

METODE ȘI ALGORITMI DE PRELUCRARE A SEMNALELOR DE VIBRAȚII

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor
la
Universitatea "Politehnica" din Timișoara
în domeniul "INGINERIE MECANICĂ"
de către

mat. Cristiana CĂPLESCU

Conducător științific: prof.univ.dr.ing. Titus Gh. Cioara
Referenți științifici: prof.univ.dr.ing. Polidor Bratu
prof.univ.dr.ing. Mircea Radeș
prof.univ.dr. Gheorghe Drăgănescu

Ziua susținerii tezei: 30.07.2009

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Automatică | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie | 8. Inginerie Industrială |
| 3. Energetică | 9. Inginerie Mecanică |
| 4. Ingineria Chimică | 10. Știința Calculatoarelor |
| 5. Inginerie Civilă | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 6. Inginerie Electrică | |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2009

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat cu titlul „Metode și algoritmi de prelucrare a semnalelor de vibrații” a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Departamentului de Mecanică și Rezistența Materialelor al Universității „Politehnica” din Timișoara.

Lucrarea se înscrie în problematica de vârf a cercetării pe plan mondial în domeniu, cu deosebite implicații practice în analiza semnalelor și cu rezultate importante în analiza vibrațiilor.

O parte importantă a lucrării este dedicată câtorva metode speciale în prelucrarea semnalelor: discretizarea unui semnal de vibrații după copia foto a vibrogramelor, mărirea densității punctelor spectrului unui semnal, perfecționarea metodelor de determinare a componentelor periodice ascunse în semnale complexe, utilizarea transformatei wavelets la extragerea unor particularități dintr-un semnal de vibrații. Pentru aceste metode sunt prezentate două aplicații experimentale la determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator electric de mare putere și la diagnosticarea defectelor la rulmenți.

Lucrarea rezolvă și problema legată de recondiționarea semnalelor cu niveluri de saturație, cu un studiu de caz la recondiționarea semnalelor de vibrații înregistrate saturat pe structura unui cazan de abur.

Doresc să aduc sincere mulțumiri conducătorului științific Prof.dr.ing. Titus Gh. Cioara pentru sprijinul competent, pentru încurajări și interesul acordat pregătirii mele.

De asemenea, mulțumesc domnilor Prof.dr.ing. Liviu Bereteu și Prof.dr. Gheorghe Drăgănescu, care mi-au acordat sfaturi privind pregătirea acestei lucrări, colegilor din Departamentul de Mecanică și Rezistența Materialelor, pentru sprijin și aprecieri.

Timișoara, iulie, 2009

Cristiana Căplescu

Părinților și familiei mele, mulțumiri.

Căplescu, Cristiana

Metode și algoritmi de prelucrare a semnalelor de vibrații

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 62, Editura Politehnica, 2009, 118 pagini, 99 figuri, 2 tabele.

ISSN: 1842-4937

ISBN: 978-973-625-938-8

Cuvinte cheie: semnale, vibrații, simulare, prelucrare, recondiționare.

Rezumat,

Lucrarea se înscrie în problematica de vârf a cercetării pe plan mondial în domeniu, cu deosebite implicații practice în analiza semnalelor și cu rezultate importante în analiza vibrațiilor. Sunt abordate metode speciale în prelucrarea semnalelor cu aplicații experimentale la determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator electric de mare putere și la diagnosticarea defectelor la rulmenți. O altă problemă rezolvată în lucrarea este reprezentată de recondiționarea semnalelor cu niveluri de saturație, cu un studiu de caz la recondiționarea semnalelor de vibrații înregistrate saturat pe structura unui cazan de abur.

CUPRINS

1. Introducere	7
1.1. Problematika tezei	7
1.2. Structura tezei	9
2. Metode speciale în prelucrarea semnalelor de vibrații	11
2.1. Discretizarea unui semnal de vibrații după copia foto a unei vibrograme	11
2.2. Mărirea densității liniilor spectrului unui semnal de vibrații	13
2.3. Particularități privind determinarea periodicității componentelor unui semnal de vibrații	18
2.3.1. Metoda transformatei Hilbert	19
2.3.2. Metoda transformatei cepstrum	21
2.4. Determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret	25
2.4.1. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat împreună cu semnalul de marcare a perioadei	25
2.4.2. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat în lipsa semnalului marcător al perioadei	29
2.4.2.1. Exemplu	33
2.4.3. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat folosind tehnica analizei modale	36
2.5. Utilizarea transformatei Wavelets la extragerea unor particularități dintr-un semnal de vibrații	39
2.5.1. Considerații generale	39
2.5.2. Aplicații la sisteme liniare	41
2.5.3. Aplicații la sisteme neliniare	48
3. Recondiționarea semnalelor cu niveluri de saturație	51
3.1. Considerații generale	51
3.2. Simularea unei înregistrări cu semnale saturate	53
3.2.1. Modelul dinamic al unei structuri	53
3.2.2. Simularea unei unde elastice tranzitorie de tip seismic	57
3.3. Simularea răspunsului sistemului dinamic la excitația prin unda seismică	59
3.3.1. Simularea prin integrare numerică a sistemului de ecuații diferențiale	59
3.3.2. Forma convolutivă a răspunsului modal	63
3.4. Recondiționarea semnalelor înregistrate saturat	66
3.5. Studiu de caz. Recondiționarea semnalelor de vibrații înregistrate saturat pe structura unui cazan de abur	80
3.5.1. Descrierea cazului	80
3.5.2. Recondiționarea unei vibrograme înregistrată cu limitări prin saturare	82
4. Aplicații experimentale pe studii de caz ale metodelor speciale de prelucrare a semnalelor de vibrații	96
4.1. Determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator electric de mare putere	96
4.2. Diagnosticarea defectelor la rulmenți	102

4.2.1. Frecvențele caracteristice defectelor rulmenților cu bile	102
4.2.2. Verificări experimentale	105
4.2.2.1. Identificarea frecvențelor caracteristice de defect prin metoda anvelopei	107
5. Concluzii. Contribuții originale	110
Bibliografie	112

1. INTRODUCERE

1.1. Problematika tezei

Teza de doctorat cu titlul METODE ȘI ALGORITMI DE PRELUCRARE A SEMNALELOR DE VIBRAȚII cuprinde o serie de studii teoretice cu aplicații în domeniul investigării vibrațiilor structurilor de mașini, utilaje și construcții industriale și civile. Domeniul este extrem de vast, implicând probleme de tipul:

- determinarea nivelurilor de vibrații periculoase pentru integritatea structurală a mașinii sau utilajului;
- reducerea nivelurilor de vibrații la mașini și utilaje;
- monitorizarea stării tehnice a unei mașini pe baza prelucrării semnalelor de vibrații înregistrate în timpul funcționării ei;
- controlul pe linia de fabricație a calității produselor industriale prin teste de vibrații.

Acestea sunt doar câteva probleme care necesită aplicarea unor metode specifice fiecărui caz aplicativ în parte, așa cum se va vedea în cadrul capitolelor dezvoltate în teză.

Astfel, în capitolul 2 intitulat METODE SPECIALE ÎN PRELUCRAREA SEMNALELOR DE VIBRAȚII, sunt dezvoltate o serie de metode speciale.

Prima metodă, dezvoltată în paragraful 2.1., „*Discretizarea unui semnal de vibrații după copia foto a unei vibrograme*”, se referă la o metodă simplă, practică și eficientă de digitalizare a unei vibrograme deja trasată grafic, dar ale cărei date în forma unui fișier numeric sunt necesare pentru prelucrări de esență, cum ar fi recondiționarea unor semnale înregistrate cu vârfuri limitate prin saturarea instrumentației de măsurare, metoda de recondiționare fiind dezvoltată pe larg în capitolul 3.

O problemă dificilă este aceea a analizei unui semnal înregistrat pe o perioadă scurtă de timp, semnal constituit din componente armonice sau modale, care sunt determinate, de obicei, din spectrele discrete ale semnalului. Dificultatea determinării acestor componente este legată de faptul că pentru o secvență scurtă de timp, înregistrarea duce la un spectru Fourier cu un increment al eșantionării în frecvență mare, având ca rezultat o estimare aproximativă a componentelor căutate. Această problemă este rezolvată în cadrul paragrafului 2.2., „*Mărirea densității liniilor spectrului unui semnal de vibrații*”, metoda originală elaborată fiind o aplicație a teoremei deplasării în spectrul de frecvență.

Paragraful 2.3. este dedicat unor particularități privind determinarea periodicităților componentelor unui semnal de vibrații complex, componente periodice care sunt ascunse în semnalul complex înregistrat pe structura unei mașini și sunt corelate cu anumite defecte ale unor subsansambluri ale mașinii. Problema este abordată prin utilizarea transformatorilor *Hilbert* și *Cepstrum*. Transformata Hilbert conduce la obținerea anvelopei (înfășurătoarei), iar analiza în frecvență a semnalului anvelopei permite obținerea frecvențelor de periodicitate căutate. În lucrare, metoda a fost îmbunătățită prin operația suplimentară de filtrare a componentei continue a

semnalului anvelopei, fapt ce a condus la un spectru de linii mai curat și totodată mai ușor de analizat.

La fel, a fost îmbunătățită și metoda transformatei *cepstrum*, prin extragerea din spectrul logaritm al semnalului analizat a spectrului corespunzător componentelor modale conținut în semnal. Aplicând transformata inversă Fourier acestui spectru se obține în domeniul *quefrequency* un tren de impulsuri periodice, cu perioadele componentelor căutate.

O altă problemă abordată, în paragraful 2.4., este problema determinării corecte a componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret, discretizarea putând duce la erori, uneori notabile, de calcul al amplitudinilor componentelor armonice.

Semnalul se înregistrează în paralel cu un semnal de marcă a periodicității, cum ar fi semnalul periodic sincron cu rotația arborelui mașinii (paragraful 2.4.1.). Semnalul marcător este de tip impulsiv transformat pe cale analogică într-un semnal în dinte de ferăstrău care prin digitalizare permite determinarea prin interpolare liniară a perioadei semnalului; în pasul următor, prin integrare pe această perioadă, se determină componentele armonice ale semnalului de vibrații. Metoda este originală și pregătită pentru publicare.

În paragraful 2.4.2., se prezintă o metodă originală, publicată [Căpălescu, Hule, Cioara, (2007.a)], prin care se determină componentele armonice ale unui semnal luând în considerare spectrul discret al semnalului procesat pe o secvență dată de timp. Identificarea componentelor armonice complexe se face luând în considerare liniile spectrale din vecinătatea unui vârf din spectru, unde se presupune existența unei componente armonice.

O a treia metodă pentru determinarea componentelor armonice ale unui semnal este dezvoltată în paragraful 2.4.3. Originalitatea constă în transformarea secvenței semnalului înregistrat într-un semnal amortizat, prin multiplicarea secvenței cu o funcție exponențială de timp căzătoare, semnalul rezultat fiind analizat prin metode modale, determinându-se, prin identificarea parametrilor modali, frecvențele componentelor armonice.

Paragraful 2.5. tratează utilizarea transformatei wavelet la extragerea unor particularități dintr-un semnal de vibrații. Transformata wavelet fiind o generalizare matematică pe linia transformatelor Fourier, Laplace și Hilbert, are numeroase aplicații în prelucrarea semnalelor. Utilizând funcția de ponderare, mamă Morlet, la procesarea transformatei wavelet a semnalului înregistrat, conținând componente periodice și/sau componente modale liber amortizate, am definit o *funcție de frecvență wavelet* (2.120). Graficul acestei funcții de frecvență de-a lungul axei timpului depinde de sistemul dinamic din care semnalul înregistrat provine. Dacă semnalul provine de la un sistem liniar, funcția este o linie constantă paralelă cu axa timpului, indiferent dacă sistemul este amortizat sau nu. Dacă sistemul este neliniar, atunci această funcție este căzătoare în cazul în care caracteristica elastică a sistemului este tare, iar dacă caracteristica este moale, funcția este crescătoare. O aplicație importantă a acestei constatări este reprezentată de detectarea defectelor structurilor, un defect structural introducând neliniarități locale care se reflectă în răspunsul structurii.

Capitolul 3 este dedicat recondiționării unor semnale de vibrații înregistrate cu vârfuri limitate prin saturarea instrumentației (senzori, amplificatoare, convertoare analog-numeric). Aceste înregistrări sunt întâlnite în cazul unor evenimente dinamice unice, cum ar fi înregistrarea vibrațiilor unei structuri perturbate prin unde seismice, provocate de explozii. Pentru recondiționarea vârfurilor tăiate prin saturarea, pe intervale de timp scurte, a instrumentației, se consideră că semnalul

de răspuns măsurat provine de la un sistem liniar, forma analitică a semnalului fiind constituită din două sume de componente, una a vibrațiilor libere amortizate după modurile naturale de vibrații ale structurii și o a doua sumă corespunzătoare convoluției dintre funcția de excitație și răspunsul liber amortizat.

Pentru recondiționarea vârfului tăiat se consideră originea timpului, pentru forma analitică a semnalului, în dreptul ultimului eșantion înainte de tăiere. Această idee permite ca excitația, complet necunoscută, să poată fi aproximată, în vecinătatea originii timpului, printr-o funcție de probă de formă polinomială. Problema se reduce, astfel, la determinarea unor parametri constanți constituiți din constantele condițiilor inițiale și coeficienții funcției polinomiale, parametri determinați pe baza unui sistem de ecuații liniare, construit cu eșantioane luate din vecinătatea momentului inițial, zero, atât dinspre axa negativă a timpului cât și din vecinătatea punctului de revenire a semnalului sub linia de saturație.

Metoda originală, publicată recent, [Căplescu, Cioara, (2009.c)], a fost verificată cu bune rezultate, atât prin simularea răspunsului unui model dinamic cu patru grade de libertate, cât și pe un caz real: recondiționarea unor semnale înregistrate pe structura unui cazan de abur, supus unei unde seismice, produsă de o excavație prin explozie, într-o carieră de suprafață, aflată în vecinătatea centralei termoelectrice deservită de cazanul cu abur. Intensitatea unei seismice fiind complet necunoscută, iar sensibilitățile amplificatoarelor fiind programate arbitrar, unele dintre semnalele înregistrate au fost înregistrate limitat, și pentru un astfel de semnal limitat prin saturare, digitalizat prin metoda prezentată în paragraful 2.1., după o copie foto a unei vibrograme, s-au obținut rezultate multumitoare.

Capitolul 4 este dedicat unor aplicații experimentale, pe studii de caz, a metodelor dezvoltate în capitolul 2. Astfel, în paragraful 4.2., este prezentat un caz care a necesitat aplicarea metodei dezvoltate în paragraful 2.4.2., privind determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator hidroelectric de mare putere. Analiza componentelor armonice prin metoda dezvoltată în cadrul tezei a probat utilitatea ei în scopul urmăririi comportării structurii statorului în timp, în vederea anticipării apariției unei defecțiuni.

O a doua aplicație a capitolului 4 este prezentată în paragraful 4.2., dedicat diagnosticării defectelor la rulmenți. Pentru testare s-a ales un rulment radial seria 6209, pentru care s-au calculat valorile frecvențelor caracteristice de defect (paragraf 4.2.1.). Deși testarea rulmentului s-a efectuat prin antrenarea rulmentului pe o mașină de găurit, cu un zgomot mare de fond, utilizând metoda anvelopei, sub forma particulară definită în paragraful 2.3., s-a reușit identificarea defectului de bilă, defect semnalat de întreprinderea Rulmentul din Brașov, cu care Laboratorul de Testări și Cercetări pentru Vibrații Mecanice al Universității Politehnica din Timișoara, a avut o serie de colaborări privind vibrațiile rulmenților, laborator în cadrul căruia mi-am efectuat studiile doctorale și am elaborat prezenta teză.

1.2. Structura tezei

Lucrarea de față cu titlul METODE ȘI ALGORITMI DE PRELUCRARE A SEMNALELOR DE VIBRAȚII își propune să prezinte o serie de studii teoretice cu aplicații în domeniul investigării vibrațiilor structurilor de mașini, utilaje și construcții industriale și civile.

Lucrarea este structurată în 5 capitole.

Capitolul 1 realizează introducerea în problematica tezei, discutându-se principalele probleme tratate pe larg în următoarele capitole (paragraful 1.1.). Tot în acest capitol se prezintă și structura tezei (paragraful 2.2.).

Capitolul 2 prezintă metode speciale în prelucrarea semnalelor de vibrații.

În paragraful 2.1. este descrisă discretizarea unui semnal de vibrații după copia foto a unei vibrograme.

În paragraful 2.2. este prezentată mărirea densității liniilor spectrului unui semnal de vibrații.

În paragraful 2.3. sunt descrise particularități privind determinarea periodicității componentelor unui semnal de vibrații, prezentându-se metoda transformatei Hilbert și metoda transformatei cepstrum.

În paragraful 2.4. este descrisă determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret, prezentându-se determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat împreună cu semnalul de marcare a perioadei și determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat în lipsa semnalului marcat al perioadei.

În paragraful 2.5. este descrisă utilizarea transformatei Wavelets la extragerea unor particularități dintr-un semnal de vibrații prezentându-se considerații generale privind transformata Wavelet și aplicații la sisteme liniare și neliniare folosindu-se funcțiile transformatei Wavelet.

Capitolul 3 prezintă recondiționarea semnalelor de vibrații cu niveluri de saturație.

În paragraful 3.1. sunt descrise considerații generale privind măsurarea semnalelor de vibrații.

În paragraful 3.2. este prezentată simularea unei înregistrări cu semnale saturate descriindu-se modelul dinamic al unei structuri și simularea unei unde elastice tranzitorie de tip seismic.

În paragraful 3.3. este descrisă simularea răspunsului dinamic la excitația prin undă seismică prezentându-se simularea prin integrare numerică a sistemului de ecuații diferențiale și forma convolutivă a răspunsului modal.

În paragraful 3.4. este prezentată recondiționarea semnalelor înregistrate saturat pornindu-se de la o imagine scanată a unei vibrograme.

În paragraful 3.5. este prezentat un studiu de caz la recondiționarea semnalelor de vibrații înregistrate pe structura unui cazan de abur. Se prezintă descrierea cazului și recondiționarea unei vibrograme înregistrată cu limitări prin saturare.

Capitolul 4 prezintă aplicații experimentale pe studii de caz ale metodelor speciale de prelucrare a semnalelor.

În paragraful 4.1. se prezintă determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator electric de mare putere.

În paragraful 4.2. se descrie diagnosticarea defectelor la rulmenți, utilizând frecvențele caracteristice defectelor rulmenților cu bile și verificări experimentale, prin identificarea frecvențelor caracteristice de defect prin metoda anvelopei.

Capitolul 5 conține concluzii și contribuții originale.

2. METODE SPECIALE ÎN PRELUCRAREA SEMNALELOR DE VIBRAȚII

2.1. Discretizarea unui semnal de vibrații după copia foto a unei vibrograme

Prelucrarea numerică a unui semnal dă posibilitatea unei analize profunde a semnalului având în vedere posibilitățile oferite de metodele dezvoltate până în prezent în domeniul timp (funcții statistice, de filtrare, corelații, pondere, convoluții, identificare, etc.), [Boashash, Powers, Zoubir, (1995)], [Marciuk, (1983)], [Woyczynski, (2006)], în domeniul frecvență (analize Fourier, Hilbert), [Meddins, (2000)], [Taylor, (2003)], [Hayes, (1999)] și domeniul timp-frecvență (transformate de tip cepstrum și wavelets), [Teolis, (1998)], [Torrence, Compo, (1998)], [Walker, (2008)].

În practica experimentală a investigării vibrațiilor unor structuri de mașini, utilaje sau construcții industriale intervin situații, în care este necesar de a fi aplicate metode speciale de procesare a semnalelor înregistrate.

În acest capitol sunt prezentate și argumentate câteva dintre aceste metode speciale.

Se consideră scanată o imagine (format jpg) a unei vibrograme, care este importată în programul de prelucrare grafică CorelDRAW, (fig.2.1.). Pentru digitalizare se creează un pătrat având latura apropiată de lățimea liniei care definește vibrograma. Activând, din mouse, pătratul desenat, cu centrul în punctul P_i , acestuia i se afișează, pe *bara Property: Rectangular*, coordonatele X_i și Y_i , raportate la un sistem de axe OXY al imaginii. Având acces din tastatură, în fereastră, coordonatele x și y , se pot modifica valoric, cu schimbare automată a poziției pătratului la noile coordonate impuse.

Pentru digitalizare se poziționează din tastatură punctul reprezentativ P la coordonate impuse pe abscisă,

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X, \quad (2.1)$$

după care, din mouse, se poziționează pătratul, pe verticală după axa OY , până când centrul său e calat pe linia vibrogramei, valoarea Y_i fiind citită în fereastra barei (pe imagine $x := 33.852 \text{ mm}$, $y := 210.219 \text{ mm}$).

Transpunerea în coordonate fizice, cum ar fi o vibrogramă deplasare z , timp t , se face prin relațiile de transformare,

$$t_i = s_t (X_i - X_0), \quad z_i = s_d (Y_i - Y_0), \quad (2.2)$$

unde s_t și s_d sunt scările de timp și, respectiv, de deplasare, X_0 , Y_0 , fiind coordonatele punctului O_0 de început al digitalizării.

12 Metode speciale în prelucrarea semnalelor de vibrații - 2

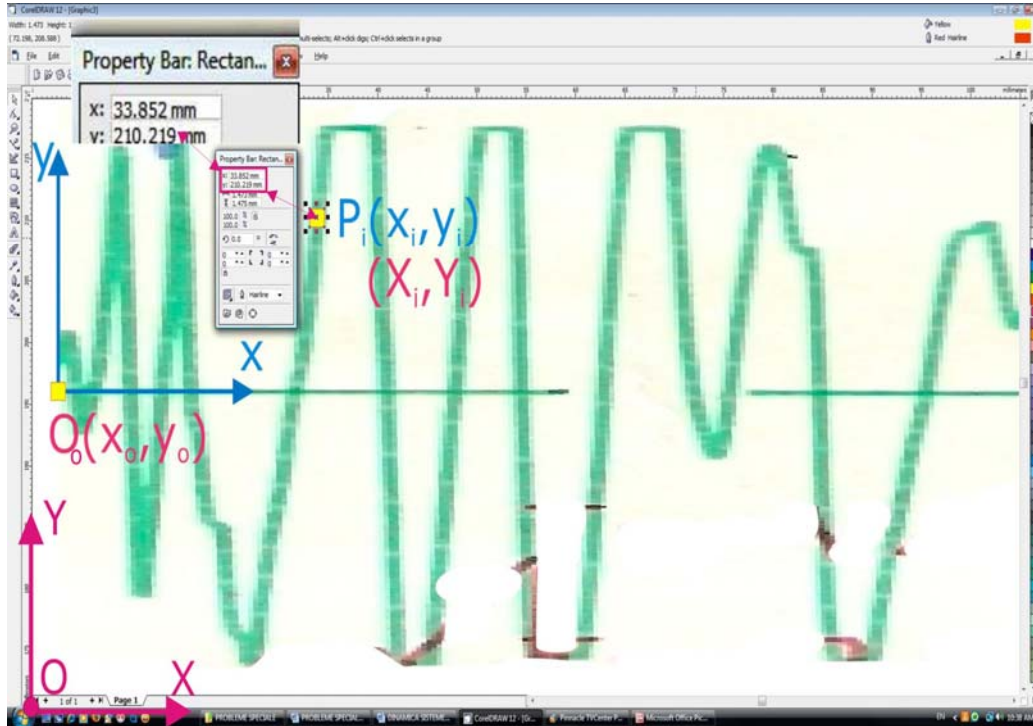


Fig.2.1. Ilustrarea digitalizării utilizând CorelDRAW software.

Tabel 2.1. Valorile digitalizate ale vibrogramei din figura 2.1.

i	x	y	i	x	y	i	x	y
0	50	421.25	20	150	429.5	40	250	398.7
1	55	424.44	21	155	449.5	41	255	387.6
2	60	427.638	22	160	468.943	42	260	382.4
3	65	431.04	23	165	501.66	43	265	380.84
4	70	432.64	24	170	483.8	44	270	379.24
5	75	437.2	25	175	469.3	45	275	370.96
6	80	437.3	26	180	439.64	46	280	353.1
7	85	437.192	27	185	415.9	47	285	345.89
8	90	435.59	28	190	387.0	48	290	341.45
9	95	434.0	29	195	372.64	49	295	337.32
10	100	435.0	30	200	380.8	50	300	338.92
11	105	435.6	31	205	389.5	51	305	340.5
12	110	437.2	32	210	422.2	52	310	353.22
13	115	438.79	33	215	439.9	53	315	371.95
14	120	442.6	34	220	479.96	54	320	381.82
15	125	436.7	35	225	476.0	55	325	390.38
16	130	425.898	36	230	474.6	56	330	403.53
17	135	416.86	37	235	450.4	57	335	418.1
18	140	419.87	38	240	424.6	58	340	430.13
19	145	422.759	39	245	409.6	59	345	439.9

Pe baza valorilor digitalizate, parțial prezentate în tabelul 2.1., s-a trasat diagrama din figura 2.2.

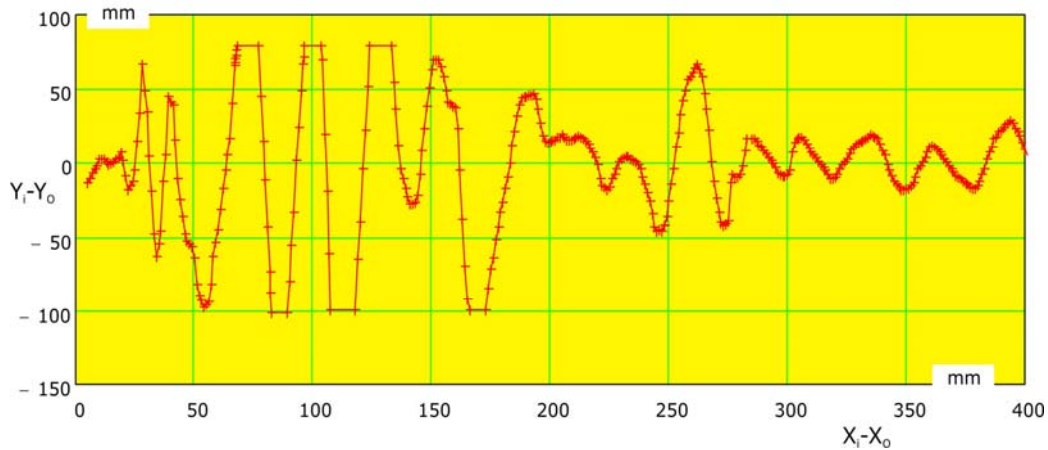


Fig.2.2. Diagrama digitalizată a vibrogramei din figura 2.1.

Această diagramă digitalizată s-a utilizat pentru recondiționarea semnalului (vezi, capitol 3), prin reconstituirea vârfurilor tăiate la suprasaturarea amplificatoarelor din lanțul de măsurare.

2.2. Mărirea densității liniilor spectrului unui semnal de vibrații

Analiza în domeniul frecvență a semnalelor de vibrații este deosebit de utilă în clarificarea unor probleme legate de dinamica mașinilor, utilajelor și ale altor structuri mecanice. În special, pot fi determinate prin această analiză componentele spectrale ale factorilor excitațori, care excită structura.

Transformata Fourier aplicată asupra unui semnal de vibrații $u(t)$ are cunoscuta formă:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.3)$$

unde $j = \sqrt{-1}$, iar f este variabila frecvență definită pe intervalul $-\infty \dots +\infty$, [Allen, Mills, (2004)], [Papoulis, (1962)].

Din punct de vedere practic, calculul transformatei poate fi realizat pe o durată limitată T a semnalului de vibrații, integrala (2.3) trecând sub forma [Bachman, Narici, Beckenstein, (2000)],

$$F(f) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.4)$$

Într-o formă discretă integrala (2.4) devine:

$$F(f_k) = \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{N-1} u(s\Delta t) e^{-j2\pi ks\Delta t\Delta f} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} u(s) e^{-j\frac{2\pi ks}{N}}, \quad (2.5)$$

cu $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$ și $s = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, unde N este numărul de eșantioane, Δt este incrementul de eșantionare temporală a semnalului $u(t)$, la timpul $t_s = s \times \Delta t$ și Δf este incrementul de frecvență.

Până la apariția în anul 1965 a algoritmului Cooley-Tukey [Cooley, Tukey, (1965)], calculul integralei Fourier (2.5) necesita un timp de calcul însemnat, chiar pentru $N = 1024$ eșantioane.

Algoritmul Cooley-Tukey și cele dezvoltate ulterior din acesta impun relația:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \quad (2.6)$$

ceea ce arată că pentru o secvență scurtă de timp T se obține un increment de frecvență larg, acesta fiind ecartul între două linii spectrale învecinate de frecvențe f_k și f_{k+1} :

$$f_{k+1} - f_k = \Delta f. \quad (2.7)$$

Cum în majoritatea cazurilor secvența T este scurtă, se poate ca în spectrul calculat anumite componente să fie ascunse, nedetectabile, și de aceea este necesară o mărire a densității acestor linii, utilizând același algoritm, implementat în majoritatea codurilor inginerești, cum ar fi codul MathCad, [Maxfield, (2006)], [Proakis, Manolakis, (1992)], unde calculul transformatei se face prin apelarea subrutinei $F := \text{fft}(u)$, (fast Fourier transform), algoritm ce impune o secvență de

$N = 2^{N_0} - 1$ eșantioane, N_0 fiind un număr întreg.

Pentru un număr N , oarecare, diferit de $2^{N_0} - 1$, s-a dezvoltat, în MathCad subrutina $F := \text{cfft}(u)$.

Deci, pentru o densitate mare a liniilor spectrale, cu increment de frecvență Δf mic, este necesar în cazul utilizării uneia dintre subrutinele rapide de a se preleva din semnalul $u(t)$ o secvență de timp T cât mai mare posibilă. Acest lucru nu este posibil întotdeauna, în multe cazuri fiind necesară o analiză pe un interval T scurt de timp, [Maia, Silva, (1997)]. Chiar și în cazul unei densități spectrale mari există posibilitatea unei subevaluări a unei componente de frecvență f_j , dacă raportul

$$r_j = \frac{f_j}{\Delta f}, \quad (2.8)$$

nu este un număr întreg.

Pentru mărirea densității liniilor spectrale se poate considera un semnal $u(t)$

ponderat cu $e^{\pm j2\pi\delta f t}$, $j = \sqrt{-1}$ și unde δf este incrementul de translație, [Cioara, Bereteu, Dragomir, Drăgănescu, (1993)],

$$u_\delta(t) = u(t)e^{\pm j2\pi\delta f t}, \quad (2.9)$$

asupra căruia se aplică transformata Fourier de forma (2.4):

$$F_\delta(f) = \frac{1}{T} \int_0^T u_\delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-j2\pi(f \mp \delta f)t} dt = F(f \mp \delta f), \quad (2.10)$$

ceea ce înseamnă că liniile spectrale sunt deplasate în stânga cu δf (pentru semnul + în semnalul ponderat (2.9)) sau deplasate în dreapta cu δf (pentru semnul - în semnalul ponderat (2.9)).

Astfel, pe lângă spectrul discret $F(f_k)$ format din $N/2$ linii spectrale complexe la frecvențele discrete f_k de increment de frecvență Δf , se obțin, prin transformările (2.10), încă două spectre:

$$F_{\delta_-}(f_{k_-}) = F(f_{k_-} - \delta f) \quad (2.11)$$

și

$$F_{\delta_+}(f_{k_+}) = F(f_{k_+} + \delta f) \quad (2.12)$$

cu același increment de frecvență Δf , dar cu liniile spectrale translatate în spectru, cu $-\delta f$, pentru prima transformare (2.11) și $+\delta f$, pentru a doua transformare (2.12). Dacă se alege acum:

$$\delta f = \frac{1}{3} \Delta f \quad (2.13)$$

se formează un spectru cumulativ F_c , după cum urmează:

$$\begin{aligned} F_{C_{k \times 3}} &= F_k \\ F_{C_{k \times 3 - 1}} &= F_{\delta_+}(f_{k_+}) \\ F_{C_{k \times 3 + 1}} &= F_{\delta_-}(f_{k_-}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1), \end{aligned} \quad (2.14)$$

spectrul având $3 \times N/2$ linii cu incrementul de translație δf .

Ca exemplu, se consideră o secvență formată din $N = 1650$ eșantioane a unei vibrograme compusă din două componente modale:

$$u(t_i) = u_i = A_1 e^{-\sigma_1 t_i} \sin(p_1 t_i) + A_2 e^{-\sigma_2 t_i} \sin(p_2 t_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (2.15)$$

unde: $A_1 = 1$, $A_2 = 0.9$, $\sigma_1 = 0.03 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_2 = 0.04 \text{ s}^{-1}$, $p_1 = 2\pi f_1 \text{ s}^{-1}$, ($f_1 = 3.05 \text{ Hz}$), $p_2 = 2\pi f_2 \text{ s}^{-1}$, ($f_2 = 3.08 \text{ Hz}$), cu un increment de eșantionare $\Delta t = 0.03 \text{ s}$.

Vibrograma semnalului trasată în figura 2.3., relevă cele două componente modale liber amortizate, de frecvențe foarte apropiate valoric, $f_1 = 3.05 \text{ Hz}$ și $f_2 = 3.08 \text{ Hz}$, care creează efectul de bătăi.

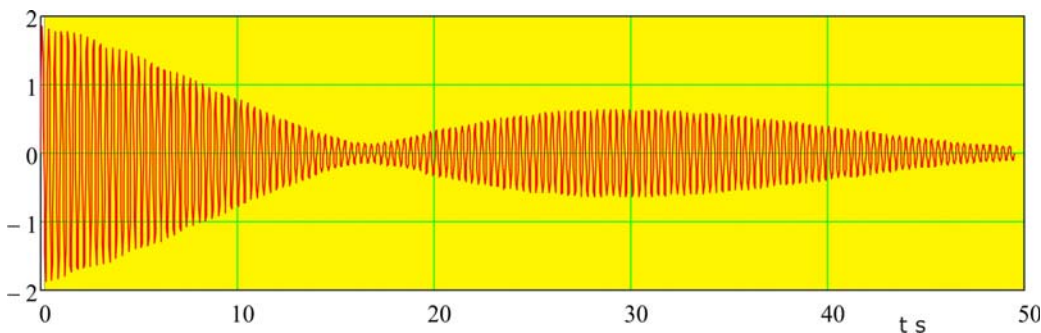


Fig.2.3. Vibrograma semnalului $u(t)$.

Aplicând transformata Fourier prin subrutina $F := \text{cfft}(u)$ se obține spectrul semnalului care este reprezentat în figura 2.4., între frecvențele 2.9 Hz și 3.1 Hz ,

domeniu în care se găsesc cele două frecvențe modale, $f_1 = 3.05 \text{ Hz}$ și $f_2 = 3.08 \text{ Hz}$, marcate pe spectrogramă. Dacă, întâmplător, linia verticală corespunzătoare ce trece prin primul vârf P_1 coincide cu linia frecvenței $f_1 = 3.05 \text{ Hz}$, al doilea vârf P_2 este decalat față de această linie; așa încât, determinarea după cel de-al doilea vârf P_2 , a frecvenței modale f_2 , va fi afectată de eroare.

Densitatea liniilor spectrale se poate mări introducând între liniile spectrale de increment de frecvență Δf , în plus, câte două linii spectrale aparținând spectrelor semnalelor:

$$\begin{aligned} u_{i+} &= u_i e^{j2\pi \delta f t_i} \\ u_{i-} &= u_i e^{-j2\pi \delta f t_i} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Asupra cărora se aplică transformata Fourier:

$$\begin{aligned} F_{\delta-} &:= \text{cfft}(u_-) \\ F_{\delta+} &:= \text{cfft}(u_+) \end{aligned} \quad (2.17)$$

cu ajutorul cărora, împreună cu spectrul inițial F , se formează, după relațiile (2.14) spectrul cumulativ F_c al cărui increment de translație este δf , de trei ori mai mic decât incrementul spectrului F . Spectrul cumulativ reprezentat în figura 2.5., prin linia continuă de culoare roșie, cu buline, ce marchează eşantioanele din spectru, localizează mai exact, poziția frecvenței celui de-al doilea mod.

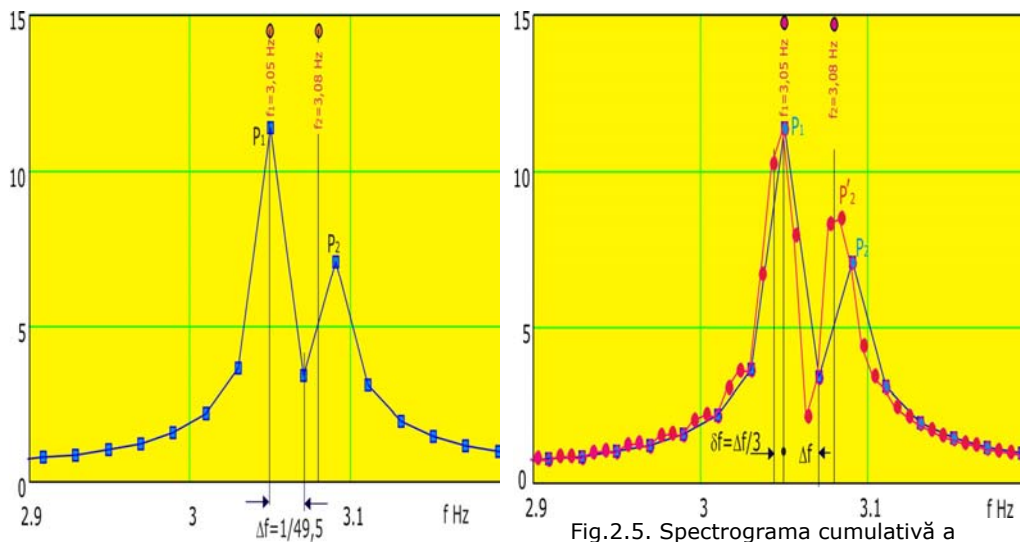


Fig.2.4. Spectrograma semnalului $u(t)$.

Fig.2.5. Spectrograma cumulativă a semnalului $u(t)$.

Densitatea liniilor spectrale poate fi mărită, în continuare, dacă se consideră incrementul de translație:

$$\delta f = \frac{1}{5} \Delta f \quad (2.18)$$

și se formează semnalele:

$$\begin{aligned} u_{+1i} &= u_i e^{j2\pi\delta f t_i}, & u_{+2i} &= u_i e^{j2\pi(2\delta f)t_i}, \\ u_{-1i} &= u_i e^{j2\pi(-\delta f)t_i}, & u_{-2i} &= u_i e^{j2\pi(-2\delta f)t_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.19)$$

asupra cărora se aplică transformata Fourier:

$$\begin{aligned} F_{+1} &= \text{cfft}(u_{+1}), & F_{+2} &= \text{cfft}(u_{+2}), \\ F_{-1} &= \text{cfft}(u_{-1}), & F_{-2} &= \text{cfft}(u_{-2}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

iar spectrul cumulativ se formează prin intermediul relațiilor,

$$\begin{aligned} F_{C_{k \times 5}} &= F_k \\ F_{C_{k \times 5-1}} &= F_{+1k} \\ F_{C_{k \times 5-2}} &= F_{+2k} \\ F_{C_{k \times 5+1}} &= F_{-1k} \\ F_{C_{k \times 5+2}} &= F_{-2k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N / 2 - 1), \end{aligned} \quad (2.21)$$

și așa mai departe, pentru spectrele cumulative cu incrementul de translație:

$$\delta f = \frac{1}{R} \Delta f, \quad (2.22)$$

unde R este raportul dintre deplasarea în spectru și incrementul spectral.

Se formează șirul de semnale:

$$\begin{aligned} u_{+1i} &= u_i e^{j2\pi\delta f t_i}, & u_{+2i} &= u_i e^{j2\pi(2\delta f)t_i}, & \dots & u_{+ri} = u_i e^{j2\pi(r\delta f)t_i}, \\ u_{-1i} &= u_i e^{j2\pi(-\delta f)t_i}, & u_{-2i} &= u_i e^{j2\pi(-2\delta f)t_i}, & \dots & u_{-ri} = u_i e^{j2\pi(-r\delta f)t_i}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

unde numărul de perechi de semnale este:

$$r = \text{int}\left(\frac{R}{2}\right), \quad (2.24)$$

cu int , numărul întreg al diviziunii.

