



UNIVERSITATEA 'POLITEHNICA' DIN TIMIȘOARA - FACULTATEA DE MECANICĂ

DEPARTAMENTUL DE MECANICĂ ȘI REZISTENȚA MATERIALELOR

CATEDRA DE REZISTENȚA MATERIALELOR



Bd. Mihai Viteazu Nr.1, 300222, Timișoara, Tel: +40-256-403577 Fax: +40-256-403523; +40-256-403524 E-mail: faur@mec.upt.ro

# CERCETĂRI PRIVIND APLICAREA CONCEPTELOR INGINERIEI INVERSE ÎN MODELAREA STRUCTURILOR BIOMECANICE

Teză destinată obținerii  
titlului științific de "Doctor Inginer"  
la  
Universitatea Politehnica din Timișoara  
în domeniul "INGINERIE MECANICĂ"  
de către

Ing. **Laurențiu Daniel-Florin CULEA**

*Conducător științific:*

Prof. Univ. Dr. Ing. **Nicolae FAUR**

Universitatea Politehnica din Timișoara

*Referenți științifici:*

Prof. Univ. Dr. Ing. **Augustin CREȚU**

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Prof. Univ. Dr. Ing. **Dan Mihai CONSTANTINESCU**

Universitatea Politehnica din București

Prof. Univ. Dr. Ing. **Mirela TOTH-TAȘCĂU**

Universitatea Politehnica din Timișoara

Data susținerii publice a tezei: 17 Iulie 2009

# Cuprins

BUPT

<b>Importanța și actualitatea temei .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Stadiul actual al modelării CAD a solidelor .....</b>	<b>3</b>
1.1. Aspecte generale. ....	3
1.2. Modelarea CAD prin propagare. ....	3
1.3. Modelarea CAD prin geometrie în spațiu constructivă. ....	6
1.4. Modelarea CAD prin suprafețe libere. ....	7
1.5. Modelarea CAD prin ocupanță spațială și fațetare. ....	9
<b>2. Stadiul actual al modelării CAD prin suprafețe libere a structurilor biomecanice .....</b>	<b>11</b>
2.1. Considerații generale. ....	11
2.2. Curbe spline cubice naturale. ....	13
2.2.1. Forma explicită. ....	13
2.2.2. Forma parametrică. ....	19
2.3. Curbe de tip Bézier. ....	27
2.3.1. Curbe Bézier de ordinul întâi (liniare). ....	28
2.3.2. Curbe Bézier de ordinul al doilea (cuadratic). ....	29
2.3.3. Curbe Bézier de ordinul al treilea (cubice). ....	31
2.3.4. Curbe Bézier de ordin superior. ....	34
2.4. Suprafețe de tip Bézier. ....	39
2.4.1. Suprafețe Bézier biliniare. ....	40
2.4.2. Suprafețe Bézier bicuadratic. ....	43
2.4.3. Suprafețe Bézier bicubice. ....	45
2.4.4. Suprafețe Bézier de ordin superior. ....	49
<b>3. Stadiul actual al ingineriei inverse în modelarea CAD a structurilor biomecanice.....</b>	<b>50</b>
3.1. Aspecte generale. ....	50
3.2. Achiziția de date. Scannerul 3D. ....	52
3.2.1. Tehnologia scannerelor 3D. ....	53

3.2.1.1. Scannerele 3D non-contact active. ....	53
3.2.1.2. Scannerele 3D non-contact pasive. ....	59
3.2.1.3. Scannerele 3D tactile. ....	60
3.2.2. Problemele practice ale achiziției de date. ....	60
<b>4. Principiile generale ale analizei cu metoda elementului finit (MEF) .....</b>	<b>64</b>
4.1. Scurtă istorie a MEF. ....	64
4.2. Definiția analizei cu MEF. ....	64
4.3. Etapele aplicării analizei cu MEF. ....	65
4.4. Tipuri de elemente finite și funcții de interpolare. ....	68
4.5. Elemente finite tetraedrice. ....	70
<b>5. Modelul CAD al unei proteze dentare totale .....</b>	<b>72</b>
5.1. Aspecte generale. ....	72
5.2. Etapa achiziției datelor prin scanare 3D. ....	73
5.3. Etapa preprocesării datelor. ....	75
5.4. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor. ....	78
5.5. Etapa construcției modelului geometric solid CAD. ....	80
<b>6. Analiza stărilor de tensiune și deformație la nivelul craniului uman datorate inserării unui disjunctiv ortodontic, cu ajutorul MEF .....</b>	<b>82</b>
6.1. Disjunctivul ortodontic. ....	82
6.2. Modelul CAD al craniului uman. ....	82
6.2.1. Etapa achiziției datelor prin scanare tomografică. ....	83
6.2.2. Etapa preprocesării datelor. ....	83
6.2.3. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor. ....	88
6.2.4. Etapa construcției modelului geometric solid CAD. ....	93
6.2.5. Adaptarea modelului CAD pentru analiza cu MEF. ....	96
6.3. Efectuarea analizei cu MEF. ....	98
<b>7. Modelul CAD al femurului uman .....</b>	<b>104</b>
7.1. Etapa achiziției datelor prin scanare tomografică. ....	104
7.2. Etapa preprocesării datelor. ....	105
7.3. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor. ....	118
7.4. Etapa construcției modelului geometric solid CAD. ....	121

<b>8. Analiza cu MEF a solicitării de încovoiere a femurului uman .....</b>	<b>125</b>
8.1. Stabilirea modelului de calcul. ....	125
8.2. Adaptarea modelului CAD al femurului pentru aplicarea modelului de calcul. ....	128
8.3. Rezolvarea modelului de calcul cu ajutorul MEF. ....	140
8.4. A doua variantă a modelului de calcul. ....	148
8.5. Adaptarea modelului CAD al femurului pentru aplicarea celui de-al doilea model de calcul. ....	155
8.6. Rezolvarea celui de-al doilea model de calcul cu ajutorul MEF. ....	161
<b>9. Validarea experimentală a modelelor de calcul la încovoiere ale femurului uman .....</b>	<b>170</b>
9.1. Configurația tehnică. ....	170
9.2. Efectuarea măsurătorilor. ....	174
<b>10. Concluzii și contribuții originale .....</b>	<b>179</b>
10.1. Concluzii. ....	179
10.2. Contribuții originale.....	180
<b>Bibliografie .....</b>	<b>182</b>

## Importanța și actualitatea temei

*Biomecanica* reprezintă o ramură a biologiei, care se ocupă cu studiul mecanicii aplicate în cadrul sistemelor biologice, cu studiul principiilor anatomice ale mișcării organismelor superioare. Biomecanica este larg aplicată în protetică, sport și gimnastică.

Obiectele biomecanicii se extind de la procesele celulare până la studiul mișcării membrilor, la proprietățile mecanice ale țesuturilor moi și a oaselor. Pe măsură ce se dezvoltă înțelegerea comportamentului fiziologic al țesuturilor vii, cercetătorii sunt capabili să avanseze în domeniul ingineriei țesuturilor (tissue engineering) și să aducă îmbunătățiri în tratamentul diverselor patologii.

Studiul biomaterialelor are o importanță crucială în biomecanică. De exemplu, diversele țesuturi întâlnite în organele corpului uman cum ar fi pielea, oasele sau arterele posedă fiecare în parte proprietăți de material unice. Răspunsul mecanic pasiv al unui țesut în particular, poate fi atribuit caracteristicilor diverselor proteine cum ar fi elastina, colagenul sau poate fi atribuit orientării fibrelor în țesuturi.

Lucrarea de față se focalizează asupra oaselor scheletului uman pentru cunoașterea stării de tensiune și deformație la nivelul acestora, în vederea implantării protezelor adecvate diverselor situații. Proteza, în mod generic, fiind o extensie a funcțiilor oaselor, trebuie să fie cât mai durabilă, rigiditatea mare a protezei asigurând o durabilitate mare, dar reprezintă un factor de risc pentru zona protezată și totalitatea deformațiilor ar fi preluată de os în sine. Proteza trebuie să fie cât mai apropiată ca funcție și formă de osul (zona) lipsă, deci în mod imperativ trebuie să existe o simbioză între proteză și os.

La ora actuală proiectarea și dezvoltarea protezelor reprezintă o activitate elaborată în exclusivitate cu ajutorul tehnicilor CAD. Tot în acest context, astăzi este posibilă personalizarea protezelor în funcție de necesitate. De exemplu, realizarea unei proteze de cap femural se poate realiza, din punct de vedere al formei geometrice, identică cu partea extirpată. Aceste realizări nu ar fi însă posibile fără tehnologia avansată a tomografiei computerizate care constituie punctul de plecare în modelarea geometrică a oaselor. Aici intervine conceptul de inginerie inversă în modelarea geometrică a oaselor, în sensul că se pornește de la geometria reală a oaselor și prin diverse procese specifice se ajunge la modelele geometrice solide CAD ale acestora.

În accepțiunea sa largă, conceptul *ingineriei inverse* reprezintă ansamblul proceselor de descoperire a principiilor de funcționare a unui dispozitiv sau sistem prin analiza structurii, funcției și operațiilor acestuia. De obicei, ingineria inversă implică dezasamblarea sau descompunerea sistemului sau dispozitivului respectiv și analizarea în detaliu a funcționării sale, cu scopul de a realiza un nou dispozitiv sau sistem similar.

Modelarea structurilor biomecanice implică (pe lângă aspectul geometric) și aspecte legate de caracteristicile mecanice ale structurilor respective, cât și legate de modelarea sarcinilor exterioare aplicate. Aici intervine aparatul elaborat al analizei cu *metoda elementului finit* și al tehnicilor CAE. Utilizarea tehnicilor CAE presupune cunoașterea caracteristicilor mecanice ale structurilor biomecanice. La ora actuală se desfășoară cercetări intense în această direcție. În cazul oaselor,

acestea sunt anizotropice dar prezintă aproximativ o izotropie transversală. Relațiile tensiune-deformație pot fi modelate aproximativ în cazul oaselor utilizând legea lui Hooke prin care aceste relații apelează la modulul lui Young și coeficientul lui Poisson. Legea lui Hooke este liniară, dar majoritatea problemelor de biomecanică expun comportamente puternic neliniare (mai ales în cazul țesuturilor moi) și acestea necesită dezvoltarea unor modele constitutive relativ complicate.

Nu în ultimul rând, trebuie menționat aportul uriaș și chiar definitiv al dezvoltării extraordinare a tehnicilor de calcul fără de care modelarea structurilor biomecanice ar fi practic imposibilă.

Iată că aceste principale argumente descrise anterior într-un mod sumar constituie un motiv solid în sprijinul temei și justifică actualitatea și importanța acesteia.

# 1. Stadiul actual al modelării CAD a solidelor

## 1.1. Aspecte generale.

*Modelarea geometrică a solidelor (Solid Modeling)* [5] în cadrul CAD (Computer Aided Design) constituie o metodă de reprezentare a formelor geometrice ale diverselor obiecte fizice care ocupă volum în spațiu, în vederea compatibilizării acestora cu procesarea ulterioară prin tehnica de calcul. Implicite, acestor reprezentări ale formelor geometrice li se asociază proprietăți masice, deci posedă o masă finită, devenind astfel *solide*.

