inc., 1965
23. Hannah, K.W., Batey, E.H., Wilkinson, J.F., Holliday, D.H., *Transient Flow of Gas*, Underground Storage Committee Pipeline Research Committee of Pipeline Research Council International, Inc. 1964
24. Heinbockel, J. H., *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion Univerity (<http://www.trafford.com/robots/01-0535.html>, iulie 2009), 1996
25. Van der Hoeven, T, *Constrained Network Simulation*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0311.pdf>, iulie 2009), 2003
26. Van der Hoeven, T., *Gas Quality Control in Simulation*, Gasunie, Netherlands, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9801.pdf>, iulie 2009), 1998
27. Van der Hoeven, T., *Math in Gas and the Art of Linearization*, phd thesis University of Groningen, published by Energy Delta Institute, 2004

28. Hoffman J. D., *Numerical Methods for Engineers and Scientist*, second edition revised and expanded, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001
29. Ilkaev R. I., Seleynev V. E., Aleshin V.V., Klishin G. S., *Numerical Simulation Of Gas Pipeline Networks. Theory, computational implementation and industrial applications*, URSS, Moscow, 2005
30. Isbășoiu, E. C. G., Georgescu, S-C., *Mecanica fluidelor*, Ed. Tehnică. București 1995
31. Jelen J., Golshan H., *Distribution of Pipeline Efficiency in Large Networks, Pipeline Simulation Interest Group* (<http://psig.org/papers/1990/9809.pdf>, iulie 2009) 1998
32. Jora, B. și alții, *Metode de calcul numeric în automatică, sisteme liniare*, Ed. Enciclopedică, București, 1996
33. Kelling, C., Reith, K., Sekirnjak, E., *A Practical Approach to Transient Optimization for Gas Networks*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0005.pdf>, iulie 2009), 2000
34. Krishnaswami, K., Kirby, S. C., Abbaspour, M., *Compressor Station Optimization for Line pack Maintenance*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0410.pdf>, iulie 2009), 2004
35. Kurschat, T., Revell, N., *Taking the Rough With The Smooth – A New Look At Transmission-Factor Formulae*, Ruhrgas AG, RFG, Advantica Stoner, UK, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0202.pdf>, iulie 2009), 2002
36. Lewandowski, A., *New Numerical Methods For Transient Modeling Of Gas Pipeline Networks*, American Management System, Inc, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9510.pdf>, iulie 2009), 1995
37. Lewandowski, A., *Object-Oriented Modeling of the Natural Gas Pipeline Network*, Wayne State University Detroit, SUA, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9410.pdf>, iulie 2009), 1994
38. Linden, P., Goodreau, M., Basu, U., Venkataramanan, G., Goodreau, M., Ferber, P., *Gas Pipeline Optimization*, Linden Professional Services, Stoner Associates, Inc., GE Continental Controls, CNG Transmission Corporation, SUA, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9905.pdf>, iulie 2009) 1999
39. Logue, D., Lamb, P., *Implementation of a Gas Load Forecaster at Williams Gas Pipeline*, Energy Solutions International, Williams Gas Pipeline – Transco, SUA, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/2000/0107.pdf>, iulie 2009), 2001
40. Marinescu, M., *Termodinamică tehnică*, MATRIX ROM, București, 1998