Se calculează spectrele Fourier:

$$\begin{aligned} F_{+1} &= \text{cfft}(u_{+1}), & F_{+2} &= \text{cfft}(u_{+2}), & \dots & F_{+r} = \text{cfft}(u_{+r}) \\ F_{-1} &= \text{cfft}(u_{-1}), & F_{-2} &= \text{cfft}(u_{-2}), & \dots & F_{-r} = \text{cfft}(u_{-r}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

și, în continuare, se formează spectrul cumulativ:

$$\begin{aligned} F_{C_{k \times r}} &= F_k \\ F_{C_{k \times r-1}} &= F_{+1k} \\ F_{C_{k \times r-2}} &= F_{+2k} \\ &\downarrow \\ F_{C_{k \times r-r}} &= F_{+rk} \\ F_{C_{k \times r+1}} &= F_{-1k} \\ F_{C_{k \times r+2}} &= F_{-2k} \\ &\downarrow \\ F_{C_{k \times r+r}} &= F_{-rk}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N / 2 - 1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3. Particularități privind determinarea periodicității componentelor unui semnal de vibrații

În multe cazuri de analiză a semnalelor de vibrații este necesar a fi determinate anumite componente care sunt corelate cu efecte dinamice produse de perturbații specifice funcționării unui agregat mecanic, componente ce sunt ascuse în semnalul înregistrat. Astfel, considerând prin simulare, un semnal complex $u(t)$, (fig.2.6.), însumând două componente $u_1(t)$ și $u_2(t)$ rezultate în urma excitației periodice a unui mod natural de vibrații a unei structuri, de frecvență proprie f_p și coeficient de amortizare modală σ .

Excitarea provine din două surse diferite cu perioadele T_1 și T_2 . După fiecare din cele două perioade, sursele produc excitații ce provoacă vibrații libere amortizate, de amplitudini inițiale A_{1i} și A_{2i} , ale căror semnale au formele:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_{1i} e^{-\sigma(t-T_1 \times i)} \sin(2\pi f_p(t+T_1 \times i)), & T_1 \times i \leq t \leq T_1 \times (i+1), \\ u_2(t) &= A_{2i} e^{-\sigma(t-T_2 \times i)} \sin(2\pi f_p(t+T_2 \times i)), & T_2 \times i \leq t \leq T_2 \times (i+1). \end{aligned} \quad (2.27)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots)$

Amplitudinile inițiale A_{1i} și A_{2i} sunt dependente de pozițiile celor două surse de excitație față de poziția senzorului de măsurare a vibrațiilor. În cazul mecanismelor, punctul de aplicare al unei forțe perturbatoare fiind amplitudinile inițiale A_{1i} și A_{2i} , care sunt diferite valoric, (fig.2.6.).

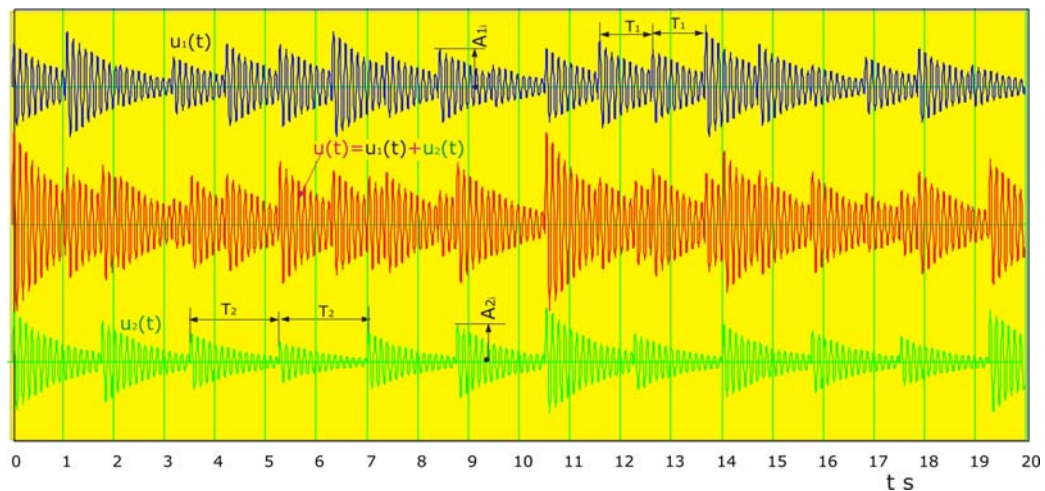


Fig.2.6. Vibrograma unui semnal $u(t)$ compus din semnalele, $u_1(t)$ și $u_2(t)$.
excitate din două surse periodice cu perioadele T_1 și T_2 .

2.3. – Particularități privind determinarea periodicității componentelor semnalului 19

Dacă se aplică, pentru o analiză în frecvență, transformata Fourier asupra semnalului $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, considerat cunoscut prin înregistrare, se obține spectrul din figura 2.7., în care se distinge clar numai vârful corespunzător frecvenței proprii $f_p = 8.57 \text{ Hz}$. Componentele corespunzătoare celor două presupuse excitații, localizate în domeniul frecvențelor joase de la 0 Hz la 3 Hz , sunt de niveluri joase, cu incertitudine în interpretare.

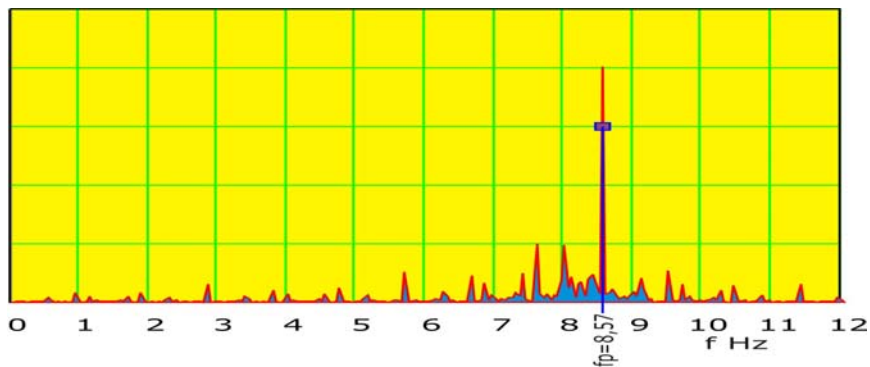


Fig.2.7. Spectrograma semnalului $u(t)$.

Pentru a elimina aceste inconveniente este necesar de a fi eliminată componenta de frecvență proprie. Una dintre metode este metoda anvelopei semnalului (metoda înfășurătoarei semnalului).

2.3.1. Metoda transformatei Hilbert

Se pleacă de la faptul că unui semnal de forma:

$$u(t) = a(t) \sin(2\pi f(t)t), \quad (2.28)$$

de frecvență $f(t)$ și amplitudine $a(t)$, variabile în timp, i se poate forma un semnal conjugat

$$u_c(t) = a(t) \sin\left[2\pi f(t)t + \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.29)$$

atunci, se poate determina un semnal de amplitudine:

$$a(t) = \sqrt{u(t)^2 + u_c(t)^2}, \quad (2.30)$$

care conține informația numai asupra amplitudinii instantanee, $a(t)$, numită anvelopa semnalului $a(t) \sin(2\pi f(t)t)$.

Dacă asupra unei integrale de convoluție între două semnale $u(t)$ și $v(t)$, [Bendat, (1985)], [Kecs, (1978)], [Debnath, Mikusinski, (2005)]:

$$u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau, \quad (2.31)$$

se aplică transformata Fourier, rezultă o proprietate importantă:

$$F[u(t)*v(t)] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} u(t)v(t-\tau)d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = F_U(f) \times F_V(f), \quad (2.32)$$

și anume, transformata Fourier a integralei de convoluție este chiar produsul dintre transformatele Fourier $F_U(f)$ și $F_V(f)$ ale celor două semnale

Hilbert a exploatat această proprietate particularizând funcția $F_V(f)$ la forma, [Ceangă, Munteanu, Bratcu, Culea, (2001)]:

$$F_V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi ft}}{\pi t} dt = (-j \operatorname{sgn} f), \quad (2.33)$$

ceea ce duce, prin transformata Fourier inversă, la:

$$F_V^{-1}[-j \operatorname{sgn} f] = \begin{cases} -j, & \text{pentru } f > 0 \\ j, & \text{pentru } f < 0 \end{cases} = \frac{1}{\pi t} = v(t), \quad (2.34)$$

însemnând că semnalul conjugat căutat are forma integralei de convoluție,

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau = H[u(t)], \quad (2.35)$$

numită transformata Hilbert.

Având acum cunoscute cele două componente $u(t)$ și $u_c(t) = H[u(t)]$ se obține,

conform relației (2.30), legea de variație a anvelopei.

Calculul numeric al integralei de convoluție în MathCad, se face apelând la subrutina:

$$uc := \operatorname{convol}(u, v) \quad (2.36)$$

sau direct apelând la subrutina

$$uc := \operatorname{hilbert}(u). \quad (2.37)$$

În figura 2.8., este reprezentată vibrograma semnalului $u(t)$, precum și semnalul anvelopei $a(t)$, care înfășoară cu fidelitate conturul superior al semnalului $u(t)$.

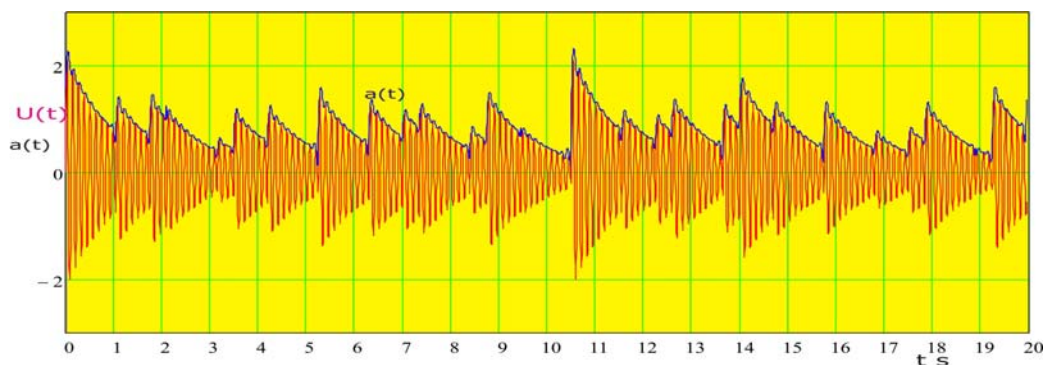


Fig.2.8. Anvelopa $a(t)$ a semnalului $u(t)$.

Aplicând transformata Fourier asupra semnalului anvelopei din care se elimină, valoarea medie am :

2.3. – Particularități privind determinarea periodicității componentelor semnalului 21

$$am := \text{mean}(a) \quad (2.38)$$

$$Fa = \text{cfft}(a - am) \quad (2.39)$$

a cărei spectrogramă este dată în figura 2.9.

Pentru identificarea vârfurilor spectrale corespunzătoare celor două perturbații, având frecvențele, $f_1 = 0.952 \text{ Hz}$ și $f_2 = 0.571 \text{ Hz}$, s-au trasat, pe spectrogramă câte două șiruri de linii corespunzătoare periodicității celor două perturbații, linii pe care sunt inscripționate ordinele armonicelor: $\times 1, \times 2, \times 3, \dots$.



Fig.2.9. Spectrograma anvelopei semnalului $u(t)$, cu ilustrarea liniilor de periodicitate corespunzătoare celor două perturbații având frecvențele $f_1 = 0.952 \text{ Hz}$ și $f_2 = 0.571 \text{ Hz}$.

Se poate observa, din spectrogramă, o calare perfectă a tuturor liniilor de periodicitate, 17, pentru perturbația de frecvență f_1 și 10, pentru perturbația de frecvență f_2 .

De obicei, valorile acestor frecvențe sunt cunoscute pe baza parametrilor cinematici ai utilajului monitorizat, evidențierea lor în spectru fiind esențială pentru identificarea surselor perturbatoare și urmărirea evoluției lor în timp, prin variația amplitudinilor vârfurilor spectrale, caracteristice unor defecțiuni specifice.

Apariția în domeniul de frecvență a unor alte vârfuri spectrale necorelate cu cele ale perturbațiilor se datorează faptului că amplitudinile A_{1i} și A_{2i} , care sunt corelate cu intensitățile perturbațiilor, sunt dependente de pozițiile celor două surse de excitație față de poziția senzorului de măsurare a vibrațiilor.

2.3.2. Metoda transformatei cepstrum

Transformata cepstrum, definită pentru prima dată în anul 1963, [Bogert, Healy, Tukey, (1963)], are forma transformatei inversă Fourier a logaritmului în bază naturală a spectrului $F(f)$ al unui semnal $u(t)$, [Randall, (1977)]:

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(f)| e^{2\pi j f \tau} df \quad (2.40)$$

Spectrul complex Fourier:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (2.41)$$

al semnalului:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (2.42)$$

sumă a două componente:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_{1i} e^{-\sigma(t-T_1 \times i)} \sin(2\pi f_p(t + T_1 \times i)), \quad T_1 \times i \leq t \leq T_1 \times (i+1), \\ u_2(t) &= A_{2i} e^{-\sigma(t-T_2 \times i)} \sin(2\pi f_p(t + T_2 \times i)), \quad T_2 \times i \leq t \leq T_2 \times (i+1). \end{aligned} \quad (2.43)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots)$

Considerând, pentru început, o singură componentă:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_{1i} e^{-\sigma(t-T_1 \times i)} \sin(2\pi f_p(t + T_1 \times i)), \\ T_1 \times i &\leq t \leq T_1 \times (i+1), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

asupra căruia se aplică transformata finită Fourier:

$$F_1(f) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} u_1(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (2.45)$$

rezultând:

$$\begin{aligned} F_1(f) &= \frac{1}{2jT_s} \frac{1}{-\sigma + 2\pi j(f_p - f)} \sum_{i_1=0}^{n_{p1}} \left\{ e^{[-\sigma + 2\pi j(f_p - f)]i_1 \times T_1} - e^{[-\sigma + 2\pi j(f_p - f)](i_1 - 1) \times T_1} \right\} + \\ &\frac{1}{2jT_s} \frac{1}{\sigma + 2\pi j(f_p + f)} \sum_{i_1=0}^{n_{p1}} \left\{ e^{-[\sigma + 2\pi j(f_p + f)]i_1 \times T_1} - e^{-[\sigma + 2\pi j(f_p + f)](i_1 - 1) \times T_1} \right\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

unde n_{p1} este numărul de eşantioane pentru primul semnal.

În același mod, pentru al doilea semnal se obține:

$$\begin{aligned} F_2(f) &= \frac{1}{2jT_s} \frac{1}{-\sigma + 2\pi j(f_p - f)} \sum_{i_2=0}^{n_{p2}} \left\{ e^{[-\sigma + 2\pi j(f_p - f)]i_2 \times T_2} - e^{[-\sigma + 2\pi j(f_p - f)](i_2 - 1) \times T_2} \right\} + \\ &\frac{1}{2jT_s} \frac{1}{\sigma + 2\pi j(f_p + f)} \sum_{i_2=0}^{n_{p2}} \left\{ e^{-[\sigma + 2\pi j(f_p + f)]i_2 \times T_2} - e^{-[\sigma + 2\pi j(f_p + f)](i_2 - 1) \times T_2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

unde n_{p2} este numărul de eşantioane pentru al doilea semnal.

Ambele spectre prezintă câte un maxim la frecvența egală cu $f = f_p = 8.33 \text{ Hz}$, corespunzătoare frecvenței proprii a modului natural excitat periodic de cele două perturbații având frecvențele, $f_1 = 0.952 \text{ Hz}$ și $f_2 = 0.571 \text{ Hz}$.

În spectrul cumulat:

$$|F(f)| = |F_1(f) + F_2(f)| \quad (2.48)$$

2.3. – Particularități privind determinarea periodicității componentelor semnalului 23

reprezentat grafic în figura 2.10., perturbațiile creează lobi laterali vârfului, având vârfurile calate după șirul de frecvențe $f_p \pm k \times f_1$ și $f_p \pm k \times f_2$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

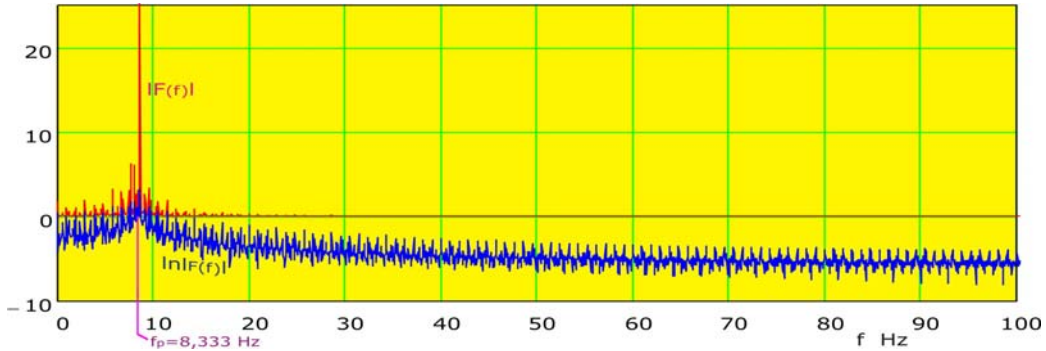


Fig.2.10. Ilustrare spectrelor $|F(f)|$ și $\ln|F(f)|$.

După cum se observă, din spectru, vârfurile lobilor laterali sunt de magnitudini mult mai mici decât vârful central de frecvență f_p . Din acest motiv, pentru scoaterea în evidență a acestor vârfuri se aplică operația de logaritmare, $\ln|F(f)|$, care, așa cum se vede în figura 2.10., duce la uniformizarea magnitudinilor vârfurilor spectrale.

Următoarea operație este transformata Fourier inversă, prezentată în relația (2.40), numită, în acest caz *cepstrum* $C(\tau)$, τ , având semnificația de timp. Inversa se calculează apelând la subrutina MathCad $c := icfft(F)$. Funcția cepstrum $C(\tau)$, transpusă grafic în figura 2.11., împreună cu legea semnalului $u(t)$, constă dintr-un tren de impulsuri având periodicități cu perioade egale cu T_1 și T_2 , corespunzătoare celor două perturbații, care excită periodic modul natural de frecvență f_p . Fiind o transformare pur matematică, autorii au înlocuit variabila timp t cu variabila τ , numită *quefreny*. Liniile spectrale se numesc *rahmonics*.

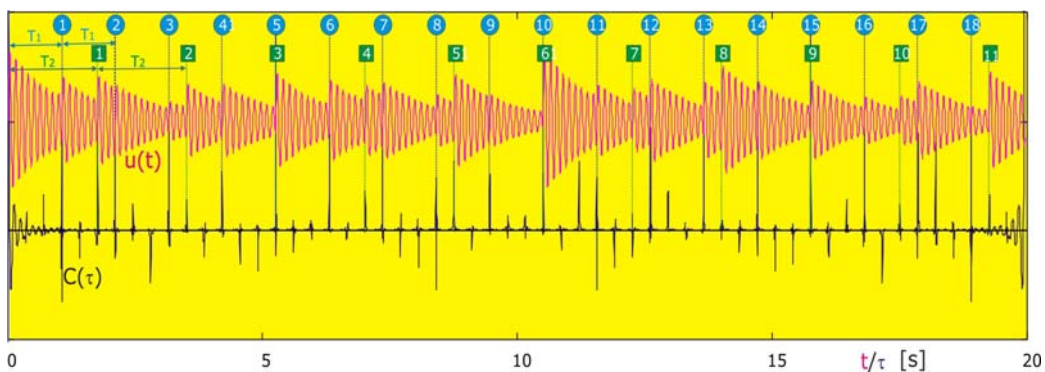


Fig.2.11. Reprezentarea funcției cepstrum $C(\tau)$ a semnalului $u(t)$.

Trenul de impulsuri al funcției cepstrum poate fi îmbunătățit dacă se elimină componenta lobului central din spectrul logaritmat. Această componentă se obține printr-o filtrare prin mediere, dată de relația recursivă:

$$F_m(f_i) = \frac{1}{n_b} \sum_{k=0}^{n_b} \ln \left| F \left(f_{i+k-\frac{n_b}{2}} \right) \right|, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.48)$$

reprezentată grafic în figura 2.12., unde n_b este numărul de eșantioane totale din spectru.

Eliminarea acestei componente din spectrul logaritmat se face prin relația:

$$F_f(f_i) = \ln |F(f_i)| - F_m(f_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.49)$$

asupra spectrului $F_f(f)$ rezultat aplicându-se transformata cepstrum prin transformata inversă Fourier:

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_f(f) e^{2\pi j f \tau} df, \quad (2.50)$$

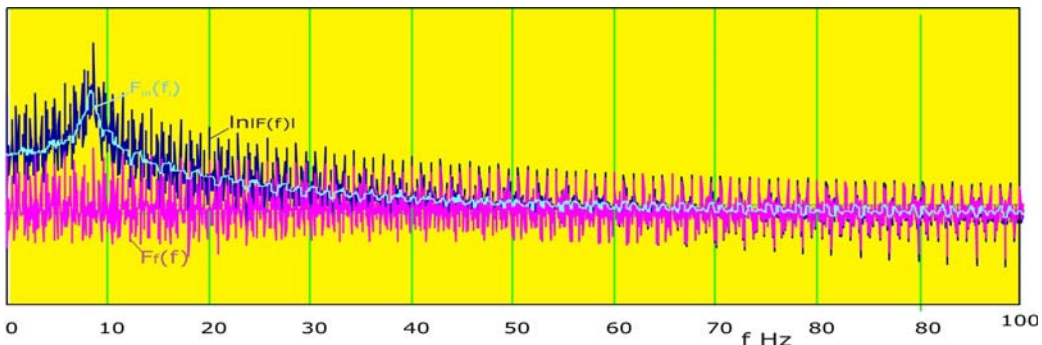


Fig.2.12. Ilustrarea extragerii spectrului filtrat $F_f(f)$.

Reprezentarea, în figura 2.13., a funcției cepstrum $C(\tau)$ scoate în evidență mai clar trenul de impulsuri cu cele două periodicități, cu perioadele T_1 și T_2 ale celor două perturbații.

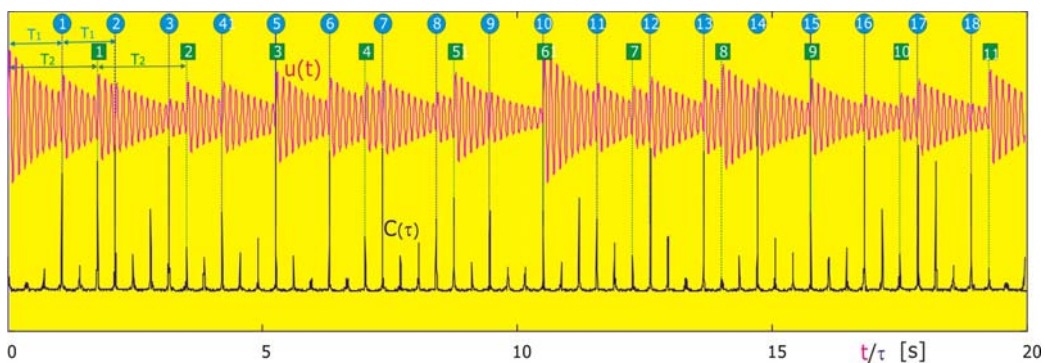


Fig.2.13. Ilustrarea funcției cepstrum $C(\tau)$.

Aceasta se poate observa evident din compararea funcției cepstrum $C(\tau)$ din figura 2.11. și figura 2.13. În figura 2.11., funcția cepstrum calculată prin metoda clasică, unde în domeniu de început al primelor impulsuri, $0 \leq \tau \leq 1s$, semnalul este afectat de componenta vibrațiilor libere amortizate ale modului natural excitat. Această componentă este eliminată în figura 2.13., unde funcția cepstrum a fost calculată după metoda dezvoltată în cadrul acestei lucrări, relațiile (2.48)–(2.50).

2.4. Determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret

În multe cazuri practice de analiză a vibrațiilor unei mașini, unui utilaj sau a unei construcții industriale este necesar de a fi determinate componentele periodice existente în semnalul înregistrat, componente ce sunt corelate cu diverse surse de excitații. Pentru o analiză de calitate, nivelurile vibrațiilor trebuie determinate, în multe cazuri, cu mare precizie în vederea unei interpretări de calitate, cerută de situația analizată.

2.4.1. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat împreună cu semnalul de marcare a perioadei

Deseori există posibilitatea înregistrării, în paralel cu semnalul de vibrații $u(t)$, a unui semnal marcător $u_m(t)$, dat de un tahogenerator sau de un senzor S_m (fig. 2.14.a.), semnal format dintr-un tren de impulsuri de perioadă T , corespunzătoare armonicei fundamentale a semnalului $u(t)$.

În figura 2.14., se prezintă un asemenea caz. Un agregat de mare putere, cum ar fi un turboagregat T_{ag} , antrenat prin intermediul unui cuplaj C_u , de un motor M_o , necesită monitorizarea, în permanență, a stării sale tehnice, aceasta corelându-se cu anumite componente ale spectrului semnalului $u(t)$, măsurat cu un accelerometru A_c (sau un grup de accelerometre) plasat pe carcasa agregatului în diverse puncte.

Variația în timp a unor componente poate să indice, preventiv, apariția unei defecțiuni majore în funcționarea agregatului. Astfel, se pot determina anumite defecțiuni, care se corelează cu anumite caracteristici ale semnalului de vibrații măsurat cu un accelerometru.

Semnalul marcător $u_m(t)$ se înregistrează prin intermediul unui senzor S_m , de tip magnetic sau optic, care este plasat în apropierea arborelui agregatului, pe care se află plasat un marcher M_k . La fiecare trecere a marcherului prin dreptul senzorului S_m , acesta generează un semnal impuls $u_m(t)$, două impulsuri succesive marcând perioada T de rotație a arborelui agregatului.

Ambele semnale sunt digitalizate prin intermediul unui convertor analog digital ADC formându-se două fișiere a câte n eșantioane $u(i)$ și $u_m(i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, cu rata de eșantionare Δt .

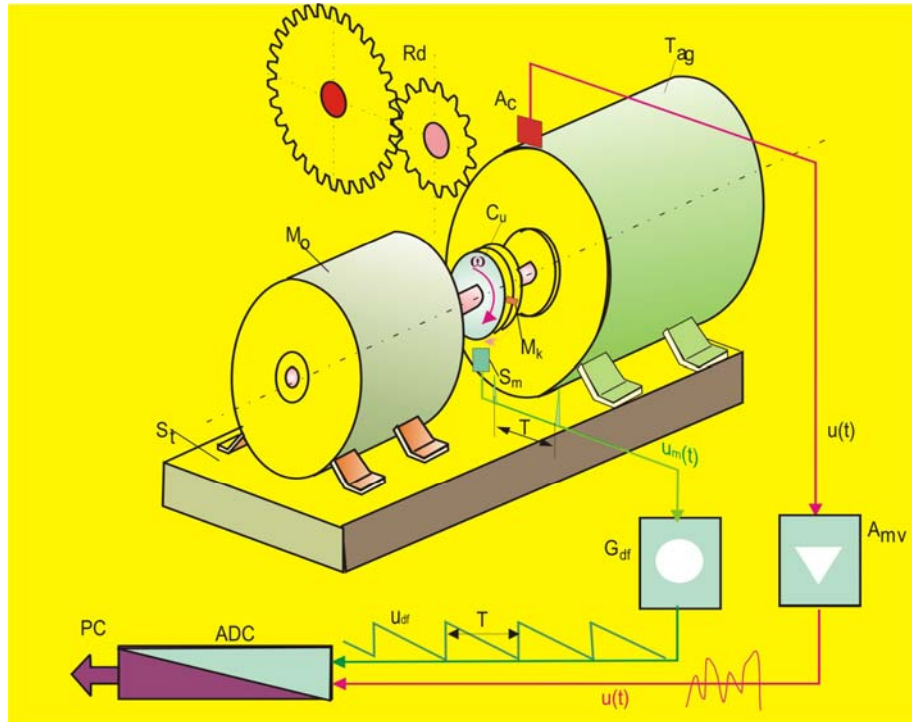


Fig.2.14.a. Schema de monitorizare prin vibrații a unui agregat.

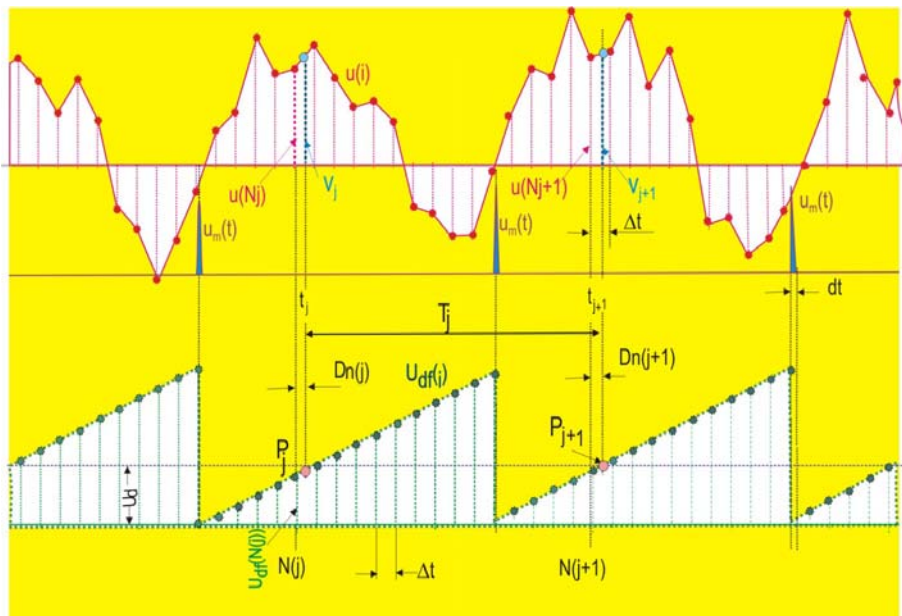


Fig.2.14.b. Schema de prelucrare a semnalelor $u_{df}(t)$ și $u(t)$.

Deoarece impulsurile periodice $u_m(t)$ (fig.2.14.b.) ale semnalului marcator sunt de lățime dt , foarte îngustă, necesită o rată de eșantionare $\Delta t \ll dt$, pentru a nu pierde impulsuri în timpul înregistrării și a evalua incorect perioada T .

O rată de eșantionare $\Delta t \ll dt$, este dificil de realizat din punct de vedere tehnic, mărind nejustificat numărul n al eșantioanelor înregistrate sau solicitând un convertor ADC cu rata de eșantionare mare.

Problema poate fi soluționată cu o rată de eșantionare $\Delta t > dt$, prin prelucrarea, în prealabil, a semnalului sensorului, $u_m(t)$, semnalul $u_m(t)$ fiind semnalul de declanșare al unui generator de semnal în dintele de fereastră G_{df} , obținându-se la ieșirea lui, semnalul $u_{df}(t)$.

Între două impulsuri succesive ce marchează perioada T , semnalul $u_{df}(t)$ are o creștere liniară, care permite o interpolare liniară la determinarea cu exactitate a perioadei T .

Algoritmul de determinare al perioadei T este următorul:

- se duce o linie paralelă cu axa timpului la cota u_d , arbitrară, care taie diagrama semnalului $u_{df}(t)$ în două puncte succesive P_j și P_{j+1} , corespunzătoare intervalului de timp $t_j \rightarrow t_{j+1}$, care delimitează perioada

$$T_j = t_{j+1} - t_j, \quad (2.51)$$

unde T_j este perioada de rotație care poate să varieze în timpul funcționării.

Timpi t_j și t_{j+1} corespunzători capetelor de perioadă sunt dați de formele discrete:

$$\begin{aligned} t_j &= [N(j) + Dn_j] \Delta t, \\ t_{j+1} &= [N(j+1) + Dn_{j+1}] \Delta t, \end{aligned} \quad (2.52)$$

unde $N(j)$ și $N(j+1)$ sunt indicii corespunzători eșantioanelor semnalului din imediată vecinătate, din stânga punctelor P_j și P_{j+1} . Dn_j și Dn_{j+1} , sunt numere subunitare, $0 < Dn_j < 1$, care pot fi calculate din condiții geometrice:

$$Dn_j = \frac{u_d - u_{df}(N(j))}{u_{df}(N(j+1)) - u_{df}(N(j))}. \quad (2.53)$$

Având cunoscute numerele subunitare Dn_j se pot calcula acum componentele periodice, de perioadă T_j ale semnalului folosindu-se dezvoltarea Fourier:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_i(\omega_j) &= \frac{2}{T_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t) \cos\left(i \times \frac{2\pi}{T_j} t\right) dt, \\ \operatorname{Im}_i(\omega_j) &= \frac{2}{T_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t) \sin\left(i \times \frac{2\pi}{T_j} t\right) dt, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$Re_i(\omega_j)$ și $Im_i(\omega_j)$, fiind componentele reale și respectiv, componentele imaginare ale armonicei i , [Homentcovschi, (1986)], de pulsație:

$$i \times \omega_j = i \times \frac{2\pi}{T_j}, \quad (2.55)$$

pentru perioada j a semnalului $u(t)$, pe intervalul $t_j \rightarrow t_{j+1}$.

Într-o formă discretă acestea devin:

$$Re_i(\omega_j) = \frac{2}{DN_j} \left[\frac{u_{N_{j+1}} \cos\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(1 - Dn_j)\right) + v_j}{2} (1 - Dn_j) + \frac{u_{N_{j+1}} \cos\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(Dn_{j+1})\right) + v_{j+1}}{2} Dn_{j+1} \right] + \frac{2}{DN_j} \sum_{k=1}^{DN_j} u_{N_{j+k}} \cos\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(k + Dn_j)\right), \quad (2.56)$$

$$Im_i(\omega_j) = \frac{2}{DN_j} \left[\frac{u_{N_{j+1}} \sin\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(1 - Dn_j)\right) + v_j}{2} (1 - Dn_j) + \frac{u_{N_{j+1}} \sin\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(Dn_{j+1})\right) + v_{j+1}}{2} Dn_{j+1} \right] + \frac{2}{DN_j} \sum_{k=1}^{DN_j} u_{N_{j+k}} \sin\left(i \times \frac{2\pi}{DN_j}(k + Dn_j)\right), \quad (2.57)$$

în care, eșantioanele v_j și v_{j+1} corespunzătoare începutului și sfârșitului perioadei j , la timpii t_j și t_{j+1} , se determină prin interpolare liniară:

$$v_j = u_{N(j)} + Dn_j [u_{N(j+1)} - u_{N(j)}], \quad (2.58)$$

iar numărul de eșantioane corespunzător perioadei j este:

$$DN_j = N(j+1) + Dn_{j+1} - N(j) - Dn_j \quad (2.59)$$

În acest mod se pot determina componentele armonice ale semnalului pe fiecare perioadă T_j . Metoda dezvoltată este foarte utilă mai ales în cazul proceselor tranzitorii, cum ar fi înregistrarea vibrațiilor la pornirea și oprirea unui agregat, analiza armonică la fiecare perioadă impunându-se pentru determinarea regimurilor critice.

2.4.2. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat în lipsa semnalului marcat al perioadei

În multe cazuri practice ale analizei vibrațiilor și zgomotelor este necesară detectarea componentelor armonice fără a dispune de condiții tehnice pentru obținerea unui semnal marcat de perioadă, [Cioara, Bereteu, Dragomir, (1993)]. În acest sens s-a elaborat un algoritm pentru detectarea componentelor armonice utilizând spectrul transformatei rapide Fourier prin componentele sale $Re(\omega)$, reală și $Im(\omega)$, imaginară, procesate pentru o durată finită de timp de lungime T a unui semnal $u(t)$, care au formele:

$$\begin{aligned} Re(\omega) &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega t) dt \\ Im(\omega) &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (2.60)$$

unde pulsația, $\omega = 2\pi f$, este variabilă în domeniul frecvență.

Aplicând cele două integrale unui semnal armonic, de pulsație $\omega_h = 2\pi f_h$,

$$u(t) = X \cos(\omega_h t) + Y \sin(\omega_h t), \quad (2.61)$$

se obțin expresiile analitice

$$\begin{aligned} Re(\omega) &= \frac{X}{T} \left[\frac{\sin((\omega_h + \omega)T)}{\omega_h + \omega} + \frac{\sin((\omega_h - \omega)T)}{\omega_h - \omega} \right] + \\ & \frac{Y}{T} \left[\frac{\cos((\omega_h + \omega)T)}{\omega_h + \omega} + \frac{\cos((\omega_h - \omega)T)}{\omega_h - \omega} - \frac{1}{\omega_h + \omega} - \frac{1}{\omega_h - \omega} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} Im(\omega) &= -\frac{X}{T} \left[\frac{\cos((\omega_h + \omega)T)}{\omega_h + \omega} - \frac{\cos((\omega_h - \omega)T)}{\omega_h - \omega} - \frac{1}{\omega_h + \omega} + \frac{1}{\omega_h - \omega} \right] + \\ & \frac{Y}{T} \left[-\frac{\sin((\omega_h + \omega)T)}{\omega_h + \omega} + \frac{\sin((\omega_h - \omega)T)}{\omega_h - \omega} \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Semnalul $u(t)$ înregistrat pe o secvență finită de timp T :

2.4. - Determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret 31

Deci, problema determinării componentei armonice de pulsație se reduce la identificarea parametrului k , având cunoscute din spectrul Fourier componentele spectrale în jurul unui vârf.

Pentru pulsațiile ω_j :

$$\omega_{j=p+s} = (p+s) \Delta\omega, \quad \dots -3, -2, -1 < s < 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.71)$$

situate în vecinătatea pulsației ω_h și distanțate cu indicele s , vor rezulta din relațiile (2.62) și (2.63), ținând seama că p și s sunt numere întregi:

$$Re(s) = \frac{p+k}{\pi((p+k)^2 - (p+s)^2)} (X \sin 2\pi k - Y(\cos 2\pi k - 1)), \quad (2.72)$$

și

$$Im(s) = \frac{p+s}{\pi((p+k)^2 - (p+s)^2)} [X(\cos 2\pi k - 1) + Y \sin 2\pi k] \quad (2.73)$$

Amplitudinea componentei spectrale a liniei s este:

$$U(s) = \sqrt{Re^2(s) + Im^2(s)} = U_h \left| \frac{\sin(\pi k)}{\pi(k-s)} \right|, \quad (2.74)$$

unde

$$U_h = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2.75)$$

În figurile 2.16.a., 2.16.b. și 2.16.c., s-a reprezentat grafic raportul amplitudinilor $U(s)/U_h$.

Astfel, pentru $k=0$, (fig.2.16.a.), raportul $U(s=0)/U_h = 1$, iar $U(s \neq 0)/U_h = 0$ existând o singură linie spectrală în spectru.

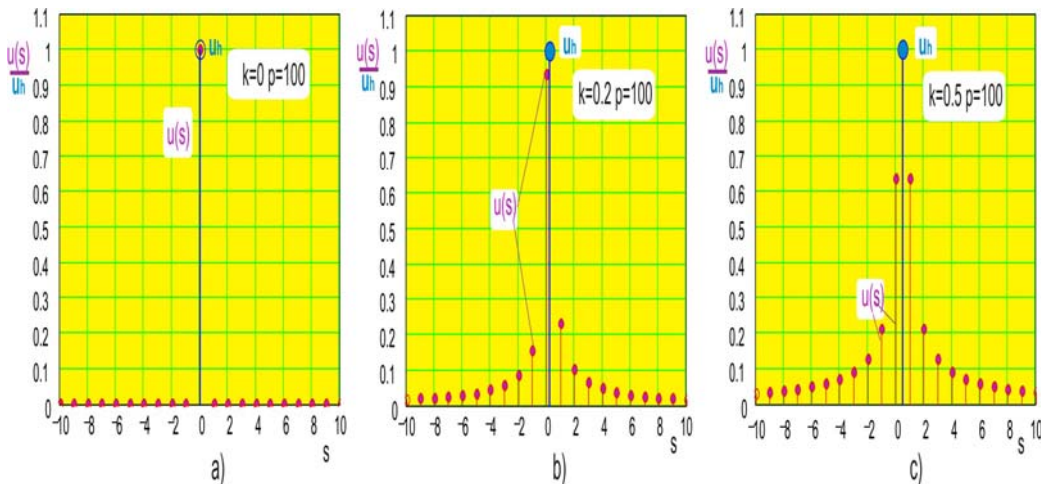


Fig.2.16. Ilustrarea liniilor spectrale ale unei analize Fourier în funcție de fracțiunea k .

Pentru $k \neq 0$, (fig.2.16.b. și fig.2.16.c.) se formează un spectru de linii distribuite lateral liniei spectrale U_h corespunzătoare armonicei căutate, ascunsă în spectrul de linii, [Căplescu, Hule, Cioara, (2007.a)].

Dacă armonica U_h este cuantifică după valorile maxime din spectru, atunci aceasta va fi subevaluată cu eroarea procentuală:

$$\varepsilon_k = 1 - \max \left| \frac{U(s)}{U_h} \right| = 1 - \max \left| \frac{\sin(\pi k)}{\pi(k-s)} \right|. \quad (2.76)$$

care poate atinge, conform figurii 2.17., o valoare maximă de subevaluare de 36.3%, pentru $k = 0.5$, ceea ce este inadmisibil în cazul unei analize a nivelurilor de vibrații pe structura unui utilaj, care trebuie încadrate în anumite limite de severitate.