Domeniile principale de utilizare a modelării geometrice a solidelor includ:

- CAD;
- analize ingineresti - CAE (*Computer Aided Engineering*);
- proiectarea tehnologiilor de fabricație - CAM (*Computer Aided Manufacturing*);
- prototiparea rapidă a produselor proiectate cu ajutorul calculatorului - RP (*Rapid Prototyping*);
- grafică și animație realizată cu ajutorul calculatorului - CAG (*Computer Aided Graphics*), CAA (*Computer Aided Animation*);
- tomografie computerizată - CT (*Computer Tomography*).

Există câteva tehnici fundamentale prin care se realizează modelarea geometrică a solidelor în cadrul proiectării asistate de calculator. În general, modelarea solidelor se realizează pornind de la entități simple cum ar fi suprafețe, curbe și puncte.

Metodele fundamentale de modelare geometrică a solidelor în CAD sunt:

- *modelarea prin propagare (sweep modeling)*;
- *modelarea prin geometrie în spațiu constructivă (CSG modeling)*;
- *modelarea prin suprafețe libere (freeform modeling)*;
- *modelarea prin ocupanță spațială (spatial occupancy modeling)*;
- *modelarea prin fațetare (facet modeling)*.

## 1.2. Modelarea CAD prin propagare.

O suprafață plană, marginită de un contur închis oarecare, denumită *secțiune (section)* este propagată dealungul unei curbe oarecare în spațiu denumită *cale (path)* [6]. Solidul astfel rezultat este fie adăugat unui solid existent, în acest caz tehnica este denumită *adăugare prin propagare*, fie este înlăturat dintr-un solid existent, în acest caz tehnica denumindu-se *tăiere prin propagare*. Extrudarea, frezarea și strunjirea constituie tehnologii fizice de fabricație analoage cu tehnica de propagare. Figura 1.2.1 prezintă un solid modelat prin metoda propagării, cu ajutorul programului CAD SolidWorks 2005.

În cazul în care calea reprezintă o simplă dreaptă, operațiunea de propagare se numește *extrudare (extrusion)* [6]. Figura 1.2.2 prezintă un solid modelat prin extrudare.

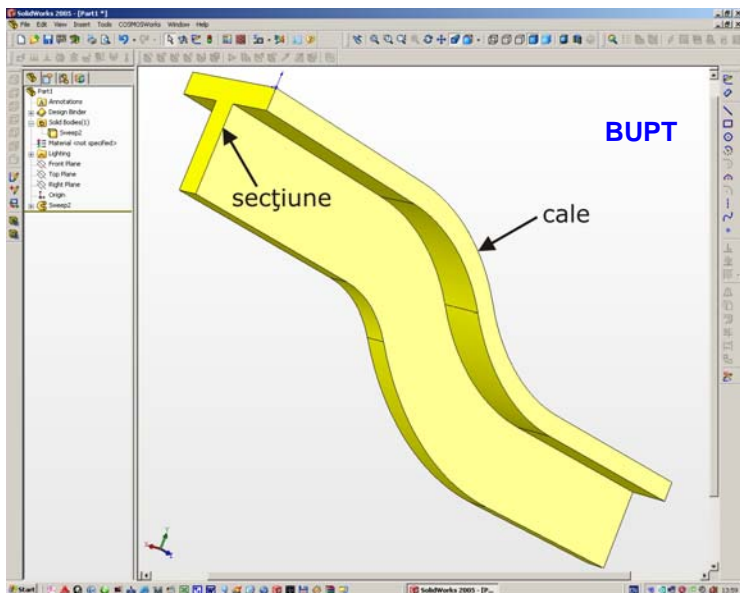


Fig. 1.2.1. Solid modelat prin metoda propagării.

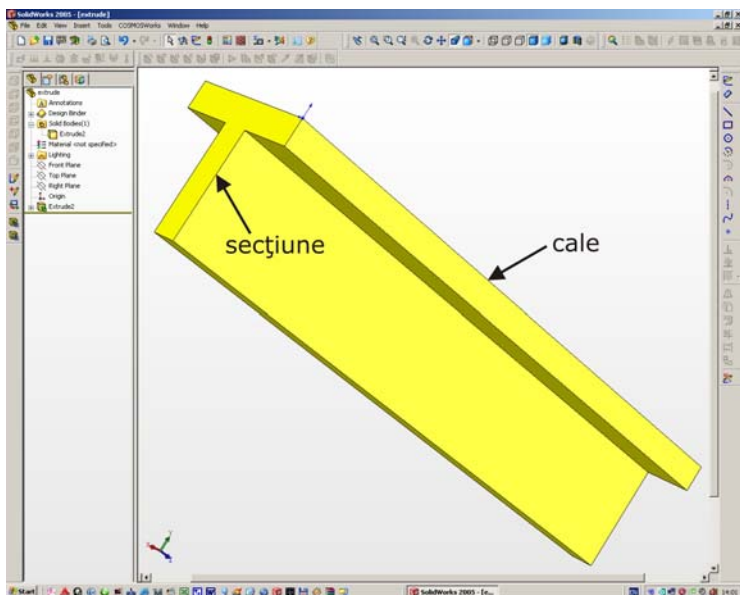


Fig. 1.2.2. Solid modelat prin extrudare.

Dacă un cerc reprezintă calea de propagare, atunci operațiunea se numește *revoluție* (*revolve*) [6]. Figura 1.2.3 prezintă un solid modelat prin revoluție. De asemenea, se pot propaga dealungul unei căi mai multe secțiuni diferite, în acest caz obținându-se un solid intitulat *loft* [6]. Figura 1.2.4 prezintă un solid modelat prin propagarea mai multor secțiuni.



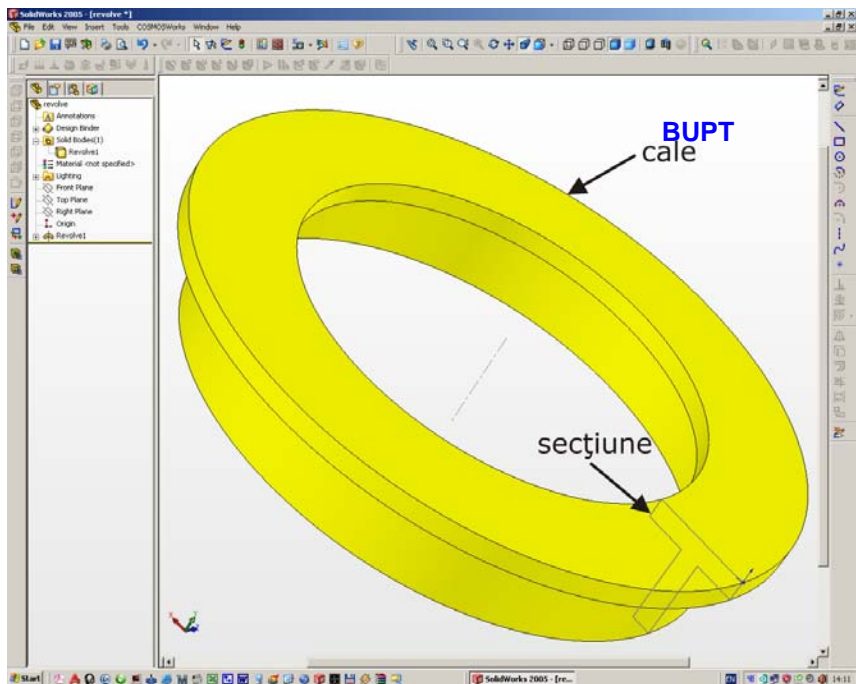


Fig. 1.2.3. Solid modelat prin revoluție.

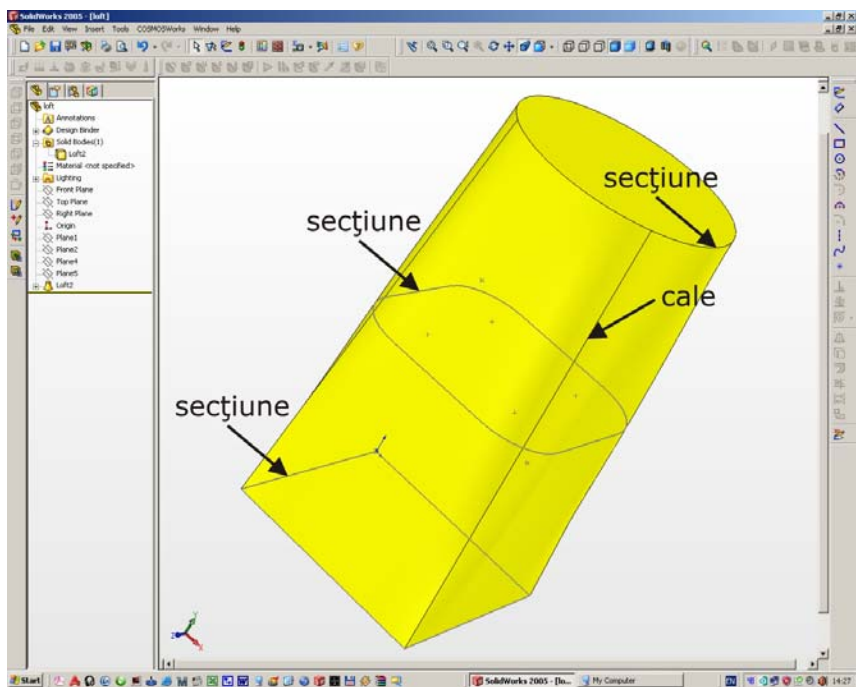


Fig. 1.2.4. Solid modelat prin propagarea mai multor secțiuni.

### 1.3. Modelarea CAD prin geometrie în spațiu constructivă.

Modelarea prin geometrie în spațiu constructivă **CSG** (*Constructive Solid Geometry*) [2] este o tehnică fundamentală în modelarea solidelor, utilizată în CAD, CAG și CAA. Această tehnică permite unui program CAD să creeze solide complexe din punct de vedere geometric, prin combinarea unor solide simple cu ajutorul operatorilor de tip Boolean (reuniune, intersecție și diferență). În general, geometria în spațiu constructivă prezintă solide care vizual apar complexe, dar de fapt acestea rezultă din combinarea adecvată a mai multor solide simple.

Cele mai simple solide utilizate în cadrul tehnicii geometriei în spațiu constructive se numesc *primitive*. În mod frecvent acestea au o geometrie simplă și aparțin următoarelor categorii: cuboide, cilindrii, prisme, piramide, sfere, conuri. Seturile de primitive care pot fi utilizate în cadrul geometriei în spațiu constructive diferă de la un program CAD la altul.

Un solid complex din punct de vedere al geometriei sale este generat prin intermediul operatorilor Boolean utilizați între diferitele primitive de la care se pornește construcția solidului. În mod generic, o primitivă poate fi determinată printr-o procedură care acceptă un număr de parametri: de exemplu, o sferă este descrisă de coordonatele centrului împreună cu valoarea razei. Figura 1.3.1 prezintă utilizarea operatorilor de tip Boolean pornind de la două primitive: un cub și o sferă.