41. Marques, D., Morari, M., *On Line Optimization of Gas Pipeline Networks*, Automatica 24, Issue 4, pp. 455-469, 1988
42. Modisette, J. L., *Equation of State Tutorial*, Energy Solutions International, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0008.pdf>, iulie 2009), 2000
43. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Analiza Subsistemului de Transport Gaze III Vest din perspectiva modelării regimurilor tehnologice în vederea determinării timpilor de propagare și al estimării necesarului de debit pe localități, pentru implementarea unui model de conducere predictiv*, raport intern de cercetare CO-267, convenția 146 C, act adițional nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2007
44. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Analiza Subsistemului de Transport Gaze III-Vest din perspectiva stabilirii procedurilor de lucru pentru evaluarea dinamicii zestrei conductelor de transport gaze naturale ale acestuia*, raport intern de cercetare CO-270, convenția 39 C, notificarea nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2008
45. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Aspecte practice ale studiului dinamicii procesului de curgere al gazelor naturale prin conductele de transport pe baza rezolvării analitice a unui model matematic simplificat*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 3, 2007, (<http://www.aair.org.ro/art/83>, iulie 2009)
46. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Concepția, asimilarea și realizarea unor elemente și dispozitive necesare urmării stării de funcționare a echipamentelor pneumatice sau cu acționare manuală, din cadrul SRM-urilor pentru integrarea acestora în sistemul de achiziție și monitorizare parametri*, raport intern de cercetare CO-249, convenția 31 C, faza nr. 2, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2003
47. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Criterii și cerințe tehnice referitoare la schemele, instalațiile, aparatele și dispozitivele destinate modernizării și echipării SRM-urilor existente în cadrul SNTGN TRANSGAZ SA Mediaș, sau realizării de noi SRM-uri, în scopul impunerii unei concepții unitare, în conformitate cu exigențele realizării unui sistem SCADA*, raport intern de cercetare CO-246, convenția 31 C, faza nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2003
48. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Echipele stație de reglare - măsurare gaze naturale tipizată cu elemente compatibile sistem SCADA*, raport intern CO-240, convenția 58 C, faza 2, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2002
49. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Elaborarea modelului de control al sistemului de transport gaze naturale, ținând cont de zestrea conductei și de variația parametrilor reprezentativi pentru descrierea regimurilor tehnologice*, raport intern de cercetare CO-262, convenția 7 C, faza nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2004

50. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Elaborarea unei baze de date și al unui algoritm de procesare al acestora pentru estimarea pe termen scurt al necesarului de debit în sistemul de transport gaze naturale*, raport intern de cercetare CO-265, convenția 7 C, act adițional nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2006
51. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Evaluarea teoretică și experimentală a parametrilor specifici unui sistem de transport gaze naturale în vederea implementării modelului de control predictiv al sistemului*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 4, 2006, (<http://www.aair.org.ro/art/78>, iulie 2009)
52. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Implicațiile obținerii conductelor componente ale unui sistem de transport gaze naturale asupra calității procesului de conducere automată*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 6, 2008, (<http://www.aair.org.ro/art/106>, iulie 2009)
53. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Posibilități de integrare a stațiilor de reglare și măsurare gaze în sistemele centralizate de achiziție și monitorizare parametri*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 4, 2003, (<http://www.aair.org.ro/art/60>, iulie 2009)
54. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Posibilități de introducere a controlului predictiv al unui sistem de transport gaze naturale prin automatizarea nodurilor tehnologice și regruparea consumatorilor în funcție de sursele de alimentare*, simpozion „Transportul prin conducte în industria de petrol și gaze din România”, USI România, 2006, (<http://www.oilromania.ro/transconducte/sept-ro.html>, iulie 2009)
55. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Problematika controlului predictiv într-un sistem de transport gaze naturale*, raport intern de cercetare CO-265-A, convenția 7 C, act adițional nr. 1, SNTGN-TRANSGAZ-SA Mediaș, 2006
56. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Problematika evaluării zestrei unui sistem de transport gaze naturale în contextul implementării unui model de control predictiv*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 2, 2009 (<http://www.aair.org.ro/art/108>, iulie 2009)
57. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, Simon, J., *Sistem de achiziție și monitorizare parametri instalație automată de odorizare prin eșantionare*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 1, 2004, (<http://www.aair.org.ro/art/63>, iulie 2009)
58. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Soluții de automatizare a nodurilor tehnologice din sistemele de transport gaze naturale în vederea optimizării regimului de presiune și a circulației fluxului de gaze*, revista Automatizări și Instrumentație, nr. 3, 2005, (<http://www.aair.org.ro/art/71>, iulie 2009)
59. Moisin I., **Bichiş C.-D.**, *Soluții de echipare a elementelor pneumatice din cadrul stațiilor de reglare și măsurare gaze naturale ale SNTGN TRANSGAZ SA MEDIAS, cu senzori pentru monitorizarea regimului de funcționare al*