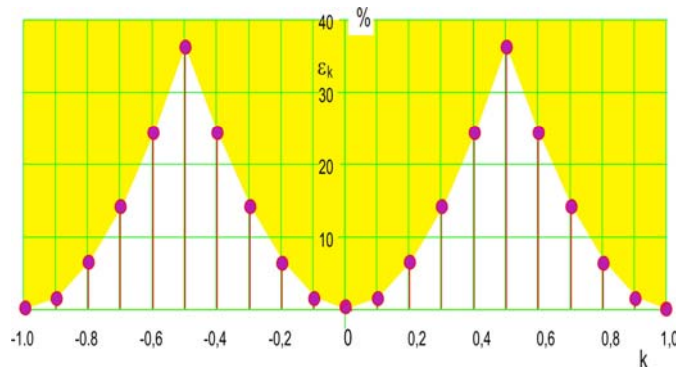


Fig.2.17. Ilustrarea erorii de evaluare a unei componente armonice după liniile unui spectru discret.

De asemenea, faza componentei armonice:

$$\psi = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (2.77)$$

este afectată de erori dacă este estimată prin componentele vârfului din spectru:

$$\varphi_p = \arctg\left(\frac{\text{Im}(p)}{\text{Re}(p)}\right) = \arctg\left(\frac{p}{p+k} \text{tg} \psi\right), \quad (2.78)$$

de unde rezultă valoarea fazei:

$$\psi = \arctg\left(\frac{p+k}{p} \text{tg} \varphi_p\right) \quad (2.79)$$

Pentru determinarea fracțiunii k se revine la relația (2.74), care pentru $s = 0$, ce corespunde componentei de pulsație ω_p și valorii maxime locale:

$$U(0) = U_h \left| \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \right| \quad (2.80)$$

Prin împărțirea relațiilor (2.74) cu (2.80) se obține o ecuație,

$$r_s = \frac{U(s)}{U(0)} = \left| \frac{k}{k-s} \right| \quad (2.81)$$

cu o singură necunoscută k , care trebuie să verifice și șirul de ecuații:

$$r_s |k-s| - |k| = 0, \quad s = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots \quad (2.82)$$

În plus, componenta armonică este localizată între primele două linii ale spectrului de valori maxime. Astfel, dacă:

$$U(s=0) > U(s=1) > U(s=-1) \Rightarrow r_1 = \frac{U(1)}{U(0)} \Rightarrow k_1 = \frac{r_1}{1+r_1}, \quad (2.83)$$

ceea ce înseamnă că, această componentă armonică căutată este localizată în spectru la dreapta componentei maxime locale $U(s=0)$ la frecvența,

$$f_h = (p + k_1) \Delta f \quad (2.84)$$

valoarea componentei armonice calculându-se cu relația:

$$U_h = U(0) \left| \frac{\pi k_1}{\sin(\pi k_1)} \right| \quad (2.85)$$

iar dacă:

$$U(s=0) > U(s=-1) > U(s=1) \Rightarrow r_{-1} = \frac{U(-1)}{U(0)} \Rightarrow k_{-1} = \frac{r_{-1}}{1+r_{-1}} \quad (2.86)$$

componenta armonică fiind situată la stânga componentei $U(0)$, la frecvența:

$$f_h = (p - k_{-1}) \Delta f \quad (2.87)$$

amplitudinea sa fiind dată de:

$$U_h = U(0) \left| \frac{\pi k_{-1}}{\sin(\pi k_{-1})} \right|. \quad (2.88)$$

În continuare se poate calcula prin relația (2.79), faza ψ , care, ținând cont de $k \ll p$, va fi:

$$\psi \approx \varphi_p = \arctg \left(\frac{\text{Im}(p)}{\text{Re}(p)} \right), \quad (2.89)$$

iar componentele, X , reală și Y , imaginară:

$$X = U(0) \cos \psi, \quad Y = U(0) \sin \psi. \quad (2.90)$$

2.4.2.1. Exemplu

Se consideră un semnal de vibrații $u(t)$ înregistrat pe un utilaj compus din trei componente:

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 U a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (2.91)$$

pentru care s-a luat: $U a_1 = 1.5$, $U a_2 = 2$ și $U a_3 = 0.9$ și frecvențele componentelor armonice: $f_1 = 18.21 \text{ Hz}$, $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 2 \times 18.21 \text{ Hz}$, pentru care pulsațiile ($\omega = 2\pi f$): $\omega_1 = 114.35 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 228.71 \text{ s}^{-1}$ și $\omega_3 = 207.35 \text{ s}^{-1}$, iar fazele $\varphi_1 = 0 \text{ rad}$, $\varphi_2 = \pi/2 \text{ rad}$ și $\varphi_3 = 0 \text{ rad}$.

Semnalul $u(t)$, sumă a celor trei componente, pentru o secvență de $T = 1.5 \text{ s}$,

$$u(t_j = j \Delta t) = \sum_{i=1}^3 U a_i \sin(\omega_i t_j + \varphi_i), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.92)$$

digitalizat cu incrementul $\Delta t = 0.001s$, printr-un număr de $N = 1500$ eșantioane prezentate în vibrograma din figura 2.18.

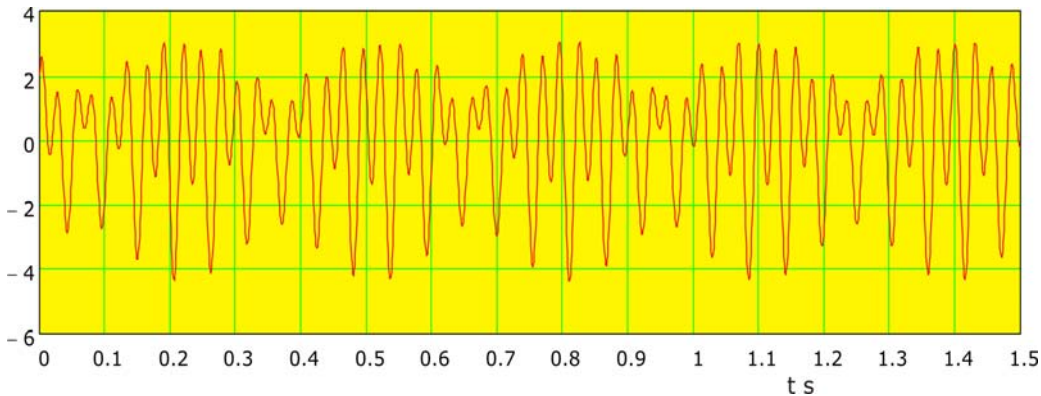


Fig.2.18. Vibrograma semnalului $u(t)$ compus din trei componente armonice.

Prin aplicarea transformatei rapide Fourier, apelând la subrutina MathCad $F := cfft(u)$, care calculează amplitudinile:

$$Ua_j = \sqrt{\operatorname{Re}(F_j)^2 + \operatorname{Im}(F_j)^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N/2,$$

liniilor spectrului din figura 2.19., se relevă trei vârfuri V_1 , V_2 și V_3 corespunzătoare celor trei componente armonice ce trebuie identificate din spectrul discret.

În prima fază sunt localizate cele trei vârfuri prin linia de programare,

$$p := \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in \dots \frac{N}{2} - 1 \\ \quad \text{if } Ua_k > a \wedge Ua_{k-1} \wedge Ua_k > Ua_{k+1} \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} j \leftarrow j + 1 \\ q_j \leftarrow k \end{array} \right. \\ q \end{array}$$

se determină, în mod automat, indicii corespunzători eșantioanelor vârfurilor, valorile acestora fiind date în vectorul,

$$p^T := (27 \ 50 \ 55).$$

Se impun condițiile (2.83) și (2.86) pentru calculul rapoartelor

$$e := 1 \dots 3,$$

$$r_e := \begin{array}{l} \frac{Ua_{(p_e+1)}}{Ua_{(p_e)}} \quad \text{if } Ua_{(p_e+1)} > Ua_{(p_e-1)} \\ \frac{Ua_{(p_e-1)}}{Ua_{(p_e)}} \quad \text{if } Ua_{(p_e+1)} < Ua_{(p_e-1)} \end{array}$$

2.4. - Determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret 35

rezultând $r^T := (0.466 \ 0.753 \ 0.599)$, care permit calculul fracțiunilor:

$$k_e := \frac{r_e}{1+r_e}$$

și semnul corect al valorilor fracționale k , prin linia de programare,

$$k_e := \begin{cases} k_e & \text{if } Ua_{(p_e+1)} > Ua_{(p_e-1)} \\ -k_e & \text{if } Ua_{(p_e+1)} < Ua_{(p_e-1)} \end{cases}$$

$$k^T := (0.318 \ -0.43 \ -0.375).$$

În final, sunt determinate amplitudinile vârfurilor V_{h1} , V_{h2} și V_{h3} :

$$U_{h_e} = \frac{\pi k_e}{\sin(\pi k_e)},$$

rezultând valorile,

$$V_h^T := (1.501 \ 1.998 \ 0.924),$$

foarte apropiate de cele considerate inițial, în procesul de simulare

$$V_0^T := (1.500 \ 2.00 \ 0.900).$$

Valori aproape identice, sunt obținute și pentru frecvențe:

$$f_h^T := (18.213 \ 33.016 \ 36.444),$$

$$f^T := (18.210 \ 33.000 \ 36.4200).$$

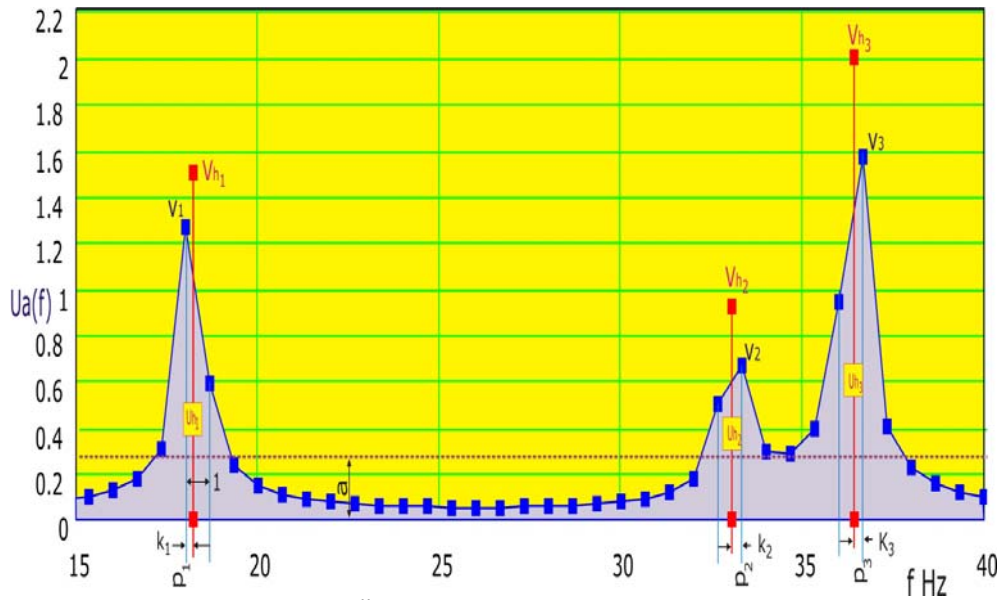


Fig.2.19. Ilustrarea identificării componentelor armonice din spectrul unui semnal.

2.4.3. Determinarea componentelor periodice din semnalul înregistrat folosind tehnica analizei modale

Dacă semnalul $u(t)$, sumă a n_m componente armonice, se multiplică printr-o funcție exponențială $e^{-\sigma t}$ se obține:

$$u_d(t) = \sum_{r=1}^{n_m} U a_r e^{-\sigma t} \sin(p_r t + \varphi_i) \quad (2.93)$$

o formă corespunzătoare unei vibrații libere amortizate (fig.2.20.) după n_m moduri naturale având pseudopulsățiile proprii $\omega_r = p$:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= \sum_{r=1}^{n_m} U a_r e^{-\sigma t} \sin(p_r t + \varphi_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n_m} \left(X_r e^{\lambda_r t} + \bar{X}_r e^{\bar{\lambda}_r t} \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

unde

$$\begin{aligned} X_r &= U a_r (\sin \varphi_r + j \cos \varphi_r) \\ \bar{X}_r &= U a_r (\sin \varphi_r - j \cos \varphi_r) \end{aligned} \quad (2.95)$$

și

$$\lambda_r = -\sigma + j p_r, \quad \bar{\lambda}_r = -\sigma - j p_r \quad (2.96)$$

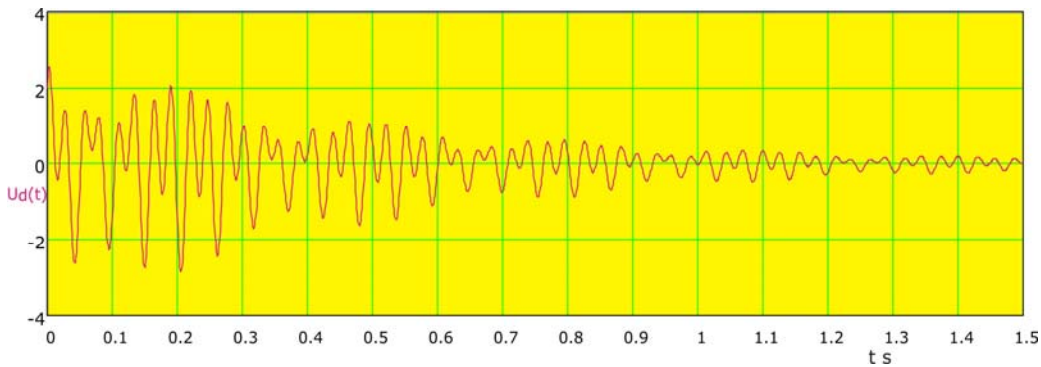


Fig.2.20. Vibrogramea semnalului $u_d(t)$.

Imaginea în domeniul frecvență a legii de mișcare (2.94) se obține aplicând transformata Fourier,

$$\begin{aligned} U_d(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_d(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{r=1}^{n_m} \left(\frac{X_r}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{X}_r}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right) = \\ &= \sum_{r=1}^{n_m} \left(\frac{X_r}{\sigma + j(\omega - p_r)} + \frac{\bar{X}_r}{\sigma + j(\omega + p_r)} \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

2.4. - Determinarea componentelor periodice ale unui semnal înregistrat discret 37

matematic, similar, cu un răspuns staționar al unei structuri la o excitație armonică de pulsație ω .

Pentru un semnal înregistrat pe structura care are mișcarea vibratorie liber amortizată, componenta modală corespunzătoare unei excitații de pulsație ω apropiată de cea proprie, modul r , ($\omega \approx \omega_r$) poate fi aproximată de:

$$u_r(\omega) \approx \frac{X_{rR} + jX_{rI}}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + A_r + jB_r, \quad (2.98)$$

$A_r + jB_r$ este o constantă complexă, iar X_{rR} , X_{rI} sunt componentele reală, și respectiv imaginară după i din spectrul Fourier.

În planul complex $OReIm$ (fig.2.21.), diagrama Nyquist a $u_r(\omega)$ este un cerc C_r , [Baese-Meyer, (2001)].

Folosind algoritmul de aproximare prin curbe polare, din [Cioara, (1988)], pot fi estimați pseudopulsația, p_r și factorul de amortizare modală, σ_r , rezolvând sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{aligned} p_r(\omega_s - \omega_i) + \sigma_r[(\omega_s - \omega_k)T_{ks} - (\omega_k - \omega_i)T_{ik}] &= \omega_k(\omega_s - \omega_i) \\ p_r(\omega_s - \omega_k) + \sigma_r[(\omega_s - \omega_i)T_{is} - (\omega_k - \omega_i)T_{ik}] &= \omega_i(\omega_s - \omega_k), \end{aligned} \quad (2.99)$$

unde ω_i , ω_k și ω_s sunt frecvențele corespunzătoare celor trei puncte reprezentative $P(\omega_i)$, $P(\omega_k)$ și $P(\omega_s)$ de pe curba C_r , obținute din datele experimentale și

$$T_{ik} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_{ik}/2)}, \quad (2.100)$$

obținut de asemenea din curba C_r .

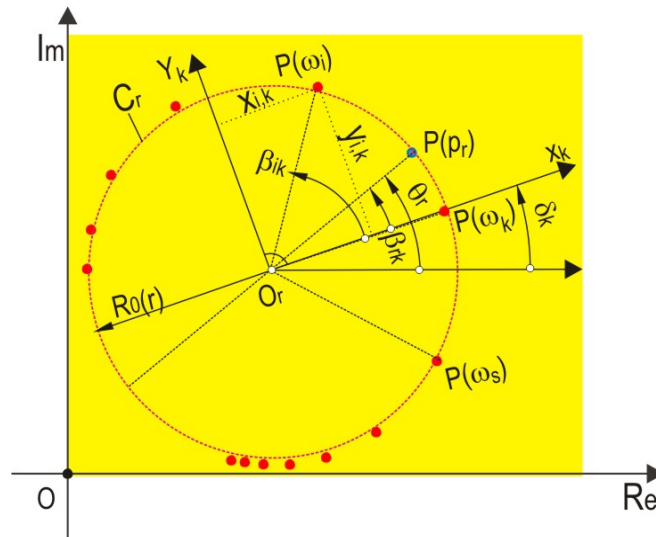


Fig.2.21. Diagrama Nyquist în jurul unui vârf de rezonanță din spectrul Fourier.

Sistemul (2.99) poate fi rezolvat cu metoda celor mai mici pătrate dacă sunt luate în considerare mai mult de trei puncte. Având determinați cei doi parametri p_r și σ_r poziția punctului reprezentativ $P(p_r)$ este dată de unghiul:

$$\beta_{rk} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_k - p_r}{\sigma_r} \right) \quad (2.101)$$

în sistemul de referință $O_r x_k y_k$ și în sistemul de referință $O Re Im$ de unghiul θ_r :

$$\theta_r = \delta_k + \beta_{rk} \quad (2.102)$$

unde

$$\delta_k = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(\omega_k) - I_C(r)}{\operatorname{Re}(\omega_k) - R_C(r)} \right), \quad (2.103)$$

unde R_C și I_C sunt coordonatele modale ale centrului cercului.

Constantele A_r și B_r din relația (2.98) au formele:

$$\begin{aligned} A_r &= R_C(r) - R_0(r) \cos \theta_r, \\ B_r &= I_C(r) - R_0(r) \sin \theta_r, \end{aligned} \quad (2.104)$$

și contribuțiile modale

$$X_r = 2\sigma_r R_0(r) \cos \theta_r, \quad Y_r = 2\sigma_r R_0(r) \sin \theta_r \quad (2.105)$$

unde R_0 este raza cercului.

Spectrul Fourier al semnalului $u_d(t)$ scoate în evidență aceleași componente modale reprezentate în planul complex Nyquist prin cercurile modale C_1 , C_2 și C_3 , pe care sunt plasate punctele $P(p_1)$, $P(p_2)$ și $P(p_3)$ corespunzătoare modurilor naturale, având frecvențele proprii:

$$f_p^T := (18.205 \quad 33.100 \quad 36.430),$$

foarte apropiate valoric de cele simulate.

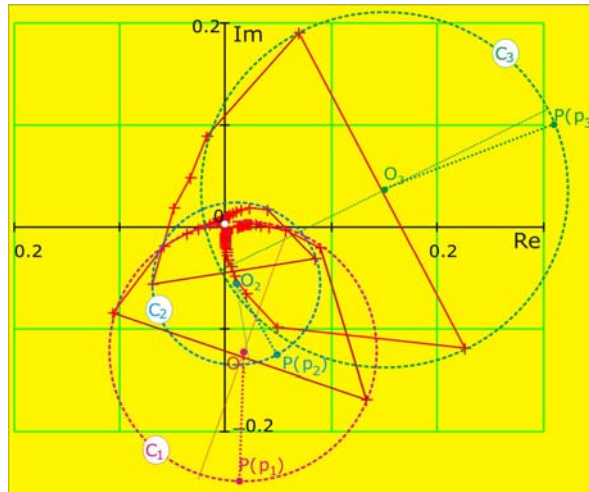


Fig.2.22. Diagrama Nyquist a spectrului Fourier a semnalului $u_d(t)$.

Semnalului $u_d(t)$ provenit din semnalul $u(t)$ multiplicat cu funcția exponențială $e^{-\sigma t}$ descrescătoare se pot aplica și alte metode de estimare a parametrilor modali, cum ar fi metodele din domeniul timp: metoda seriilor Prony sau metodele Ibrahim, și unele mai noi, care utilizează date din domeniul timp-frecvență, ca metoda transformatei wavelets.

2.5. Utilizarea transformatei Wavelets la extragerea unor particularități dintr-un semnal de vibrații

2.5.1. Considerații generale

Dacă apariția algoritmului Cooley-Tukey a fost la vremea apariției lui, un mare ajutor pentru calculul transformatei Fourier cu mijloacele existente, la ora actuală, posibilitățile de calcul crescând, au permis calculul unor transformate mult mai complexe, cum este transformata wavelet (small wave). Introdusă la începutul anilor 1980 și considerată la început o curiozitate matematică, și-a găsit până în prezent numeroase aplicații, cu o gamă largă de familii de funcții.

O formă generală a funcției wavelet este:

$$g(t, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.106)$$

unde funcția $g(t)$ a fost numită funcția mamă wavelet (*mother wavelet*), a și b , doi parametri: $a > 0$, a , fiind la numitorul fracției $\frac{t-b}{a}$, este numit parametru de dilatație, iar b este numit parametru de translație.

Asemănător cu transformata Fourier a semnalului $u(t)$, transformata wavelet a aceluiași semnal este dată de integrala, [Kobayashi, (1998)], [Poterășu, Zăgan, (1999)]:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.107)$$

unde \bar{g} înseamnă forma conjugată a funcției g .

Ținând cont de identitatea lui Percival:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \bar{G}(\omega, a, b) d\omega, \quad (2.108)$$

integrala (2.107) trece sub forma:

$$W(a, b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \bar{G}(\omega, a, b) d\omega, \quad (2.109)$$

$\bar{G}(\omega, a, b)$, fiind transformata Fourier a funcției $\bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right)$:

$$\bar{G}(\omega, a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.110)$$

Printr-o schimbare de variabilă:

$$t = a\tau + b, \quad (2.111)$$

transformata (2.110) devine:

$$\bar{G}(\omega, a, b) = a e^{-j\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega a\tau} d\tau = a G(a\omega) e^{-j\omega b}, \quad (2.112)$$

unde

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.113)$$

este transformata Fourier a funcției mamă wavelet, [Fugal, (2006)].

Ținând cont de (2.110) și (2.112) se obține:

$$W(a, b) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \bar{G}(a\omega) e^{j\omega b} d\omega, \quad (2.114)$$

forma transformatei inverse Fourier a funcției $\sqrt{a} F(\omega) \bar{G}(a\omega) e^{j\omega b}$, definită în domeniul frecvență. Funcția $W(a, b)$ este cunoscută în literatură, ca *transformata wavelet*.

De obicei, transformata wavelet este o funcție complexă

$$W(a, b) = \text{Re}(W(a, b)) + j \text{Im}(W(a, b)), \quad (2.115)$$

de modul:

$$|W(a, b)| = \sqrt{\text{Re}(W(a, b))^2 + \text{Im}(W(a, b))^2} \quad (2.116)$$

și fază:

$$|\phi(a, b)| = \text{arctg} \frac{\text{Im}(a, b)}{\text{Re}(a, b)}. \quad (2.117)$$

Aplicațiile transformatei wavelet sunt numeroase, [Bremaud, (2002)], [Mallat, (2009)], dar eficiența aplicării ei depinde mult de funcția mamă wavelet, $g(t, a, b)$, ceea ce a dus la dezvoltarea unor funcții specifice aplicației abordate.

Printre cele mai cunoscute este funcția Morlet wavelet, de forma, [Boggess, Narcowich, (2001)], [Lepik, (2001)]:

$$g(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-0.5t^2} = e^{-0.5t^2} (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)) \quad (2.118)$$

ale cărei componente, reală, $\text{Re}(g(t))$ și imaginară, $\text{Im}(g(t))$ sunt reprezentate în figura 2.23., iar spectrul său, $G(\omega)$, în figura 2.24., prin cele două componente, reală, $\text{Re}(G(\omega))$ și imaginară, $\text{Im}(G(\omega))$.

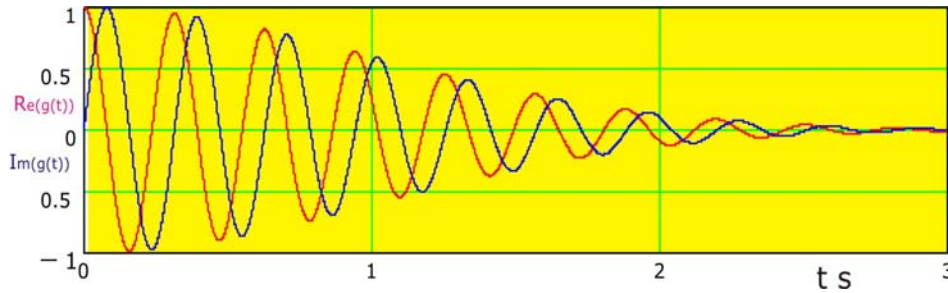


Fig.2.23. Ilustrarea funcției wavelet $g(t)$ Morlet pentru $\omega_0 = 20 [s^{-1}]$.

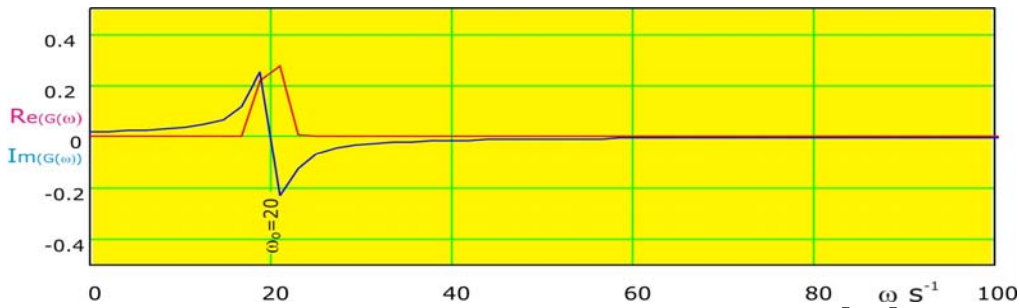


Fig.2.24. Spectrul Fourier al funcției wavelet Morlet pentru $\omega_0 = 20 [s^{-1}]$.

2.5.2. Aplicații la sisteme liniare

În majoritatea codurilor de procesare a semnalelor sunt implementate funcțiile transformatei Wavelet, [Norton, (1989)], [Polikar, (1995)]. Astfel, în codul **AutoSignal** este implementată transformata Wavelet cu funcția Morlet prezentată mai sus.

Rezultatele se dau atât grafic, prin reprezentări 2D (fig.2.25.c. și fig.2.27.c.) și 3D (fig. 2.26. și fig.2.28.), sau tabelar, prin reprezentarea magnitudinii:

$$|W(\tau_j, f_j)| = \sqrt{Re(W(\tau_j, f_j))^2 + Im(W(\tau_j, f_j))^2}, j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.119)$$

Tabel 2.2. Valorile discrete ale magnitudinii $|W(\tau_j, f_j)|$ ale transformatei Wavelet pentru semnalul $u(t)$.

i	$\tau_j [s]$	$f_j [Hz]$	$W(\tau_j, f_j)$
0	$9 \cdot 10^{-3}$	0.12207	$6.412915 \cdot 10^{-4}$
8002	2.878	25.312944	1.568338
15699	2.973	50	$1.96003 \cdot 10^{-3}$

Analizând figurile 2.25., reprezentând: a. vibrograma unui semnal $u(t)$ compus din trei componente armonice având frecvențele, $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$, $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$; b. spectrul Fourier al semnalului $u(t)$ și c. reprezentarea 2D a transformatei wavelet Morlet, se pot constata corelații clare între cele trei reprezentări grafice.

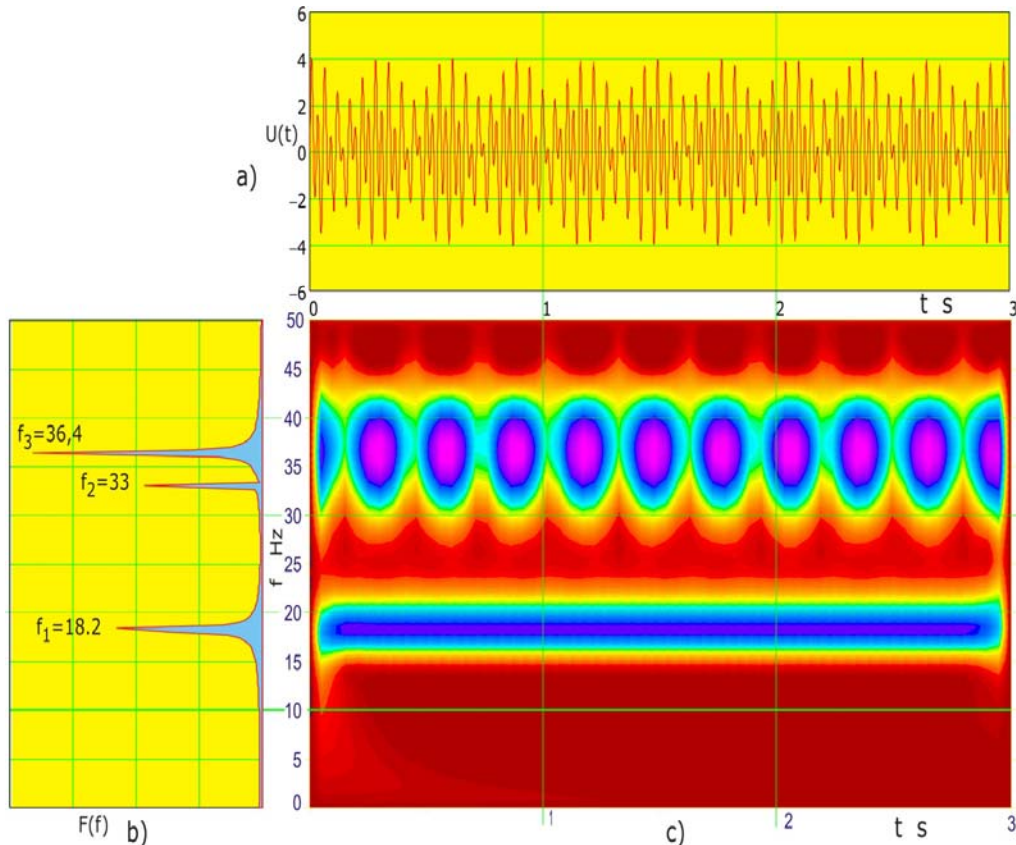


Fig.2.25. Ilustrarea analizei unui semnal $u(t)$ compus din trei componente armonice de frecvențe $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$, $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$; a. Vibrograma semnalului $u(t)$; b. Spectrul semnalului $u(t)$; c. Reprezentarea 2D a transformatei wavelet Morlet în modul a semnalului $u(t)$.

Astfel, variațiile de amplitudine, sub formă de băți datorate frecvențelor apropiate valoric, ($f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$), ale componentelor armonice corespunzătoare celor două frecvențe, se regăsesc în reprezentarea 2D wavelet sub forma unor contururi închise, colorate în funcție de nivelurile transformatei wavelet; contururi ce se repetă periodic pe axa timpului $0 \rightarrow \tau$, cu aceeași perioadă a băților.

De asemenea, componenta armonică de frecvență $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$ este prezentată în reprezentarea wavelet 2D printr-o bandă de nivel constant, axată după aceeași

frecvență f_1 , reprezentarea 3D din figura 2.26., clarifică suplimentar cele de mai sus.

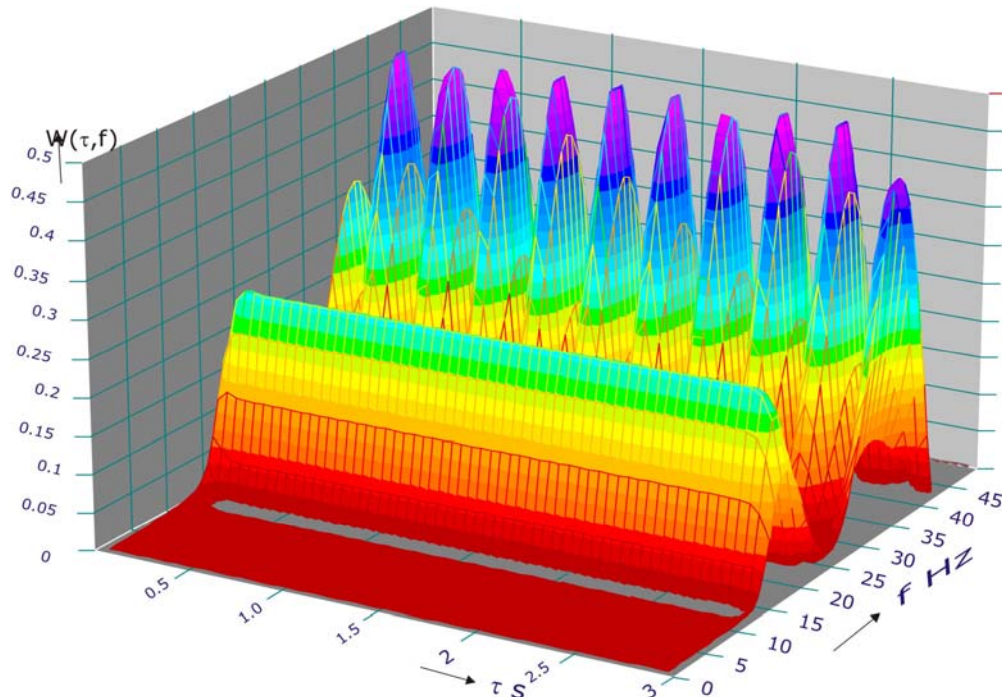


Fig.2.26. Reprezentarea 3D a transformatei wavelet Morlet în modul a semnalului $u(t)$.

Pentru aceleași componente de frecvențe $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$, $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$, dar considerate liber amortizate, vibrograma semnalului $u(t)$ arată ca în figura 2.27.a., iar spectrul său, ca în figura 2.27.b. Corespunzătoare acestora, contururile în reprezentarea wavelet 2D (corespunzătoare componentelor de frecvențe $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$) sunt tot periodice dar, cum este și normal, atenuate ca niveluri, în funcție de poziția lor pe axa timpului $0 \rightarrow \tau$.

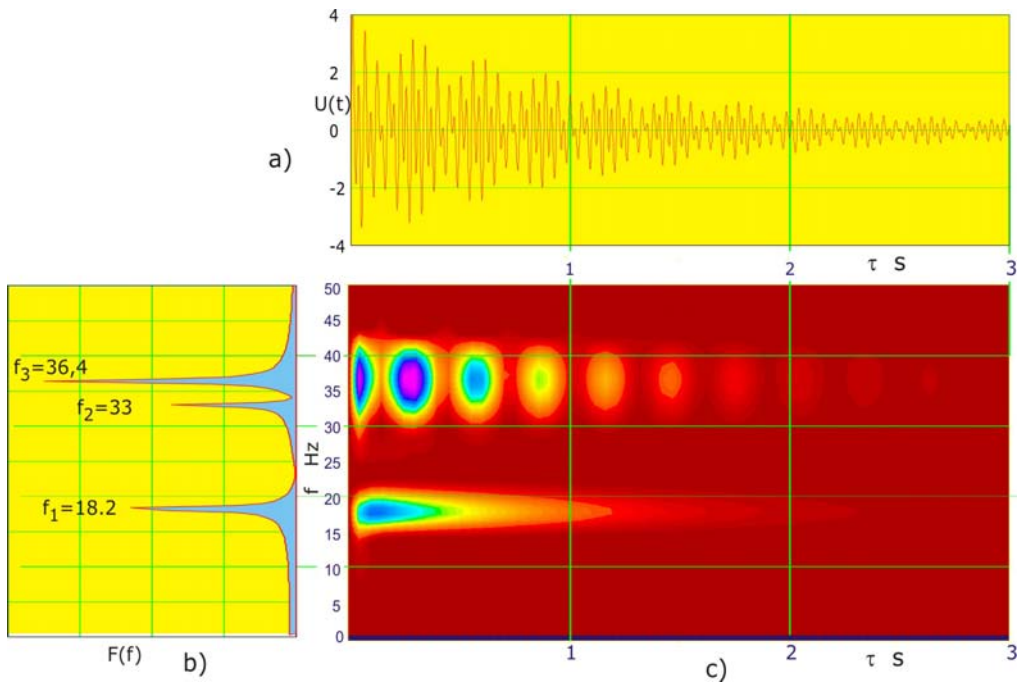


Fig.2.27. Ilustrarea analizei unui semnal $u(t)$ compus din trei componente modale amortizate de frecvențe $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$, $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$; a. Vibrograma semnalului $u(t)$; b. Spectrul semnalului $u(t)$; c. Reprezentarea 2D a transformatei wavelet Morlet în modul a semnalului $u(t)$.

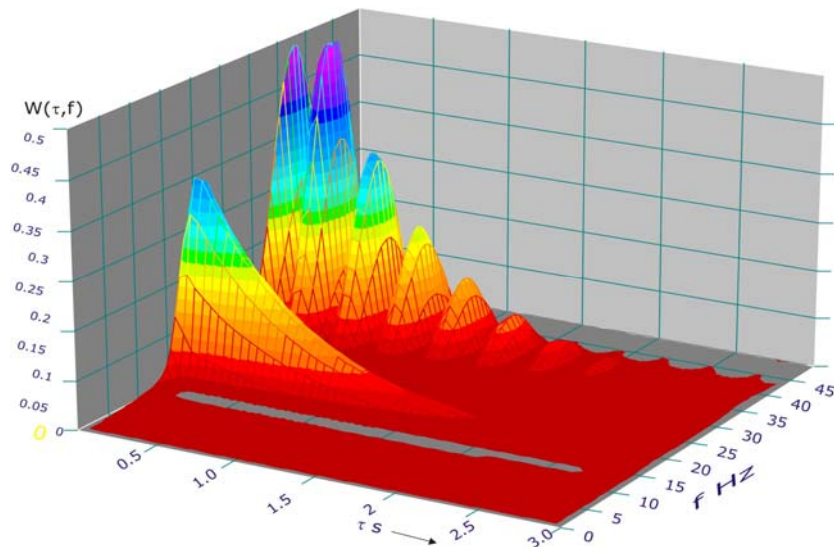


Fig.2.28. Reprezentarea 3D a transformatei wavelet Morlet în modul a semnalului $u(t)$ compus din trei componente modale amortizate.

Aceeași atenuare de nivel se observă și la componenta amortizată de frecvență $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$, caracterul exponențial al atenuării fiind mai clar scos în evidență în reprezentare 3D, (fig.2.28.).

Transformata wavelet având informație atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență se poate defini o *funcție de frecvență wavelet*, definită în domeniul timp sub forma:

$$f_W(\tau_i) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} f_{k,\tau_i} \times |W(\tau_i, f_k)|}{\sum_{k=k_1}^{k_2} |W(\tau_i, f_k)|} \quad (2.120)$$

unde f_{k,τ_i} reprezintă frecvența eșantionului k :

$$f_k = k \Delta f \quad (2.121)$$

la timpul

$$\tau_i = i \Delta \tau \quad (2.122)$$

pentru care eșantionul transformatei wavelet în punctual $P(i, k)$, (fig.2.29.) este $W(\tau_i, f_k)$, f_{k_1} și f_{k_2} reprezentând limitele benzii de frecvență pentru care se calculează *funcția de frecvență wavelet*.

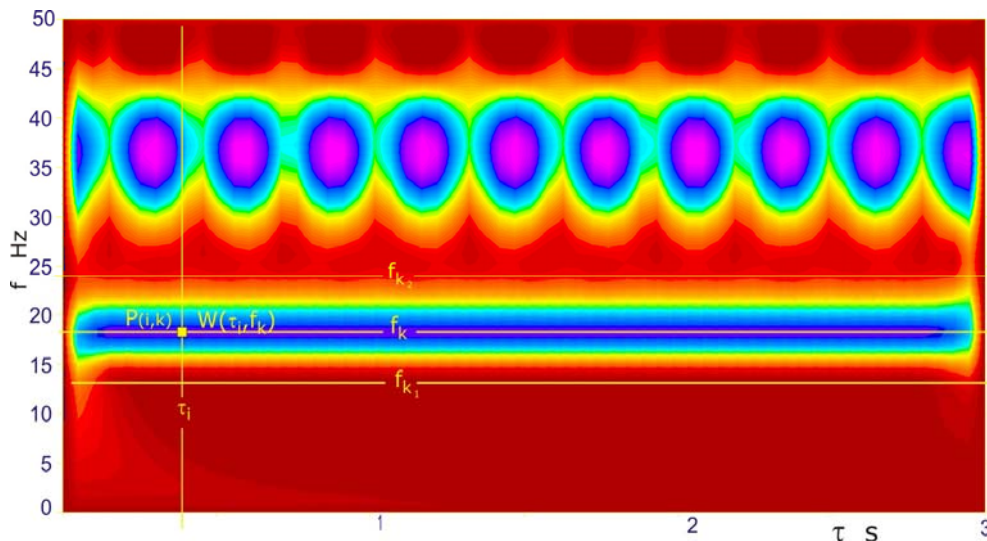


Fig.2.29. Ilustrarea calculului funcției de frecvență wavelet în banda de frecvență f_{k_1} și f_{k_2} .