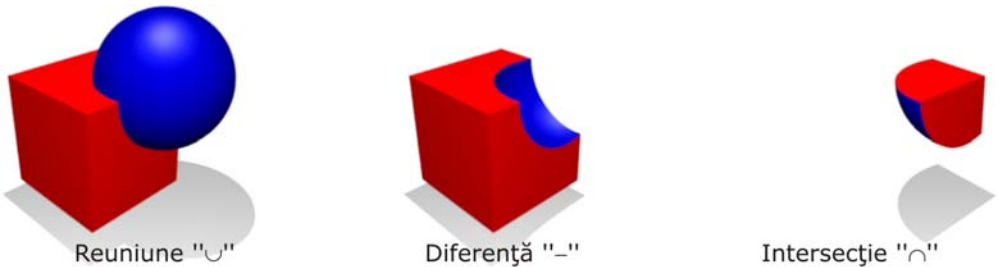


Fig. 1.3.1. Operațiile Boolean aplicate unui cub și o sferă.

În cadrul programelor CAD se creează o structură de date denumită *arbore CSG* (*CSG tree*) care înregistrează și organizează operațiunile efectuate între primitive. Figura 1.3.2 ilustrează un arbore CSG pentru un solid cu o geometrie complexă.

Geometria în spațiu constructivă are o serie de aplicații practice. Este folosită în cazurile unde se doresc solide simple din punct de vedere al construcției sau în cazurile unde precizia matematică este importantă. De asemenea tehnica este utilizată și în animația asistată de calculator, cu precădere în jocurile PC, ca de exemplu Quake, Torque, etc. Această tehnică este foarte populară în rândul proiectanților, deoarece aceștia pot utiliza un set de solide simple pentru a crea altele complexe. Proiectantul poate modifica ușor geometria complexă a unui solid prin schimbarea poziției în spațiu a primitivelor care alcătuiesc solidul complex, sau prin adoptarea altor operatori de tip Boolean în cadrul definirii solidului complex.

Un alt avantaj al geometriei în spațiu constructive constă în faptul că asigură "etanșeitătea" solidelor realizate. Acest aspect este important în cazul utilizării unor programe specializate în CAM sau în analiza cu metoda elementului finit pentru probleme de mecanica fluidelor CFD (Computational Fluid Dynamics).

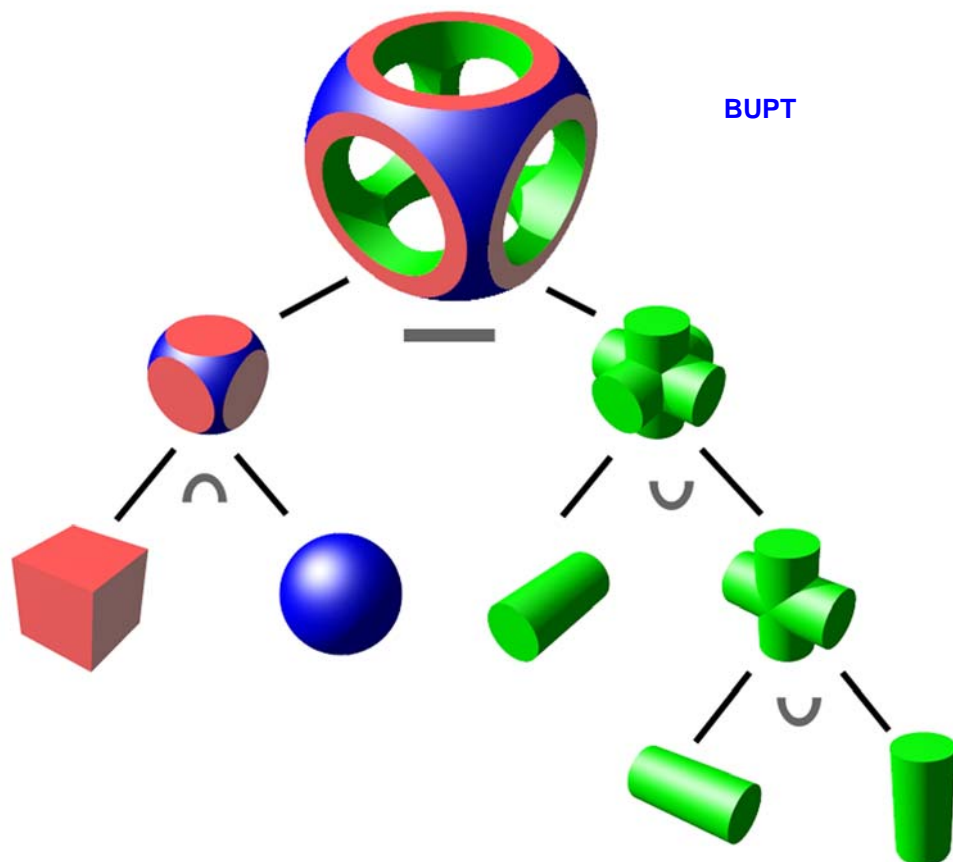


Fig. 1.3.2. Arbore CSG.

O proprietate convenabilă a solidelor realizate prin geometria în spațiu constructivă o constituie aprecierea diferitelor puncte arbitrare ca aparținând sau nu interiorului solidelor create. Punctele arbitrare sunt clasificate relativ la toate primitivele care alcătuiesc un solid complex prin incluziunea lor sau nu în interiorul primitivelor. Acest aspect este esențial pentru aplicațiile care detectează interferența dintre diferite solide.

#### 1.4. Modelarea CAD prin suprafețe libere.

Un solid acceptat ca volum este reprezentat în spațiu prin suprafețele sale care îl mărginesc [5]. Tehnica mai este cunoscută sub denumirea de *freeform surface modeling* sau *surfacing*. Injecția maselor plastice, turnarea, termoformarea și forjarea constituie tehnologii fizice de fabricație analoge cu tehnica modelării prin suprafețe libere.

Modelarea prin suprafețe libere se împarte în două domenii principale. Primul domeniu cuprinde suprafețele cu caracter estetic (suprafețe de clasă A). În

această categorie intră suprafețele care definesc forma exterioară a caroseriilor automobilelor sau a produselor de larg consum. Cel de-al doilea domeniu cuprinde suprafețele cu caracter tehnic. În această categorie intră suprafețele care definesc geometria paletelor turbinelor, fuselajelor avioanelor și a altor componente proiectate cu ajutorul principiilor mecanicii fluidelor.

BUPT

Inițial, tehnica modelării prin suprafețe libere a fost dezvoltată pentru industria auto și cea aerospațială, dar la momentul actual se regăsește în toate domeniile de proiectare. Proiectarea asistată de calculator folosește suprafețele libere în definirea formei exterioare a diferitelor componente. Din punct de vedere al aspectului matematic, programele CAD utilizează suprafețe Bézier, B-spline și NURBS (non-uniform rational B-spline).

Tehnica modelării prin suprafețe libere este inițiată prin definirea curbelor de construcție (curbe spline, Bézier, B-spline și NURBS).

*Ordinul* unei curbe sau suprafețe determină proprietățile sale matematice și aceasta este o reprezentare grafică a unei funcții polinomiale.

Suprafețele Bézier [1] posedă *puncte de control* cunoscute sub numele de *noduri* sau *poli* care determină forma suprafeței. O suprafață sau o curbă Bézier conține primul, respectiv ultimul nod. Nodurile intermediare nu sunt conținute în suprafață sau curbă, în schimb acestea acționează ca niște "magneți", conducând suprafața sau curba în direcția acestor noduri.

Curbele spline [85], ca funcții, sunt definite matematic pe intervale discrete care pot fi egale obținându-se *curbe spline uniforme*, respectiv *curbe spline neuniforme* în cazul în care intervalele sunt inegale. Astfel rezultă pentru fiecare interval câte un segment de curbă spline. În mod analog, suprafețele sunt divizate în elemente de suprafață denumite *petice* (*patches*). Netezimea curbelor sau suprafețelor este apreciată după trei criterii de continuitate ale segmentelor de curbă sau peticelor, notate cu *C* împreună cu o cifră de la 0 la 2, după cum urmează:

- *C0*: cele două segmente de curbă sau petice se ating;
- *C1*: cele două segmente de curbă sau petice sunt tangente dar pot avea o schimbare bruscă de curbura la interfața lor (derivata de ordinul întâi are valori egale pentru cele două segmente de curbă sau petice);
- *C2*: cele două segmente de curbă sau petice sunt tangente și au aceeași curbura la interfața lor (derivata de ordinul al doilea are valori egale pentru cele două segmente de curbă sau petice).

În funcție de destinația curbei sau suprafeței, se pot adopta criterii de continuitate suplimentare, de exemplu criteriul *C3* care specifică rata de variație a curburii (derivata de ordinul al treilea are valori egale pentru cele două segmente de curbă sau petice). Mecanismele cu roți dințate de înaltă precizie sau diferitele componente ale unor aparaturi medicale sunt proiectate cu suprafețe de clasă *C5* care oferă o toleranță de până la 1 μm [5].

Din punct de vedere matematic, suprafețele sunt definite parametric în cadrul programelor CAD sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}x &= x(u;v) \\ y &= y(u;v) \\ z &= z(u;v)\end{aligned}$$

unde parametrii *u* și *v* iau valori în intervalul  $[0;1]$ . Menținându-se constantă valoarea pentru unul din cei doi parametri, se obțin curbe denumite *izoparametrice*. Programele CAD reprezintă în general suprafețele împreună cu aceste curbe

izoparametrice, pentru diferite valori ale parametrilor  $u$  și  $v$ . Dintre programele CAD care utilizează modelarea prin suprafețe libere se amintesc: CATIA, NX (Unigraphics), PRO Engineer, SolidWorks, Inventor. Capitolul al doilea tratează aspectele matematice ale modelării prin suprafețe libere.

**BUPT**

### 1.5. Modelarea CAD prin ocupanță spațială și fațetare.

Modelarea prin ocupanță spațială este utilizată în principal de domeniul tomografiei computerizate în procesul de reconstrucție geometrică spațială (3D) a obiectelor scanate tomografic [4].

În urma procesului de scanare tomografică rezultă un set de imagini care ilustrează secțiunile transversale ale obiectului scanat. Din punct de vedere grafic, aceste imagini reprezintă o matrice de pixeli, o parte din acești pixeli ilustrând zone de interes ale obiectului scanat tomografic. Pixelii constituie din punct de vedere geometric entități plane de formă pătrată sau dreptunghiulară (figura 1.5.1). Fiecărui pixel, care aparține unei imagini oarecare,  $i$  se asociază o grosime egală cu pasul la care s-au efectuat secțiunile prin scanare tomografică. Astfel fiecărui pixel îi va corespunde, din punct de vedere geometric, câte o entitate spațială volumică de formă paralelipipedică denumită *voxel*. Cu alte cuvinte, pixelii care aparțin unei anumite imagini, sunt extrudați pe lungimea pasului la care s-a efectuat scanarea tomografică (distanța dintre două imagini succesive) și se obțin astfel "felii" ale modelului geometric solid al obiectului scanat tomografic. În acest mod, se realizează trecerea de la imaginile secțiunilor transversale ale obiectului scanat la modelul geometric solid al obiectului.