- stației*, revista *Automatizări și Instrumentație*, nr. 3, 2004, (<http://www.aair.org.ro/art/65>, iulie 2009)
60. Moisin I., **Bichiș C.-D.**, *Soluții moderne de control predictiv al unui sistem de transport gaze naturale în scopul optimizării regimurilor de presiuni și a circulației fluxurilor de gaze*, cod lucrare S2-16, Forumul Regional al Energiei FOREN, Neptun 2006
 61. Osiadacy, A. J., *Dynamic Optimization Of High Pressure Gas Networks Using Hierarchical Systems Theory*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/1990/9408.pdf>, iulie 2009), 1994
 62. Osiadacz, A. J., *Comparison of isothermal and non-isothermal transient models*, Pipeline Simulation Interest Group. (<http://psig.org/papers/1990/9802.pdf>, iulie 2009), 1998
 63. Osiadacz, A. J., *Diferent transient models. Limitations, advantages and disadvantages*, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9606.pdf>, iulie 2009), 1996
 64. Panaitescu, V., *Bazele mecanicii fluidelor*, Ed. Tehnică, București, 2001
 65. Piggott, J., Whitehand, C., Perchard, T., *Short Term Gas Demand Forecasting*, BG Technology Ltd., UK, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0011.pdf>, iulie 2009), 2000
 66. Piggott, J.L., *Accurate Load Forecasting – "You cannot be serious"*, Advantica, Ltd, UK, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/2000/0310.pdf>, iulie 2009), 2003
 67. Qin S. J., Badgwell, T.A., *A survey of industrial model predictive control technology*, Control Engineering Practice 11, pp. 733-764, (http://cepac.cheme.cmu.edu/pasilectures/darciodolak/Review_article_2.pdf, iulie 2009), 2003
 68. Rachford jr., H. H., Carter, R. G., *Method And Apparatus For Determining Optimal Control settings of a Pipeline*, United States Patent 6701223, 2004
 69. Racoveanu, N., *Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic*, Ed. Tehnică, București 1976
 70. Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, University of Minesota (<http://www.stanford.edu/class/cme324/saad.pdf>, iulie 2009), 2000
 71. Steinbach, M. C., *On PDE Solution In transient Optimisation of Gas Networks*, Journal Of Computational And Applied Mathematics, vol. 203, no. 2, pp. 345-361, 2007
 72. Stoffregen, J., Botros, K. K., Sennhauser, D.J., Jungowski, K., Golshan, H., *Pipeline Network Optimization – Application of Genetic Algorithm*

- Methodologies*, Pipeline Simulation Interest Group (<http://psig.org/papers/2000/0502.pdf>, iulie 2009), 2005
- 73.** Stringer, S. M., *The Use Of Robust Observers in the Simulation of Gas Supply Networks*, phd thesis, University Of Reading, UK, 1993
- 74.** Tabkhi, F., *Optimisation de Reseaux de Transport de Gas*, phd these, L'Institut National Polztechnique de Toulouse, 2007
- 75.** Verwer, J. G., Hundsdorfer, H. H., Sommeijer, B. P., *Convergence properties of the Runge-Kutta-Chebyshev method*, Springer Berlin / Heidelberg , Volume 57, Number 1, pp 157-178, 1990
- 76.** Westoff, M. A., Lundberg, W.N., *Fundamentals of Load Forecasting and Uncertainty*, Colorado Interstate Gas Co. SUA, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9703.pdf>, iulie 2009), 1997
- 77.** Zhang, L., *Runge-Kutta-Chebyshev Methods for Advection-Diffusion-Reaction Problems*, Master's Thesis in Numerical Nalysis, Royal Institute Of Technology, Stockholm, Sweden, 2004
- 78.** Zhou, J., Adewumi, M.A., *Simulation of Transient Flow in Natural Gas Pipelines*, The Pennsylvania State University, Petroleum and Natural Gas Engineering, SUA, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9508.pdf>, iulie 2009), 1995
- 79.** Zhou, J., Adewumi, M.A., *The Development and Testing of a New Flow Equation*, The Pennsylvania State University, Petroleum and Natural Gas Engineering, SUA, Pipeline Simulation Interest Group, (<http://psig.org/papers/1990/9504.pdf>, iulie 2009), 1995