Calculul *funcției de frecvență wavelet* se face ținând cont de aranjarea datelor în tabelul 2.2. Prima coloană $W^{(0)}$ a matricii W , tabelul 2.2., conține indicii de coloană, de la $j = 0$ la $n = 15699$. Următoarea coloană $W^{(1)}$ a matricii W conține un șir de $n_b = 100$ blocuri a câte $n_t = 157$ șiruri de valori ale timpului $\tau_i = i \times \Delta \tau$,

($i = 0, 1, 2, \dots, n_t$), (incrementul de timp $\Delta\tau = 3/157$ s), cu reprezentare grafică în figura 2.30. Urmează coloana a treia, $W^{(2)}$ a matricii W , care conține 100 blocuri a câte 157 valori egale, blocul k având frecvența $f_k = k \times \Delta f$, cu incrementul de frecvență $\Delta f = 50/100$ Hz .

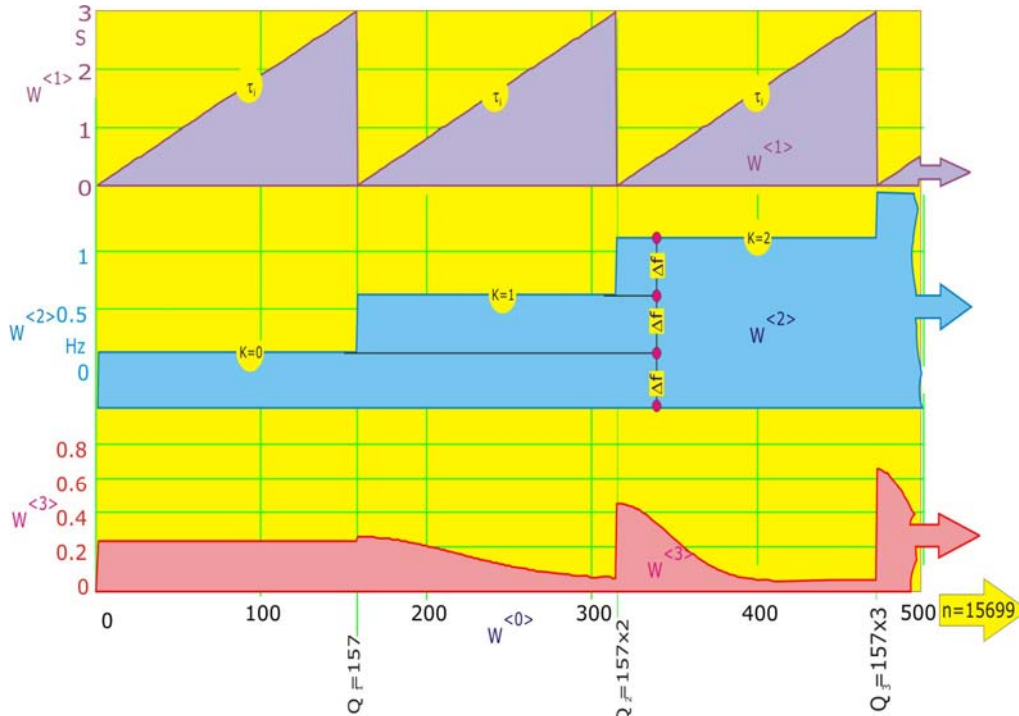


Fig.2.30. Ilustrarea stocării datelor în tabelul matrice.

Ultima coloană, $W^{(3)}$ a matricii W conține valorile discrete ale transformatei wavelet. Cu aceste date, forma (2.120), a funcției de frecvență wavelet, devine pentru utilizare în Mathcad,

$$f_W(i \times \Delta\tau) := \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} W^{(2)}_{(Q_k+i)} \times W^{(3)}_{(Q_k+i)}}{\sum_{k=k_1}^{k_2} W^{(2)}_{(Q_k+i)}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 156, \quad (2.123)$$

indicii k_1 și k_2 delimitând domeniul de frecvență selectat între frecvențele $f_1 = k_1 \times \Delta f$ și $f_2 = k_2 \times \Delta f$.

Luând banda de analiză între frecvențele $f_1 = 10$ Hz și $f_2 = 22$ Hz, funcția de frecvență wavelet $f_{1W}(\tau)$ calculată cu (2.123), este reprezentată (fig.2.31.) printr-o

linie dreaptă pe tot intervalul de timp $\tau = 0 \rightarrow 3 s$, axată după frecvența de $18.27 Hz$, valoric apropiată de frecvența primei componente armonice de $18.2 Hz$.

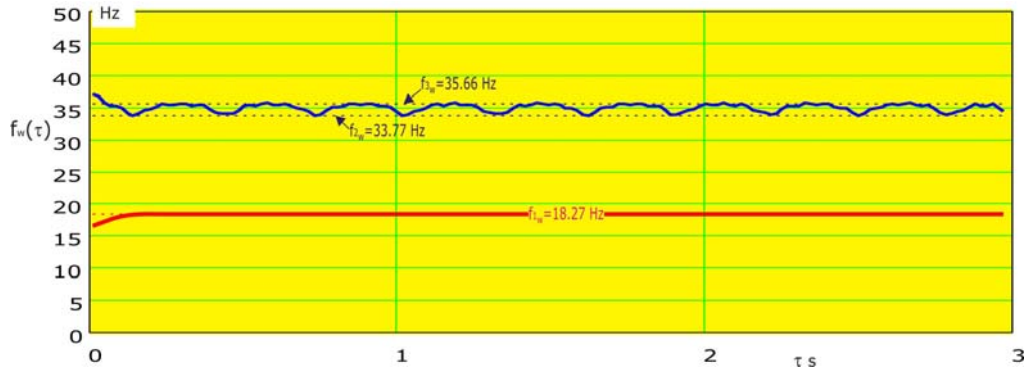


Fig.2.31. Reprezentarea funcțiilor de frecvență wavelet pentru un semnal $u(t)$ compus din trei componente armonice având frecvențele modale $f_1 = 18.2 Hz$, $f_2 = 33 Hz$ și $f_3 = 36.4 Hz$.

Pentru banda de frecvență $f_1 = 25 Hz$ la $f_2 = 50 Hz$ rezultă o funcție de frecvență wavelet variabilă în timp, între limita superioare $f_{3_w} = 35.66 Hz$ și $f_{2_w} = 33.77 Hz$, funcție periodică cu perioada bătăii celor două componente ale semnalului $u(t)$, de frecvențe apropiate $f_2 = 33 Hz$ și $f_3 = 36.4 Hz$. Deci, și în cazul componentelor armonice de frecvențe apropiate ale unui semnal, metoda funcției wavelet poate fi utilizată la identificarea frecvențelor.

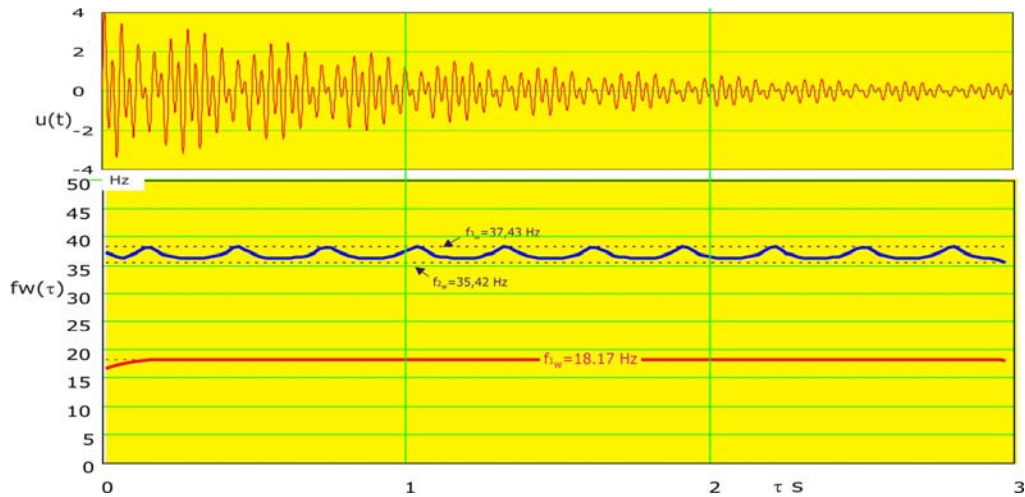


Fig.2.32. Reprezentarea funcțiilor de frecvență wavelet pentru un semnal $u(t)$ compus din trei componente modale liber amortizate având frecvențele modale $f_1 = 18.2 Hz$, $f_2 = 33 Hz$ și $f_3 = 36.4 Hz$.

Pentru un semnal $u(t)$ (fig.2.32.) compus din componente modale liber amortizate aplicând metoda funcției de frecvență wavelet se obțin rezultate asemănătoare cu aplicarea funcției la un semnal compus din componente armonice, funcția $f_{1w}(\tau)$ este o linie orizontală, având ecuația $f_{1w}(\tau) = 18.17 \text{ Hz}$, de valoare foarte apropiată de cea exactă $f_1 = 18.2 \text{ Hz}$.

Celelalte două componente modale având frecvențele $f_2 = 33 \text{ Hz}$ și respectiv, $f_3 = 36.4 \text{ Hz}$ se regăsesc în funcția $f_w(\tau)$ printr-o linie variabilă între limitele $f_{2w}(\tau) = 35.43 \text{ Hz}$ și $f_{3w}(\tau) = 37.43 \text{ Hz}$, cu o diferență valorică ceva mai mare față de frecvențele f_2 și f_3 .

Ambele semnale $u(t)$, liber neamortizat și liber amortizat rezultă în urma unor excitații inițiale ale sistemelor liniare, modelate prin sisteme de ecuații diferențiale liniare:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.124)$$

$[C] = [0]$, pentru sisteme neamortizate și $[C] \neq [0]$, pentru sisteme amortizate.

Observație. În urma analizei de mai sus se poate trage concluzia că dacă funcția de frecvență wavelet $f_w(\tau)$ a unui semnal $u(t)$ este reprezentată în planul $f_w - \tau$ printr-o linie dreaptă paralelă cu axa timpului, sistemul din care provine este un sistem liniar, iar frecvența semnalului $u(t)$ este egală cu f_w .

2.5.3. Aplicații la sisteme neliniare

Să considerăm un sistem neliniar cu un singur grad de libertate, de forma:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + \frac{c}{m} \left[\frac{d}{dt}u(t) + \beta \left(\frac{d}{dt}u(t) \right)^3 \right] + \frac{k}{m} f(u(t)) = 0, \quad (2.125)$$

unde

$$f(u) = u + \alpha u^3 \quad (2.126)$$

este caracteristica elastică neliniară, care, pentru $\alpha = 2$, arată ca în figura 2.33.

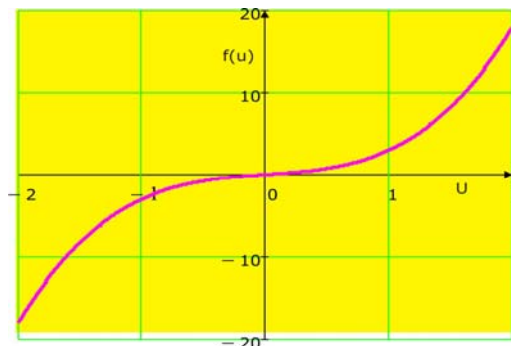


Fig.2.33. Ilustrarea caracteristicii elastice neliniare.

Rezolvarea numerică a ecuației diferențiale (2.125) s-a realizat utilizând subrutina din MathCad: *Odesolve*, pentru care se definesc:

- *Given* :

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + \frac{c}{m} \left[\frac{d}{dt}u(t) + \beta \left(\frac{d}{dt}u(t) \right)^3 \right] + \frac{k}{m} f(u(t)) = 0,$$

- pentru valorile; $m = 1 \text{ kg}$, $k = 246700 \text{ N}$, $\beta = 0.9$, $c = 0.001$,
- și condițiile inițiale $u(0) = 2$, $\dot{u}(0) = 0$,
- cu definirea domeniului de procesare $u := -2, -1.99..2$ ($pas = 0.001$),
- definirea secvenței $T = 3 \text{ s}$,
- apelarea la subrutina $u := \text{Odesolve}(t, T)$,
- definirea indicilor eșantioanelor $i := 0..3000$ cu increment de timp $dt := 0.001 \text{ s}$,
- $t_i := i dt$, $u_i := u(t_i)$.

În figura 2.34., este prezentată vibrograma semnalului $u(t)$ rezultat. Așa cum se cunoaște sistemul fiind neliniar, cu neliniaritate de tip *tare*, pentru elongațiile mari de la începutul vibrogramei, frecvența mișcării vibratorii este evident mai mare decât cea corespunzătoare de la sfârșitul secvenței vibrogramei, unde elongațiile sunt atenuate.

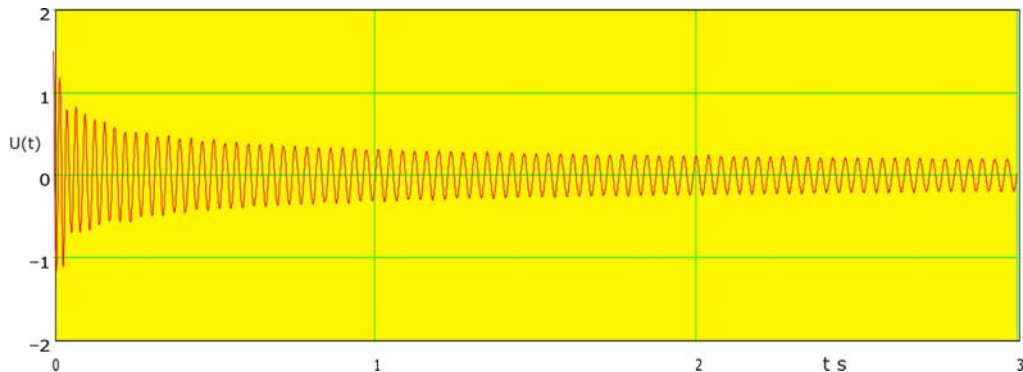


Fig.2.34. Vibrograma unui semnal $u(t)$ liber amortizat corespunzător unui sistem neliniar având caracteristica elastică *tare* (fig.2.33.).

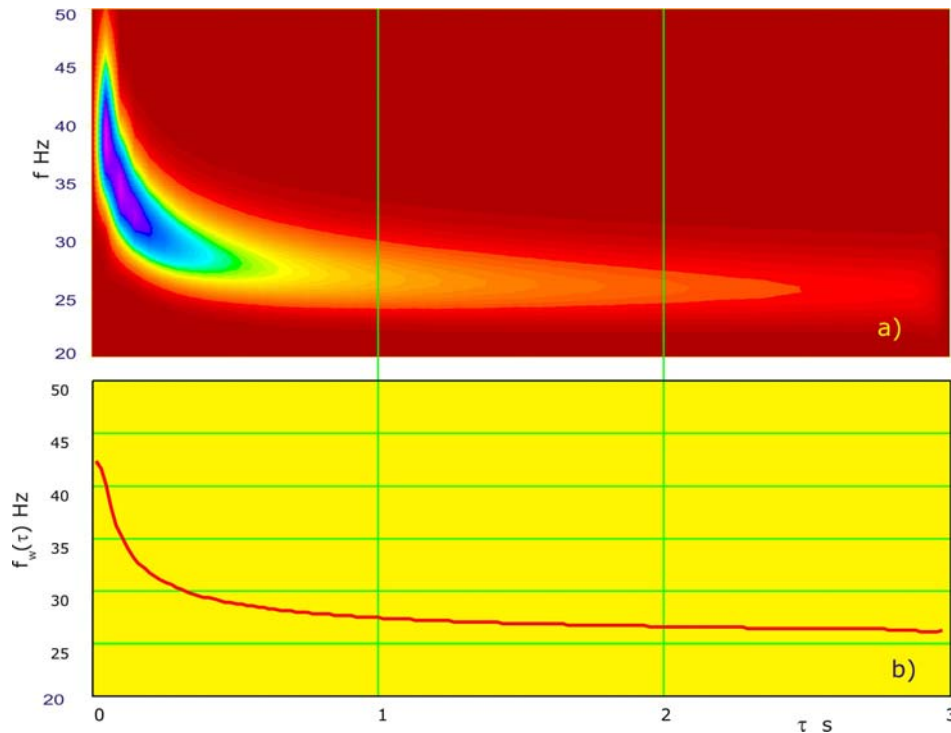


Fig.2.35. a. Reprezentarea 2D a transformatei wavelet; b. Reprezentarea funcției de frecvență wavelet, pentru semnalul $u(t)$, (fig.2.34.).

Această variație este scoasă în evidență mai clar prin funcția de frecvență $f_w(\tau)$, care prezintă o cădere de la $f_w(\tau = 0) = 41.78 \text{ Hz}$ la $f_w(\tau = 3) = 26.28 \text{ Hz}$ pe intervalul de 0 secunde la 3 secunde. În final, se poate concluziona că măsurând semnalul de răspuns liber amortizat al unei structuri și determinând variația în timp a funcției de frecvență wavelet $f_w(\tau)$ se poate aprecia dacă răspunsul structurii, prin semnalul $u(t)$, este liniar sau neliniar. Dacă $f_w(\tau)$ este o linie dreaptă paralelă cu axa timpului $O\tau$, atunci semnalul provine de la o structură cu un comportament dinamic liniar, iar dacă $f_w(\tau)$ are o variație de-a lungul secvenței înregistrate, atunci semnalul provine de la o structură cu un comportament neliniar. Astfel, o structură care prezintă fisuri induce neliniarități locale, care se simt în răspunsul măsurat prin semnalul $u(t)$, pentru care procesându-se funcția $f_w(\tau)$ se poate corela cu aceasta existența și evoluția în timp a fisurii.

3. RECONDIȚIONAREA SEMNALELOR CU NIVELURI DE SATURAȚIE

3.1. Considerații generale

În foarte multe situații se impun măsurători de vibrații produse de evenimente unice, nerepetabile, unde nivelurile posibile ale vibrațiilor ce se dezvoltă pe structura investigată sunt complet nepredictibile. Este cazul excitațiilor prin unde seismice produse de cutremure sau prin explozii.

În aceste cazuri, este foarte greu de a seta corect domeniul amplificărilor al lanțului de măsurare, nivelul semnalului înregistrat putând atinge nivelul de saturație la care semnalul înregistrat va fi tăiat. Astfel, dacă se urmărește determinarea nivelurilor de deplasări sau de tensiuni pe structura unei construcții (fig.3.1.), niveluri ce se dezvoltă sub acțiunea unei unde seismice, se aplică pe structură un senzor seismic sau un traductor electro-rezistiv (TER), [Budura, (2002)], conectat la un montaj în punte Wheatstone.

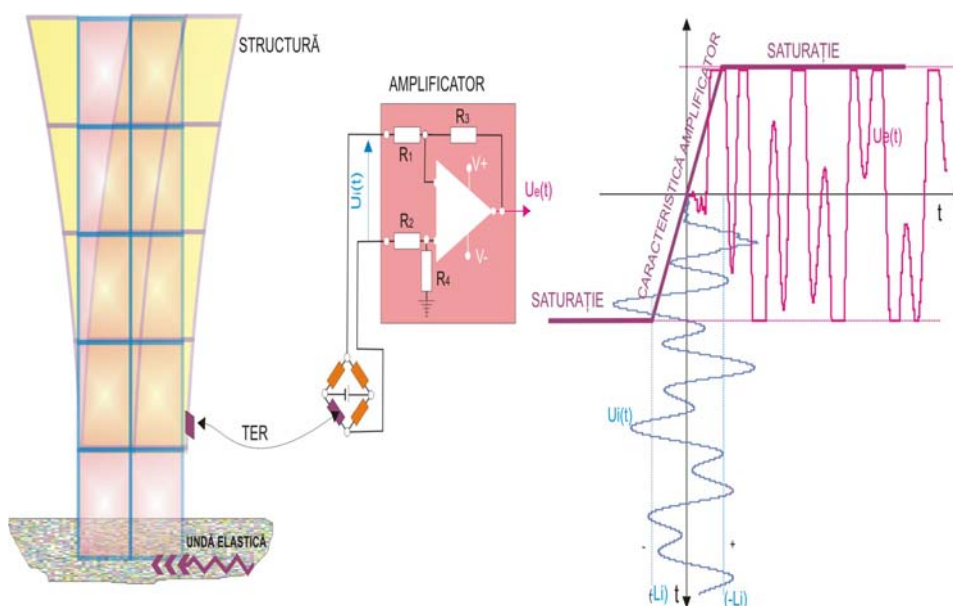


Fig.3.1. Ilustrarea efectului de limitare a unui semnal prin saturația amplificatorului.

Semnalul $u_i(t)$ furnizat de montajul în punte Wheatstone, proporțional cu tensiunea dezvoltată pe structură, este amplificat, în vederea înregistrării, la un amplificator instrumental, a cărui caracteristică este liniară numai între două limite, $(-L_j)$ și $(+L_j)$, [Buzdugan, Fetcu, Radeș, (1975)]. Peste aceste limite, semnalul de ieșire din amplificator este tăiat, amplificatorul intrând în starea de saturație. Cele

două limite, $(-L_j)$ și $(+L_j)$ sunt reglabile prin setarea rezistențelor din circuitul amplificatorului. Cu cât limitele sunt mai înguste cu atât amplificarea semnalului $u_i(t)$ este mai ridicată. Dar semnalul $u_e(t)$, de ieșire din amplificatorul instrumental, nu poate depăși limitele $(\pm L_e)$ de saturație ale ieșirii amplificatorului, rezultând un semnal înregistrat cu vârfurile tăiate în afara acestor limite. Cum însă tocmai nivelurile acestor vârfuri interesează pentru stabilirea gradului de pericolozitate al unei seismice asupra structurii construcției respective, stabilirea unor metode de prelucrare a unui asemenea semnal în vederea reconstituirii semnalului real este de o utilitate aplicativă însemnată.

O altă problemă importantă pe care o ridică o înregistrare de tip unicat este cea legată de setarea unei amplificări scăzute a amplificatorului de măsură.

În acest caz, semnalul de ieșire din amplificatorul de măsurare, (fig.3.2.), este de nivel ridicat, în comparație cu domeniul setat la convertorul analog numeric care este setat în același domeniu cu cel al amplificatorului de măsurare, [Buzdugan, Mihăilescu, Radeș, (1979)], [Drăgănescu, (2000)], [Hsu, (1995)], [Karu, (1995)].

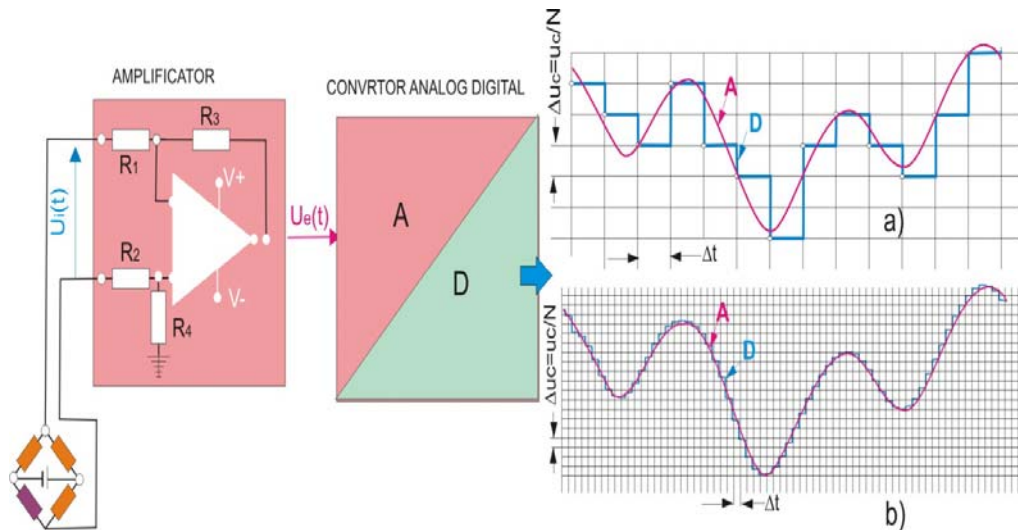


Fig.3.2. Ilustrarea distorsiunii semnalului analog prin conversie numerică.

Astfel, dacă domeniul de măsură al amplificatorului este $\pm 10V$ (semnalul de ieșire este limitat/tăiat la $+10V$ și $-10V$), atunci domeniul convertorului este setat tot la $\pm 10V$. Precizia conversiei este dată de numărul de biți ai convertorului. Un convertor analog numeric de $n=12$ biți, des utilizat în captarea semnalelor de vibrații, împarte domeniul $u_c = 2 \times 10V$ în $N = 2^n = 4096$ niveluri, cu pasul $\Delta u_c = u_c/N = 4.883 \times 10^{-3}$, semnalul digital reprezentat grafic are forma discontinuă, de scară (D, fig.3.2.a. și fig.3.2.b.).

Această formă discontinuă generează erori la prelucrarea semnalului, [Shmaliy, (2006)], [Ștefănoiu, (2007)], datorită abaterii valorice față de forma continuă, reală, A. Eroarea devine semnificativă când nivelul semnalului $u_e(t)$, de intrare în convertorul A/D este foarte mic în comparație cu lățimea domeniului convertorului

(20V). Astfel, în figura 3.2.a., semnalul $u_i(t)$ (A), acoperă un domeniu de numai 6 unități, ceea ce face ca eșantioanele conversiei (linia discontinuă D) să nu respecte linia semnalului real, ceea ce duce la dificultăți majore în interpretarea datelor înregistrate.

3.2. Simularea unei înregistrări cu semnale saturate

3.2.1. Modelul dinamic al unei structuri

Se consideră o construcție cu patru niveluri (fig.3.3.a.), supusă unei unde seismice propagată în plan orizontal prin sol, [Căplescu, (2009.a)]. Un model mecanic simplificat al deplasărilor orizontale este cel din figura 3.3.b., format din patru mase egale m , reduse la cele patru niveluri, între care iau naștere forțele de legătură:

$$F_{i,i+1} = -k(x_i(t) - x_{i+1}(t)) - c(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3.1)$$

unde $x_i(t)$, fiind legile de mișcare absolute ale celor patru mase, legate între ele prin arcurile echivalente de constantă elastică k și prin amortizoarele de tip vâcos de constante de amortizare c .

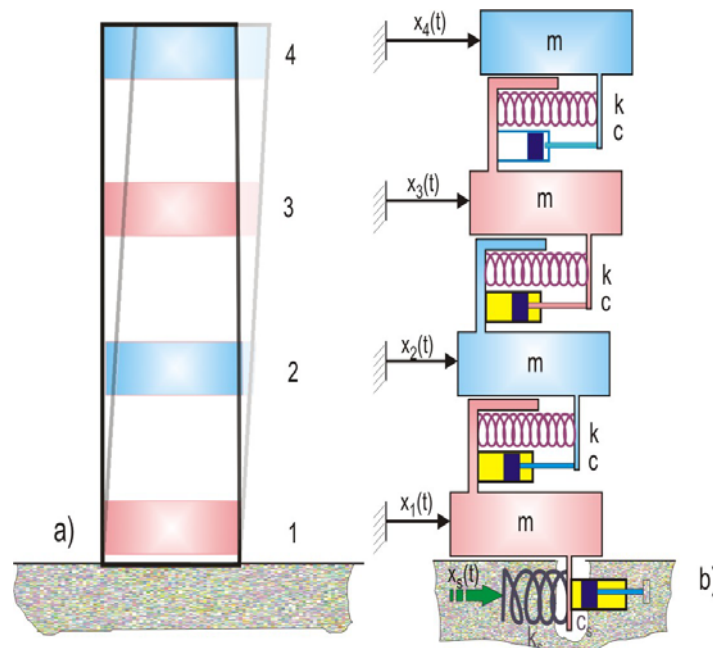


Fig.3.3. Modelul mecanic simplificat al unei construcții cu patru niveluri.

Pentru determinarea sistemului de ecuații care descriu mișcările celor patru mase se utilizează metoda ecuațiilor lui Lagrange [Radeș, (2006)],

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{x}\}^T} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{x\}^T} + \frac{\partial E_p}{\partial \{x\}^T} + \frac{\partial E_d}{\partial \{x\}^T} = \{0\}, \quad (3.2)$$

unde: vectorul matrice coloană al legilor de mișcare este,

$$\{x(t)\} = \{x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)\}^T, \quad (3.3)$$

energia cinetică este,

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m \dot{x}_i^2, \quad (3.4)$$

energia potențială de deformație, înmagazinată în cele patru arcuri, de constantă elastică k și în arcul echivalent, de constantă echivalentă k_s , al legăturii cu solul, prin care se propagă unda de deplasare $x_s(t)$,

$$E_p = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^3 [x_{i+1}(t) - x_i(t)]^2 + \frac{1}{2} k_s [x_s(t) - x_1(t)]^2, \quad (3.5)$$

iar energia de disipație, considerată de tip vâscos, este:

$$E_d = \frac{1}{2} c \sum_{i=1}^3 [\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)]^2. \quad (3.6)$$

Cele trei expresii pot fi scrise sub formele matriceale:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [M] \{\dot{x}(t)\}, \\ E_p &= \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} - \frac{1}{2} \{x_s(t)\}^T \{x_s(t)\}, \\ E_d &= \frac{1}{2} \{\dot{x}(t)\}^T [C] \{\dot{x}(t)\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

unde:

$$\begin{aligned} [M] &= m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ [K] &= k \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_s}{k} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [C] &= c \begin{bmatrix} 1 + \frac{c_s}{c} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

unde c_s este constanta de amortizare pentru arcul echivalent al legăturii cu solul, [Brîndeu, (2001)], rezultând sistemul de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, [Beards, (1996)], [Caius, (1971)], [Meirovitch, (1975)],

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{Q_e(t)\}, \quad (3.9)$$

unde $\{Q_e(t)\} = k_s \{x_s(t) \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ este vectorul de excitație.

La ecuația (3.9) se atașează sistemul valorilor proprii, [Oprîtescu, Căplescu, Cioara, (2008)]:

$$([M]\lambda^2 + [C]\lambda + [K]) = \{0\}. \quad (3.10)$$

Acesta este satisfăcut de patru perechi de valori proprii complex conjugate:

$$\lambda_r = -\sigma_r \pm ip_r, \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (3.11)$$

unde σ_r și p_r sunt coeficientul de amortizare și respectiv pseudopulsția proprie a celui de-al r -lea mod natural de vibrații.

Modurilor naturale de vibrații le corespund patru perechi de vectori complex conjugați,

$$X_r = X_{Rr} \pm iX_{Ir}, \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (3.12)$$

care dau formele modurilor.

În vederea aplicării unui algoritm de calcul al valorilor proprii sistemul omogen derivat din (3.10) se pune sub forma echivalentă, [Cioara, (2002)], [Thomson, (1988)]:

$$[M_z]\{\dot{z}\} + [K_z]\{z\} = \{0\}, \quad (3.13)$$

unde vectorul z este:

$$\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

matricele M_z și K_z :

$$[M_z] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \text{ și } [K_z] = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Sistemul valorilor proprii asociat sistemului de ecuații diferențiale are forma:

$$([M_z]\lambda_r + [K_z]) \begin{Bmatrix} \lambda_r X_r \\ X_r \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (r = 1, 2, 3, 4). \quad (3.16)$$

Vectorii proprii formează coloanele matricei modale $[X]$.

Valorile proprii λ_r și matricea modală $[X]$ se determină apelând la subrutine existente în codurile de calcul numeric.

În Mathcad cele două subrutine au formele,

$$\lambda := \text{genvals}(-K_z, M_z) \text{ și } X := \text{genvecs}(-K_z, M_z). \quad (3.17)$$

Pentru valorile $m = 1 \text{ kg}$, $k = 1000 \text{ N/m}$, $k_s = 10000 \text{ N/m}$, $c = 1.5 \text{ Ns/m}$, $c_s = 15 \text{ Ns/m}$, vor rezulta cele patru perechi de valori proprii corespunzătoare pentru cele 4 moduri naturale de vibrații ale structurii:

$$\lambda = \begin{pmatrix} -5.56 - 105.26i \\ -5.56 + 105.26i \\ -1.6 - 56.58i \\ -1.6 + 56.58i \\ -0.75 - 38.69i \\ -0.75 + 38.69i \\ -0.09 - 13.7i \\ -0.09 + 13.7i \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Partea reală a matricei modale este:

$$[\psi] = \text{Re}[X] = \begin{pmatrix} 0.04 & -0.11 & -0.1 & 1 \\ 0.47 & -1 & -0.75 & -0.11 \\ 0.81 & -0.4 & 1 & 0.01 \\ 1 & 1 & -0.45 & 0.0012 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

valorile elementelor pe coloane fiind utilizate la construcția grafică a formelor modale, ilustrate în figura 3.4.

Frecvențele proprii ale celor patru moduri se determină din relația:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sigma_r^2 + p_r^2}, \quad (3.20)$$

valorile acestora fiind prezentate fiecare sub forma modală din figura 3.4.

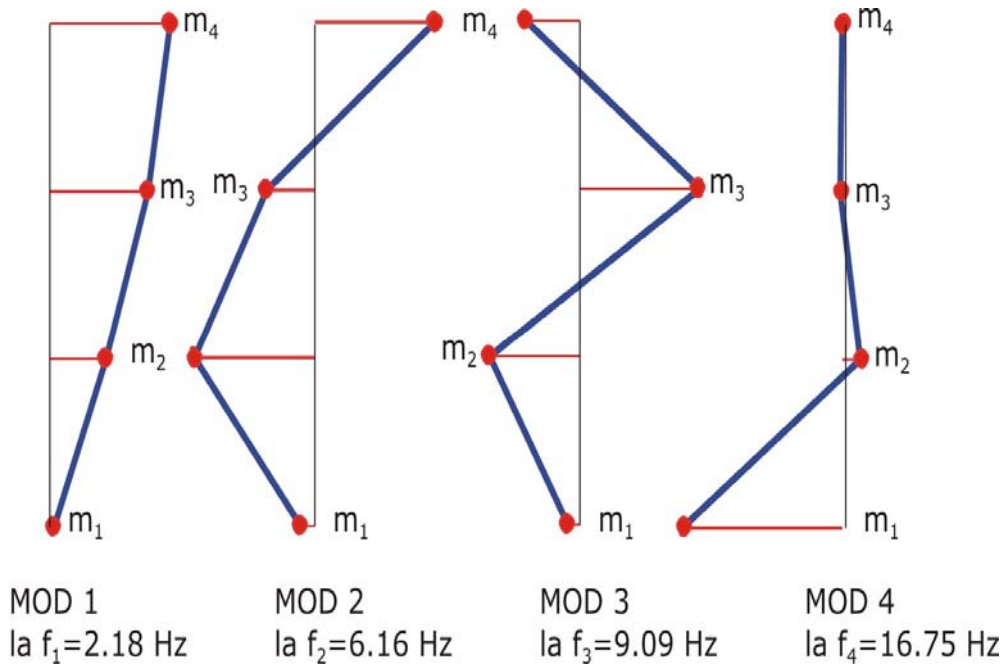


Fig.3.4. Ilustrarea formelor modale pentru modelul mecanic din figura 3.3.

3.2.2. Simularea unei unde elastice tranzitorie de tip seismic

O undă în deplasare $x_s(t)$ de tip seismic este definită prin spectrul său și durata evenimentului. Astfel, se consideră un spectru în frecvență al undei care să acopere domeniul frecvențelor proprii ale structurii.

Un astfel de spectru poate fi simulat plecând de la o secvență de semnal de zgomot alb (fig.3.5.) generată prin subrutina:

$$z_a := \text{whiten}(nz), \quad (3.21)$$

din Mathcad, unde $nz = 10000$ de eșantioane, cu frecvența de eșantionare $dt = 0.001s$.

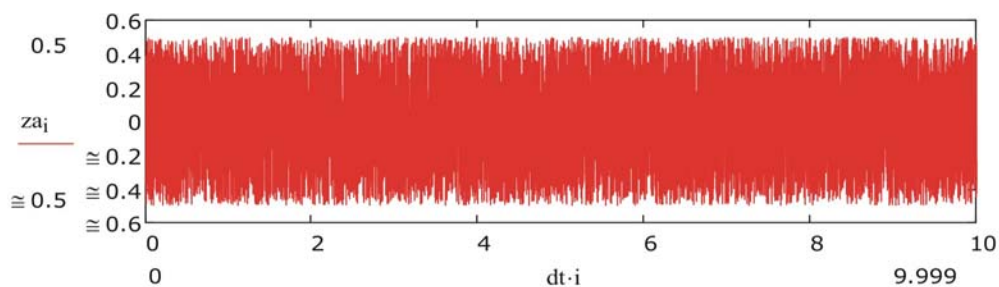


Fig.3.5. Ilustrarea unui secvențe de semnal zgomot alb.

Spectrul Fourier al secvenței de 10 secunde al semnalului zgomot alb are forma plată (fig.3.6., diagrama 1), conținând toate componentele din domeniul spectral $0 - 500 Hz$.

Din acest domeniu am selectat o bandă, între frecvențele $f_1 = 1.5 Hz$ și $f_2 = 30 Hz$, bandă în care sunt localizate cele patru frecvențe proprii ale modelului dinamic analizat.

Filtrarea s-a realizat printr-o rețea numerică a unui filtru trece bandă, FIR, (Finite Impulse Response), implementat în subrutinele Mathcad:

$$F := \text{bandpass}(f_1, f_2, d, nc), \quad (3.22)$$

care definește răspunsul la impuls al filtrului, de tip Blackman, [Nafornită, Gordan, Isar, (1998)], trece bandă între frecvențele; f_1 , inferioară și f_2 superioară, raportate la numărul n de eșantioane al fișierului de date z_{a_i} ($i = 1, 2, 3, \dots; n = 10000$), d întârzierea în șirul de procesarea prin rețeaua numerică a filtrului este dată de subrutina:

$$y_f := \text{response}(z_a, F, n), \quad (3.23)$$

Pentru $f_1 = 0.0015$ ($1.5 Hz$), $f_2 = 0.03$ ($30 Hz$), $nc = 6$ (ponderea filtrului) spectrul de bandă a semnalului de ieșire y_f din rețeaua numerică este reprezentat în figura 3.6., prin diagrama 2.

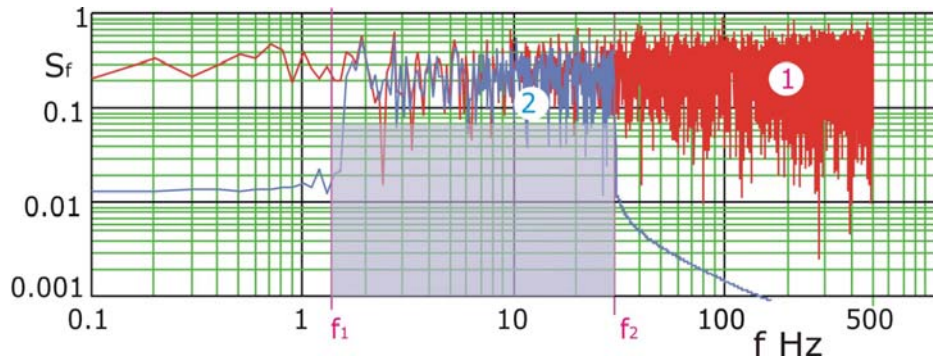


Fig.3.6. Ilustrarea filtrării zgomotului alb în banda spectrală $f_1 = 1.5 \text{ Hz}$, $f_2 = 30 \text{ Hz}$.

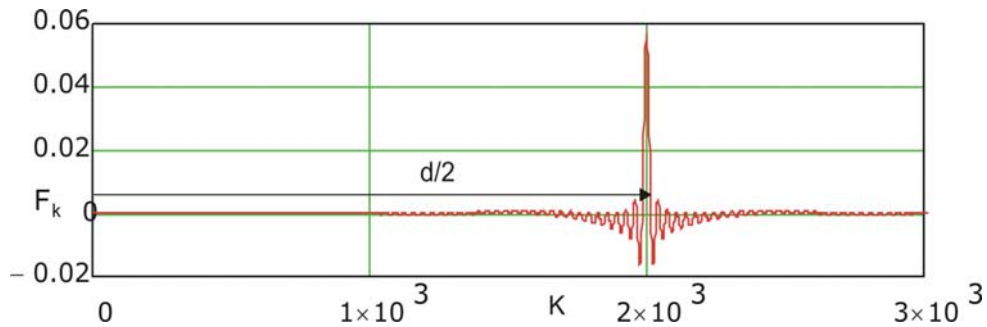


Fig.3.7. Ilustrarea răspunsului FIR la impuls cu întârzierea $d/2 = 2000$ eșantioane.