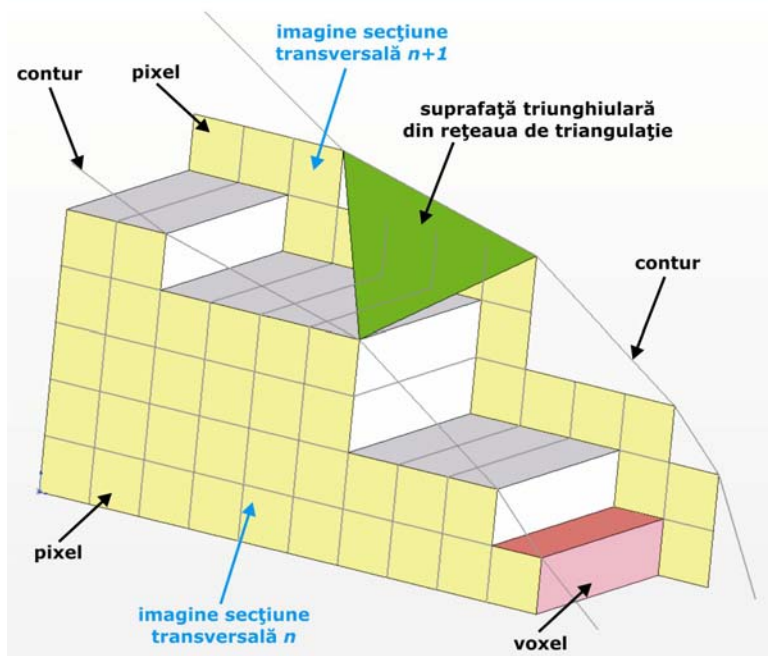


Fig. 1.5.1. Principiul modelării prin ocupanță spațială și fațetare.

Modelarea prin fațetare este utilizată în principal de domeniul tomografiei computerizate și de cel al scanării tridimensionale (3D scanning) [97] în procesul de reconstrucție geometrică spațială a obiectelor scanate printr-una din cele două tehnici. De asemenea modelarea prin fațetare este utilizată de echipamentele de prototipare rapidă.

BUPT

În cazul scanării tomografice modelarea prin fațetare pornește tot de la setul de imagini care ilustrează secțiunile transversale ale obiectului scanat.

Prin segmente drepte se unesc colțurile pixelilor care formează conturul unei zone de interes dintr-o imagine a unei secțiuni transversale (figura 1.5.1). Două segmente adiacente au câte un punct comun de conexiune. Astfel pentru fiecare secțiune transversală se realizează o succesiune de puncte și segmente, rezultând câte un contur închis pentru fiecare imagine în parte. Din punct de vedere geometric, trei puncte oarecare din spațiu determină un plan. Deci, dacă printr-un segment (determinat de două puncte) al unui contur dintr-o secțiune transversală oarecare și printr-un punct care aparține unui segment din conturul secțiunii transversale succesive primeia se construiește un plan, se va obține o suprafață triunghiulară plană determinată de cele trei puncte. Procedeu poartă numele de *triangulație* fiind cel mai răspândit și eficient în domeniul reconstrucției geometrice a obiectelor scanate tomografic sau tridimensional. Se realizează astfel o mulțime finită de suprafețe triunghiulare interconectate care reprezintă suprafața exterioară, respectiv interioară, a obiectului supus scanării tomografice. Mulțimea suprafețelor triunghiulare poartă denumirea de *rețea de triangulație (polygon mesh)*. Această rețea de triangulație formează modelul geometric tridimensional reconstruit al obiectului scanat tomografic. Este important de menționat faptul că acest model geometric tridimensional *nu este solid* deoarece conține doar învelișurile (suprafețele) exterioare și/sau interioare ale obiectului scanat tomografic. Cu cât dimensiunile laturilor triunghiurilor rețelei de triangulație sunt mai mici (deci implicit numărul suprafețelor triunghiulare este mai mare), cu atât precizia de reconstrucție geometrică tridimensională a obiectului scanat tomografic este mai mare. Precizia este însă afectată de uniformitatea dimensională a laturilor triunghiurilor (este de preferat ca dimensiunile lor să fie aproximativ egale).

În cazul scanării 3D se obține un set de puncte distincte ("nor" de puncte - *point cloud*) conținute în suprafața exterioară a obiectului scanat. Prin aceste puncte se realizează rețeaua de triangulație.

Echipamentele de prototipare rapidă ("imprimantele" 3D) folosesc modelarea prin fațetare ca mod de interpretare (convertire) a geometriei solidelor create în cadrul programelor CAD. Utilizarea fișierului unui solid CAD ca set de date de intrare pentru aceste echipamente, necesită neapărat convertirea prealabilă a acestui fișier într-un alt tip care conține datele geometriei solidului reprezentată printr-o rețea de triangulație.

Cele două tehnici de modelare prezentate constituie baza conceptului de inginerie inversă în modelarea geometrică asistată de calculator, deoarece se pornește întotdeauna de la obiecte fizice existente și se ajunge la modele geometrice solide CAD ale acestora.

## 2. Stadiul actual al modelării CAD prin suprafețe libere a structurilor biomecanice

### 2.1. Considerații generale.

Formele geometrice ale structurilor biomecanice sunt caracterizate de un grad înalt de complexitate. Practic, realizarea modelelor geometrice solide ale structurilor biomecanice în cadrul programelor CAD, se reduce la generarea suprafețelor (și curbelor care le mărginesc) care descriu formele structurilor menționate.

Generarea modelelor geometrice solide în cadrul programelor CAD se bazează pe un motor grafic care conține rutine de programare specializate. Curbele generatoare (2D sau 3D), care pot fi definite implicit, explicit sau parametric, stau la baza generării suprafețelor în cadrul programelor CAD. De asemenea, curbele generatoare pot fi interpolatoare (conțin un set de puncte date) sau aproximative (trec printr punctele date ale unui set).

În realizarea modelelor geometrice ale structurilor biomecanice se întâmpină o serie de dificultăți care sunt reprezentate de forma geometrică complexă și de obiectivul de a obține un model cât mai apropiat de forma reală a structurii modelate.

Datele primare utilizate în modelarea geometriei structurilor biomecanice (ca de exemplu scanări 3D, tomografie computerizată) pot prezenta o serie de imperfecțiuni sau discontinuități care trebuiesc corectate sau eliminate. Pentru realizarea acestor deziderate prin utilizarea programelor CAD profesionale, este foarte important ca analistul să cunoască aparatul matematic care stă la baza rutinelor de programare specializate ale acestor programe. Din aceste considerente, în modelarea structurilor geometrice din biomecanică, este necesară aprofundarea aspectelor matematice care constituie baza programelor CAD.

În forma lor explicită, curbele generatoare 2D reprezintă grafice ale unor funcții care au expresia  $y = f(x)$ . Această expresie permite generarea unor curbe simple. Practic, funcțiile  $f(x)$  pot avea orice formă, dar pentru realizarea rapidă a calculelor de către motorul grafic al aplicațiilor CAD se preferă expresii polinomiale. În cazul formei explicite, printr-o singură expresie  $y = f(x)$ , nu se pot realiza curbe complexe din punct de vedere geometric (de exemplu o curbă care să aibă în același timp și porțiuni drepte - care ar trebui definite separat prin alte expresii), de aceea, în majoritatea cazurilor nu se adoptă această formă. Se consideră de exemplu ecuația cercului cu centrul în originea sistemului de axe  $xOy$  și rază  $r$ . Ecuația implicită a cercului are următoarea formă:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (2.1.1)$$

$$x \in [-r; r], \quad y \in [-r; r]$$

În orice caz, pornind de la această formă, nu se va putea niciodată obține o singură formă explicită a unei singure funcții al cărei grafic să reprezinte cercul în sine. Forma explicită a funcției are expresia:

$$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r; r] \quad (2.1.2)$$

De fapt, expresia 2.1.2 conține două funcții, graficul fiecăreia trasând câte un semicerc. Cele două funcții au următoarele forme explicite **BUPT**

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [-r; r] \\ y_2(x) &= \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [-r; r] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Pentru trasarea unui cerc, în cazul adoptării formei explicite, motorul grafic al unei aplicații CAD trebuie să definească două funcții și implicit să traseze două grafice separate ale acestor două funcții. Acest aspect poate scădea sensibil viteza de calcul în cazul trasării unor curbe cu un grad înalt de complexitate. Pentru evitarea acestui neajuns, în cadrul programelor CAD se adoptă aproape în exclusivitate curbele parametrice, care reprezintă grafice ale unor funcții definite parametric.

Perechile de coordonate  $(x; y)$  ale punctelor care definesc o curbă 2D parametrică sunt date de următoarele două funcții parametrice:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \quad t \in [a; b] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Revenind la exemplul cercului, acesta poate fi trasat sub forma unui singur grafic al următoarelor două funcții parametrice:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t) \\ y &= r \sin(t), \quad t \in [0; 2\pi] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Utilizând funcțiile parametrice, se pot trasa ușor și curbe 3D parametrice. Tripletele de coordonate  $(x; y; z)$  ale punctelor care definesc o curbă 3D parametrică sunt date de următoarele trei funcții parametrice:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \quad t \in [a; b] \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Intervalul parametrului  $t$  este mărginit de limitele  $a$  și  $b$ , care în majoritatea cazurilor iau valorile  $0$ , respectiv  $1$  ( $t \in [0; 1]$ ) pentru creșterea vitezei de calcul a motoarelor grafice implementate în programele CAD. Un aspect important al curbelor parametrice este acela că oferă direcția de desfășurare (trasare), așa cum se poate vedea în figura 2.1.1 care descrie o elipsă definită de următoarele ecuații parametrice:

$$\begin{aligned} x &= 5 \cos(t) \\ y &= 2 \sin(t), \quad t \in [0; 2\pi] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$



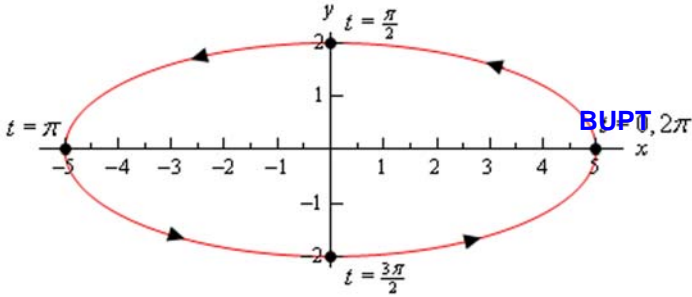


Fig. 2.1.1. Elipsă definită parametric.

Conform cu afirmațiile anterioare, se poate desprinde concluzia că forma parametrică a curbelor trasate în cadrul programelor CAD oferă numeroase avantaje, cele mai importante fiind viteza de calcul și ușoara manipulare. Din acest motiv și suprafețele generate de către motoarele grafice ale programelor CAD sunt aproape în exclusivitate definite ca funcții parametriche.

În continuare se vor trata principalele tipuri de curbe și suprafețe implementate ca funcții în motoarele grafice ale programelor CAD.

## 2.2. Curbe spline cubice naturale.

Curbele spline [3] sunt 2D și reprezintă grafice ale funcțiilor de interpolare spline utilizate în domeniul analizei numerice. O funcție spline este o *funcție polinomială definită pe intervale discrete*, al cărei grafic conține un set de puncte date (interpolează punctele date ale setului).