Index

A

activitate de exploatare, 17
activitate de operare, 17
automatizare nod tehnologic, 21

C

capacitate minimală, 208
capacitate nominală, 208
capacitate termică, 56
caracteristică de funcționare, 167
căldură, 55, 56, 63, 72, 74, 113
câmp vectorial, 230
centrală termică, 32
coeficient Darcy-Weisenbach, 67
coeficient de transfer termic, 63, 73, 74, 113, 120
coeficient Fanning, 67
coeficienți de deformare, 45, 63
condiție de frontieră, 91, 92, 142, 148
condiție inițială, 91, 148
condiție limită, 74, 91, 115, 148, 191
condiții de optimalitate, 173
condiții de siguranță, 18, 21, 214
condiții Karush-Kuhn-Tucker, 175, 176
conducere sistem de transport, 17
conductă hidraulic netedă, 70
conductă hidraulic rugoasă, 70
conducție termică, 63, 64
consistență, 94
constanta generală specifică, 74, 120
constantă de timp, 88, 89, 122, 125, 137, 140, 143
constantă rețea de discretizare., 93
consumator casnic, 20
consumator industrial, 20
control predictiv, 40, 171, 189, 207, 252
control sistem de transport, 19
convergență, 94, 99, 104, 107
curbă de evoluție debit-temperatură
 ambientă, 22
curbă fluidă, 53
curgere adiabatică, 74
curgere izotermă, 74, 77, 129
curgere laminară, 58, 66, 67, 68

curgere nestaționară, 73
curgere staționară, 77
curgere tranzitorie, 88
curgere turbulentă, 58, 66, 67, 68
curgere unidimensională, 71

D

debit, 73, 79
debit masic, 54, 73, 113
densitate, 71, 73
derivată totală, 52
diagramă Moody, 68
diferență finită, 94, 98
discretizare, 94, 96, 97, 115, 116, 139, 147, 192
dispecer, 25
distribuție spatio-temporală, 124
divergență, 231
domeniu de dependență, 237
durată regim tranzitoriu, 125, 126, 137, 139

E

echilibrare fizică, 17
ecuație constitutivă, 44, 49, 61
ecuație de continuitate, 58
ecuație de mișcare, 44, 49, 60, 75, 79
ecuație de stare, 55, 73, 77
ecuații Navier-Stokes-Duhem, 58
eficiență metodă, 110
energie externă, 62
energie internă, 55, 57, 62, 63, 73
energie potențială, 62
energie totală, 55, 61, 64
entalpie, 57, 64
entropie, 57, 64, 77
eroare de calcul numeric, 127, 131, 138, 158, 198, 251
eroare de ieșire, 181
eroare de trunchiere, 94, 99

F

factor de abatere, 65, 73, 76, 77
factor de câștig, 140
factor de compresibilitate, 65

factor de pierderi hidraulice, 67, 69, 71, 74, 157, 159, 162, 165, 166, 169
 fluid ideal, 48
 fluid newtonian, 49
 flux, 231
 flux hidrodinamic, 53
 formă diferențială, 229
 formula Gauss-Ostrogradski, 232
 formula lui Stokes, 232
 formulă Berthelot, 65, 113
 formulă Blasius, 70
 formulă Colebrook-White, 70, 157, 159, 165
 formulă Haaland, 70
 formulă Hagen-Poiseuille, 69
 formulă Hall-Yarborough, 66, 76
 formulă Karman-Nikuradse, 70
 formulă Konakov, 70
 formulă Sutherland, 65
 formulă Techo, 70
 formulă von Karman-Prandtl, 70
 formulă Weymouth, 69
 funcție Lagrangean, 174
 funcție obiectiv, 181, 200, 201, 202, 204, 205, 217, 219, 221

G

gaz ideal, 55, 64
 gaz real, 65
 gradient, 230

I

instalația de filtrare-separare, 27
 instalația de încălzire, 30
 instalația de odorizare automată, 32
 instalația de reglare-protecție, 30
 izentropic, 64, 77

L

lege de comandă, 187
 lege de reglare, 187
 legea Cauchy, 47
 legea lui Hooke, 44
 limită de stabilitate, 104, 106, 107, 109, 137
 liniarizare, 118, 140, 146, 195
 linie de curent, 53
 lucru mecanic, 55, 56, 62, 63