În figura 3.8., este prezentată diagrama răspunsului y_f filtrului FIR trece bandă, la secvența z_a de zgomot alb.

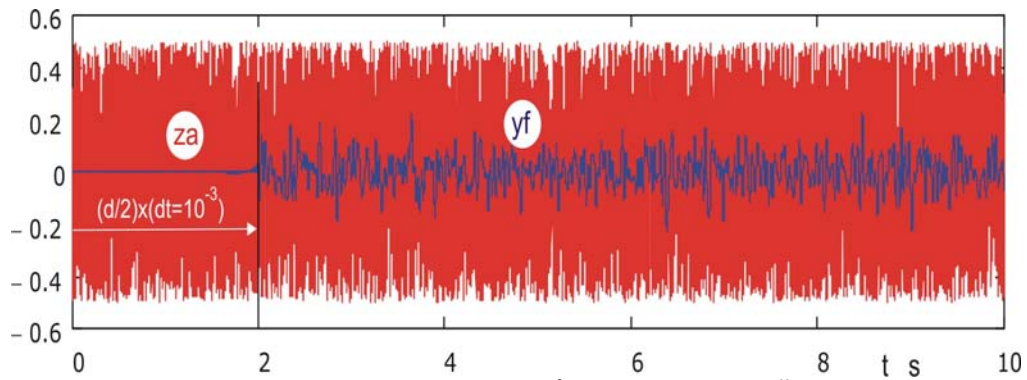


Fig.3.8. Filtrarea secvenței z_a de zgomot alb în banda de frecvență $1.5 \text{ Hz} - 30 \text{ Hz}$.

Pentru simularea unei secvențe de undă elastică $x_s(t)$, cu durata de 8 secunde se aplică asupra secvenței y_f , fereastră cosinusoidală:

$$x_{s_r} := \frac{1}{2} y_{f_{r+1999}} \left(1 - \cos\left(\frac{r \pi}{4000}\right) \right); r := 0..7999, \quad (3.24)$$

reprezentată grafic în figura 3.9.

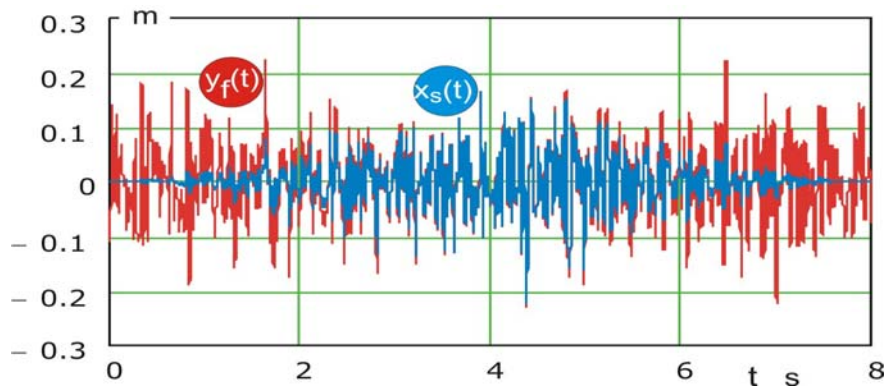


Fig.3.9. Legea de variație a unei deplasare simulate $x_s(t)$.

3.3. Simularea răspunsului sistemului dinamic la excitația prin unda seismică

3.3.1. Simularea prin integrare numerică a sistemului de ecuații diferențiale

Cu lege de excitație simulată (3.24) se construiește vectorul de excitație:

$$\{Q_e(t)\} = k_s \{x_s(t) \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (3.25)$$

iar răspunsul sistemului dinamic (3.9) se poate determina pe cale numerică.

În acest sens, sistemul dinamic se pune sub forma,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} &= [M]^{-1} \left(-[C] \{y(t)\} - [K] \{x(t)\} + \{Q_e(t)\} \right), \\ \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \{y\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

sau într-o formă discretă iterativă Euler,

$$\begin{aligned} \{y\}^{(i+1)} &= \{y\}^{(i)} + h [M]^{-1} \left(-[C] \{y\}^{(i)} - [K] \{x\}^{(i)} + \{Q_e\}^{(i)} \right), \\ \{x\}^{(i+1)} &= \{x\}^{(i)} + h \{y\}^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.27)$$

cu condițiile inițiale:

$$\{x\}^{(0)} = \{y\}^{(0)} = \{zer\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (3.28)$$

unde h , fiind incrementul de timp al iterației.

Acest algoritm a fost transpus într-un program în Mathcad:

$$w := \begin{cases} y^{(0)} \leftarrow \text{zer} \\ x^{(0)} \leftarrow \text{zer} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{(i+1)} \leftarrow x^{(i)} + h y^{(i)} \\ y^{(i+1)} \leftarrow y^{(i)} + h D \left(-c y^{(i)} - k x^{(i)} + Q e^{(i)} \right) \\ w \leftarrow \text{augment} \left(x, x^{(i)} \right) \end{array} \right. \\ w \end{cases}$$

unde $D = [M]^{-1}$, coloanele matricei w cumulând șirul de vectori $\{x\}^{(i)}$, cuprinzând legile de mișcare $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ și $x_4(t)$ ale celor patru mase, vibrogramele lor fiind date în figura 3.10.

Unda elastică în deplasare simulată $x_5(t)$ durează timp de 8 secunde după timpul în care sunt excitate toate cele patru moduri, după care structura vibrează liber amortizat, după frecvențele modurile sale naturale de vibrații.

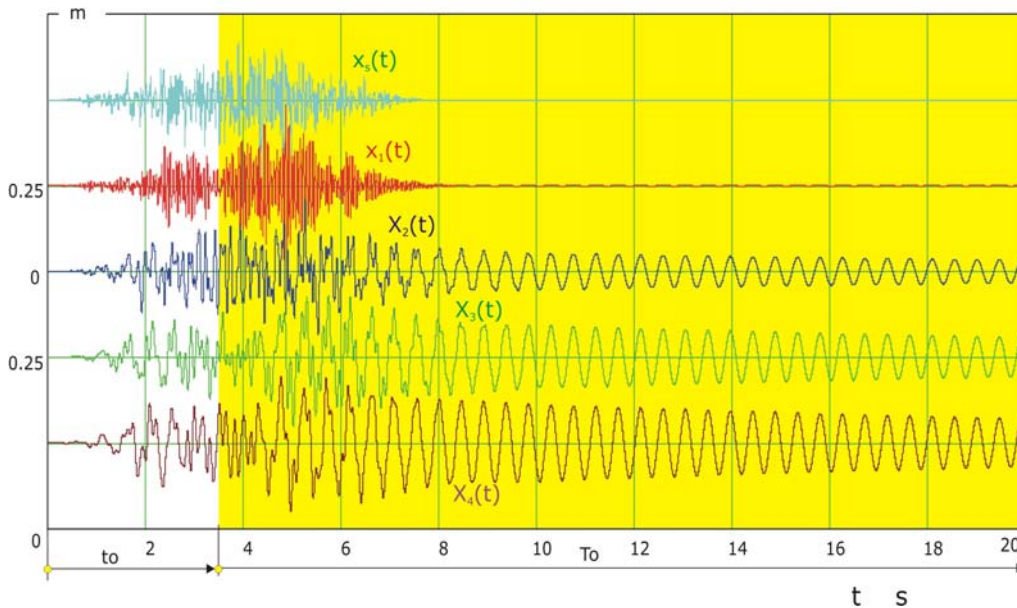


Fig.3.10. Legile deplasărilor $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ ale structurii la o excitație prin unda elastică simulată $x_5(t)$, de durată finită, 8 secunde.

Cum este normal, de-a lungul celor 8 secunde de acțiune a undei elastice sunt excitate toate modurile, după care componentele modale se amortizează în timp,

cele corespunzătoare primului mod cu frecvența de 2.18 Hz, având o durată mai lungă de atenuare.

Spectrele Fourier ale semnalelor sunt procesate, pe întreaga perioadă $T = 20$ secunde a secvenței, după forma discretă,

$$S_m(f_q = q \times \Delta f) = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} x_m(i \times \Delta t) e^{-j \frac{2\pi q \times i}{n} \Delta t}, \quad (3.29)$$

($m = 1, 2, 3, 4$; $q = 0, 1, 2, \dots, n/2$), unde Δt este incrementul de eșantionare în timp, iar Δf este incrementul liniilor spectrale,

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{n \times \Delta t} \quad (3.30)$$

sunt prezentate, împreună cu spectrul $S_s(f_q)$ semnalului unei elastice perturbatoare, în figura 3.11.

Spectrul de excitație $S_s(f_q)$ are cum este normal o formă neregulată, continuă, în timp ce în spectrele semnalelor $S_m(f_q)$ se disting, suficient de clar, vârfurile corespunzătoare modurilor naturale de vibrații ale structurii.

Cele mai evidente sunt cele corespunzătoare primului mod natural, la frecvența de $f_1 = 2.18 \text{ Hz}$, care se atenuază ultimele.

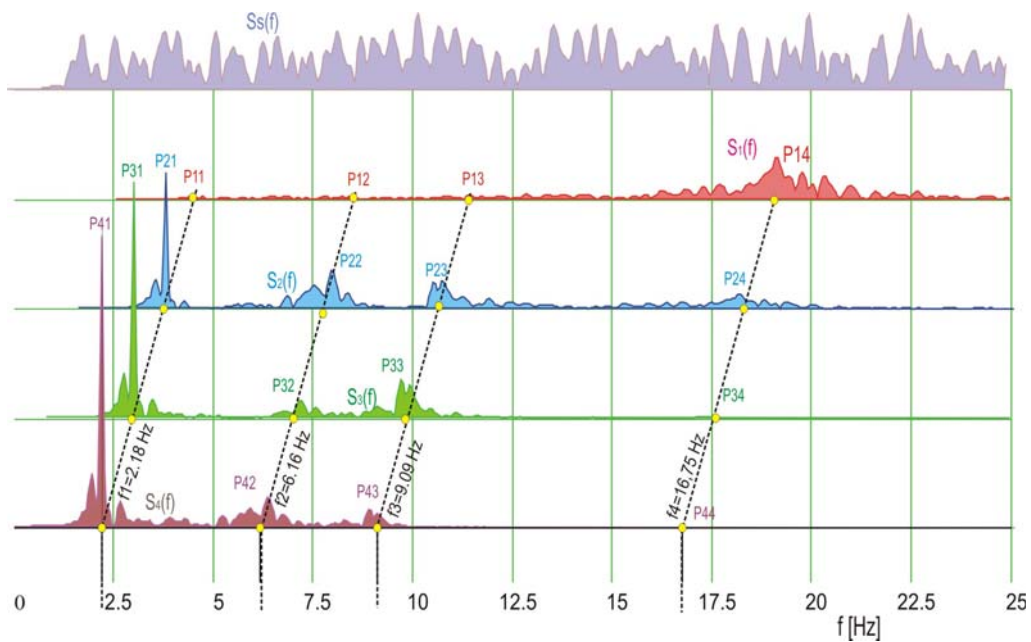


Fig.3.11. Spectrele Fourier ale legilor de mișcare, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ și a unei elastice $x_s(t)$.

Spectrele semnalelor se ordonează mai clar după frecvențele modurilor naturale, pe măsură ce secvența de timp analizată (zona galbenă, fig.3.10.) este deplasată pe abscisa timpului cu t_0 , (fig.3.12.a., b., c.):

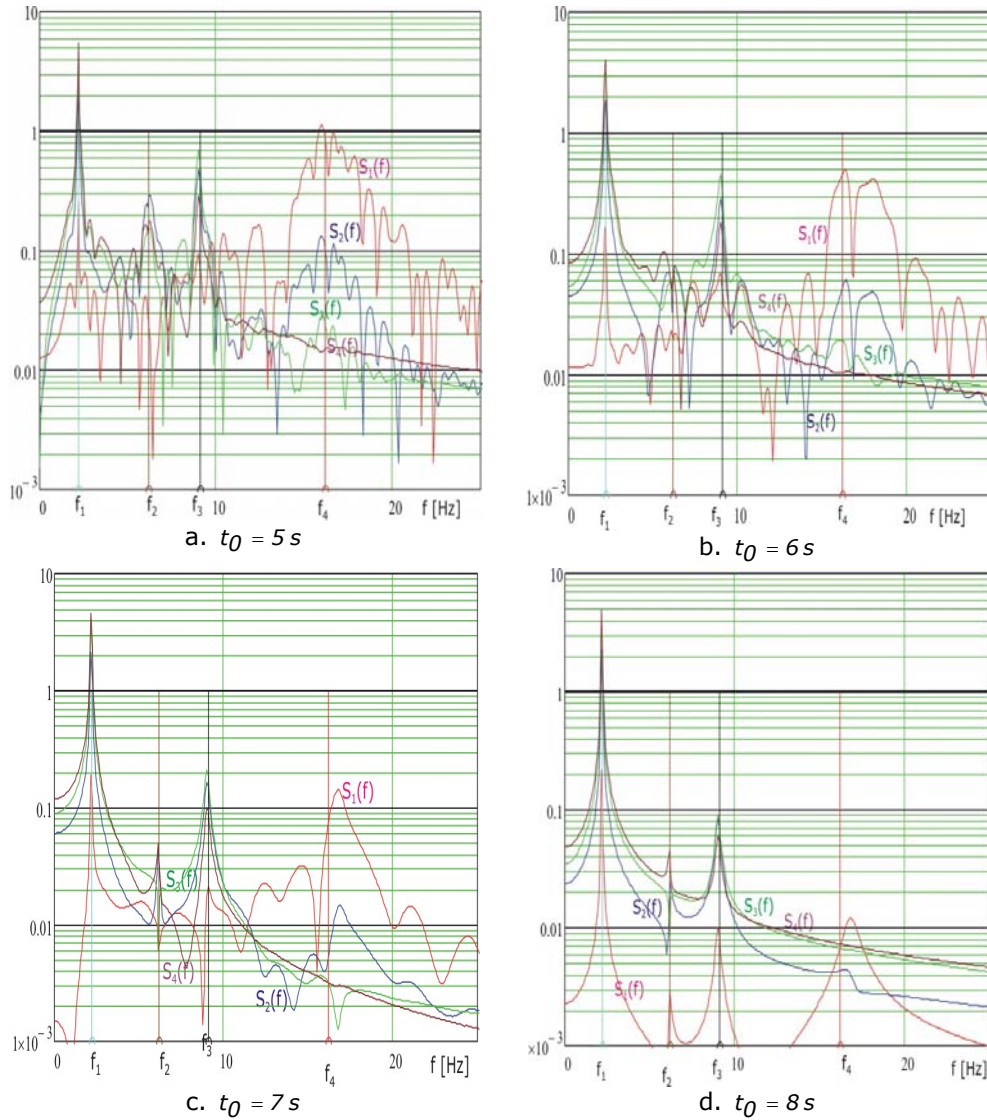


Fig.3.12. Spectrele Fourier pentru diferite secvențe de timp ale unei înregistrări.

Pe măsură ce scade influența excitației, care acționează pe durata primelor 8 secunde, (fig.3.10.), vârfurile modale în spectre devin din ce în ce evidente, (fig.3.12.), cum sunt cele din figura 3.12.d., pentru care $t_0 = 8\text{ s}$, excitația încetează, răspunsul structurii conținând numai componentele mișcărilor vibratorii liber amortizate, [Căplescu, Cioara, (2009.b)].

3.3.2. Forma convolutivă a răspunsului modal

Analitic răspunsul modal al modelului dinamic cu amortizare proporțională, are forma:

$$\begin{aligned} \{x(t)\} = & \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} e^{-\sigma_r t} (C_{1,r} \sin p_r t + C_{2,r} \cos p_r t) + \\ & \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\} \{\psi_r\}^T}{m_r p_r} \int_0^t e^{-\sigma_r (t-\tau)} \{Q_e(\tau)\} \sin p_r (t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.31)$$

unde prima sumă reprezintă răspunsul liber amortizat, iar a doua reprezintă răspunsul forțat la excitația $\{Q_e(\tau)\}$.

$\{\psi_r\}$, ($r = 1, 2, 3, 4$) sunt vectorii proprii care formează coloanele matricei modale (3.19.), în cazul de față având formele numerice:

$$\begin{aligned} \{\psi_1\} = & \begin{Bmatrix} 0.044 \\ 0.472 \\ 0.812 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\psi_2\} = \begin{Bmatrix} -0.105 \\ -1 \\ -0.398 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \{\psi_3\} = & \begin{Bmatrix} -0.096 \\ -0.75 \\ 1 \\ -0.454 \end{Bmatrix}, \quad \{\psi_4\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.111 \\ 0.012 \\ 0.0012 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ținând seama de forma (3.25) a vectorului de excitație, vectorul răspuns $\{x(t)\}$ a sistemului are forma modală:

$$\begin{aligned} \{x(t)\} = & \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} e^{-\sigma_r t} (C_{1,r} \sin p_r t + C_{2,r} \cos p_r t) + \\ & k_s \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\} \{\psi_r\}^T}{m_r p_r} \int_0^t e^{-\sigma_r (t-\tau)} x_s(\tau) \sin p_r (t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Masa modală m_r , a celui de-al r -lea mod, este dată de expresia:

$$m_r = \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}, \quad (3.34)$$

rezultând valorile, $m_1 = 1.879 \text{ kg}$; $m_2 = 2.172 \text{ kg}$; $m_3 = 1.775 \text{ kg}$ și $m_4 = 1.012 \text{ kg}$.

Integrala de convoluție:

$$I_{C_r}(t) = \int_0^t e^{-\sigma_r (t-\tau)} x_s(\tau) \sin p_r (t-\tau) d\tau, \quad (3.35)$$

poate fi trecută sub forma numerică:

$$I_{C_r}(t_i = i \times \Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^i x_s(k) y_r(i-k), \quad (3.36)$$

unde s-a notat:

$$y_r(i-k) = e^{-\sigma_r(i-k)\Delta t} \sin[p_r(i-k)\Delta t]. \quad (3.37)$$

Subrutina, în Mathcad, la care se poate apela pentru calculul integralei de convoluție este:

$$I_{C_r}(i) = \Delta t \text{convol}(x_s, y_r)_i = \Delta t \sum_k x_{s_k} y_{r_{i-k}}. \quad (3.38)$$

Transformata Fourier a vectorului coloană $\{x(t)\}$, pe un interval de timp finit, de la 0 la T_0 , are forma:

$$\{Sx(\omega)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \{x(t)\} e^{-j\omega t} dt \quad (3.39)$$

care aplicată asupra formei modale (3.33) va da suma

$$\{Sx(\omega)\} = \{Sx_L(\omega)\} + \{Sx_F(\omega)\}, \quad (3.40)$$

unde $\{Sx_L(\omega)\}$ este transformata Fourier a primei sume, corespunzătoare răspunsului liber amortizat,

$$\begin{aligned} \{Sx_L(\omega)\} = & \frac{1}{T_0} \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} \left(e^{-\sigma_r T_0} e^{-j\omega T_0} \left[\left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{e^{j p_r T_0}}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} + \right. \right. \\ & \left. \left(-\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{e^{-j p_r T_0}}{-\sigma_r - j(p_r + \omega)} \right] - \left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} - \right. \\ & \left. \left(-\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r - j(p_r + \omega)} \right), \quad (3.41) \end{aligned}$$

iar $\{Sx_F(\omega)\}$ este transformata Fourier a celei de-a doua sume, corespunzătoare răspunsului forțat,

$$\{Sx_F(\omega)\} = k_s Sx_s(\omega) \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\} \psi_{r,1}}{m_r p_r} S_r(\omega), \quad (3.42)$$

$Sx_s(\omega)$ fiind transformata Fourier a semnalului de excitație, dat prin legea de deplasare a unei elastice $x_s(t)$, iar:

$$S_r(\omega) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(e^{-\sigma_r t} \sin p_r t \right) e^{-j\omega t}, \quad (3.43)$$

care prin integrare are forma,

$$\begin{aligned} S_r(\omega) = & \frac{1}{2jT_0} e^{-\sigma T_0} e^{-j\omega T_0} \left[\frac{e^{j p_r T_0}}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} + \frac{e^{-j p_r T_0}}{-\sigma_r + j(p_r + \omega)} \right] - \\ & \frac{1}{2jT_0} \left[\frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} + \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r + \omega)} \right]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Analizând cele două forme spectrale (3.41) și (3.44) termenii dominanți sunt cei multiplicați prin termenii $\frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)}$, care în jurul valorii $\omega \approx p_r$, au valorile maxime:

$$\lim_{\omega \rightarrow p_r} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} = -\frac{1}{\sigma_r}. \quad (3.45)$$

Cum $p_r \gg \sigma_r$ înseamnă că ceilalți termeni $\frac{1}{-\sigma_r + j(p_r + \omega)}$ din formele spectrale (3.41) și (3.44) pentru care:

$$\lim_{\omega \rightarrow p_r} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r + \omega)} = -\frac{1}{\sigma_r + 2jp_r}, \quad (3.46)$$

pot fi neglijați, astfel încât (3.41) și (3.44) se pot simplifica la formele:

$$\{S x_L(\omega)\} \approx \frac{1}{T_0} \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} \left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} \left(\frac{1}{e^{\sigma_r T_0}} e^{-j\omega T_0} - 1 \right) \quad (3.41')$$

și

$$S_r(\omega) \approx -\frac{1}{2jT_0} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} \left[\frac{1}{e^{\sigma_r T_0}} e^{j(p_r - \omega)T_0} - 1 \right]. \quad (3.44')$$

În continuare, pentru un produs $\sigma_r T_0 \geq 2.3$, raportul $\frac{1}{e^{\sigma_r T_0}} \leq 0.1$, ceea ce permite o nouă simplificare a celor două forme spectrale:

$$\{S x_L(\omega)\} \approx -\frac{1}{T_0} \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} \left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} \quad (3.41'')$$

și

$$S_r(\omega) \approx -\frac{1}{2jT_0} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)}. \quad (3.44'')$$

În aceste condiții vectorul spectru (3.40) devine:

$$\begin{aligned} \{S x(\omega)\} &= -\frac{1}{T_0} \sum_{r=1}^N \{\psi_r\} \left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} - \\ &\frac{1}{2jT_0} k_S S_{X_S}(\omega) \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\} \psi_{r,1}}{m_r p_r} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)}, \end{aligned} \quad (3.40')$$

iar spectrul uneia dintre cele patru legi de mișcare $x_i(t)$, ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$\begin{aligned} S x_i(\omega) &= -\frac{1}{T_0} \sum_{r=1}^N \psi_{r,i} \left(\frac{C_{1r}}{2j} + \frac{C_{2r}}{2} \right) \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)} - \\ &\frac{1}{2jT_0} k_S S_{X_S}(\omega) \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{r,i} \psi_{r,1}}{m_r p_r} \frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Deci, modurile naturale de vibrații influențează ambele componente, liberă și forțată prin factorul $\frac{1}{-\sigma_r + j(p_r - \omega)}$, puternic valoric în vecinătatea pulsației proprii $\omega \approx p_r$.

Totuși, spectrul perturbației Sx_s multiplică componentele din suma a doua, variațiile nivelului său destorsionând spectrul semnalului, așa cum se observă pregnant la spectrele din figura 3.12.a., unde procesarea transformatei Fourier s-a făcut pe intervalul $T = 20$ secunde, din care în primele 8 secunde excitația $x_s(t)$ este prezentă. În lipsa excitației, după secunda 8 a înregistrării, în spectru rămâne prima componentă, cea corespunzătoare vibrațiilor libere amortizate, care se remarcă printr-un spectru cu vârfuri distincte, figura 3.12.d.

3.4. Recondiționarea semnalelor înregistrate saturat

Presupunând că semnalul mișcării vibratorii $x_3(t)$ este înregistrat saturat cu nivelul de saturare $n_s = \pm 0.1 \text{ m}$ (fig.3.13.), un zoom pe intervalul $4.6 - 5 \text{ s}$, fiind prezentat în figura 3.14.

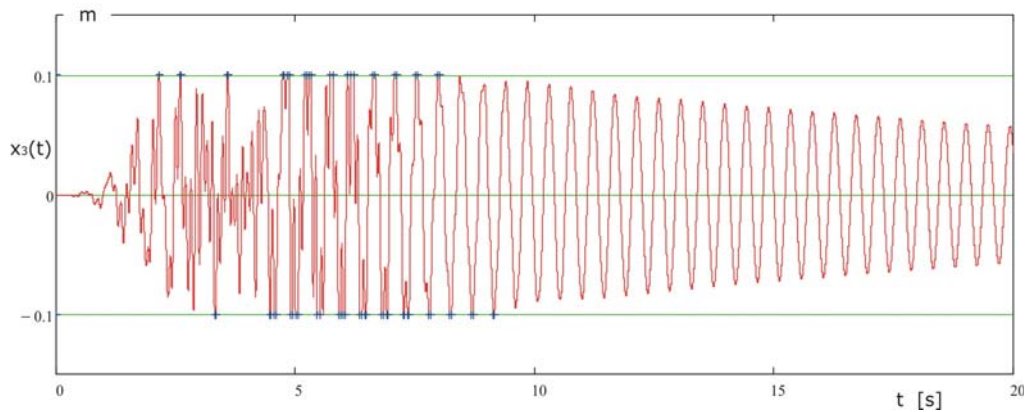


Fig.3.13. Ilustrarea unui semnal de vibrații $x_3(t)$ înregistrat saturat.

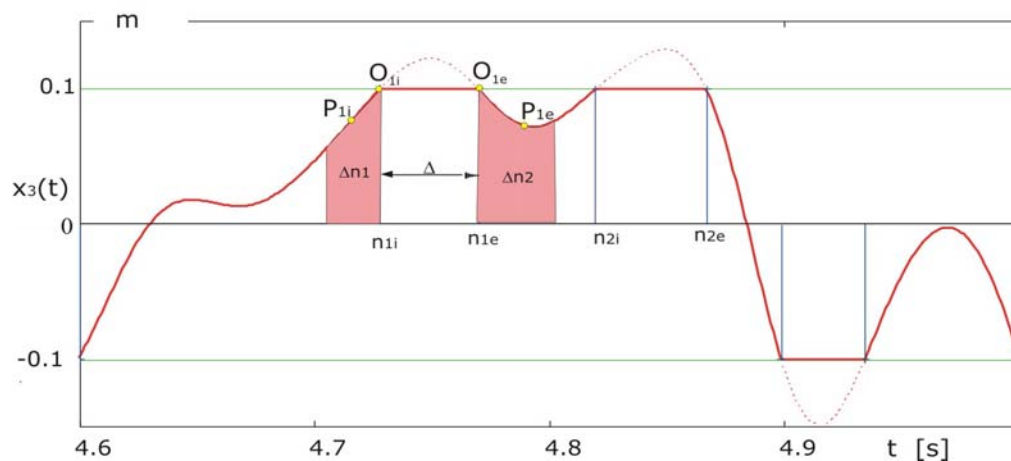


Fig.3.14. Zoom între secundele $4.6 - 5$ ale înregistrării din figura 3.13.

Prima saturare a semnalului se produce la timpul $t_{1j} = n_{1j} \times \Delta t$, n_{1j} fiind indicele eșantionului la care începe limitarea, la nivelul $a = 0.1 m$ a semnalului $x_3(t)$.

Spectrul Fourier, (fig.3.15.a.), al semnalului saturat, procesat pe intervalul $T = 20 s$ relevă distorsiuni semnificative față de spectrul aceluiași semnal procesat, pe intervalul început la $t_0 = 8 s$, unde semnalul de vibrații conține numai componentele modale liber amortizate, clar reprezentate în spectru prin vârfurile V_1 și V_3 , cunoscute ca vârfuri rezonante și prin vârfurile negative V_2 și V_4 , cunoscute ca vârfuri antirezonante.

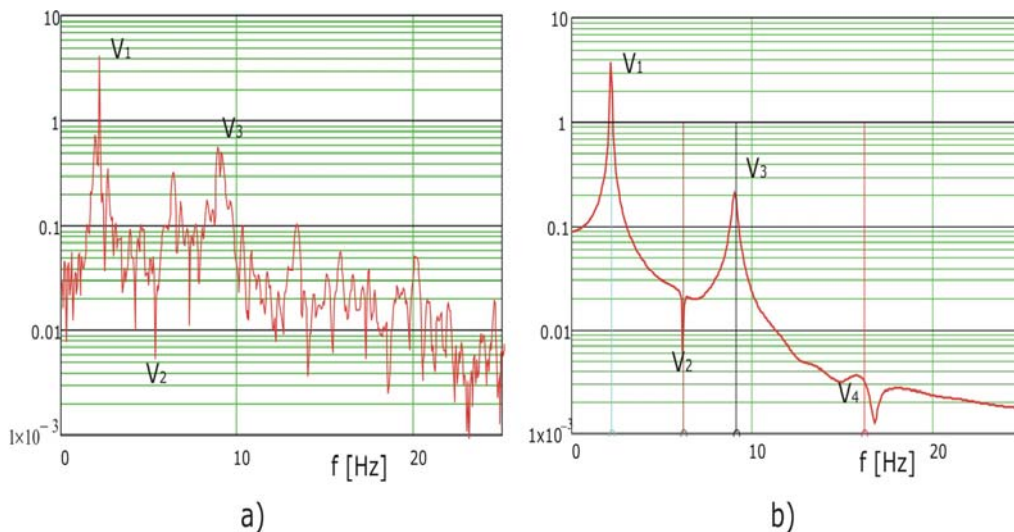


Fig.3.15. Spectrele semnalului vibrației $x_3(t)$: a. saturat, procesat pe întreaga secvență $T = 20 s$; b. procesat pe intervalul corespunzător componentelor liber amortizate.

Din cele două spectre rezultă că nivelurile semnificative sunt componentele modale 1 și 3, de aceea răspunsul modal al sistemului devine din relația (3.33):

$$\begin{aligned}
 x_3(t) = & \psi_{1,3} e^{-\sigma_1 t} (C_{1,1} \sin p_1 t + C_{2,1} \cos p_1 t) + \\
 & \psi_{2,3} e^{-\sigma_3 t} (C_{1,3} \sin p_3 t + C_{2,3} \cos p_3 t) + \\
 & \frac{\psi_{3,1} \psi_{1,1}}{m_1 p_1} k_s \int_0^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} x_s(\tau) \sin p_1(t-\tau) d\tau + \\
 & \frac{\psi_{3,1} \psi_{1,3}}{m_3 p_3} k_s \int_0^t e^{-\sigma_3(t-\tau)} x_s(\tau) \sin p_3(t-\tau) d\tau. \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

În majoritatea cazurilor, din înregistrările reale, se pot determina numai parametrii modali: pseudopulsățiile, p_1 și p_3 și factorii de amortizare, σ_1 și σ_3 utilizând algoritmi de prelucrare a semnalelor în domeniile timp și frecvență. Ceilalți parametrii, cum sunt, componentele $\psi_{1,1} \dots \psi_{3,1}$ și masele modale m_1 și m_3 nu pot

fi determinate printr-o simplă înregistrare. La fel, complet necunoscută este excitația prin legea $x_s(t)$ și constanta k_s .

În aceste condiții, forma analitică (3.48) poate fi trecută sub o formă echivalentă

$$x_3(t) = e^{-\sigma_1 t} (C_{0,0} \sin p_1 t + C_{1,0} \cos p_1 t) + e^{-\sigma_3 t} (C_{2,0} \sin p_3 t + C_{3,0} \cos p_3 t) + \int_0^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} y_{1s}(\tau) \sin p_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\sigma_3(t-\tau)} y_{2s}(\tau) \sin p_3(t-\tau) d\tau, \quad (3.49)$$

unde includ necunoscutele de mai sus răspunsul la acești parametri necunoscuți:

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= \psi_{1,3} C_{1,1}, & C_{1,0} &= \psi_{1,3} C_{2,1}, \\ C_{2,0} &= \psi_{2,3} C_{1,3}, & C_{3,0} &= \psi_{2,3} C_{2,3}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

care definesc condițiile inițiale ale componentelor libere amortizate.

Cum funcțiile:

$$y_{1s}(t) = \frac{\psi_{3,1} \psi_{1,1}}{m_1 p_1} x_s(t), \quad y_{3s}(t) = \frac{\psi_{3,1} \psi_{1,3}}{m_3 p_3} x_s(t) \quad (3.51)$$

se pot scrie ca o relație de proporționalitate:

$$y_{3s}(t) = c y_{1s}(t), \quad c = \frac{\psi_{3,1} \psi_{1,3} m_1 p_1}{\psi_{3,1} \psi_{1,1} m_3 p_3}. \quad (3.52)$$

Cele două integrale de convoluție pot fi scrise sub forma desfășurată:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} y_{1s}(\tau) \sin p_1(t-\tau) d\tau &= e^{-\sigma_1 t} \left\{ \sin p_1 t \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_1 \tau d\tau - \right. \\ &\left. \cos p_1 t \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_1 \tau d\tau \right\}, \\ \int_0^t e^{-\sigma_3(t-\tau)} y_{3s}(\tau) \sin p_3(t-\tau) d\tau &= e^{-\sigma_3 t} \left\{ \sin p_3 t \int_0^t e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_3 \tau d\tau - \right. \\ &\left. \cos p_3 t \int_0^t e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_3 \tau d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

cea ce scoate în evidență un proces de filtrare a funcției $y_{1s}(t)$, după componentele periodice de pulsații p_1 și p_3 .

Această funcție a excitației este complet necunoscută și de aceea trebuie considerată ca o funcție de probă. O primă formă ar fi una polinomială de timp:

$$y_{1s}(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots,$$

originea timpului, $t = 0$, fiind luată în momentul în care semnalul e limitat la nivelul a de saturare, în punctul O_{1i} , (fig.3.14.), saturație ce se menține la același nivel până în punctul O_{1e} , unde semnalul intră sub limita de saturație.

Forma desfășurată a semnalului are forma:

$$\begin{aligned}
 x_3(t) = & e^{-\sigma_1 t} (C_{0,0} \sin p_1 t + C_{1,0} \cos p_1 t) + e^{-\sigma_3 t} (C_{2,0} \sin p_3 t + C_{3,0} \cos p_3 t) + \\
 & e^{-\sigma_1 t} \left\{ \sin p_1 t \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_1 \tau d\tau - \cos p_1 t \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_1 \tau d\tau \right\} + \\
 & c e^{-\sigma_3 t} \left\{ \sin p_3 t \int_0^t e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_3 \tau d\tau - \cos p_3 t \int_0^t e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_3 \tau d\tau \right\}, (3.54)
 \end{aligned}$$

care este necesară pentru determinarea, prin identificare, a parametrilor $C_{0,0}$, $C_{1,0}$, $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, f_0 , f_1 , f_2 , ... c . Identificarea parametrilor se face prin eșantioane luate pe cele două ramuri laterale zonei $O_{1i} O_{1e}$ de saturație.

La $t = 0$, în punctul O_{1i} , semnalul:

$$x_3(0) = C_{1,0} + C_{3,0} \quad (3.55)$$

este neafectat de termenul integralei de convoluție care implică cunoașterea legii de variație $y_{1s}(t)$ a excitației, complet necunoscută.

Legea de variație a semnalului $x_3(t)$ pe axa negativă a timpului la $-t$ în urmă

$$\begin{aligned}
 x_3(-t) = & e^{-\sigma_1(-t)} (C_{0,0} \sin p_1(-t) + C_{1,0} \cos p_1(-t)) + \\
 & e^{-\sigma_3(-t)} (C_{2,0} \sin p_3(-t) + C_{3,0} \cos p_3(-t)) + \\
 & e^{-\sigma_1 t} \left\{ \sin p_1(-t) \int_0^{-t} e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_1 \tau d\tau - \right. \\
 & \left. \cos p_1(-t) \int_0^{-t} e^{\sigma_1 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_1 \tau d\tau \right\} + \\
 & c e^{-\sigma_3 t} \left\{ \sin p_3(-t) \int_0^{-t} e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \cos p_3 \tau d\tau - \right. \\
 & \left. \cos p_3(-t) \int_0^{-t} e^{\sigma_3 \tau} y_{1s}(\tau) \sin p_3 \tau d\tau \right\}. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Sub forma numerică semnalul $x_3(t)$ este dat de un șir de n eșantioane x_{3ik} , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), cu incrementul de eșantionare Δt . Utilizând secvențele de program de mai jos se determină două fișiere $N_{1i} = (n_{1i}, n_{2i}, n_{3i}, \dots, n_{qi})$, și $N_{1e} = (n_{1e}, n_{2e}, n_{3e}, \dots, n_{qe})$, în care n_{ki} este indicele primului eșantion corespunzător celui de-al k -lea vârf saturat, la nivelul a , iar n_{ke} corespunzător ultimului eșantion din același vârf saturat.

$$N_{1i} := \left. \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 5..n-5 \\ \text{if } x_{3k} < a \wedge x_{3k+1} = a \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s+1 \\ u_s \leftarrow k \end{array} \right. \\ u \end{array} \right\} , \quad N_{1e} := \left. \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 2..n-1 \\ \text{if } x_{3k} < a \wedge x_{3k-1} = a \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s+1 \\ u_s \leftarrow k \end{array} \right. \\ u \end{array} \right\} .$$

Astfel, pentru primul vârf saturat (fig.3.15.), tăierea semnalului, prin saturare la nivelul $a = 0.1 m$, începe la eșantionul $n_{1i} = 4727$ (punct Q_{1i}) și se termină la eșantionul $n_{1e} = 4770$, (punct Q_{1e}), deci 43 eșantioane sunt tăiate și valorile lor reale trebuie determinate. Pentru următorul vârf din partea superioară rezultă; $n_{1i} = 4819$ și $n_{1e} = 4867$.

În mod similar se determină și indicii corespunzători vârfurilor limitate prin saturare de la partea negativă a semnalului, $a = -0.1 m$.