### 2.2.1. Forma explicită.

Se pune problema de a găsi o expresie generală sub formă explicită  $y = S(x)$  a funcției spline. Pentru acest scop, în planul  $xOy$  (figura 2.2.1.1) se consideră trei puncte distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ .

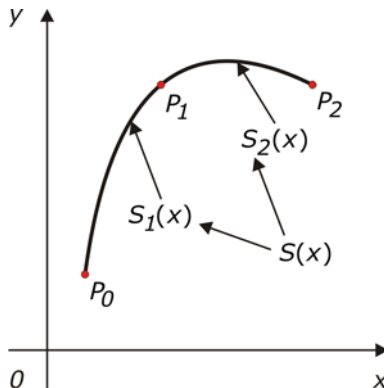


Fig. 2.2.1.1. Reprezentarea unei curbe spline explicite trasată prin trei puncte.

Coordonatele  $x$  ale celor trei puncte au următoarea proprietate:

$$x_0 < x_1 < x_2, \quad (2.2.1.1)$$

Funcția spline  $S(x)$  va fi definită pe intervalul  $[x_0; x_2]$ , interval care se împarte în două subintervale:  $[x_0; x_1]$  respectiv  $[x_1; x_2]$ . Astfel, funcția spline  $S(x)$  va avea două expresii distincte  $S_1(x)$ , respectiv  $S_2(x)$  corespunzătoare celor două subintervale:

$$\begin{aligned} S &: [x_0; x_2] \rightarrow \mathbb{R} \\ S_1 &: [x_0; x_1] \rightarrow \mathbb{R} \\ S_2 &: [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.1.2) \\ y &= S_1(x), \quad x \in [x_0; x_1] \\ y &= S_2(x), \quad x \in [x_1; x_2] \end{aligned}$$

Curba spline  $\widehat{P_0P_1P_2}$  este alcătuită din cele două segmente de curbă  $\widehat{P_0P_1}$  și  $\widehat{P_1P_2}$ . Știind că funcția spline este polinomială și definită pe intervale discrete, se propune determinarea gradului celor două polinoame care definesc expresiile celor două funcții  $S_1(x)$ , respectiv  $S_2(x)$ . Pentru aceasta, cele două funcții trebuie să îndeplinească anumite condiții:

a) Graficul funcției  $S_1(x)$  trece prin punctele  $P_0$  și  $P_1$ .

$$S_1(x_0) = y_0 \quad (2.2.1.3)$$

$$S_1(x_1) = y_1 \quad (2.2.1.4)$$

b) Graficul funcției  $S_2(x)$  trece prin punctele  $P_1$  și  $P_2$ .

$$S_2(x_1) = y_1 \quad (2.2.1.5)$$

$$S_2(x_2) = y_2 \quad (2.2.1.6)$$

c) Racordarea celor două segmente de curbă  $\widehat{P_0P_1}$  și  $\widehat{P_1P_2}$  din punctul  $P_1$  este lină, iar alura acestora este identică. Cu alte cuvinte, cele două funcții sunt de clasă  $C^2$ .

$$\frac{dS_1}{dx} \Big|_{x=x_1} = \frac{dS_2}{dx} \Big|_{x=x_1} \quad (2.2.1.7)$$

$$\frac{d^2S_1}{dx^2} \Big|_{x=x_1} = \frac{d^2S_2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \quad (2.2.1.8)$$

Dacă ne-am limita la condițiile de mai sus, s-ar obține un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute, iar expresiile celor două funcții ar avea următoarea formă:  $S_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ , respectiv  $S_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ , necunoscutele fiind  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ . Dar cele trei puncte  $P_0, P_1$  și  $P_2$  determină o singură

funcție de forma  $S(x) = ax^2 + bx + c$  (al cărei grafic ar fi parabola  $\widehat{P_0P_1P_2}$ ) și astfel cele două funcții  $S_1(x)$ , respectiv  $S_2(x)$  ar fi identice, lucru care contravine cu definiția funcției spline. Din acest motiv se introduce o condiție suplimentară legată de forma curbei spline, ca aceasta să fie naturală, condiție materializată prin următoarele două relații:

$$\frac{d^2S_1}{dx^2} \Big|_{x=x_0} = 0 \quad (2.2.1.9)$$

$$\frac{d^2S_2}{dx^2} \Big|_{x=x_2} = 0 \quad (2.2.1.10)$$

Din condițiile anterioare, se obține un sistem de opt ecuații cu opt necunoscute, iar expresiile celor două funcții au următoarea formă:

$$S_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \quad (2.2.1.11)$$

$$S_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \quad (2.2.1.12)$$

necunoscutele fiind  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ . Sistemul de opt ecuații cu opt necunoscute devine:

$$a_1x_0^3 + b_1x_0^2 + c_1x_0 + d_1 = y_0 \quad (2.2.1.3')$$

$$a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = y_1 \quad (2.2.1.4')$$

$$a_2x_1^3 + b_2x_1^2 + c_2x_1 + d_2 = y_1 \quad (2.2.1.5')$$

$$a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d_2 = y_2 \quad (2.2.1.6')$$

$$3a_1x_1^2 + 2b_1x_1 + c_1 - 3a_2x_1^2 - 2b_2x_1 - c_2 = 0 \quad (2.2.1.7')$$

$$6a_1x_1 + 2b_1 - 6a_2x_1 - 2b_2 = 0 \quad (2.2.1.8')$$

$$6a_1x_0 + 2b_1 = 0 \quad (2.2.1.9')$$

$$6a_2x_2 + 2b_2 = 0 \quad (2.2.1.10')$$

Scris matriceal, sistemul de ecuații are următoarea formă:

$$\begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 \\ 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.1.13)$$

Soluția sistemului de ecuații este:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 \\ 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.1.14)$$

*Exemplu numeric.* Să se traseze curba spline cubică naturală explicită prin următoarele puncte:  $P_0(1;2)$ ,  $P_1(4;7)$  și  $P_2(9;6)$ .

Rezolvare:

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2$$

$$x_1 = 4 \quad y_1 = 7$$

$$x_2 = 9 \quad y_2 = 6$$

$$S_1 : [1;4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$S_2 : [4;9] \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 \\ 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 729 & 81 & 9 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & -48 & -8 & -1 & 0 \\ 24 & 2 & 0 & 0 & -24 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 \\ 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 729 & 81 & 9 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & -48 & -8 & -1 & 0 \\ 24 & 2 & 0 & 0 & -24 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,038889 \\ 0,116667 \\ 1,9 \\ 0,022222 \\ 0,023333 \\ -0,63 \\ 4,886667 \\ -3,96 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -0,038889 \quad b_1 = 0,116667 \quad c_1 = 1,9 \quad d_1 = 0,022222 \\ a_2 = 0,023333 \quad b_2 = -0,63 \quad c_2 = 4,886667 \quad d_2 = -3,96$$

$$S_1(x) = -0,038889x^3 + 0,116667x^2 + 1,9x + 0,022222$$

$$S_2(x) = 0,023333x^3 - 0,63x^2 + 4,886667x - 3,96$$

În figura 2.2.1.2 se prezintă curba spline cubică naturală explicită trasată prin cele trei puncte date, în conformitate cu valorile calculate anterior.

În cazul în care în planul  $xOy$  sunt date  $n+1$  puncte distincte  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ , ...,  $P_n(x_n; y_n)$ , coordonatele  $x$  ale celor  $n+1$  puncte având următoarea proprietate:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

funcția spline  $S(x)$  va fi definită pe intervalul  $[x_0; x_n]$ , interval care se împarte în  $n$  subintervale:  $[x_0; x_1]$ ,  $[x_1; x_2]$ ,  $[x_2; x_3]$ , ...,  $[x_{n-1}; x_n]$ . Astfel, funcția spline  $S(x)$  va avea  $n$  expresii distincte  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$ , ...,  $S_n(x)$ . corespunzătoare celor  $n$  subintervale:

$$S : [x_0; x_n] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S_1 : [x_0; x_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S_2 : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

.....

$$S_n : [x_{n-1}; x_n] \rightarrow \mathbb{R}$$

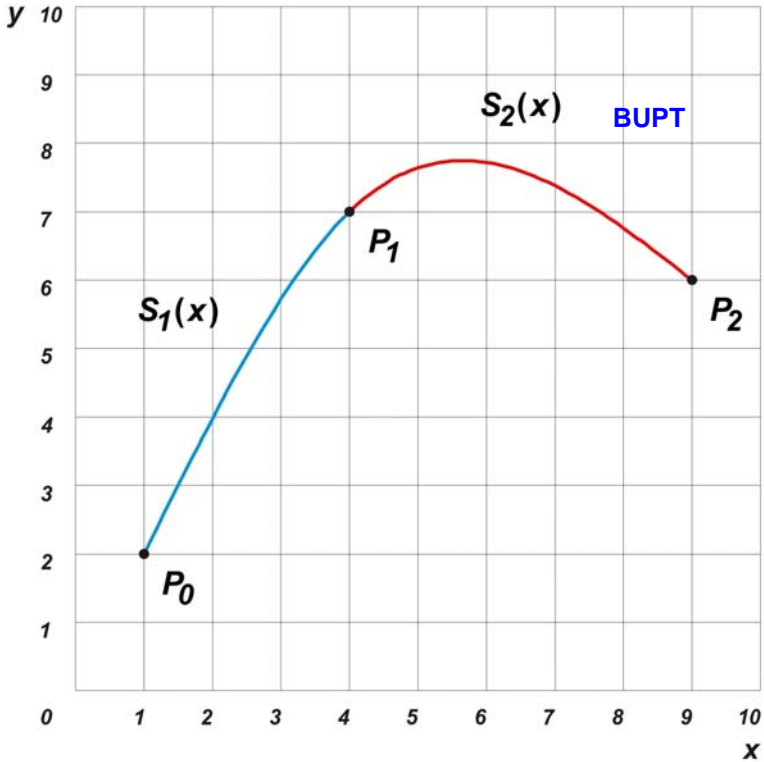


Fig. 2.2.1.2. Curba spline cubică naturală explicită trasată prin cele trei puncte date.

$$\begin{aligned}
 y &= S_1(x); & x &\in [x_0; x_1] \\
 y &= S_2(x); & x &\in [x_1; x_2] \\
 & \dots\dots\dots \\
 y &= S_n(x); & x &\in [x_{n-1}; x_n]
 \end{aligned}$$

Condițiile materializate prin relațiile 2.2.1.3, 2.2.1.4, 2.2.1.5 și 2.2.1.6 devin:

$$\begin{aligned}
 S_1(x_0) &= y_0 \\
 S_1(x_1) &= y_1 \\
 \\
 S_2(x_1) &= y_1 \\
 S_2(x_2) &= y_2 \\
 & \dots\dots\dots \\
 S_n(x_{n-1}) &= y_{n-1} \\
 S_n(x_n) &= y_n
 \end{aligned}$$

Condiția dată de relația 2.2.1.7 devine:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dx} \Big|_{x=x_1} &= \frac{dS_2}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{dS_2}{dx} \Big|_{x=x_2} &= \frac{dS_3}{dx} \Big|_{x=x_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dS_{n-1}}{dx} \Big|_{x=x_{n-1}} &= \frac{dS_n}{dx} \Big|_{x=x_{n-1}} \end{aligned} \quad \text{BUPT}$$

Condiția dată de relația 2.2.1.8 devine:

$$\begin{aligned} \frac{d^2S_1}{dx^2} \Big|_{x=x_1} &= \frac{d^2S_2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{d^2S_2}{dx^2} \Big|_{x=x_2} &= \frac{d^2S_3}{dx^2} \Big|_{x=x_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2S_{n-1}}{dx^2} \Big|_{x=x_{n-1}} &= \frac{d^2S_n}{dx^2} \Big|_{x=x_{n-1}} \end{aligned}$$

Condițiile materializate prin relațiile 2.2.1.9 și 2.2.1.10 devin:

$$\begin{aligned} \frac{d^2S_1}{dx^2} \Big|_{x=x_0} &= 0 \\ \frac{d^2S_n}{dx^2} \Big|_{x=x_n} &= 0 \end{aligned}$$

Totalitatea relațiilor anterioare formează un sistem de  $4n$  ecuații cu  $4n$  necunoscute, iar expresiile celor  $n$  funcții au următoarea formă:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \\ S_2(x) &= a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, \quad (2.2.1.15) \\ &\dots\dots\dots \\ S_n(x) &= a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n \end{aligned}$$

necunoscutele fiind  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$ .