M

marime de intrare, 117, 96, 150

matrice diagonală, 238
 matrice tridiagonală, 153, 239
 mărime de stare, 96, 117, 150
 mediu continuu, 43
 mediu elastic, 43
 metoda mulțimii restricțiilor active, 177
 metodă Euler, 103
 metodă explicită, 98, 101, 104, 116, 237
 metodă implicită, 98, 99, 105, 158, 169, 196, 238
 metodă Runge-Kutta-Chebyshev, 102, 107
 mod dinamic, 88
 model de aproximare, 113
 model sistemic, 132
 monitorizare, 18
 multiplicatorii Lagrange, 174, 178

N

neizentropic, 64
 nod tehnologic, 15, 207, 209
 nod tehnologic de ieșire, 16
 nod tehnologic de intrare, 16
 număr de condiționare, 89, 123
 număr Reynolds, 66, 68, 157, 160, 162, 165
 numărul lui Knudsen, 43

O

observator de stare, 188
 orientare model, 91
 orizont de control, 182, 200
 orizont de predicție, 181, 182, 200, 202, 216, 217

P

panou măsurare debit, 31
 parametru redus, 65
 pas de discretizare, 89, 93, 97, 104, 167, 200
 perturbație de debit, 20, 22
 polinom Chebyshev, 108
 presiune, 71, 73
 presiune critică, 120
 presiune hidrostatică, 48, 61, 62
 presiune medie, 81
 problemă de optimizare convexă, 176
 problemă de optimizare cu restricții, 174
 problemă de optimizare fără restricții, 172
 problemă de reglare automată, 18

probleme de operare, 26
proces cu parametri concentrați, 97,
113, 116, 194, 197, 209
proces cu parametri distribuți, 74, 93,
113
profil de debit, 20, 21
punct admisibil, 177
punct de discretizare, 94
punct de extrem, 172
punct de maximum, 173
punct de minimum, 173, 177
punct staționar, 172

R

rază de influență, 237
rază spectrală, 99, 109
realizare sistemică, 91, 92, 132
regim de funcționare, 17
regulator predictiv, 41
reprezentare Euler, 51, 52, 53, 57, 59,
61
reprezentare Lagrange, 50, 57, 58
reprezentare sistemică, 192
restricții, 174
rotor, 231
rugozitate, 68, 69, 157, 159, 162, 166

S

schemă tehnologică de implementare,
25, 189, 207
simulare numerică, 194, 197, 198, 247,
252
sistem de conducere, 17
sistem de conducere distribuit, 18
sistem de tip SCADA, 33
sistem de transport de gaze, 15
sistem inflexibil, 89, 104, 126, 196
sistem termodinamic deschis, 58
stabilitate, 95, 100, 101, 104, 106, 145,
152
stabilitate asimptotică, 99, 154, 155,
196
stabilitate von Neuman, 95
stare de deformare, 45

stare de echilibru, 48
stație de comandă vane, 16, 17
stație de comprimare gaze, 16, 17
stație de reglare și măsurare, 16, 19, 26
stiff equations, 104
suprafață de control, 54
suprafață de curent, 53

T

temperatură, 57, 71, 73
temperatură critică, 120
tensor deformări, 46, 48
tensor tensiuni, 47, 61
teorema Reynolds, 53, 54, 59
teoremă Gershgorin, 109, 239
teoremă Lax, 95
timp de stabilizare, 20
timp mediu de propagare, 81
traietorie, 53
traietorie caracteristică, 113, 130, 133,
234, 236
transformare reversibilă, 57
tronson de conductă, 15, 21, 72, 73, 77,
189
tub de curent, 53

U

unitate telecomandată de control RTU,
25

V

viscozitate, 47, 61, 63, 64, 65
viscozitate cinematică, 65, 66, 69
viscozitate dinamică, 50, 65, 120, 156
viteză, 71, 73
viteză medie, 81
viteză sunet, 76, 77, 125
volum de control, 52, 53, 54, 59, 60, 72
volum material, 52, 53, 58, 60, 61, 63

Z

zestre conductă, 82