Pentru identificarea expresiilor analitice (3.54) și (3.56) se va trece la formele discrete:

$$\begin{aligned} x_k = x_{3n_{1i-k}} &= e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} \left(C_{0,0} \sin(p_1(-k)\Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1(-k)\Delta t) \right) + \\ &e^{-\sigma_3 k \Delta t} \left(C_{2,0} \sin(p_3 k \Delta t) + C_{3,0} \cos(p_3 k \Delta t) \right) + \\ \Delta t &\left\{ \sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \left(f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots \right) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ &\left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \left(f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots \right) \sin(p_1 s \Delta t) \right\} + \\ c \Delta t &\left\{ \sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} \left(f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots \right) \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\ &\left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} \left(f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots \right) \sin(p_3 s \Delta t) \right\}, \quad (3.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{k+\Delta n_1} = x_{3n_1+\Delta+k} &= e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} (C_{0,0} \sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t)) + \\
 &e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} (C_{2,0} \sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) + C_{3,0} \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t)) + \\
 \Delta t &\left\{ \sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
 \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) &\sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_1 s \Delta t) \left. \right\} + \\
 c \Delta t &\left\{ \sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
 \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) &\sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_3 s \Delta t) \left. \right\},
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

unde necunoscute sunt elementele unui vector matrice coloană,

$$\{C\} = \{C_{0,0} \quad C_{1,0} \quad C_{2,0} \quad C_{3,0} \quad f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad cf_0 \quad cf_1 \quad cf_2\}^T, \tag{3.59}$$

care se determină din sistemul de ecuații liniare

$$[D]_{(n \times 10)} \{C\}_{(10 \times 1)} = \{X\}_{(n \times 1)} \tag{3.60}$$

format din șirul de relații (3.57) și (3.58) pentru n eșantioane x_k luate din cele două benzi laterale benzii Δ de saturare: Δn_1 , (stânga) și Δn_2 (dreapta), $n = \Delta n_1 + \Delta n_2$. Elementele matricei $[D]$ și ale vectorului $\{X\}$, corespunzătoare benzii din dreapta sunt:

$$D_{k,0} = e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} \sin(p_1(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,1} = e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} \cos(p_1(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,2} = e^{-\sigma_3(-k)\Delta t} \sin(p_3(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,3} = e^{-\sigma_3(-k)\Delta t} \cos(p_3(-k)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,0} = e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} \sin(p_1(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,1} = e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,2} = e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} \sin(p_3(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,3} = e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t), \quad (3.61.a)$$

$$D_{k,4} = -\Delta t \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k+n_1,4} = \Delta t \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \quad (3.61.b)$$

$$D_{k,5} = -\Delta t^2 \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right],$$

$$\cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \left. \right], \quad (3.61.c)$$

$$\begin{aligned}
D_{k,6} &= -\Delta t^3 \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,6} &= \Delta t^3 \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \quad (3.61.d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k,7} &= -\Delta t \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,7} &= \Delta t \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \quad (3.61.e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k,8} &= -\Delta t^2 \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right],
\end{aligned}$$

$$D_{k+n_1,8} = \Delta t^2 \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \quad (3.61.f)$$

$$D_{k,9} = -\Delta t^3 \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k+n_1,9} = \Delta t^3 \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \quad (3.61.g)$$

$$\begin{aligned} X_{k,0} &= x_{3n_1+k}, \\ X_{k+n_1,0} &= x_{3n_2+k}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Rezolvarea sistemului suprabundent (3.60) se rezolvă prin metoda celor mai mici pătrate acesta devenind, prin multiplicare la stânga cu $[D]^T$,

$$[E]_{(10 \times 10)} \{C\}_{(10 \times 1)} = \{Y\}_{(10 \times 1)} \quad (3.63)$$

unde,

$$\begin{aligned} [E]_{(10 \times 10)} &= [D]_{(10 \times n)}^T [D]_{(n \times 10)} \\ \{Y\}_{(10 \times 1)} &= [D]_{(10 \times n)}^T \{X\}_{(n \times 1)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Vectorul matrice coloană al necunoscutelor poate fi partiționat în trei vectori:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \\ c\{f\} \end{Bmatrix}, \quad (3.65)$$

unde

$$\begin{aligned} \{c_0\} &= \{C_{0,0} \quad C_{1,0} \quad C_{2,0} \quad C_{3,0}\}^T, \\ \{f\} &= \{f_0 \quad f_1 \quad f_2\}^T, \end{aligned} \quad (3.66)$$

ceea ce face ca și sistemul (3.60) să poată fi partiționat:

$$\begin{bmatrix} [E_{1,1}] & [E_{1,2}] & [E_{1,3}] \\ [E_{2,1}] & [E_{2,2}] & [E_{2,3}] \\ [E_{3,1}] & [E_{3,2}] & [E_{3,3}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \\ c\{f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{y_1\} \\ \{y_2\} \\ \{y_3\} \end{Bmatrix}, \quad (3.67)$$

care desfășurat devine:

$$\begin{cases} [E_{1,1}]_{(4 \times 4)}\{c_0\} + [E_{1,2}]_{(4 \times 3)}\{f\} + c[E_{1,3}]_{(4 \times 3)}\{f\} = \{y_1\} \\ [E_{2,1}]_{(3 \times 4)}\{c_0\} + [E_{2,2}]_{(3 \times 3)}\{f\} + c[E_{2,3}]_{(3 \times 3)}\{f\} = \{y_2\} \\ [E_{3,1}]_{(3 \times 4)}\{c_0\} + [E_{3,2}]_{(3 \times 3)}\{f\} + c[E_{3,3}]_{(3 \times 3)}\{f\} = \{y_3\} \end{cases} \quad (3.68)$$

Din ultima ecuație se poate scrie:

$$c\{f\} = [E_{3,3}]^{-1}(\{y_3\} - [E_{3,1}]\{c_0\} - [E_{3,2}]\{f\}), \quad (3.69)$$

care introdus în primele două ecuații ale sistemului (3.63) conduce la sistemul final

$$\begin{bmatrix} [F_{1,1}] & [F_{1,2}] \\ [F_{2,1}] & [F_{2,2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Z_1\} \\ \{Z_2\} \end{Bmatrix}, \quad (3.70)$$

unde:

$$\begin{aligned} [F_{1,1}] &= [E_{1,1}] - [E_{1,3}][E_{3,3}]^{-1}[E_{3,1}] \\ [F_{1,2}] &= [E_{1,2}] - [E_{1,3}][E_{3,3}]^{-1}[E_{3,2}] \\ [F_{2,1}] &= [E_{2,1}] - [E_{2,3}][E_{3,3}]^{-1}[E_{3,1}] \\ [F_{2,2}] &= [E_{2,2}] - [E_{2,3}][E_{3,3}]^{-1}[E_{3,2}] \\ \{Z_1\} &= \{y_1\} - [E_{1,3}][E_{3,3}]^{-1}\{y_3\} \\ \{Z_2\} &= \{y_2\} - [E_{2,3}][E_{3,3}]^{-1}\{y_3\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

În final, se determină, din (3.70), vectorul necunoscutelor:

$$\begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{1,1}] & [F_{1,2}] \\ [F_{2,1}] & [F_{2,2}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{Z_1\} \\ \{Z_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

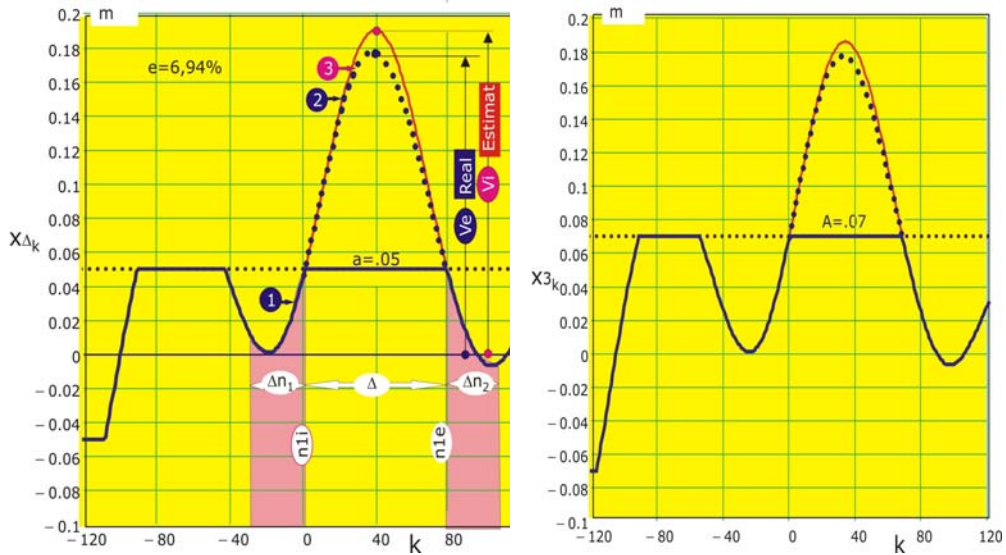
și, din (3.69), coeficientul de proporționalitate:

$$c = \frac{1}{\{f\}^T\{f\}} \{f\}^T [E_{3,3}]^{-1} (\{y_3\} - [E_{3,1}]\{c_0\} - [E_{3,2}]\{f\}). \quad (3.73)$$

Cele Δ eșantioane predictibile, din banda Δ ale semnalului limitat la valoarea a pot fi acum determinate utilizând suma modală:

$$\begin{aligned}
 x_{\Delta k} = & e^{-\sigma_1 k \Delta t} (C_{0,0} \sin(p_1 k \Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1 k \Delta t)) + \\
 & e^{-\sigma_3 k \Delta t} (C_{2,0} \sin(p_3 k \Delta t) + C_{3,0} \cos(p_3 k \Delta t)) + \\
 \Delta t \left[& \sin(p_1 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_1(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
 & \left. \cos(p_1 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_1(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_1 s \Delta t) \right] + \\
 c \Delta t \left[& \sin(p_3 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
 & \left. \cos(p_3 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_3 s \Delta t) \right]. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Precizia de estimare în reconstituirea vârfurilor limitate prin saturare este ilustrată în figura 3.16., unde este simulată limitarea aceluiasi vârf, la șase niveluri: $a = 0.05 \text{ m}$, $a = 0.07 \text{ m}$, $a = 0.09 \text{ m}$, $a = 0.12 \text{ m}$, $a = 0.14 \text{ m}$ și $a = 0.16 \text{ m}$.



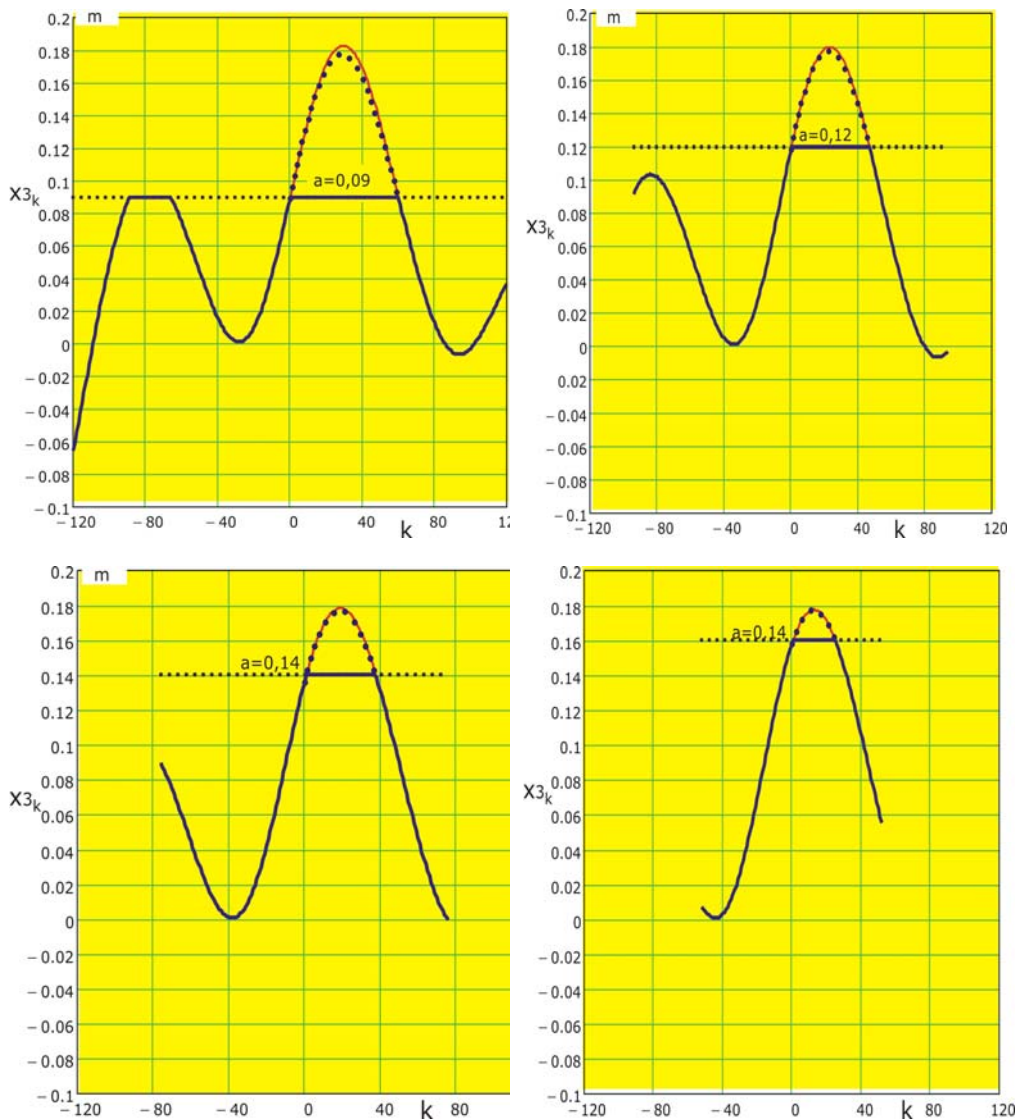


Fig.3.16. Ilustrarea procesului de recondiționare a unui vârf limitat prin saturare la șase limite: $a = 0.05 m, a = 0.07 m, a = 0.09 m, a = 0.12 m, a = 0.14 m, a = 0.16 m$.

Precizia de estimare a nivelului v_j al vârfului limitat la valoarea a față de nivelul v_e real este dată prin eroarea procentuală de estimare:

$$e = \frac{v_e - v_j}{v_e} \times 100 . \quad (3.75)$$

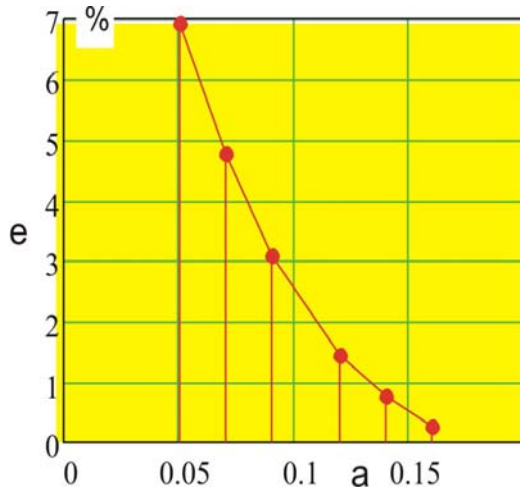


Fig.3.17. Eroarea de estimare a vârfului în funcție de nivelul de saturație a .

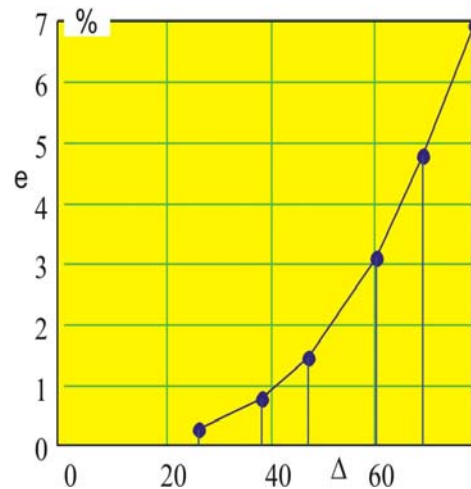


Fig.3.18. Eroarea de estimare a vârfului în funcție de lățimea benzii Δ .

Cum se poate observa din figurile 3.16., 3.17. și 3.18., eroarea de estimare a vârfului real, (ramura cu linia albastră punctată - figurile 3.16.), prin vârful estimat prin identificare v_j (ramura cu linia roșie continuă - figurile 3.16.), este maximă, de $\approx 7\%$, pentru o valoare a nivelului $a = 0.05 m$ și scade o dată cu creșterea nivelului a (fig.3.17.) sau cu micșorarea lățimii benzii Δ , (fig.3.18.). Acest fapt este explicabil, prin faptul că la o valoare mare a lui Δ termenul al doilea din ecuația de estimare (3.74) devine mai semnificativ, sumarea convolutivă extinzându-se pe o bandă mai largă, excitația modelată prin polinomul $f_0 + f_1(s = k)\Delta t + f_2((s = k)\Delta t)^2$ fiind, în acest caz grosieră, mai ales pentru banda dreaptă, unde acesta are forma $f_0 + f_1(s = k + \Delta)\Delta t + f_2((s = k + \Delta)\Delta t)^2$, care, prin factorul de translație, Δ , devine și mai grosier.

Totuși, estimarea cu o eroare de sub 7% poate fi acceptabilă în majoritatea cazurilor practice, unde este necesar de a se stabili gradul de periculozitate al unui eveniment unic, cum este cel al unui seism. De menționat este faptul că rezultatele de mai sus au fost obținute luând în considerare benzi laterale de lățimi egale, $\Delta n_1 = \Delta n_2$, (fig.3.16.a.).

Pentru mărirea preciziei de estimare se alege banda din stânga mult mai lată decât cea din dreapta (fig.3.19.). În acest mod s-a redus ponderea termenului convolutiv corespunzător benzii $\Delta + \Delta n_2$, în consecință reducându-se eroarea de estimare la $e = 1.835\%$.

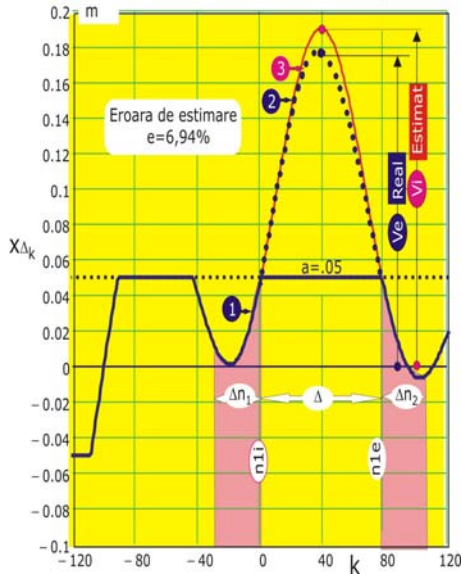


Fig.3.16.a. Estimarea vârfului cu eșantioane din două benzi laterale egale $\Delta n_1 = \Delta n_2 = 30$.

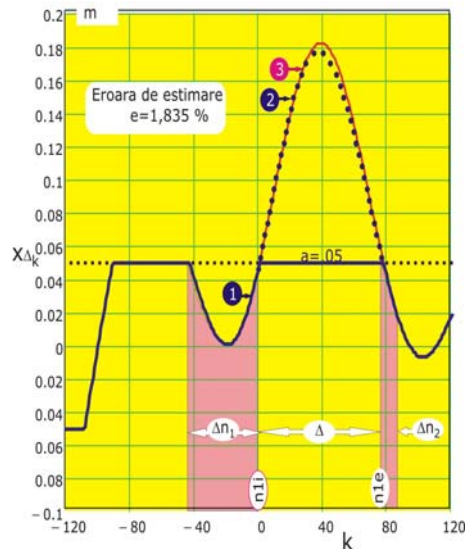


Fig.3.19. Estimarea vârfului cu eșantioane din două benzi laterale de lățimi diferite $\Delta n_1 = 43$ și $\Delta n_2 = 10$.

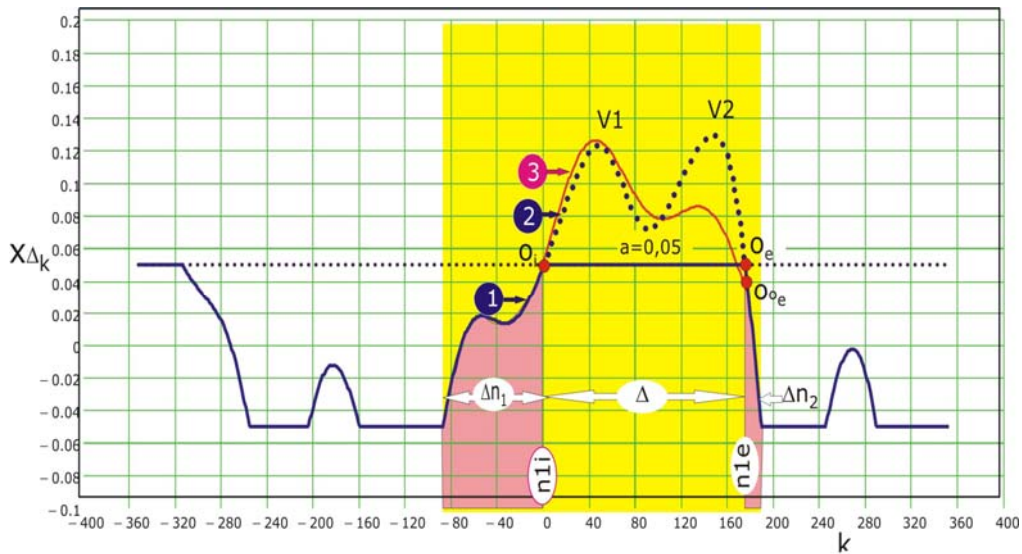


Fig.3.20. Estimarea a două vârturi ascunse peste limita de saturație.

O dificultate majoră de estimare apare în cazul în care limitarea semnalului prin saturare ascunde două vârturi apropiate v_1 și v_2 (fig.3.20.), care nu se văd pe înregistrarea semnalului. Banda de limitare Δ este lată, $\Delta = 175$, iar banda laterală stânga $\Delta n_1 = 83$ și banda laterală dreapta $\Delta n_2 = 14$, relativ îngustă.

Cu toate acestea, estimarea primului vârf este bună, iar a celui de-al doilea satisfăcătoare. Estimarea poate fi îmbunătățită mărinđ gradul polinomului de predicție a excitației, de exemplu:

$$x_s = f_0 + f_1(s \Delta t) + f_2(s \Delta t)^2 + f_3(s \Delta t)^3, \quad (3.76)$$

în acest caz, vectorul necunoscutelor:

$$\{f\} = \{f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4\}^T. \quad (3.77)$$

3.5. Studiu de caz. Recondiționarea semnalelor de vibrații înregistrate saturat pe structura unui cazan de abur

3.5.1. Descrierea cazului

Din motive de dilatare termică un cazan de abur C_a , (fig.3.22.) are o construcție specială. Întreaga sa greutate este suportată, la partea superioară, de o construcție metalică auxiliară C_{ma} , prin intermediul unui număr mare de tiranți T_r . Aceasta permite ca la celălalt capăt corpul cazanului să fie liber, iar dilatarea termică de $1.5 - 2 m$, (pentru un cazan lung de $92 m$), ce se dezvoltă de la starea rece la cea caldă de funcționare normală, să nu fie împiedicată, evitându-se, astfel, introducerea unor tensiuni insuportabile pentru structura cazanului.

În acest mod de prindere, corpul cazanului poate executa mișcări pendulare, iar dacă sursele de excitație sunt însemnate pot cauza mișcări pendulare de niveluri mari având ca rezultat contacte dinamice cu construcția metalică auxiliară C_{ma} , contacte ce trebuie evitate deoarece pot duce la deteriorări locale ale structurii corpului cazanului.

O sursă majoră de excitație o constituie o undă seismică, cum este cea produsă de o escavație, prin explozie, a șistului, sursa energetică a cazanului. Concomitent, se dezvoltă și o undă de presiune, care acționează pe suprafața cazanului.

Această problemă s-a pus la Centrala Electrică Anina, necesitând determinarea nivelurilor de vibrații ale structurii cazanului și ale construcției auxiliare de susținere, vibrații provocate prin undele seismice și de presiune, rezultate în urma escavației, prin explozie, a șistului, cariera fiind situată la o distanță de numai $300 m$ de amplasamentul cazanului.

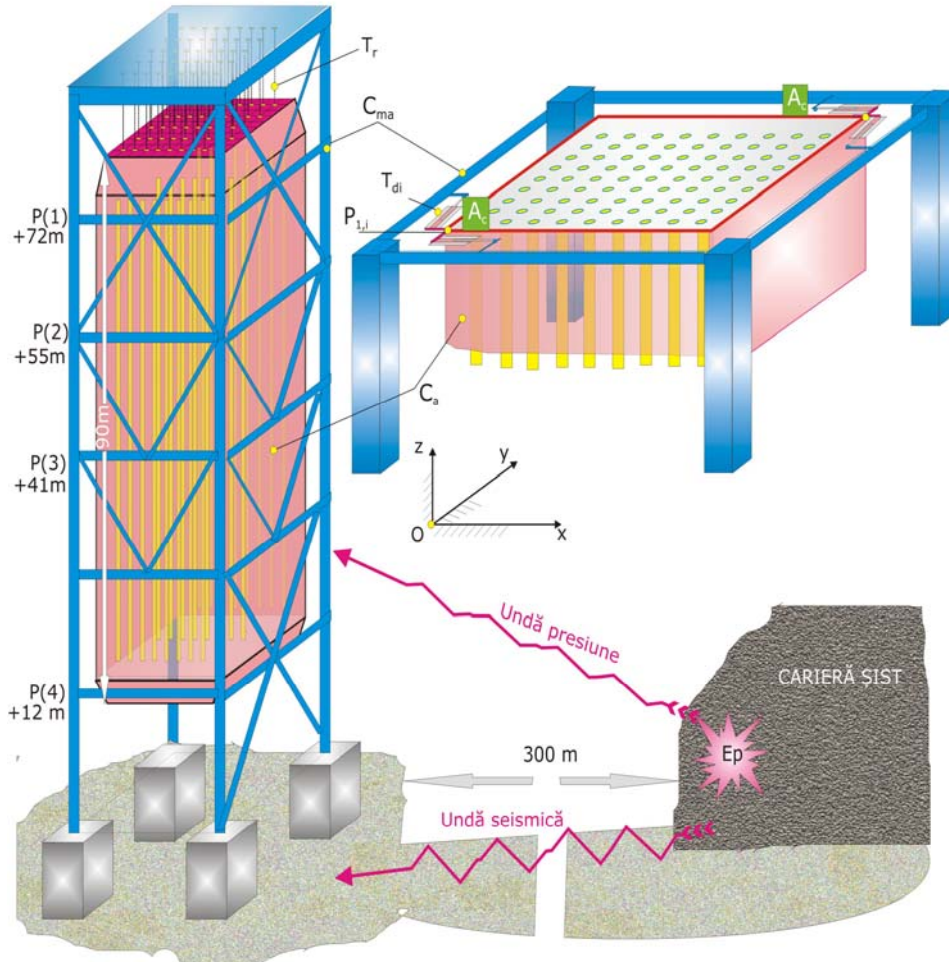


Fig.3.21. Ilustrarea construcției unui cazan de abur.

Rezultatele cercetărilor experimentale, efectuate de Laboratorul de Testări și Cercetări pentru Vibrații Mecanice al Universității Politehnica din Timișoara, au fost preluate de proiectantul cazanului, ICPET București, în vederea elaborării unor soluții tehnice de atenuare a nivelurilor de vibrații periculoase structurii cazanului.

Pe baza unui model dinamic, s-a conceput un program experimental, de amplasare a senzorilor de măsurare a vibrațiilor, prin ale căror semnale s-a definit mișcarea generală a ansamblului cazan – construcție metalică auxiliară, [Silaș, Cioara, Gligor, Toader, Bacria, (1988)].

Astfel, pentru măsurarea mișcărilor absolute ale structurii cazanului s-au amplasat în patru planuri $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ și $P(4)$ câte două accelerometre seismice A_C , biaxiale, cu axele lor de sensibilitate dirijate după axele sistemului fix $Oxyz$. În aceleași planuri au fost amplasate câte patru traductoare de deplasare T_{di} .

Considerând rigide secțiunile transversale ale cazanului, atunci pentru distribuția mișcărilor vibratorii în plan orizontal Oxy este dată legea:

$$\overline{w_P(t)} = \overline{w_O(t)} + \overline{\varphi(t)} \times \overline{r_P(t)}, \quad (3.78)$$

unde $\overline{w_P(t)}$ este vectorul legii de mișcare vibratorii a unui punct curent al secțiunii, $\overline{w_O(t)}$ este vectorul legii de mișcare al unui punct dat, $\overline{\varphi(t)}$ este vectorul legii de rotație vibratorie al secțiunii considerată rigidă, iar $\overline{r_P(t)}$ este vectorul de poziție al punctului P față de O .

Proiecțiile relației (3.78) pe axele sistemului $Oxyz$,

$$\begin{aligned} w_{X_P}(t) &= w_{X_O}(t) - Y_P \varphi(t), \\ w_{Y_P}(t) &= w_{Y_O}(t) + X_P \varphi(t), \end{aligned} \quad (3.79)$$

valabile pentru cele două puncte P_1 și P_2 , în care sunt fixate grupurile de senzori, accelerometre și traductoarele inductive de deplasare, rezultând:

$$\begin{aligned} w_{X_{P_2}}(t) &= w_{X_{P_1}}(t) - (Y_{P_2} - Y_{P_1})\varphi(t), \\ w_{Y_{P_2}}(t) &= w_{Y_{P_1}}(t) + (X_{P_2} - X_{P_1})\varphi(t). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Având măsurate legile de mișcare $w_{X_{P_1}}(t)$, $w_{X_{P_2}}(t)$, $w_{Y_{P_1}}(t)$ și $w_{Y_{P_2}}(t)$ se poate determina și verifica legea de rotație a planului $P(3)$ în jurul axei verticale Oz .

Forme similare cu (3.80) se pot scrie și pentru legile accelerațiilor:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{X_{P_2}}(t) &= \ddot{w}_{X_{P_1}}(t) - (Y_{P_2} - Y_{P_1})\ddot{\varphi}(t), \\ \ddot{w}_{Y_{P_2}}(t) &= \ddot{w}_{Y_{P_1}}(t) + (X_{P_2} - X_{P_1})\ddot{\varphi}(t), \end{aligned} \quad (3.81)$$

înregistrate prin intermediul accelerometrelor A_C măsurate și pentru deplasările relative între secțiunile de pe cazan și de pe structura auxiliară:

$$\begin{aligned} d_{X_{P_2}}(t) &= d_{X_{P_1}}(t) - (Y_{P_2} - Y_{P_1})(\varphi_{C_a}(t) - \varphi_{C_{ma}}(t)), \\ d_{Y_{P_2}}(t) &= d_{Y_{P_1}}(t) + (X_{P_2} - X_{P_1})(\varphi_{C_a}(t) - \varphi_{C_{ma}}(t)), \end{aligned} \quad (3.82)$$

unde $\varphi_{C_a}(t)$ și $\varphi_{C_{ma}}(t)$, fiind legile de rotație absolute ale celor două secțiuni perechi de pe cazan și de pe construcția metalică auxiliară C_{ma} .

3.5.2. Recondiționarea unei vibrograme înregistrată cu limitări prin saturare

Plecând de la faptul că informații prealabile măsurătorii, asupra nivelurilor de vibrații ce pot să se dezvolte în timpul exploziei unice, amplificările la amplificatoarele de măsurare, la care sunt cuplate accelerometrele și traductoarele inductive de deplasare, o parte din semnalele înregistrate au fost înregistrate limitat de saturarea amplificatoarelor. O copie scanată a unei vibrograme a semnalelor accelerometrelor (Ta) și a traductoarelor de deplasare (Td) amplasate la cota +72 m este prezentată în figura 3.22., [Silaș, Cioara, Uroșu, Toader, Bacria, Marina, Dănoiu, Dragomir, (1988)].

După cum se poate observa semnalele traductoarelor de deplasare $Td - 2/72$ și $Td - 3/72$ sunt saturate pe intervalul de timp 4–7 secunde al înregistrării, cel mai evident fiind cel al traductorului $Td - 2/72$.

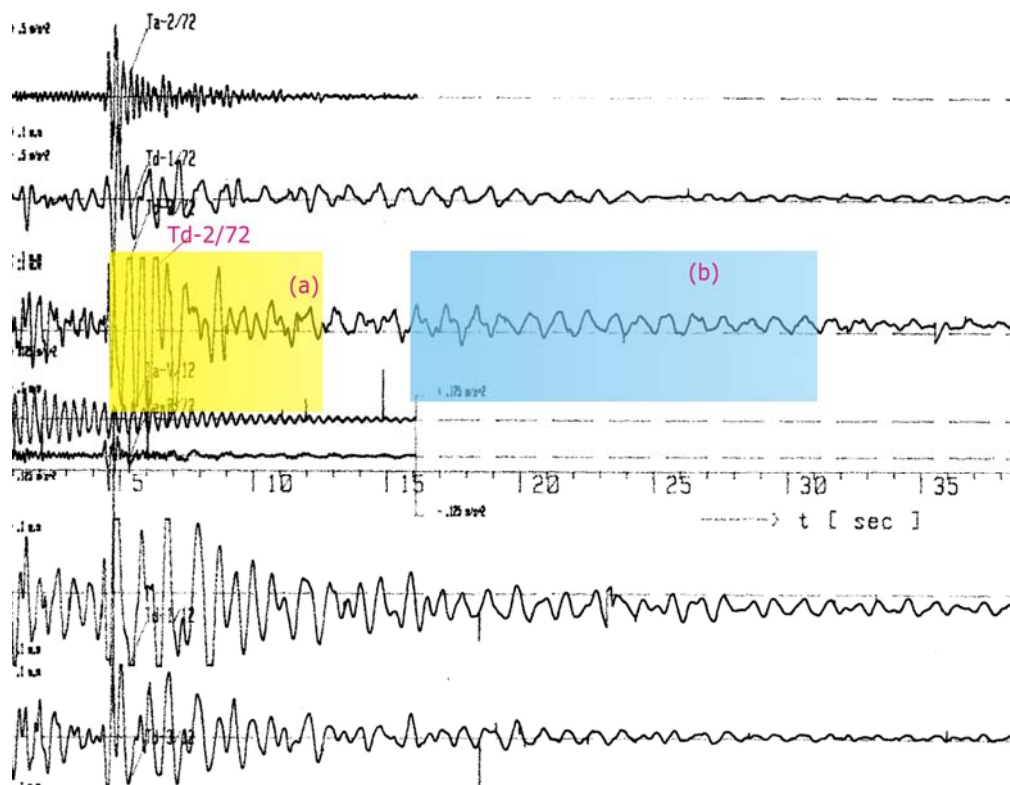


Fig.3.22. Copia scanată a vibrogramei semnalelor accelerometrelor (Ta) și traductorilor de deplasare (Td) amplasate în planul de la cota $+72m$.

Pe baza copiei vibrogramei s-a digitalizat manual semnalul traductorului $Td - 2/72$, utilizând facilitățile CorelDRAW. Digitalizarea s-a efectuat pe două porțiunile figura 3.22.a., corespunzătoare excitației sub acțiunea unei seismice și figura 3.22.b., corespunzătoare răspunsului liber, după atenuarea acestei unde. Vibrogramele semnalelor digitalizate sunt prezentate în figura 3.23.a., corespunzătoare intervalului de saturatie (fig.3.22.a.), la limitele $u_s = \pm 10V$ și figura 3.23.b., corespunzătoare intervalului vibrațiilor libere amortizate (fig.3.22.b.), rezultate după atenuarea unei seismice.

Limitele $u_s = \pm 10V$ sunt limitele de saturatie ale amplificatorului tensometric utilizat. Domeniul de frecvență al amplificatorului conține și componenta continuă u_0 , care este de natură electrică; deplasarea punctului de zero în cazul de față, este cauzată de dezechilibrul montajului în punte Wheatstone a traductorului inductiv parametric cu reluctanță variabilă.

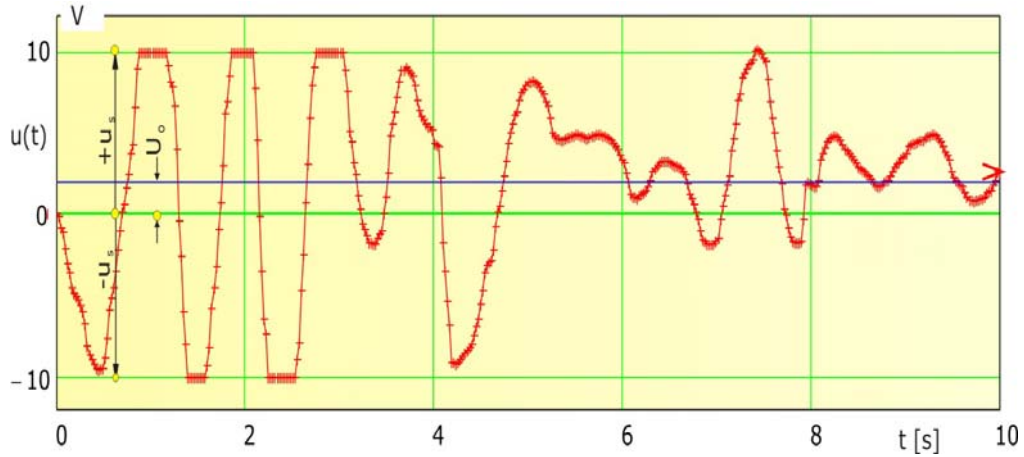


Fig.3.23.a. Semnalul traductorului de deplasare $Td - 2 / 72$ pe intervalul de saturație la limitele de saturație $u_s = \pm 10V$.

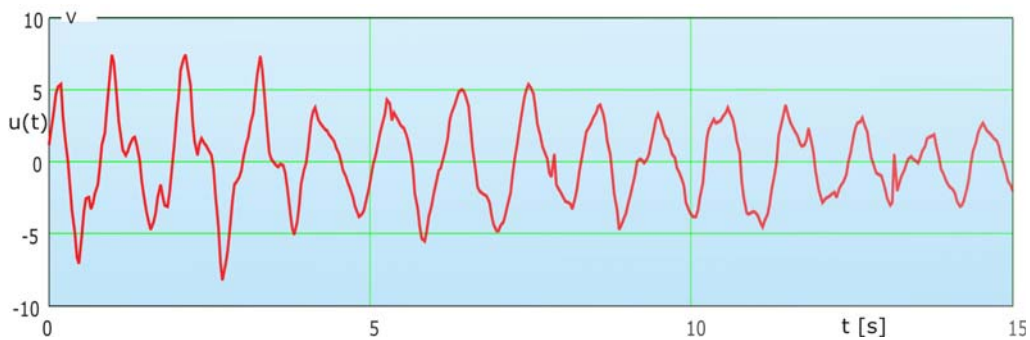


Fig.3.23.b. Semnalul traductorului de deplasare $Td - 2 / 72$ pe intervalul vibrațiilor libere, rezultate după atenuarea undei seismice.

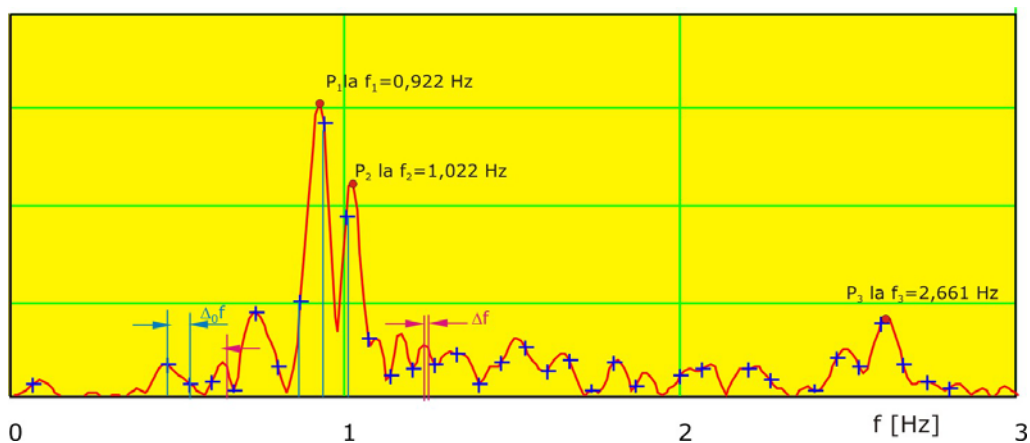


Fig.3.24. Spectrul semnalului vibrațiilor libere amortizate (fig.3.23.b.).

Spectrul FFT (fig.3.24.) al semnalului considerat al vibrațiilor libere amortizate (fig.3.23.b.) relevă trei vârfuri semnificative. Pentru a fi localizate mai exact frecvențele acestor vârfuri s-a aplicat o metodă de mărire a densității liniilor spectrale. Astfel, incrementul de frecvență al spectrului discret FFT aplicat secvenței de lungime $T = 15 \text{ s}$ a semnalului din figura 3.23.b., este $\Delta_0 f = 1/T$, liniile spectrale fiind reprezentate cu +. Mărind densitatea liniilor spectrale de n_d ori se obține un spectru discret (reprezentat prin linie continuă —), al cărui nou increment este $\Delta f = \Delta_0 f / n_d$. În acest mod au fost localizate cele trei moduri naturale principale la frecvențele $f_1 = 0.922 \text{ Hz}$, $f_2 = 1.022 \text{ Hz}$ și $f_3 = 2.661 \text{ Hz}$.

Rapoartele de amortizare modale s-au determinat prin cunoscuta metoda de aproximare "half power"

$$\eta_r = \frac{f_{2,r}^2 - f_{1,r}^2}{2f_r^2}, \quad (r = 1, 2, 3), \quad (3.83)$$

unde f_r este frecvența celui de-al r -lea mod, aproximată prin frecvența corespunzătoare vârfului P_r din spectru (fig.3.24. și fig.3.25.), iar $f_{1,r}$ și $f_{2,r}$ sunt frecvențele la care linia orizontală de magnitudine $V_r \frac{\sqrt{2}}{2}$ taie lobul vârfului, V_r fiind valoarea în P_r (fig.3.25.). Pentru cele trei moduri $\eta_1 = 0.06119$, $\eta_2 = 0.04921$ și $\eta_3 = 0.02694$.

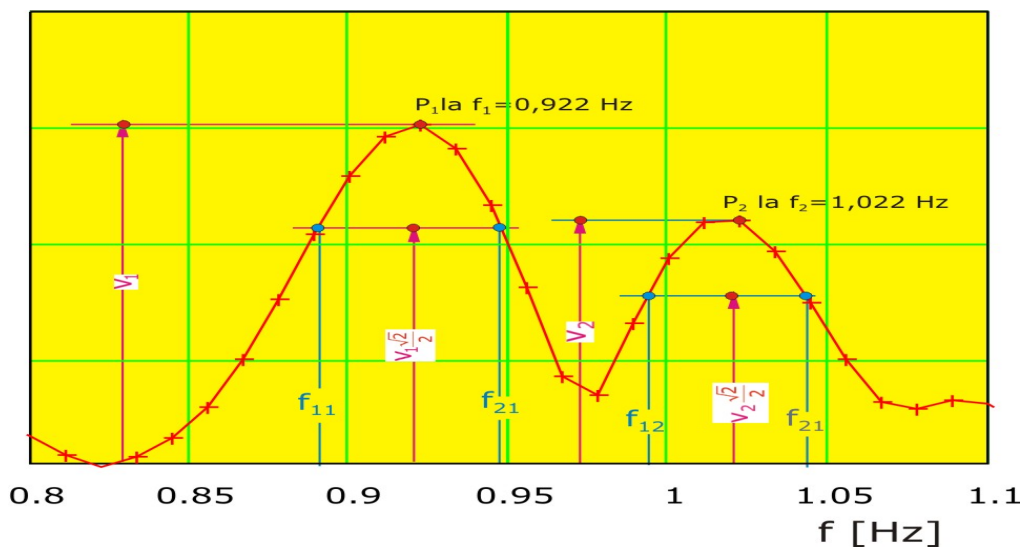


Fig.3.25. Ilustrarea determinării raportului de amortizare modal prin metoda "half power"

Factorii de amortizare modali, $\sigma_r = 2\pi \eta_r$ au valorile $\sigma_1 = 0.384 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_2 = 0.309 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_3 = 0.169 \text{ s}^{-1}$, iar pseudopulsațiile $\rho_r \approx 2\pi f_r$ au valorile $\rho_1 = 5.812 \text{ s}^{-1}$, $\rho_2 = 6.39 \text{ s}^{-1}$ și $\rho_3 = 16.7 \text{ s}^{-1}$.