În cazul unui număr foarte mare de puncte date, rezolvarea sistemului de ecuații se efectuează în exclusivitate cu ajutorul calculatoarelor numerice.

### 2.2.2. Forma parametrică.

Așa cum s-a menționat în paragrafele precedente, definirea parametrică a curbelor prezintă o serie de avantaje. În consecință, se propune definirea

parametrică a unei curbe spline  $S$ , perechile de coordonate  $(x; y)$  ale punctelor curbei fiind definite prin funcții cu următoarea formă:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t \in [0; 1].$$

**BUPT**

În general, pentru a mări viteza calculului, valorile parametrului  $t$  se adoptă în intervalul  $[0; 1]$ , dar acestea se pot alege în oricare alt interval.

În planul  $xOy$  (figura 2.2.2.1) se consideră trei puncte distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ .

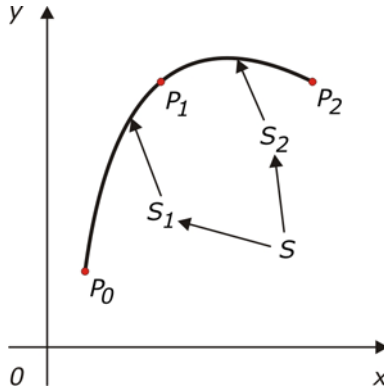


Fig. 2.2.2.1. Curbă spline parametrică trasată prin trei puncte.

Curba spline  $\widehat{P_0P_1P_2}$  ( $S$ ) este alcătuită din cele două segmente de curbă  $\widehat{P_0P_1}$  ( $S_1$ ) și  $\widehat{P_1P_2}$  ( $S_2$ ). Perechile de coordonate  $(x; y)$  ale punctelor aparținătoare curbei  $S_1$ , respectiv  $S_2$  sunt definite de următoarele funcții:

$$\begin{aligned} S_1: & \quad x = X_1(t), \quad y = Y_1(t), \\ S_2: & \quad x = X_2(t), \quad y = Y_2(t), \end{aligned} \quad t \in [0; 1]. \quad (2.2.2.1)$$

Funcțiile  $X_1(t)$ ,  $Y_1(t)$ ,  $X_2(t)$  și  $Y_2(t)$  se definesc sub forma unor polinoame al căror grad se propune a fi determinat, prin impunerea curbelor  $S_1$  și  $S_2$  a următoarelor condiții:

a) Curba  $S_1$  trece prin punctele  $P_0$  și  $P_1$ .

$$X_1(0) = x_0 \quad (2.2.2.2)$$

$$X_1(1) = x_1 \quad (2.2.2.3)$$

$$Y_1(0) = y_0 \quad (2.2.2.4)$$

$$Y_1(1) = y_1 \quad (2.2.2.5)$$

b) Curba  $S_2$  trece prin punctele  $P_1$  și  $P_2$ .

$$X_2(0) = x_1 \quad (2.2.2.6)$$

$$X_2(1) = x_2 \quad (2.2.2.7)$$



$$Y_2(0) = y_1 \quad (2.2.2.8)$$

$$Y_2(1) = y_2 \quad (2.2.2.9)$$

c) Racordarea celor două curbe  $S_1$  și  $S_2$  din punctul **BUP** este lină, iar alura acestora este identică. Cu alte cuvinte, cele două funcții sunt de clasă  $C^2$ .

$$\frac{dX_1}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dX_2}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.2.2.10)$$

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2X_2}{dt^2} \Big|_{t=0} \quad (2.2.2.11)$$

$$\frac{dY_1}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dY_2}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.2.2.12)$$

$$\frac{d^2Y_1}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2Y_2}{dt^2} \Big|_{t=0} \quad (2.2.2.13)$$

d) Curbele  $S_1$  și  $S_2$  formează curba spline  $S$  care este naturală.

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.2.2.14)$$

$$\frac{d^2X_2}{dt^2} \Big|_{t=1} = 0 \quad (2.2.2.15)$$

$$\frac{d^2Y_1}{dt^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.2.2.16)$$

$$\frac{d^2Y_2}{dt^2} \Big|_{t=1} = 0 \quad (2.2.2.17)$$

Din condițiile anterioare, obținem un sistem de șaisprezece ecuații cu șaisprezece necunoscute, iar expresiile celor patru funcții au următoarea formă:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 \\ X_2(t) &= a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 \\ Y_1(t) &= e_1 t^3 + f_1 t^2 + g_1 t + h_1 \\ Y_2(t) &= e_2 t^3 + f_2 t^2 + g_2 t + h_2 \end{aligned} \quad (2.2.2.18)$$

necunoscutele fiind  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_1, f_1, g_1, h_1, e_2, f_2, g_2, h_2$ .

Coordonatele  $y$  ale punctelor curbelor  $S_1$  și  $S_2$  nu depind de coordonatele  $x$  (și invers) astfel că sistemul cu șaisprezece ecuații și șaisprezece necunoscute poate fi divizat în două sisteme a câte opt ecuații cu opt necunoscute, primul fiind legat de coordonatele  $x$  ale punctelor, respectiv al doilea legat de coordonatele  $y$ . În consecință, relațiile 2.2.2.2, 2.2.2.3, 2.2.2.6, 2.2.2.7, 2.2.2.10, 2.2.2.11, 2.2.2.14 și 2.2.2.15 formează primul sistem de ecuații, iar restul relațiilor formează cel de-al

doilea sistem. Rezolvarea celor două sisteme de ecuații este identică, de aceea se va prezenta doar cazul primului sistem.

În urma efectuării calculelor, relațiile amintite devin:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_0 & (2.2.2.2') & & \text{BUPT} \\
 a_1 + b_1 + c_1 &= x_1 - x_0 & (2.2.2.3') & \\
 d_2 &= x_1 & (2.2.2.6') & \\
 a_2 + b_2 + c_2 &= x_2 - x_1 & (2.2.2.7') & \\
 3a_1 + 2b_1 + c_1 - c_2 &= 0 & (2.2.2.10') & \\
 3a_1 + b_1 - b_2 &= 0 & (2.2.2.11') & \\
 b_1 &= 0 & (2.2.2.14') & \\
 3a_2 + b_2 &= 0 & (2.2.2.15') &
 \end{aligned}$$

În final se obține:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4} \\
 b_1 &= 0 \\
 c_1 &= \frac{-5x_0 + 6x_1 - x_2}{4} \\
 d_1 &= x_0 \\
 a_2 &= \frac{-x_0 + 2x_1 - x_2}{4} & (2.2.2.19) \\
 b_2 &= \frac{3x_0 - 6x_1 + 3x_2}{4} \\
 c_2 &= \frac{-2x_0 + 2x_2}{4} \\
 d_2 &= x_1
 \end{aligned}$$

În mod analog se obține:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{4} \\
 f_1 &= 0 \\
 g_1 &= \frac{-5y_0 + 6y_1 - y_2}{4} \\
 h_1 &= y_0 \\
 e_2 &= \frac{-y_0 + 2y_1 - y_2}{4} & (2.2.2.20) \\
 f_2 &= \frac{3y_0 - 6y_1 + 3y_2}{4} \\
 g_2 &= \frac{-2y_0 + 2y_2}{4} \\
 h_2 &= y_1
 \end{aligned}$$

Perechile de coordonate  $(x;y)$  ale punctelor curbei  $S_1$  sunt descrise de următoarele funcții:

$$\begin{aligned} x &= X_1(t) = \left( \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4} \right) t^3 + \left( \frac{-5x_0 + 6x_1 - x_2}{4} \right) t + y_0 \\ y &= Y_1(t) = \left( \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{4} \right) t^3 + \left( \frac{-5y_0 + 6y_1 - y_2}{4} \right) t + y_0 \end{aligned} \quad (2.2.2.21)$$

Perechile de coordonate  $(x;y)$  ale punctelor curbei  $S_2$  sunt descrise de următoarele funcții:

$$\begin{aligned} x &= X_2(t) = \left( \frac{-x_0 + 2x_1 - x_2}{4} \right) t^3 + \left( \frac{3x_0 - 6x_1 + 3x_2}{4} \right) t^2 + \left( \frac{-2x_0 + 2x_2}{4} \right) t + x_1 \\ y &= Y_2(t) = \left( \frac{-y_0 + 2y_1 - y_2}{4} \right) t^3 + \left( \frac{3y_0 - 6y_1 + 3y_2}{4} \right) t^2 + \left( \frac{-2y_0 + 2y_2}{4} \right) t + y_1 \end{aligned} \quad (2.2.2.22)$$

*Exemplu numeric.* (Se revine la exemplul numeric din cadrul paragrafelor dedicate curbelor spline cubice naturale explicite, dar de data aceasta se dorește obținerea unei forme parametrice a curbei.) Să se traseze curba spline cubică naturală parametrică prin următoarele puncte:  $P_0(1;2)$ ,  $P_1(4;7)$  și  $P_2(9;6)$ .

Rezolvare:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & y_0 &= 2 \\ x_1 &= 4 & y_1 &= 7 \\ x_2 &= 9 & y_2 &= 6 \\ x &= X_1(t) = 0,5t^3 + 2,5t + 1 \\ y &= Y_1(t) = -1,5t^3 + 6,5t + 2 \\ x &= X_2(t) = -0,5t^3 + 1,5t^2 + 4t + 4 \\ y &= Y_2(t) = 1,5t^3 - 4,5t^2 + 2t + 7 \end{aligned}$$

Figura 2.2.2.2 ilustrează curba spline cubică naturală parametrică trasată prin cele trei puncte date din cadrul exemplului numeric.