În acest context, ecuația de identificare (3.74) capătă forma (3.84):

$$\begin{aligned}
 u_k = & u_0 + e^{-\sigma_1 k \Delta t} (C_{0,0} \sin(p_1 k \Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1 k \Delta t)) + \\
 & e^{-\sigma_2 k \Delta t} (C_{2,0} \sin(p_2 k \Delta t) + C_{3,0} \cos(p_2 k \Delta t)) + \\
 & e^{-\sigma_3 k \Delta t} (C_{4,0} \sin(p_3 k \Delta t) + C_{5,0} \cos(p_3 k \Delta t)) + \\
 & \Delta t \left[\sin(p_1 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_1(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
 & \left. \cos(p_1 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_1(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_1 s \Delta t) \right] + \\
 & c_1 \Delta t \left[\sin(p_2 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_2(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
 & \left. \cos(p_2 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_2(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_2 s \Delta t) \right] + \\
 & c_2 \Delta t \left[\sin(p_3 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
 & \left. \cos(p_3 k \Delta t) \sum_{s=0}^k e^{\sigma_3(s-k)\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_3 s \Delta t) \right], \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

care pentru axa negativă a timpului, în banda din stânga are forma:

$$\begin{aligned}
 u_{-k} = & u_0 + e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} (C_{0,0} \sin(p_1(-k)\Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1(-k)\Delta t)) + \\
 & e^{-\sigma_2(-k)\Delta t} (C_{2,0} \sin(p_2(-k)\Delta t) + C_{3,0} \cos(p_2(-k)\Delta t)) + \\
 & e^{-\sigma_3(-k)\Delta t} (C_{4,0} \sin(p_3(-k)\Delta t) + C_{5,0} \cos(p_3(-k)\Delta t)) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta t \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_1 s \Delta t) \right] + \\
& c_1 \Delta t \left[\sin(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_2 s \Delta t) \right] + \\
& c_2 \Delta t \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
\end{aligned} \tag{3.84'}$$

iar pentru banda din dreapta:

$$\begin{aligned}
u_k = & u_0 + e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} (C_{0,0} \sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) + C_{1,0} \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t)) + \\
& e^{-\sigma_2(k+\Delta)\Delta t} (C_{2,0} \sin(p_2(k+\Delta)\Delta t) + C_{3,0} \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t)) + \\
& e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} (C_{4,0} \sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) + C_{5,0} \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t)) + \\
& \Delta t \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_1 s \Delta t) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \Delta t \left[\sin(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_2 s \Delta t) \right] + \\
& \left. \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} (f_0 + f_1 s \Delta t + f_2 (s \Delta t)^2 + \dots) \sin(p_3 s \Delta t) \right],
\end{aligned} \tag{3.84''}$$

care formează un sistem de n ecuații (pentru $k = 0, 1, 2, \dots, n$),

$$[D]_{(n \times 16)} \{C\}_{(16 \times 1)} = \{U\}_{(n \times 1)}, \tag{3.85}$$

unde:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \\ c_1 \{f\} \\ c_2 \{f\} \end{Bmatrix} \tag{3.86}$$

și

$$\begin{aligned}
\{c_0\} &= \{u_0 \quad c_{0,0} \quad c_{1,0} \quad c_{2,0} \quad c_{3,0} \quad c_{4,0} \quad c_{5,0}\}^T \\
\{f\} &= \{f_0 \quad f_1 \quad f_2\}^T
\end{aligned} \tag{3.87}$$

format din șirul de relații (3.84) pentru n eșantioane u_k luate din cele două benzi laterale fâșiei de saturare Δ : Δn_1 la stânga și Δn_2 la dreapta, $n = \Delta n_1 + \Delta n_2$.

Elementele matricei $[D]$ și ale vectorului $\{U\}$, corespunzătoare celor două sunt:

- pentru banda stângă:

$$D_{k,0} = 1,$$

$$D_{k,1} = e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} \sin(p_1(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,2} = e^{-\sigma_1(-k)\Delta t} \cos(p_1(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,3} = e^{-\sigma_2(-k)\Delta t} \sin(p_2(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,4} = e^{-\sigma_2(-k)\Delta t} \cos(p_2(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,5} = e^{-\sigma_3(-k)\Delta t} \sin(p_3(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,6} = e^{-\sigma_3(-k)\Delta t} \cos(p_3(-k)\Delta t),$$

$$D_{k,7} = \Delta t \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k,8} = \Delta t^2 \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k,9} = \Delta t^3 \left[\sin(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_1(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_1(s-(-k))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k,10} = \Delta t \left[\sin(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k,11} = \Delta t^2 \left[\sin(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\ \left. \cos(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \right],$$

$$D_{k,12} = \Delta t^3 \left[\sin(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cos(p_2(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_2(s-(-k))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \Big], \\
D_{k,13} = \Delta t & \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
D_{k,14} = \Delta t^2 & \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right] \\
D_{k,15} = \Delta t^3 & \left[\sin(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
& \left. \cos(p_3(-k)\Delta t) \sum_{s=0}^{-k} s^2 e^{\sigma_3(s-(-k))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
u_{k,0} = u_{n_1-k}, & \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \Delta n_1), \tag{3.88}
\end{aligned}$$

- pentru banda dreaptă:

$$D_{k+n_1,0} = 1,$$

$$D_{k+n_1,1} = e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} \sin(p_1(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,2} = e^{-\sigma_1(k+\Delta)\Delta t} \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,3} = e^{-\sigma_2(k+\Delta)\Delta t} \sin(p_2(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,4} = e^{-\sigma_2(k+\Delta)\Delta t} \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,5} = e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} \sin(p_3(k+\Delta)\Delta t),$$

$$D_{k+n_1,6} = e^{-\sigma_3(k+\Delta)\Delta t} \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t),$$

$$\begin{aligned}
D_{k+n_1,7} &= \Delta t \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,8} &= \Delta t^2 \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,9} &= \Delta t^3 \left[\sin(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_1 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_1(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_1(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_1 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,10} &= \Delta t \left[\sin(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,11} &= \Delta t^2 \left[\sin(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,12} &= \Delta t^3 \left[\sin(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_2 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_2(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_2(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_2 s \Delta t) \right], \\
D_{k+n_1,13} &= \Delta t \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{k+n_1,14} &= \Delta t^2 \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
 &\quad \left. \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
 D_{k+n_1,15} &= \Delta t^3 \left[\sin(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \cos(p_3 s \Delta t) - \right. \\
 &\quad \left. \cos(p_3(k+\Delta)\Delta t) \sum_{s=0}^{k+\Delta} s^2 e^{\sigma_3(s-(k+\Delta))\Delta t} \sin(p_3 s \Delta t) \right], \\
 u_{k+\Delta n_1,0} &= u_{n_1+\Delta+k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \Delta n_2). \tag{3.89}
 \end{aligned}$$

și elementele vectorului $\{U\}$ se formează cu șirul de eșantioane u_k ale semnalului:

$$\begin{aligned}
 u_{k,0} &= u_{n_1-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \Delta n_1), \\
 u_{k+\Delta n_1,0} &= u_{n_1+\Delta+k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \Delta n_2). \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

Sistemul de n ecuații (3.84) cu 16 necunoscute este supraabundent și de aceea se rezolvă în maniera celor mai mici pătrate care conduce la sistemul:

$$[E]_{(16 \times 16)} \{C\}_{(16 \times 1)} = \{Y\}_{(16 \times 1)}, \tag{3.91}$$

unde,

$$\begin{aligned}
 [E]_{(16 \times 16)} &= [D]_{(16 \times n)}^T [D]_{(n \times 16)} \\
 \{Y\}_{(16 \times 1)} &= [D]_{(16 \times n)}^T \{U\}_{(n \times 1)} \tag{3.92}
 \end{aligned}$$

Sistemul (3.91) trece sub forma partiționată (3.93) și desfășurată (3.94):

$$\begin{bmatrix} [E_{1,1}] & [E_{1,2}] & [E_{1,3}] & [E_{1,4}] \\ [E_{2,1}] & [E_{2,2}] & [E_{2,3}] & [E_{2,4}] \\ [E_{3,1}] & [E_{3,2}] & [E_{3,3}] & [E_{3,4}] \\ [E_{4,1}] & [E_{4,2}] & [E_{4,3}] & [E_{4,4}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \\ c_1 \{f\} \\ c_2 \{f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{y_1\} \\ \{y_2\} \\ \{y_3\} \\ \{y_4\} \end{Bmatrix}, \tag{3.93}$$

$$\begin{cases} [E_{1,1}]_{(7 \times 7)} \{c_0\} + [E_{1,2}]_{(7 \times 3)} \{f\} + [E_{1,3}]_{(7 \times 3)} c_1 \{f\} + [E_{1,4}]_{(7 \times 3)} c_2 \{f\} = \{y_1\} \\ [E_{2,1}]_{(3 \times 7)} \{c_0\} + [E_{2,2}]_{(3 \times 3)} \{f\} + [E_{2,3}]_{(3 \times 3)} c_1 \{f\} + [E_{2,4}]_{(3 \times 3)} c_2 \{f\} = \{y_2\} \\ [E_{3,1}]_{(3 \times 7)} \{c_0\} + [E_{3,2}]_{(3 \times 3)} \{f\} + [E_{3,3}]_{(3 \times 3)} c_1 \{f\} + [E_{3,4}]_{(3 \times 3)} c_2 \{f\} = \{y_3\} \\ [E_{4,1}]_{(3 \times 7)} \{c_0\} + [E_{4,2}]_{(3 \times 3)} \{f\} + [E_{4,3}]_{(3 \times 3)} c_1 \{f\} + [E_{4,4}]_{(3 \times 3)} c_2 \{f\} = \{y_4\} \end{cases} \tag{3.94}$$

Din ultimele două dezvoltări matriceale se pot explicita:

$$c_1\{f\} = \left([E_{3,4}]^{-1}[E_{3,3}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,3}] \right)^{-1} \left[[E_{3,4}]^{-1}\{y_3\} - [E_{3,4}]^{-1}([E_{3,1}]\{c_0\} + [E_{3,2}]\{f\}) - [E_{4,4}]^{-1}\{y_4\} - [E_{4,4}]^{-1}([E_{4,1}]\{c_0\} + [E_{4,2}]\{f\}) \right] \quad (3.95)$$

și

$$c_2\{f\} = \left([E_{3,3}]^{-1}[E_{3,4}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,4}] \right)^{-1} \left[[E_{3,3}]^{-1}\{y_3\} - [E_{3,3}]^{-1}([E_{3,1}]\{c_0\} + [E_{3,2}]\{f\}) - [E_{4,3}]^{-1}\{y_4\} - [E_{4,3}]^{-1}([E_{4,1}]\{c_0\} + [E_{4,2}]\{f\}) \right]. \quad (3.96)$$

Pentru a condensa dezvoltările ce vor urma (3.95) și (3.96) se scriu sub formele

$$\begin{aligned} c_1\{f\} &= \{e_1\} + [a_1]\{c_0\} + [b_1]\{f\} \\ c_2\{f\} &= \{e_2\} + [a_2]\{c_0\} + [b_2]\{f\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

unde

$$\begin{aligned} \{e_1\} &= \left([E_{3,4}]^{-1}[E_{3,3}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,3}] \right)^{-1} \left([E_{3,4}]^{-1}\{y_3\} - [E_{4,4}]^{-1}\{y_4\} \right), \\ [a_1] &= \left([E_{3,4}]^{-1}[E_{3,3}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,3}] \right)^{-1} \left(-[E_{3,4}]^{-1}[E_{3,1}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,1}] \right), \\ [b_1] &= \left([E_{3,4}]^{-1}[E_{3,3}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,3}] \right)^{-1} \left(-[E_{3,4}]^{-1}[E_{3,2}] - [E_{4,4}]^{-1}[E_{4,2}] \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

și

$$\begin{aligned} \{e_2\} &= \left([E_{3,3}]^{-1}[E_{3,4}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,4}] \right)^{-1} \left([E_{3,3}]^{-1}\{y_3\} - [E_{4,3}]^{-1}\{y_4\} \right), \\ [a_2] &= \left([E_{3,3}]^{-1}[E_{3,4}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,4}] \right)^{-1} \left(-[E_{3,3}]^{-1}[E_{3,1}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,1}] \right), \\ [b_2] &= \left([E_{3,3}]^{-1}[E_{3,4}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,4}] \right)^{-1} \left(-[E_{3,3}]^{-1}[E_{3,2}] - [E_{4,3}]^{-1}[E_{4,2}] \right). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Înlocuind (3.97) în primele două ecuații matriceale (3.94) se obține sistemul:

$$\begin{bmatrix} [F_{1,1}] & [F_{1,2}] \\ [F_{2,1}] & [F_{2,2}] \end{bmatrix}_{(10 \times 10)} \begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{(10 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \{Z_1\} \\ \{Z_2\} \end{Bmatrix}_{(10 \times 1)}, \quad (3.100)$$

unde submatricele sunt:

$$\begin{aligned} [F_{1,1}] &= [E_{1,1}] + [E_{1,3}][a_1] + [E_{1,4}][a_2] \\ [F_{1,2}] &= [E_{1,2}] + [E_{1,3}][b_1] + [E_{1,4}][b_2] \\ [F_{2,1}] &= [E_{2,1}] + [E_{2,3}][a_1] + [E_{2,4}][a_2] \\ [F_{2,2}] &= [E_{2,2}] + [E_{2,3}][b_1] + [E_{2,4}][b_2] \end{aligned} \quad (3.101)$$

și vectorii matrice coloană sunt:

$$\begin{aligned} \{Z_1\} &= \{y_1\} - [E_{1,3}]\{e_1\} - [E_{1,4}]\{e_2\} \\ \{Z_2\} &= \{y_2\} - [E_{2,3}]\{e_1\} - [E_{2,4}]\{e_2\}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

În final rezultă primele 10 necunoscute cuprinse în vectorul matrice coloană:

$$\begin{Bmatrix} \{c_0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{1,1}] & [F_{1,2}] \\ [F_{2,1}] & [F_{2,2}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{Z_1\} \\ \{Z_2\} \end{Bmatrix}, \quad (3.103)$$

iar ultimele două necunoscute, constantele c_1 și c_2 , se determină din relațiile (3.97):

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\{f\}^T \{f\}} \{f\}^T (\{e_1\} + [a_1] \{c_0\} + [b_1] \{f\}) \\ c_2 &= \frac{1}{\{f\}^T \{f\}} \{f\}^T (\{e_2\} + [a_2] \{c_0\} + [b_2] \{f\}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Având cunoscute toate cele 12 necunoscute se poate trece la recondiționarea semnalului pe porțiunea limitată prin saturare la $u_s = \pm 10V$.

Având determinați parametrii modali, prin analiza semnalelor neafectate de tăiere prin suprasaturare, $p_1 = 5.793 s^{-1}$, $p_2 = 6.421 s^{-1}$ și $p_3 = 16.72 s^{-1}$ și coeficienții de amortizare modali, $\sigma_1 = 0.384 s^{-1}$, $\sigma_2 = 0.309 s^{-1}$ și $\sigma_3 = 0.569 s^{-1}$, în figura 3.26., este ilustrată recondiționarea celor cinci vârfuri limitate, înregistrate în timpul excavației prin explozie (fig.3.23.a.). Se poate observa o bună aproximare recondiționării vârfurilor deși semnalul primar avut la dispoziție este o copie xerox după o vibrogramă deja înregistrată (fig.3.22.), trecută printr-un proces de digitalizare aproximativă, afectată de erori de apreciere.

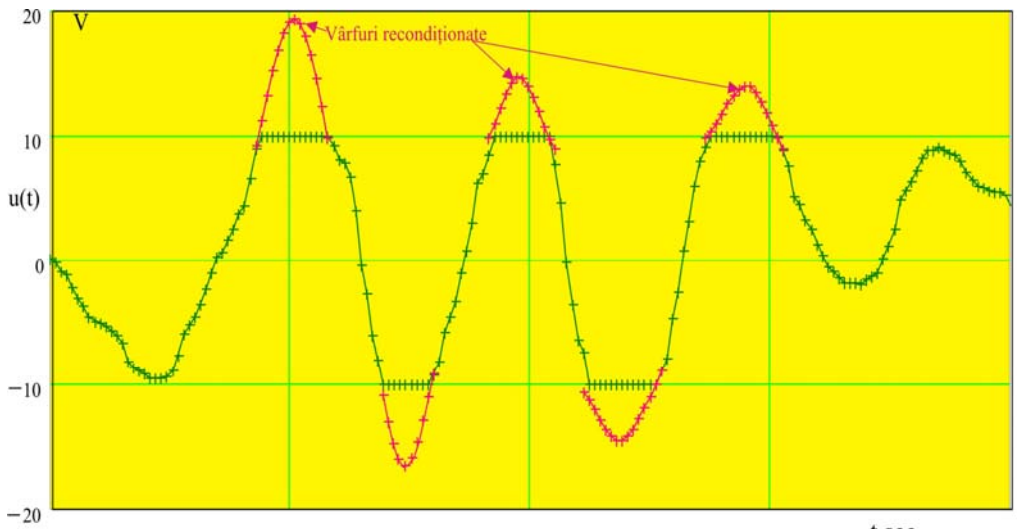


Fig 3.26. Ilustrarea recondiționării vârfurilor saturate ale vibrogramei semnalului din figura 3.23.a.

În concluzie, se poate aprecia că metoda formulată în cadrul acestui capitol, de recondiționare a semnalelor limitate prin saturarea amplificatoarelor echipamentului de înregistrare, este deosebit de utilă, având aplicabilitate în foarte multe cazuri unde, inițial, nu se cunosc domeniile nivelurilor pe care le pot atinge semnalele înregistrate, [Căplescu, Cioara, (2009.c)]. Un domeniu important este seismologia,

unde predicția unui eveniment este total necunoscută. În general, tentația este de a se programa o anumită sensibilitate mai mare a echipamentelor de înregistrare (senzori, amplificatoare de măsură și sisteme de conversie analog-numerice), încât probabilitatea ca acestea să fie suprasaturate este deosebit de mărită, recondiționarea vârfurilor tăiate din semnalul înregistrat impunându-se, exemplul analizat fiind edificator.

4. APLICAȚII EXPERIMENTALE PE STUDII DE CAZ ALE METODELOR SPECIALE DE PRELUCRARE A SEMNALELOR DE VIBRAȚII

În acest capitol se vor prezenta câteva aplicații de caz ale metodelor speciale care au fost dezvoltate în capitolul 2.

În practica experimentală a investigării vibrațiilor unor structuri de mașini, utilaje sau construcții industriale intervin situații în care sunt necesare de aplicat metode speciale de procesare a semnalelor înregistrate, [Cioara, (2001)]. Mai jos, sunt prezentate și argumentate două dintre aceste metode speciale.

4.1. Determinarea componentelor periodice ale vibrațiilor pe structura statorului unui generator electric de mare putere

Un grup hidroenergetic care este deservit de un baraj cu înălțime mică de cădere a apei, folosește o turbină de tip Kaplan, cu ax vertical (fig.4.1.), având o turație nominală joasă. Pentru grupurile ce echepează hidrocentrala de la Porțile de Fier 1, această turație este de 71.5 rot/min , ceea ce impune, ca generatorul să livreze un semnal de putere (178 MW), la frecvența de sincronism cu rețeaua de 50 Hz . Aceasta se realizează utilizând un stator, 1, cu 18 perechi de poli, 2, desfășurate pe 6 sectoare S_1, S_2, \dots, S_6 , din câte 3 poli fiecare, distribuite pe un diametru exterior de 17 m . Înfășurările polilor sunt formate din bare de cupru conductoare, ele fiind fixate de carcasa de rezistență a statorului prin grupul de pene izolatoare, [Cioara, (1992)].

Între înfășurările rotorului, 3, și ale statorului, 1, iau naștere forțe magnetice de forma:

$$F_c(t) = k_m I_0^2 \sin^2(2\pi ft) = \frac{1}{2} k_m I_0^2 (1 - \cos(2\pi(2f)t)), \quad (4.1)$$

unde I_0 este amplitudinea curentului alternativ de excitație a statorului, iar k_m o constantă.

După cum se poate observa, componenta variabilă a forței ce lucrează asupra înfășurării statorice are frecvența dubla celei a rețelei, de $f = 50 \text{ Hz}$, astfel că frecvența componentei variabilă este de 100 Hz .

Sub acțiunea acestor forțe perturbatoare, structura statorului vibrează, nivelurile pe diverse zone ale sectoarelor depinzând de starea legăturilor elastice de fixare a înfășurărilor prin pene.

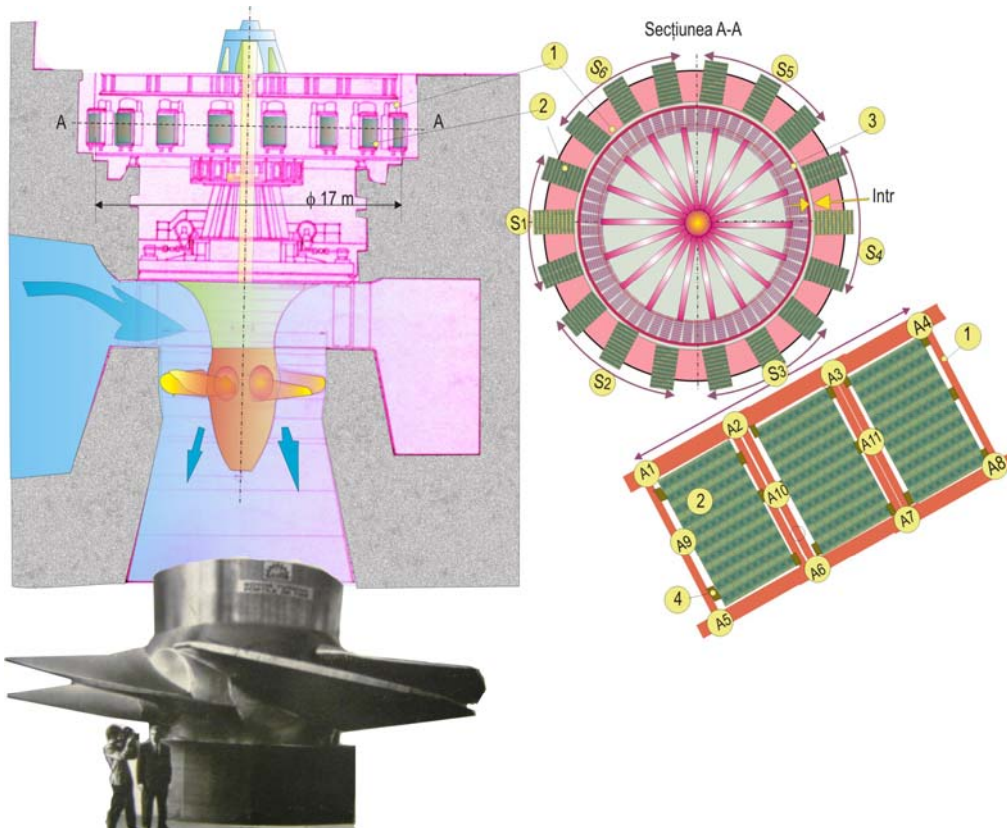


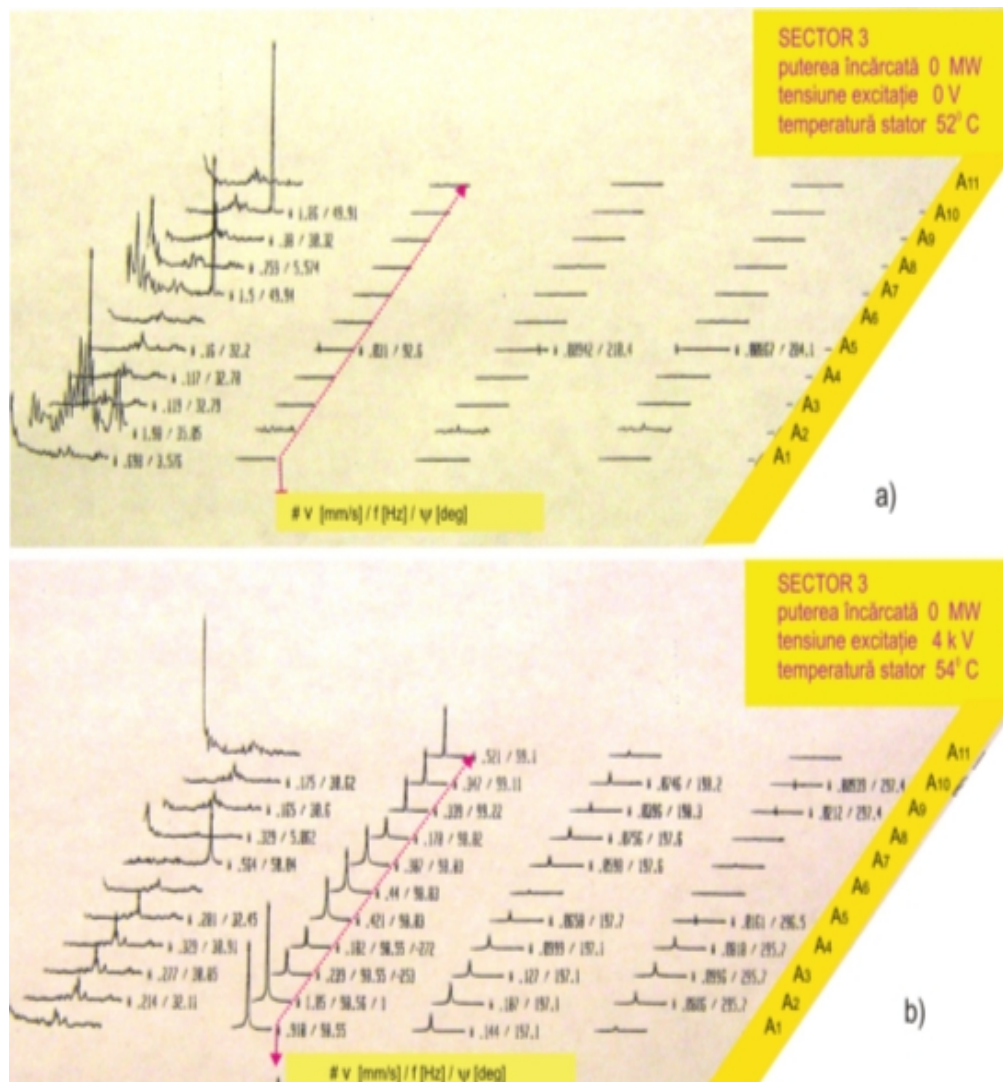
Fig.4.1. Ansamblul unui grup hidroelectric cu turbină Kaplan.

S-a constatat că nivelurile locale de vibrații pe structura cresc odată cu scăderea forțelor de blocare a penelor, apariția unor jocuri duce la creșterea nivelurilor locale de vibrații, însoțite de apariția unor componente de frecvențe multiple acelea de 100 Hz .

Slăbirea blocării unei înfășurări statorice poate provoca o avarie majoră a generatorului deoarece întrefierul l_{tr} între statorul, 1, fix și rotorul, 3, mobil, este mic, existând posibilitatea agățării, de către rotor, a unei înfășurări. Din acest motiv a fost necesară experimentarea unei monitorizări prin vibrații a înfășurării statorice. S-au amplasat pe fiecare sector câte un șir de accelerometre $A_1 \rightarrow A_{11}$, iar semnalele acestora au fost preluate de 11 amplificatoare integratoare a căror semnale de ieșire sunt proporționale cu vitezele mișcărilor vibratorii. S-a apelat la semnalele de viteză deoarece viteza exprimă mai bine starea energetică a unei mișcări vibratorii, din acest motiv majoritatea normelor de vibrații la mașini și utilaje folosesc ca limite de clasificare valori în viteze (mm/s).

Am preluat câteva din semnalele de viteză înregistrate pe structura sectorului 3 și le-am prelucrat după metoda dezvoltată în paragraful 2.4.2., rezultatele fiind prezentate sintetic în figurile 4.2. și 4.3., prin șirul de spectrograme corespunzătoare celor 11 semnale culese prin accelerometre.

În figurile 4.2., sunt prezentate spectrogramele, pentru semnalele celor 11 accelerometre, cu corecțiile valorice ale vârfurilor armonice. Spectrele din figura 4.2.a., se referă la regimul de lucru al agregatului cu grupul neconectat la rețea, deci neîncărcat (0 MW) și cu lipsa excitației statorice (tensiune de excitație 0). Următoarele două grupe de câte 11 spectre din figurile 4.2.b. și 4.2.c. corespund tot încărcării zero, dar cu excitației statorice de 4 kV și respectiv de 8 kV. Dacă în lipsa excitației vârfurile armonice se găsesc în domeniul de până la 50 Hz, situație normală, în lipsa forțelor perturbatoare, (4.1), din câmpurile magnetice, apariția excitației statorice de 4 kV și respectiv 8 kV duce la apariția vârfurilor armonice corespunzătoare frecvențelor de 100 Hz, 200 Hz și 300 Hz, principalele componente fiind axate după frecvența de 100 Hz.



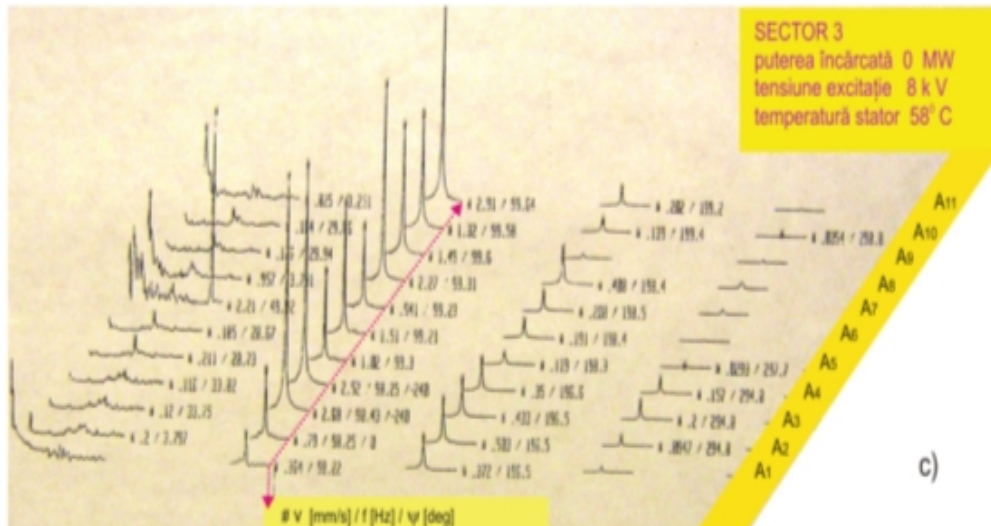
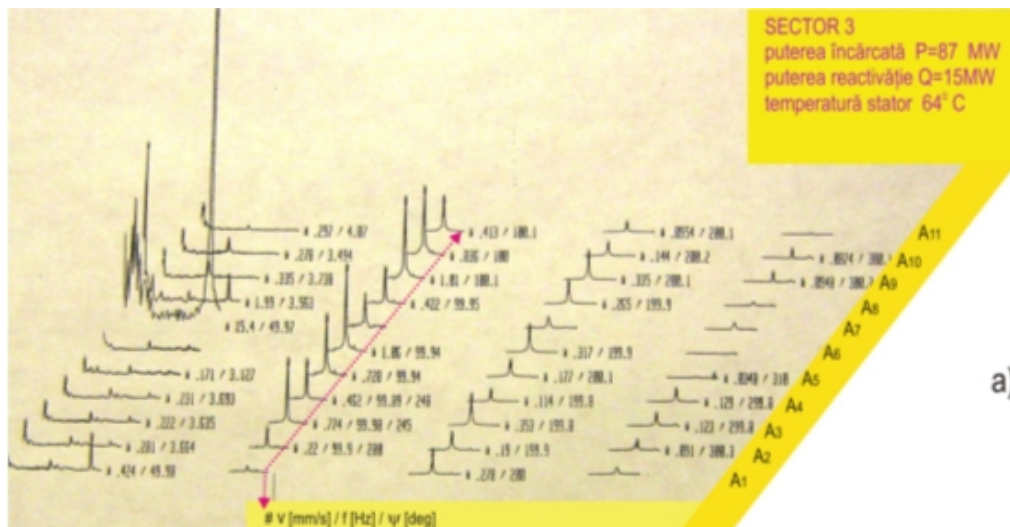


Fig.4.2. Spectrele componentelor armonice ale celor 11 semnale de vibrații înregistrate pe structura sectorului 3 al statorului la mersul în gol al grupului.

Valorile frecvențelor sunt puțin deviate spre valoarea 98.8 Hz , (spectrele din fig.4.2.b.) aceasta datorându-se instabilității rețelei și a efectului de *flutter* al înregistratorului magnetic utilizat, dar această deviație se menține constantă pentru aproape toate cele 11 spectre, deși fiecare componentă a fost identificată individual, cu ajutorul liniilor spectrale din jurul fiecărui vârf.

Acest fapt probează exactitatea și utilitatea metodei, care a fost dezvoltată și publicată, [Căplescu, Hule, Cioara, (2007.a)].



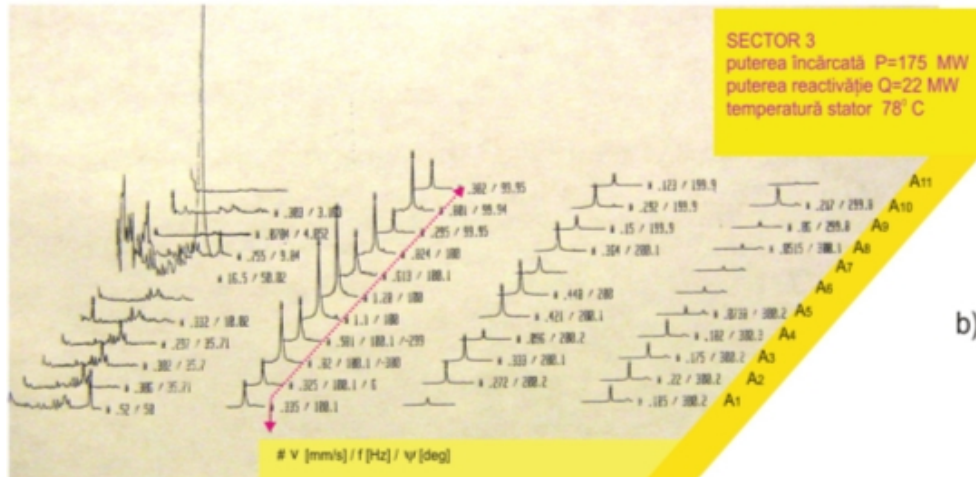


Fig.4.3. Spectrele componentelor armonice ale celor 11 semnale de vibrații înregistrate pe structura sectorului 3 al statorului la mersul în sarcină: a. $P = 87 MW$ și b. $P = 175 MW$.

În figura 4.3. sunt prezentate componentele armonice ale celor 11 semnale în situația în care generatorul turbinei este pus sub sarcină, la $87 MW$ (fig. 4.3.a.) și la $175 MW$ (fig. 4.3.b.). Nivelurile cele mai semnificative sunt pentru componentele cu frecvența dublă rețelei, de $100 Hz$. Apar și componente de frecvențe dublă, ($200 Hz$), și respectiv, triplă ($300 Hz$), creșterea lor în timp putând indica posibilitatea destrângerii penelor.

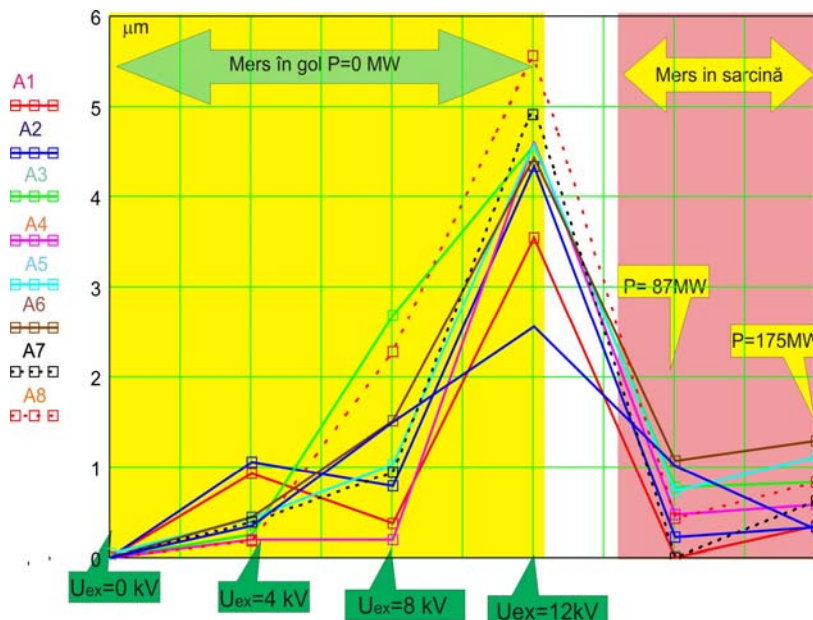


Fig.4.4.a. Nivelurile componentelor armonice de frecvență $100 Hz$, pentru 8 semnale de vibrații.

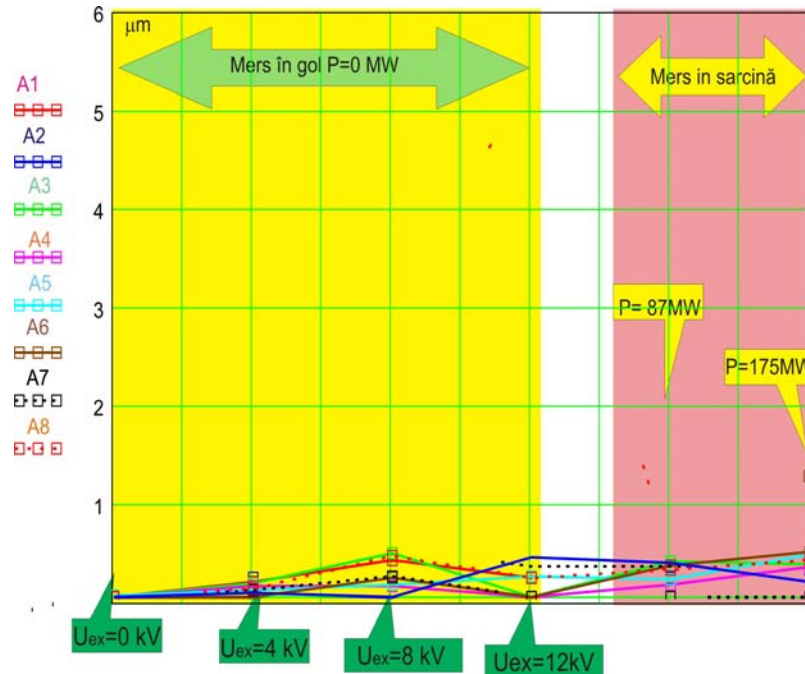


Fig.4.4.b. Nivelurile componentelor armonice de frecvență 200 Hz , pentru 8 semnale de vibrații.

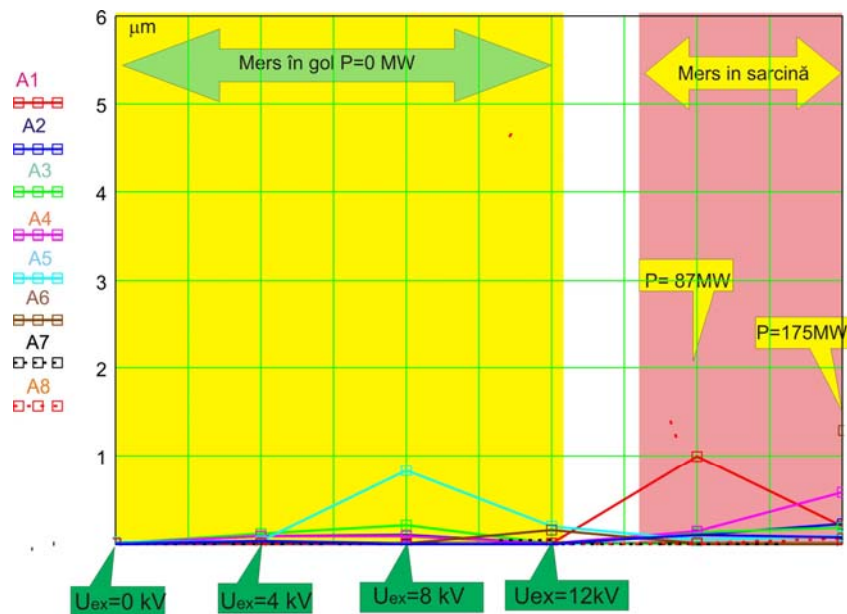


Fig.4.4.c. Nivelurile componentelor armonice de frecvență 300 Hz , pentru 8 semnale de vibrații.

Pentru o analiză comparativă a nivelurilor de vibrații, de-a lungul structurii sectorului 3 al statorului, pentru diverse regimuri de încărcare a grupului s-au reprezentat în grafic în figurile 4.4.a., 4.4.b. și 4.4.c., aceste niveluri, pe componente armonice, [Căplescu, (2007.b)].

Valorile maxime ale nivelurilor de vibrații, reprezentate în aceste figuri prin valori în deplasare, se ating pentru regimul de mers în gol la o excitație a statorului de $12kV$, unde câmpul magnetic este maxim și respectiv, nivelurile forțelor magnetice ce acționează asupra înfășurărilor sunt maxime.

În cazul încărcării grupului la sarcinile de $P = 87 MW$ și $P = 175 MW$, nivelurile de vibrații sunt mai atenuate, datorită închiderii fluxului magnetic prin înfășurărilor rotorului.

4.2. Diagnosticarea defectelor la rulmenți

4.2.1. Frecvențele caracteristice defectelor rulmenților cu bile

Asamblarea cu rulmenți este una dintre cele mai uzuale și, totodată, mai importantă componentă a unei mașini sau utilaj. Din acest motiv tehnologia de fabricație a acestui subansamblu este una specială, care permite execuția unui produs fiabil cu o durată de viață cât mai mare.

Totuși, după o anumită durată de lucru pe utilaj, sau din sarcini accidentale pot să apară defecte pe căile de rulare (C_r , fig.4.5.), cum ar fi exfolierea stratului călit de pe una dintre căile de rulare (pitting, Pt) ceea ce face ca în procesul de rulare să apară șocuri de contact între bilele B și porțiunea exfoliată.

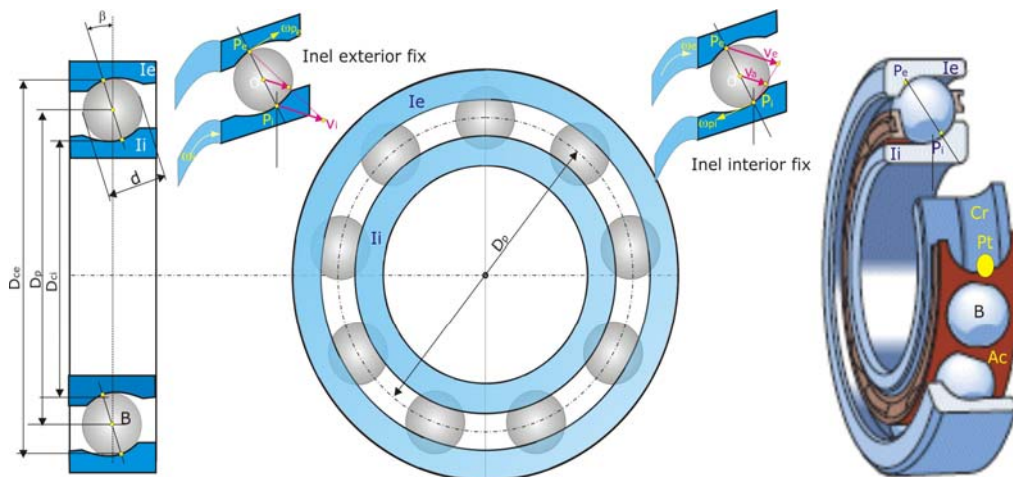


Fig.4.5. Ilustrarea procesului de rulare la un rulment radial cu bile.

Contactele dintre bile și căile de rulare sunt mobile, atunci modelul dinamic al unei astfel de structuri este deosebit de complex, într-o formă aproximativă poate fi pusă sub forma:

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([C] + [G])\{\dot{u}\} + ([K_o] + \mu[K(t)])\{u\} = \{Q\}, \quad (4.2)$$

unde pe lângă matricele constante $[M], [C], [K_0]$ de inerție, amortizare și de rigiditate apar matricea giroscopică $[G]$ și matricea de rigiditate $[K(t)]$, variabilă, periodică de timp.

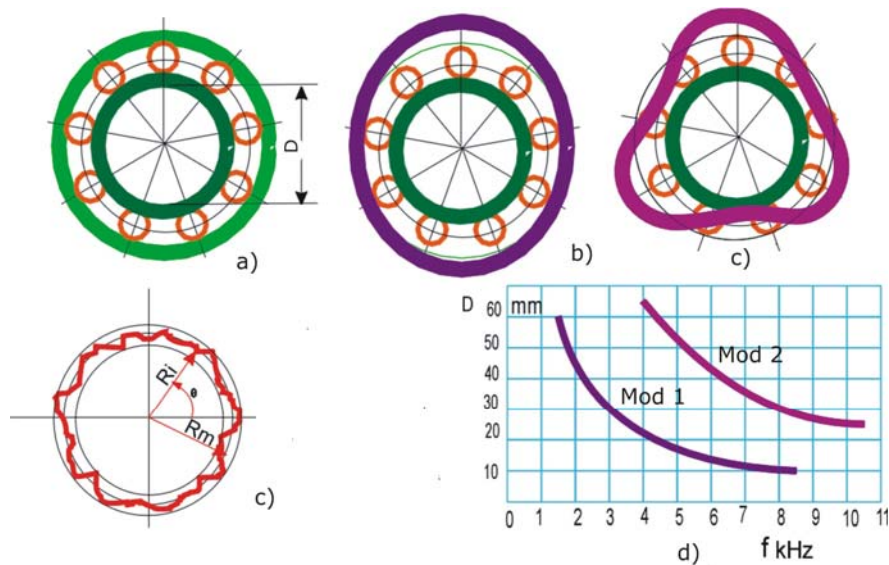


Fig.4.6. Ilustrarea modurilor naturale ale unui rulment cu bile în funcție de diametrul D al arborelui.

Elementele vectorului de excitație sunt, de asemenea periodice, dar dependente de poziția geometrică a contactului.

Primele trei forme modale de vibrații ale unui rulment calat pe un arbore și liber pe inelul exterior arată ca în figurile 4.6.a., 4.6.b., și 4.6.c., iar frecvențele proprii corespunzătoare acestor moduri depind de diametrul D al arborelui pe care rulmentul este calat. Valoric, aceste frecvențe proprii sunt de ordinul kHz -lor. Perturbațiile sunt generate și de rugozitatea și deviațiile geometrice ale căilor de rulare, figura 4.6.d.

Considerând că procesul de rulare a bilelor pe cele două căi de rulare se realizează fără alunecare din condiții cinematice se pot determina relațiile cinematice.

- punctului de contact P_i dintre o bilă și inelul interior, I_i , mobil, de viteză unghiulară ω_i are viteza:

$$v_i = \omega_i (D_p - d \cos(\beta)), \quad (4.3)$$

iar viteza centrului O al bilei, aflat pe diametrul D_p al ancoșei, ținând cont instantaneu de rostogolirea bilei pe acest inel:

$$v_O = D_p \omega_O = \frac{v_i}{2} = \frac{1}{2} \omega_i (D_p - d \cos(\beta)), \quad (4.4)$$

unde ω_O este viteza unghiulară a ancoșei, care din (4.4),

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_i \left(1 - \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right). \quad (4.5)$$

Aceasta înseamnă că, dacă ancoșa prezintă un defect, cum ar fi o dezaxare de la axa rulmentului, forța de inerție ce ia naștere pe corpul ancoșei, este o forță perturbatoare de frecvență:

$$f_0 = \frac{1}{2} f_i \left(1 - \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right) \quad (4.6)$$

și este prezentă în semnalul de vibrații măsurat pe carcasa rulmentului printr-o componentă periodică de aceeași frecvență. ($f_0 = \omega_0/2\pi$, $f_i = \omega_i/2\pi$).

Dacă calea de rulare a inelului exterior prezintă un singur defect (pitting) o singură bilă va călca pe defect cu aceeași frecvență f_0 , deoarece centrul ei se va deplasa împreună cu ancoșa pe circumferința de diametru D_p , și cum rulmentul are un număr de Z bile egal distanțate pe această circumferință, frecvența de trecere a bilelor peste defect va avea expresia:

$$f_{ie} = \frac{Z}{2} f_i \left(1 - \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right). \quad (4.7)$$

În același mod se determină frecvența de contact dacă pata defectului apare pe calea de rulare a inelului interior:

$$f_{ii} = \frac{Z}{2} f_i \left(1 + \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right). \quad (4.8)$$

Când pata defect se dezvoltă pe o singură bilă atunci, din aceleași condiții cinematice de rostogolire fără alunecare va rezulta frecvența de contact a petei defect pe cele două căi de rulare:

$$f_b = f_i \frac{D_p}{d} \left[1 - \left(\frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right)^2 \right]. \quad (4.9)$$

Acestor componente ale frecvențelor fundamentale li se adaugă componentele de frecvențe multiple acestora și componentele ale căror frecvențe sunt combinații de forma,

$$f_{im} = n_i \times f_{ii} + n_e \times f_{ie} \pm f_i \quad n_i, n_e = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

ceea ce face dificilă munca de analiză a semnalelor de vibrații înregistrate pe carcasa rulmentului.

Dificultatea este legată de faptul că forțele de contact fiind impulsive, după fiecare contact sunt excitate modurile naturale de vibrații ale structurii rulmentului și ale structurilor conexe, semnalul măsurat pe carcasa rulmentului având forma unei sume modale:

$$u(t) = \sum_{r=1}^N e^{-\sigma_r t} [C_{Rr} \cos(p_r t) + C_{Ir} \sin(p_r t)], \quad (4.11)$$

constantele C_{Rr} și C_{Ir} primind alte valori la momentul fiecărui contact pe pata defect.

4.2.2. Verificări experimentale

Experimentările s-au efectuat pe un rulment radial cu bile seria 6209 având dimensiunile $D_p = 65 \text{ mm}$, $d = 14.2 \text{ mm}$, $\beta = 0^\circ$ și $Z = 9$ bile, pentru care frecvențele fundamentale caracteristice defectelor raportate la frecvența de rotație f_i a inelului interior, vor deveni:

- $n_o = \frac{f_o}{f_i} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right) = 0.391$, pentru defect de ancoșă;
- $n_{ie} = \frac{f_{ie}}{f_i} = \frac{Z}{2} \left(1 - \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right) = 3.517$, pentru defect pe inelul exterior;
- $n_{ii} = \frac{f_{ii}}{f_i} = \frac{Z}{2} \left(1 + \frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right) = 5.483$, pentru defect pe inelul interior;
- $n_b = \frac{f_b}{f_i} = \frac{D_p}{d} \left(1 - \left(\frac{d}{D_p} \cos(\beta) \right)^2 \right) = 4.359$, pentru defect pe bilă.

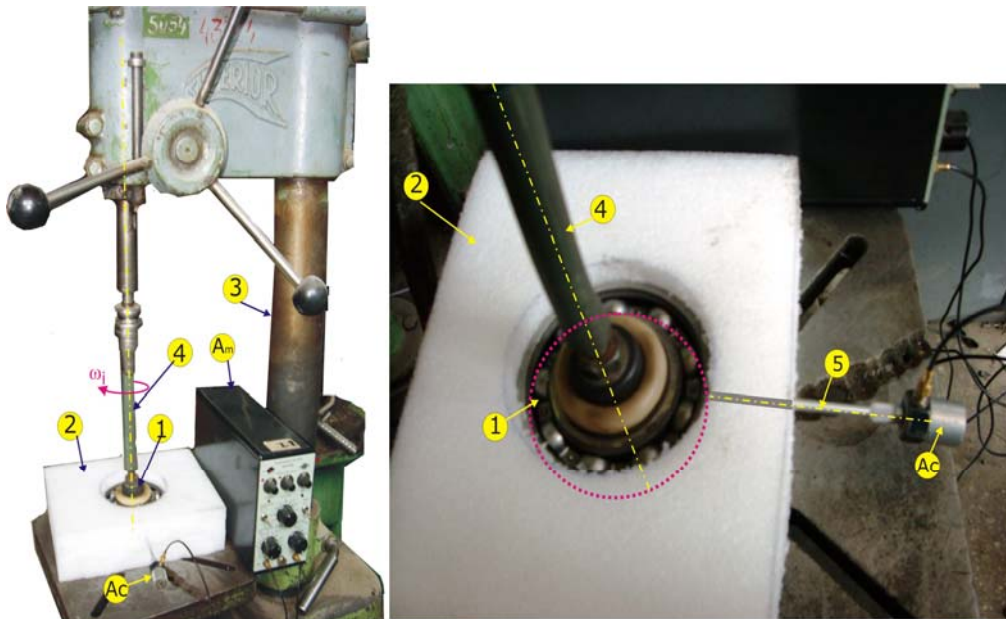


Fig.4.7. Montajul experimental pentru testarea la vibrații a rulmentului radial seria 6209.

Rulmentul, 1, figura 4.7., a fost montat cu inelul exterior fix, pe o placă, 2, din spumă poliuretanică, antrenarea inelului interior făcându-se prin intermediul axului tubular, 4, flexibil, din cauciuc, antrenat de broșa mașinii de găurit, 3.

Semnalul de vibrații s-a măsurat pe inelul exterior al rulmentului prin contactul direct al unui știft, 5, care străpunge placa, 4, luând la un capăt contact cu inelul

exterior al rulmentului, iar la celălalt capăt fiind fixat prin filet un accelerometru Ac . Semnalul de accelerație generat de accelerometru este preluat de amplificatorul de măsură Am și prelucrat prin digitalizare cu un convertor analog numeric pe un fișier de date memorat pe calculator.

Vibrograma unui semnal de accelerații înregistrat pe o secvență de 10 secunde arată ca în figura 4.8.a., cu un detaliu în perioada scurtă de timp (zoom) între 1.45 și 1.46 secunde.

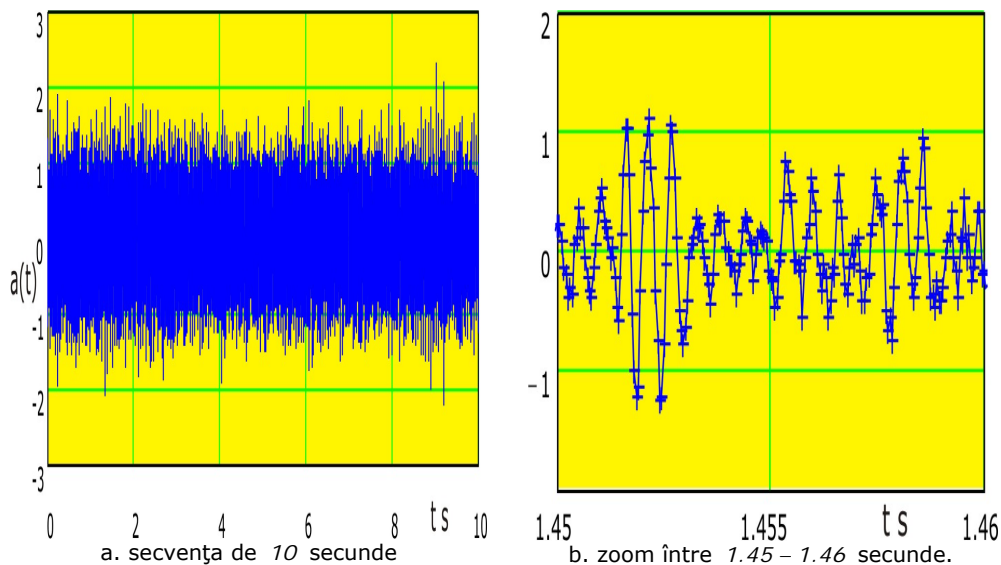


Fig.4.8. Vibrograma unui semnal de vibrații emis de rulment.

Fișierul digitalizat al semnalului cuprinde un număr de 200.000 eșantioane la frecvența de eșantionare de 20.000 pe secundă.

Aplicând direct transformata Fourier se obține spectrul din figura 4.9., un spectru de bandă largă în domeniu 0 kHz la 10 kHz de-a lungul căreia se disting zone: de joasă frecvență până la 0.5 kHz, în care intră direct componentele din dezechilibru și dezaxări ale mașinii de găurit utilizată. Și zonele de benzi de frecvență, unde sunt grupate componentele modurilor naturale de vibrații ale ansamblului rulmentului excitate prin contact pe defect. Aceste zone sunt grupate în jurul frecvențelor centrale de 1.8 kHz, 3 kHz, 6.5 kHz și 9.3 kHz.

Pentru căutarea componentelor periodice, care se corelează cu defectele specifice, prin aplicarea metodei anvelopei și analiza cepstrum (fundamentate în cadrul capitolului 2) s-a filtrat semnalul de accelerație, în primele două benzi de frecvență, având frecvențele centrale 1.8 kHz și 3 kHz.

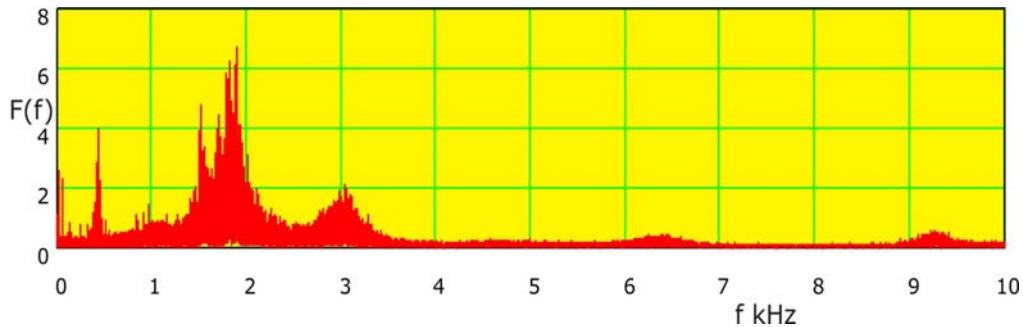


Fig.4.9. Spectrograma semnalului de accelerație din figura 4.8.

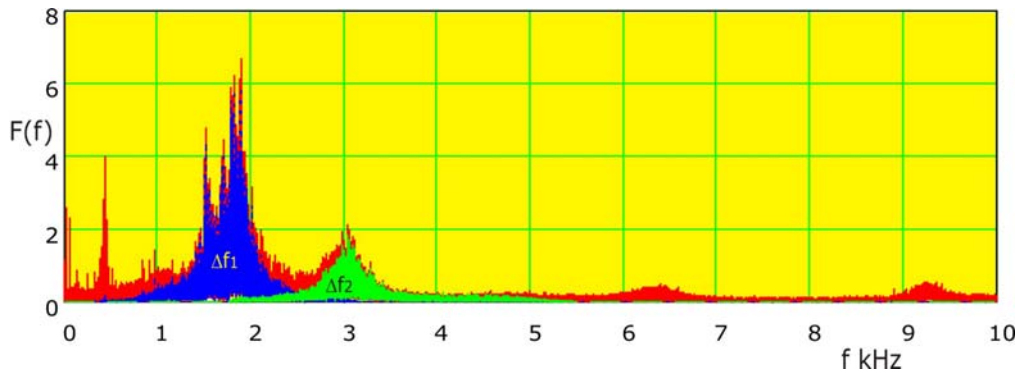
Filtrarea se poate face apelând la subrutine ale codului MathCad:

- $Cf_1 := \text{bandpass}(c_{11}, c_{12}, 50, 6)$, care definește coeficienții de filtrare pentru subrutina semnalului filtrat în banda Δf_1 ,

$$a_1 := \text{response}(a, Cf_1, n),$$

unde c_{11}, c_{12} delimitând marginile filtrului, de-a lungul celor n eșantioane ale semnalului.

Aceleași subrutine se utilizează pentru filtrare semnalului în banda Δf_2 .

Fig.4.10. Delimitarea zonelor spectrale $\Delta f_1, \Delta f_2$, prin filtrări de banda.

4.2.2.1. Identificarea frecvențelor caracteristice de defect prin metoda anvelopei

Aplicarea metodei anvelopei necesită procesarea transformatei Hilbert:

$$h_1 := \text{hilbert}(a_1)$$

apoi funcția anvelopei:

$$av_{1k} := \sqrt{h_1^2 + a_{1k}^2}, \quad k := 0..n,$$

a cărei vibrogramă este prezentată în figura 4.11.a., relevă, cum era de așteptat componente numai pozitive.

Aplicarea transformatei Fourier asupra acestui semnal va duce la un spectru neclar în care cu greu pot fi identificate componentele aferente defectelor specifice.

Pentru îmbunătățire se extrag din acest semnal componentele de joasă frecvență care conțin și componenta de frecvență zero. Aceasta se poate obține printr-o filtrare prin mediere pe o bandă de 501 eșantioane.

$$m_1 := \text{medsmuth}(av_1, 501),$$

cu ajutorul căruia se obține un semnal din care sunt eliminate aceste componente:

$$avf_1 := av_1 - m_1,$$

a cărei vibrogramă este cea din figura 4.11.b.

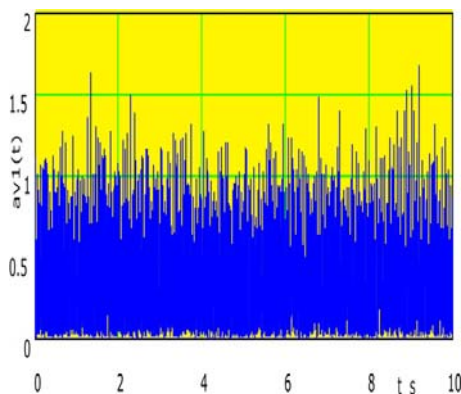


Fig.4.11.a. Vibrograma anvelopei $av_1(t)$.

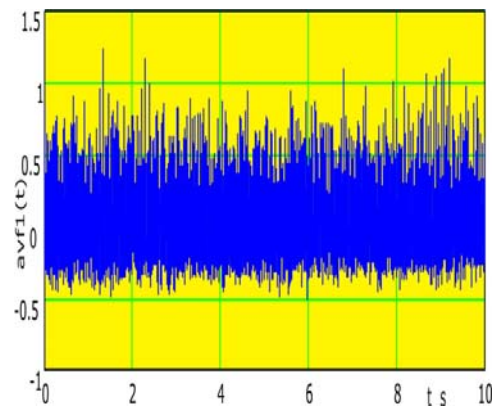


Fig.4.11.b. Vibrograma anvelopei filtrate $avf_1(t)$.

Aplicând semnalului avf_1 transformatei Fourier, se obține spectrul din figura 4.12., un spectru de linii distincte. În scopul corelării lor cu posibile defecte s-au trasat pe această spectrogramă, o rețea de linii cu buline care marchează pozițiile în spectru, de-a lungul axei frecvenței, frecvențele caracteristice de defect și multiplii acestora ($\times 1, \times 2, \dots$).

După cum se observă clar, bulina marcând frecvența f_b , (fundamentală, $\times 1$) caracteristică defectului de bilă este situată pe linia spectrală de magnitudine maximă, la frecvența $f_b = 72.4 \text{ Hz}$, ceea ce înseamnă că defectul de bilă este prezent. Coincidențele sunt și pentru componentele de ordinul $\times 2$ și $\times 6$, ceea ce întărește supoziția defectului de bilă prezent.

Coincidențe multiple ale bulinelor marcatore se înregistrează și pentru frecvența de rotație $f_i = 16.6 \text{ Hz}$ pentru componentele de ordinul $\times 1, \times 2$ și $\times 16$, ceea ce este normal datorită dezaxării dintre axele broșei și axa rulmentului, montajul experimental fiind o improvizație. Acest fapt explică și prezența celorlalte linii spectrale prezente în spectru, provenite de la perturbații ale mașinii de găurit.

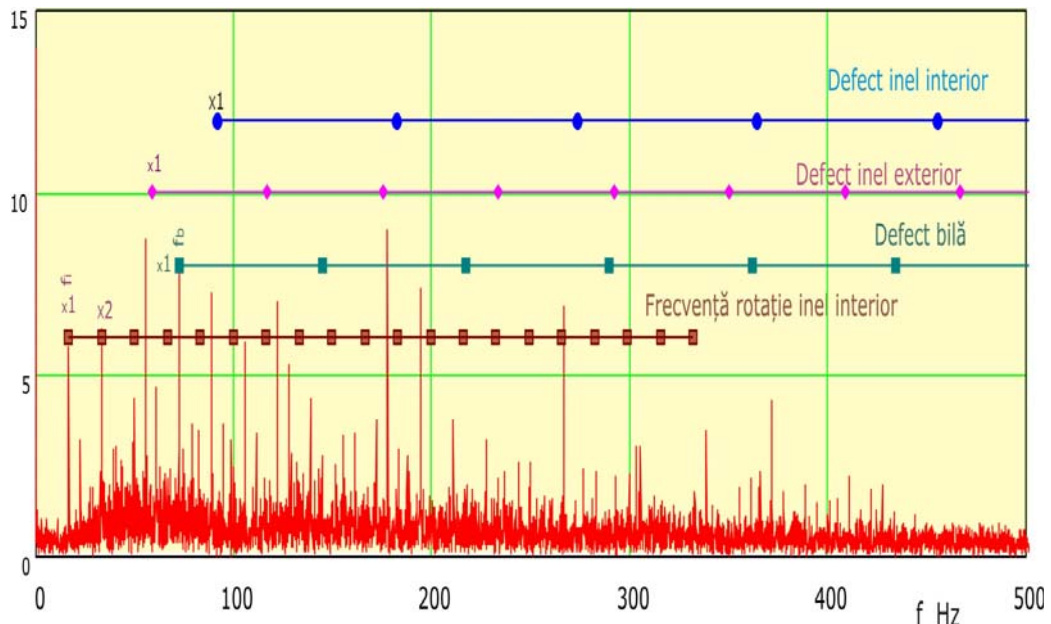


Fig.4.12. Spectrul anvelopei semnalului de accelerație înregistrat pe inelul exterior al rulmentului.

Pentru un asemenea test fabricanții de rulmenți folosesc broșe de antrenare cu zgomot extrem de redus, în funcție de nivelurile de vibrații înregistrate pe inelul exterior rulmenții fiind clasificați.

5. CONCLUZII. CONTRIBUȚII ORIGINALE

Teza de doctorat cu titlul METODE ȘI ALGORITMI DE PRELUCRARE A SEMNALELOR DE VIBRAȚII cuprinde o serie de contribuții importante în domeniul investigării vibrațiilor structurilor de mașini, eficiența cercetărilor depinzând în mod esențial de metodele de prelucrare a semnalelor înregistrate, din acest motiv teza s-a axat pe elaborarea unor noi metode și îmbunătățirea altor metode, care să contribuie la punerea în evidență a unor caracteristici importante ale semnalului de vibrații înregistrat pe structura supusă investigație.

În ordine cronologică a prezentării în cadrul tezei aceste contribuțiile importante sunt:

- metodă de discretizare a unui semnal de vibrații după copia foto a unei vibrograme, metodă simplă și deosebit de utilă când este necesară compararea unor semnale vechi înregistrate pe cale analogică cu semnale noi înregistrate numeric, (paragraf 2.1.);
- metodă și algoritm pentru mărirea densității liniilor unui spectru Fourier procesat pe o secvență scurtă de timp, cu increment de frecvență larg, ce poate scăpa din analiză unele componente importante ale semnalului (paragraf 2.2.);
- îmbunătățirea metodelor anvelopei semnalului și transformatei cepstrum, pentru determinarea periodicităților ascunse într-un semnal de vibrații, (paragraf 2.3.);
- metode și algoritmi pentru determinarea componentelor armonice ale unui semnal complex, o metodă, (paragraf 2.4.1.), când există posibilitatea înregistrării simultan cu semnalul de vibrații, a unui semnal marcator de periodicitate, sincron cu rotația arborelui principal al mașinii, și, a doua metodă, (paragraf 2.4.2.), în care nu se are, tehnic, la dispoziție un semnal marcator, metodă originală publicată [Căplescu, Hule, Cioara, (2007.a)];
- dezvoltarea unei a treia metode de determinare a componentelor armonice utilizând metoda analizei armonice, aplicată semnalului de vibrații ponderat cu o funcție exponențială căzătoare în timp, (paragraf 2.4.3.);
- aplicarea transformatei *wavelet* la recunoașterea provenienței unui semnal de vibrații, prin definirea unei *funcții de frecvență wavelet*, original formulată în cadrul tezei, funcție care, în cazul în care sursa semnalului de vibrații este reprezentată dinamic printr-un model liniar va fi o dreaptă constantă paralelă cu axa timpului, iar pentru un model neliniar va fi o curbă în planul frecvență-timp, (paragraf 2.5.);
- metodă și algoritm pentru recondiționarea semnalelor înregistrate cu depășirea pe intervale scurte de timp a limitelor de saturație a instrumentației de înregistrare (senzor-amplificator-convertor analog numeric), pe aceste porțiuni semnalul fiind tăiat la nivelurile limită, metodă însumând o serie de idei originale, publicate recent, [Căplescu, Cioara, (2009.c)], (capitolul 3);
- aplicarea metodei și algoritmului (paragraf 2.4.2.) la determinarea componentelor armonice ale semnalelor de vibrații pe structura unui stator

de la un hidroagregat de mare putere, analiză ce are în vedere stabilirea unui sistem de supraveghere a stării tehnice a statorului, (paragraf 4.1.);

- aplicație privind diagnosticarea defectelor la rulmenți, utilizând metoda îmbunătățită a anvelopei semnalului de vibrații, (paragraf 2.3.), generat de rulment prin testare pe o mașină de găurit, în prezența unui zgomot perturbator puternic.

Toate metodele prezentate pe larg în cadrul tezei se pot dezvolta în continuare cu aplicații la:

- determinarea nivelurilor de vibrații periculoase pentru integritatea structurală a mașinii sau utilajului;
- reducerea nivelurilor de vibrații la mașini și utilaje;
- monitorizarea stării tehnice a unei mașini pe baza prelucrării semnalelor de vibrații înregistrate în timpul funcționării ei;
- controlul pe linia de fabricație a calității produselor industriale prin teste de vibrații.

BIBLIOGRAFIE

- Allen R. L., Mills D. W.**, (2004). *Signal Analysis. Time, Frequency, Scale and Structure*, IEEE Press, Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., Publication, Editorial Board, ISBN 0-471-23441-9.
- Bachman G., Narici L., Beckenstein E.**, (2000). *Fourier and Wavelet analysis*, Springer-Verlag New-York Inc., ISBN 0-387-98899-8.
- Baese-Meyer U.**, (2001). *Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays*, Springer-Verlag, ISBN 3-540-41341-3.
- Beards C. F.**, (1996). *Structural Vibration, Analysis and Damping*. Butterworth-Heinemann, Elsevier Science.
- Bendat J. S.**, (1985). *The Hilbert transform and applications to correlation measurements*, Bruel&Kjaer, BT0008, Denmark.
- Boashash B., Powers J. E., Zoubir M. A.**, (1995). *Higher-Order Statistical Signal Processing*, Longman Australia, ISBN 0 582 80077 3.
- Bogert B. P., Healy M. J. R., Tukey J. W.**, (1963). *The Quefreny Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking*, *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis*, Ed. M. Rosenblatt, Chapter 15, pp. 209-243, New York, Wiley
- Boggess A., Narcowich F. J.**, (2001). *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Texas A & M University, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Bremaud P.**, (2002). *Mathematical Principles of Signal Processing. Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag New York Inc., ISBN 0-387-95338-8.
- Brîndeu L.**, (2001). *Vibrații și vibropercuții*, Colecția „MECANICA”, Editura Politehnica, Timișoara, ISBN 973-8247-36-5.
- Budura G.**, (2002). *Prelucrarea semnalelor*, Colecția „Prelucrarea semnalelor”. Editura Politehnica Timișoara, ISBN 973-625-015-6.
- Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeș M.**, (1975). *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București.
- Buzdugan Gh., Mihăilescu E., Radeș M.**, (1979). *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București.
- Caius I.**, (1971). *Mecanică teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București.
- Căplescu C.**, (2007.b). *Structural diagnosis of a hydraulic turbine generator using periodical vibration signal analysis*, *Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering*, Volume VI (XVI), ISSN 1583-0691, CNCSIS „Clasa B+”, Oradea, România.
- Căplescu C.**, (2009.a). *Dynamic analysis of a structure by a discrete model*, scientific Bulletin of the „POLITEHNICA” University of Timișoara, Transactions on Mechanics, România.
- Căplescu C., Cioara T. Gh.**, (2009.b). *Simulation of seismic wave action to a discrete mechanical system*, Colecția „CONFERINȚE”, Proceedings of X-th Symposium, Acoustics and Vibration of Mechanical Structures AVMS, Editura POLITEHNICA, ISSN 1843-0902, Timișoara, România.

- Căplescu C., Cioara T. Gh.,** (2009.c). *On vibration signal records recondition. Application to unpredictable signal levels*, International Conference on Structural Engineering Dynamics, ISBN 978-989- 96276-0-4, Ericeira, Portugal.
- Căplescu C., Hule V., Cioara T. Gh.,** (2007.a). *Periodical components extracting from a complex signal*, ICED, International Conference on Engineering Dynamics, Carvoeiro, Algarve, Portugal.
- Ceangă E., Munteanu I., Bratcu A., Culea M.,** (2001). *Semnale, circuite și sisteme. Partea I: Analiza semnalelor*, Editura Academica, Galați, ISBN 973-8316-16-2.
- Cioara T. Gh.,** (1988). *On a Curve Fitting Algorithm for Modal Parameter Estimation*, pp. 717-723, Proc. 6th Int. Modal Analysis Conference, Orlando, USA.
- Cioara T. Gh.,** (1992). *Măsurarea vibrațiilor pe statorul turbinei numărul 1 de 178 MW de la Porțile de Fier I*. Contract număr 34/92 al VTRL al Universității Tehnice Timișoara.
- Cioara T. Gh.,** (2001). *Vibrații și zgomote. Note de curs*, Ediție electronică, Universitatea Politehnică Timișoara.
- Cioara T. Gh.,** (2002). *Tehnici Experimentale în inginerie*, Ediția electronică, University Politehnică Timișoara.
- Cioara T. Gh., Bereteu L., Dragomir D.,** (1993). *Studii și cercetări experimentale în domeniul vibrațiilor structurilor mecanice utilizând metode și tehnici de analiză modală*, Raport de Cercetare la contractul M. I. Nr. 1082-B, Universitatea Tehnică Timișoara, Facultatea de Mecanică.
- Cioara T. Gh., Bereteu L., Dragomir D., Drăgănescu Gh.,** (1993). *Un algoritm de multiplicare a densității liniilor spectrale la transformata discretă Fourier*, Conferința a VII-a de Vibrații Mecanice, Timișoara.
- Cooley J. W., Tukey J. W.,** (1965). *An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series*, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297-301.
- Debnath L., Mikusinski P.,** (2005). *Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press.
- Drăgănescu Gh.,** (2000). *Vibrații și zgomote*, Colecția „MECANICA”, Editura Politehnică, ISBN 973-9389-57-0, Timișoara.
- Fugal L. D.,** (2006). *Conceptual Wavelets In Digital Signal Processing*, Space&Signals Technologies LLC, All Rights Reserved.
- Hayes M. H.,** (1999). *Digital Signal Processing*, McGraw-Hill Companies Inc., ISBN 0-07-027389-8.
- Homentcovschi D.,** (1986). *Funcții complexe cu aplicații în știință și tehnică*, Editura Tehnică, București.
- Hsu H. P.,** (1995). *Signals and Systems*, Schaum's Outline Series, McGRAW-Hill Companies, Inc., ISBN 0-07-030641-9.
- Karu Z. Z.,** (1995). *Signals and Systems. Made Ridiculously Simple*, Zizi Press Cambridge, MA, ISBN 0-9643752-1-4.
- Kecs W.,** (1978). *Produsul de convoluție și aplicații*, Editura Academiei, București.
- Kobayashi M.,** (1998). *Wavelets and their applications. Case studies*, IBM Tokyo Research Laboratory , Tokyo, Japan.
- Lepik U.,** (2001). *Application of Wavelet Transform Techniques to vibration studies*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 50, 155-168.
- Maia N. M. M., Silva J. M. M.,** (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Instituto Superior Tecnico, Portugal, ISBN 0 86380 208 7, Research Studies Press LTD.

- Mallat S.**, (2009). *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press Elsevier Inc., ISBN 13: 978-0-12-3743370-1.
- Marciuk G. I.**, (1983). *Metode de analiză numerică*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București.
- Maxfield B.**, (2006). *Engineering with Mathcad*. Butterworth-Heinemann, Elsevier Science, ISBN-13: 978-0-7506-6702-9.
- Meddins B.**, (2000). *Introduction to Digital Signal Processing Principles, Algorithms and Applications*, School of Information Systems, University of East Anglia, UK, ISBN 0-13-394338-9.
- Meirovitch L.**, (1975). *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, Inc., ISBN 0-07-041340-1, USA.
- Naforniță I., Gordan C., Isar A.**, (1998). *Semnale și sisteme. Partea I*, Universitatea „Politehnica” Timișoara. Facultatea de Electronică și Telecomunicații.
- Norton M. P.**, (1989). *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*, Cambridge University Press, ISBN 0 521 34148 5, ISBN 0 521 34941 9.
- Opritescu C., Căplescu C., Cioara T. Gh.**, (2008). *Crack Detection of a Structure by Impulse Response. Test Simulation and Experimental Data*. Proceedings of Conference IMAC XXVI: A Conference on Structural Dynamics, Society for Experimental Mechanics Inc., Paper No. 175, Orlando, Florida.
- Papoulis A.**, (1962). *The Fourier integral and its applications*, McGRAW-Hill Electronic Sciences Series, INC. 07-048447-3.
- Polikar R.**, (1995). *The Wavelet Tutorial. Second Edition. Parts I-IV.*, Durham Coputation Center, Iowa.
- Poterașu F. V., Zăgan R.**, (1999). *Analiza cu Wavelet a vibrațiilor și zgomotelor. „Ovidius” University Press, Constanța*, ISBN 973-9289-40-1.
- Proakis J. G., Manolakis D. G.**, (1992). *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications*, Macmillan Publishing company, New York, ISBN 0-13-394338-9.
- Radeș M.**, (2006). *Mechanical Vibrations I*, Editura Printech, ISBN 973-718-480-7, 978-973-718-480-1, București.
- Randall R. B.**, (1977). *Application of B&K Equipment to Frequency Analysis*, B. Tech., B. A., ISBN 87 87355 1 4 0, Denmark.
- Shmaliy Y.**, (2006). *Continuous Time Signals*, Dordrecht, The Netherlands, Springer, ISBN-10 1-4020-4818-1.
- Silaș Gh., Cioara T. Gh., Gligor T., Toader M., Bacria V.**, (1988). *On the undamped eigenpulsation of a unit consisting of a boiler and its hanged metal structure*, Conferința a VI-a de Vibrații Mecanice, Timișoara.
- Silaș Gh., Cioara T. Gh., Uroșu D., Toader M., Bacria V., Marina L., Dănoiu A., Dragomir D. D.**, (1988). *Experimental study of the vibrations of a system consisting of a boiler and its supporting metal structure*, Conferința a VI-a de Vibrații Mecanice, Timișoara.
- Ștefănoiu D.**, (2007). *Tehnici de calcul în Prelucrarea Numerică a Semnalelor. Note de curs*, Universitatea „Politehnica” din București, Facultatea „Automatică și Calculatoare”, București.
- Taylor I. J.**, (2003). *The Vibration Analysis Handbook. A Practical Guide for Solving Rotating Machinery Problems*, Hardcover.
- Teolis A.**, (1998). *Computational Signal Processing with Wavelets*, Birkhauser, Boston, ISBN 0-8176-3909-8.

- Thomson W. T.**, (1988). *Theory of vibration with applications*, Prentice Hall, ISBN 0-04-445069-9, Santa Barbara, California.
- Torrence C., Compo P. G.**, (1998). *A Practical Guide to Wavelet Analysis*, Bulletin of the American Meteorological Society, Vol 79, No. 1.
- Walker S. J.**, (2008). *A Primer on Wavelets and Their Scientific Applications*, Chapman&Hall/CRC.
- Woyczynski A. W.**, (2006). *A First Course in Statistics for Signal Analysis*, Boston, ISBN 0-8176-4516-0.