Figura 2.2.2.3 ilustrează cele două curbe spline cubice naturale (în formă explicită și parametrică) trasate în cazul exemplului numeric. Curba spline parametrică interpolează mai precis punctele  $P_0$ ,  $P_1$ , respectiv  $P_2$ , fiind mai apropiată ca formă de interpolarea liniară a punctelor amintite dată de cele două segmente drepte  $P_0P_1$  și  $P_1P_2$  (trasate punctat). În plus, curba spline parametrică este caracterizată de o viteză mai mare de trasare datorată simplității calculului necesare.

În cazul în care în planul  $xOy$  sunt date  $n+1$  puncte distincte  $P_0(x_0;y_0)$ ,  $P_1(x_1;y_1)$ ,  $P_2(x_2;y_2)$ , ...,  $P_n(x_n;y_n)$ , curba spline  $S$  va fi alcătuită din  $n$  curbe distincte parametrice  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , iar coordonatele  $(x;y)$  ale punctelor aparținătoare curbelor sunt date de următoarele  $2n$  funcții:

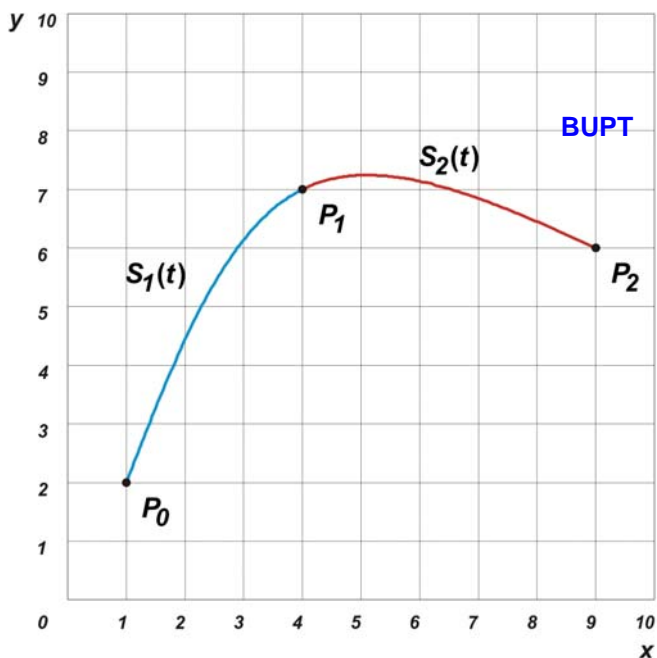


Fig. 2.2.2.2. Curba spline cubică naturală parametrică trasată prin cele trei puncte date.

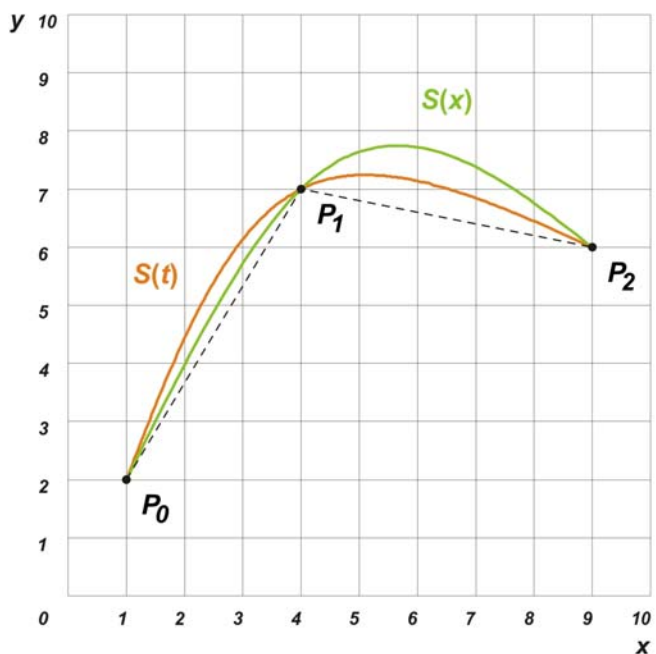


Fig. 2.2.2.3. Comparație la nivel grafic a celor două forme de curbe spline cubice naturale trasate prin cele trei puncte date.

$$\begin{cases} x = X_1(t) = a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1 \\ y = Y_1(t) = e_1t^3 + f_1t^2 + g_1t + h_1 \end{cases} \text{ pentru curba } S_1;$$

$$\begin{cases} x = X_2(t) = a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2 \\ y = Y_2(t) = e_2t^3 + f_2t^2 + g_2t + h_2 \end{cases} \text{ pentru curba } S_2;$$

.....

$$\begin{cases} x = X_n(t) = a_nt^3 + b_nt^2 + c_nt + d_n \\ y = Y_n(t) = e_nt^3 + f_nt^2 + g_nt + h_n \end{cases} \text{ pentru curba } S_n,$$

unde  $t \in [0;1]$ . Acelor funcții le impunem condițiile deductibile din relațiile 2.2.2.2  
 $\rightarrow$  2.2.2.17:

a) Curbele  $S_1, S_2, \dots, S_n$  trec prin punctele  $P_0, P_1, \dots, P_n$ :

$$X_1(0) = x_0$$

$$Y_1(0) = y_0$$

$$X_1(1) = x_1$$

$$Y_1(1) = y_1$$

$$X_2(0) = x_1$$

$$Y_2(0) = y_1$$

$$X_2(1) = x_2$$

$$Y_2(1) = y_2$$

.....

$$X_n(0) = x_{n-1}$$

$$Y_n(0) = y_{n-1}$$

$$X_n(1) = x_n$$

$$Y_n(1) = y_n$$

b) Racordarea celor  $n$  curbe între ele din punctele  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  este lină, cele  $2n$  funcții fiind de clasă  $C^2$ :

$$\frac{dX_1}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dX_2}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{dY_1}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dY_2}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{dX_2}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dX_3}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{dY_2}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dY_3}{dt} \Big|_{t=0}$$

.....

$$\frac{dX_{n-1}}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dX_n}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{dY_{n-1}}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{dY_n}{dt} \Big|_{t=0}$$

BUPT

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2X_2}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2Y_1}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2Y_2}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2X_2}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2X_3}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2Y_2}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2Y_3}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

.....

$$\frac{d^2X_{n-1}}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2X_n}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2Y_{n-1}}{dt^2} \Big|_{t=1} = \frac{d^2Y_n}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

c) curbele  $S_1, S_2, \dots, S_n$  formează curba spline  $S$  care este naturală.

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d^2Y_1}{dt^2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d^2X_n}{dt^2} \Big|_{t=1} = 0$$

$$\frac{d^2Y_n}{dt^2} \Big|_{t=1} = 0$$

Totalitatea condițiilor impuse conduce la rezolvarea unui sistem de  $8n$  ecuații cu  $8n$  necunoscute.

Coordonatele  $y$  ale punctelor curbelor  $S_1, S_2, \dots, S_n$  nu depind de coordonatele  $x$  (și invers) astfel că sistemul cu  $8n$  ecuații și  $8n$  necunoscute poate fi divizat în două sisteme a câte  $4n$  ecuații cu  $4n$  necunoscute, primul fiind legat de coordonatele  $x$  ale punctelor, respectiv al doilea legat de coordonatele  $y$ .

Curbele spline cubice naturale parametrice sunt implementate ca mijloc de proiectare în toate pachetele software CAD profesionale [6], având o mare aplicabilitate în definirea diferșelor profile (de exemplu secțiunile transversale ale aripilor și fuselajelor avioanelor, sau ale corpurilor navelor maritime).

Figura 2.2.2.4 ilustrează exemplul numeric tratat anterior, în cadrul programului CAD SolidWorks 2005.

În cazul curbelor spline cubice naturale parametrice care interpolatează un număr mare de puncte, platformele de calcul necesită resurse sporite legate de puterea și viteza de procesare cât și de memoria aferentă. BUPT

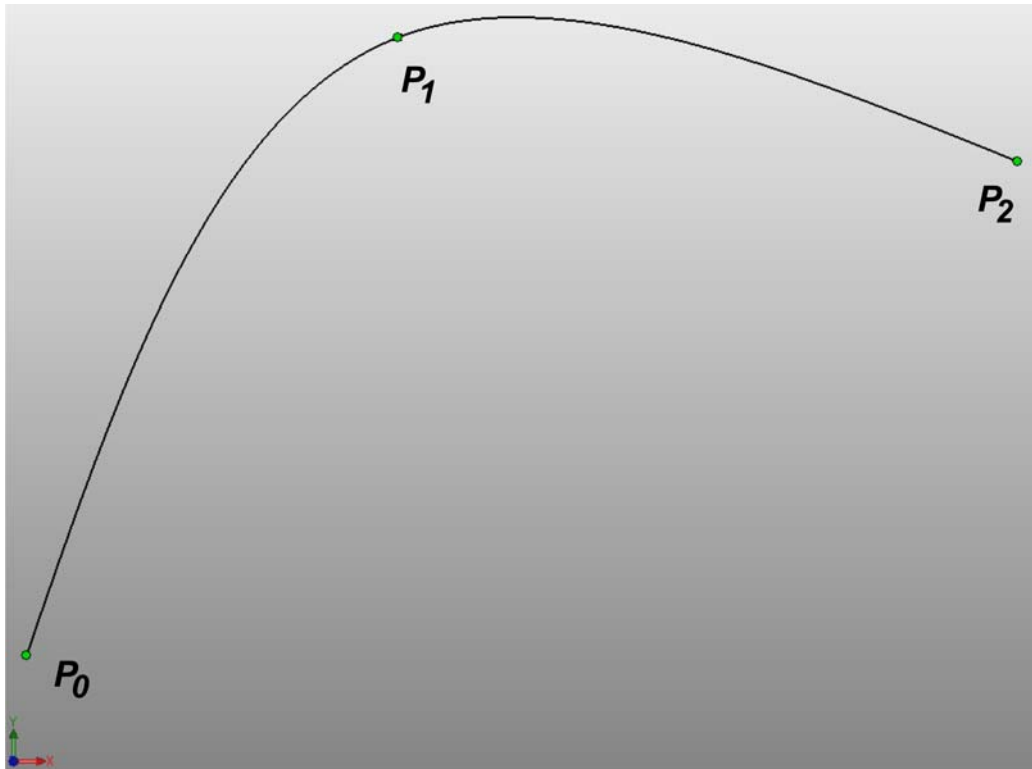


Fig. 2.2.2.4. Curba spline cubică naturală parametrică trasată prin cele trei puncte date ale exemplului numeric, în cadrul programului CAD SolidWorks 2005.

### 2.3. Curbe de tip Bézier.

O curbă Bézier [32] [100] este o curbă parametrică cu importante aplicații în grafica asistată de calculator și în domeniile asociate acestora. Generalizările curbelor Bézier la dimensiuni superioare se numesc suprafețe Bézier.

Curbele Bézier au fost intens mediatizate în anul 1962 de către inginerul francez Pierre Bézier (compania RENAULT), care le-a utilizat pentru a proiecta caroseriile automobilelor. Curbele Bézier au fost dezvoltate în anul 1959 de către inginerul Paul de Casteljaou (compania CITROËN) cu ajutorul algoritmului care îi poartă numele (de Casteljaou), care reprezintă o metodă numeric stabilă de evaluare a curbelor Bézier.

În grafica vectorială, curbele Bézier sunt o unealtă importantă folosită pentru modelarea curbelor derivabile și scalabile. Căile (*paths*), așa cum sunt ele denumite adesea în programele de grafică vectorială sau de editare de imagini, cum

ar fi Inkscape, Adobe Illustrator, Adobe Photoshop, sau CorelDraw, sunt combinații de curbe Bézier interconectate. Căile nu au limitările imaginilor raster, iar modificarea lor este intuitivă. Curbele Bézier se folosesc și în animație pentru controlul mișcării în aplicații ca Adobe Flash, Adobe After Effects și Autodesk 3ds max.

BUPT

### 2.3.1. Curbe Bézier de ordinul întâi (liniare).

În planul  $xOy$  (figura 2.3.1.1) se consideră două puncte distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ .

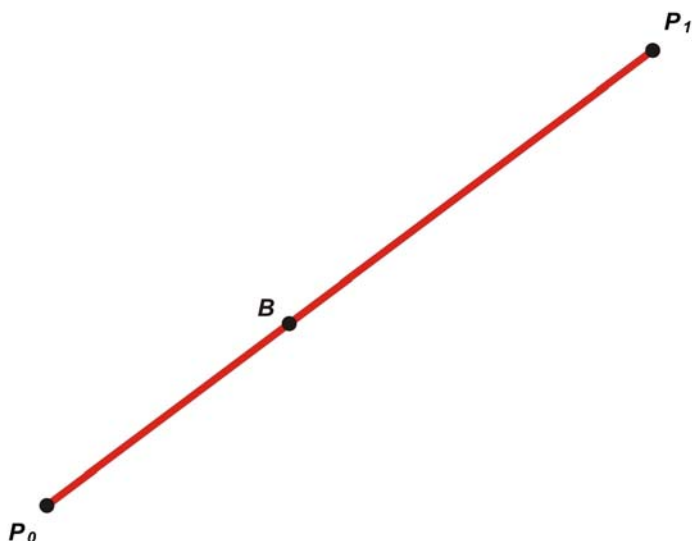


Fig. 2.3.1.1. Curbă Bézier de ordinul întâi (liniară).

În terminologia curbelor Bézier, aceste puncte se numesc *noduri* (nodes). Linia dreaptă care unește cele două noduri se numește *curbă Bézier de ordinul întâi* sau *liniară*. Se propune găsirea ecuațiilor acestei curbe, sub forma a două funcții parametrice:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) \\ y &= B_y(t), \quad t \in [0; 1] \end{aligned} \quad (2.3.1.1)$$

Curba parametrică descrisă de cele două funcții trebuie să treacă prin cele două noduri date. Astfel, condițiile impuse celor două funcții se rezumă la relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x_0 &= B_x(0) \\ x_1 &= B_x(1) \\ y_0 &= B_y(0) \\ y_1 &= B_y(1) \end{aligned} \quad (2.3.1.2)$$



Dat fiind faptul că există patru condiții impuse celor două funcții independente și care în final descriu o linie dreaptă, cele două funcții se aleg sub formă polinomială de gradul întâi. Expresiile celor două funcții posedă următoarea formă:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = at + b \\ y &= B_y(t) = ct + d \end{aligned} \quad t \in [0;1] \quad (2.3.1.3) \quad \text{BUPT}$$

Din cele patru condiții impuse rezultă:

$$\begin{aligned} b &= x_0 \\ a &= x_1 - x_0 \\ d &= y_0 \\ c &= y_1 - y_0 \end{aligned} \quad (2.3.1.4)$$

Cele două funcții parametrice sunt:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y &= B_y(t) = (y_1 - y_0)t + y_0 \end{aligned} \quad t \in [0;1] \quad (2.3.1.5)$$

Funcțiile se mai pot scrie sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y &= B_y(t) = (1-t)y_0 + ty_1 \end{aligned} \quad t \in [0;1] \quad (2.3.1.5')$$

această formă fiind cel mai des utilizată.

Astfel, un punct oarecare  $B$  aparținând curbei Bézier de ordinul întâi (figura 2.3.1.1) posedă perechea de coordonate  $(x;y)$  calculate pentru valoarea dată a parametrului  $t$ . Altfel spus, curba Bézier de ordinul întâi  $\overline{P_0P_1}$  reprezintă traiectoria punctului  $B$ .

Dacă cele două noduri sunt date în spațiul tridimensional (3D), nodurile având coordonatele  $P_0(x_0;y_0;z_0)$ ,  $P_1(x_1;y_1;z_1)$ , curba Bézier 3D de ordinul întâi  $\overline{P_0P_1}$  este definită prin funcțiile următoare:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y &= B_y(t) = (1-t)y_0 + ty_1 \\ z &= B_z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \end{aligned} \quad t \in [0;1] \quad (2.3.1.7)$$

### 2.3.2. Curbe Bézier de ordinul al doilea (cuadratice).

În planul  $xOy$  (figura 2.3.2.1) se consideră trei noduri (puncte) distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0;y_0)$ ,  $P_1(x_1;y_1)$ ,  $P_2(x_2;y_2)$ . Curba Bézier de ordinul al doilea  $\overline{P_0P_1P_2}$  (care nu trece prin nodul  $P_1$ ) reprezintă traiectoria punctului  $B(x;y)$ . Se propune determinarea modului de construcție grafică a acestei

curbe și funcțiile parametriche prin care se calculează coordonatele  $(x;y)$  ale punctelor curbei.

Pentru o valoare oarecare dată a parametrului  $t$ , coordonatele  $(x_{Q_0};y_{Q_0})$  ale punctului  $Q_0$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_0P_1}$ , sunt date de relațiile următoare:

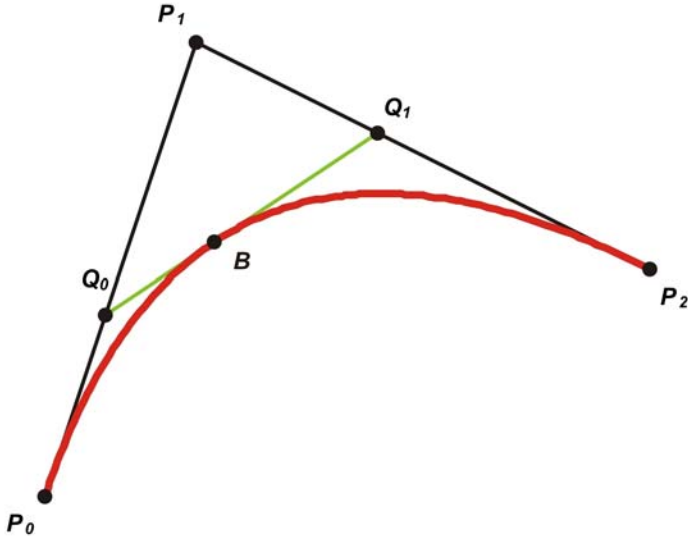


Fig. 2.3.2.1. Curbă Bézier de ordinul al doilea (cuadratică).

$$\begin{aligned}x_{Q_0} &= (1-t)x_0 + tx_1 \\y_{Q_0} &= (1-t)y_0 + ty_1\end{aligned}\quad (2.3.2.1)$$

În același timp, pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , coordonatele  $(x_{Q_1};y_{Q_1})$  ale punctului  $Q_1$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_1P_2}$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned}x_{Q_1} &= (1-t)x_1 + tx_2 \\y_{Q_1} &= (1-t)y_1 + ty_2\end{aligned}\quad (2.3.2.2)$$

Linia dreaptă trasată prin punctele  $Q_0$  și  $Q_1$  reprezintă la rândul ei o curbă Bézier de ordinul întâi. Coordonatele  $(x;y)$  ale punctului  $B$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{Q_0Q_1}$ , pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned}x &= (1-t)x_{Q_0} + tx_{Q_1} \\y &= (1-t)y_{Q_0} + ty_{Q_1}\end{aligned}\quad (2.3.2.3)$$

Introducând relațiile 2.3.2.1 și 2.3.2.2 în relațiile 2.3.2.3, se obține:

$$\begin{aligned}x &= (x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 + (-2x_0 + 2x_1)t + x_0 = B_x(t), \\y &= (y_0 - 2y_1 + y_2)t^2 + (-2y_0 + 2y_1)t + y_0 = B_y(t), \quad t \in [0;1] \quad (2.3.2.4)\end{aligned}$$

Relațiile 2.3.2.4 reprezintă tocmai ecuațiile parametrice ale curbei Bézier de ordinul al doilea  $\overline{P_0P_1P_2}$ . Aceste relații se mai pot scrie sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}x &= B_x(t) = (1-t)^2x_0 + 2(1-t)tx_1 + t^2x_2, \\y &= B_y(t) = (1-t)^2y_0 + 2(1-t)ty_1 + t^2y_2, \quad t \in [0;1] \quad (2.3.2.4')\end{aligned}$$

această formă fiind cel mai des utilizată. Curba Bézier de ordinul al doilea (cuadratică)  $\overline{P_0P_1P_2}$  reprezintă traiectoria punctului  $B$ . Pentru  $t = 0$  rezultă  $P_0 \equiv Q_0 \equiv B$  și  $P_1 \equiv Q_1$ , iar pentru  $t = 1$  rezultă  $P_2 \equiv Q_1 \equiv B$  și  $P_1 \equiv Q_0$ .

Curba Bézier de ordinul al doilea  $\overline{P_0P_1P_2}$  are două proprietăți importante:

1) Segmentul de dreaptă  $\overline{P_0P_1}$  este tangent la curba Bézier quadratică  $\overline{P_0P_1P_2}$  în punctul  $P_0$ :

$$\frac{dy}{dx_{P_0}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

2) Segmentul de dreaptă  $\overline{P_1P_2}$  este tangent la curba Bézier quadratică  $\overline{P_0P_1P_2}$  în punctul  $P_2$ :

$$\frac{dy}{dx_{P_2}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dacă cele trei noduri sunt date în spațiul tridimensional (3D), nodurile având coordonatele  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2; z_2)$ , curba Bézier 3D de ordinul al doilea (cuadratică)  $\overline{P_0P_1P_2}$  este definită prin funcțiile următoare:

$$\begin{aligned}x &= B_x(t) = (1-t)^2x_0 + 2(1-t)tx_1 + t^2x_2 \\y &= B_y(t) = (1-t)^2y_0 + 2(1-t)ty_1 + t^2y_2, \quad t \in [0;1] \quad (2.3.2.5) \\z &= B_z(t) = (1-t)^2z_0 + 2(1-t)tz_1 + t^2z_2\end{aligned}$$

### 2.3.3. Curbe Bézier de ordinul al treilea (cubice).

În planul  $xOy$  (figura 2.3.3.1) se consideră patru noduri (puncte) distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ ,  $P_3(x_3; y_3)$ . Curba Bézier de ordinul al treilea  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  (care nu trece prin nodurile  $P_1$  și  $P_2$ ) reprezintă traiectoria punctului  $B(x; y)$ . Se propune determinarea modului de construcție grafică a acestei curbe și funcțiile parametrice prin care se calculează coordonatele  $(x; y)$  ale punctelor curbei.

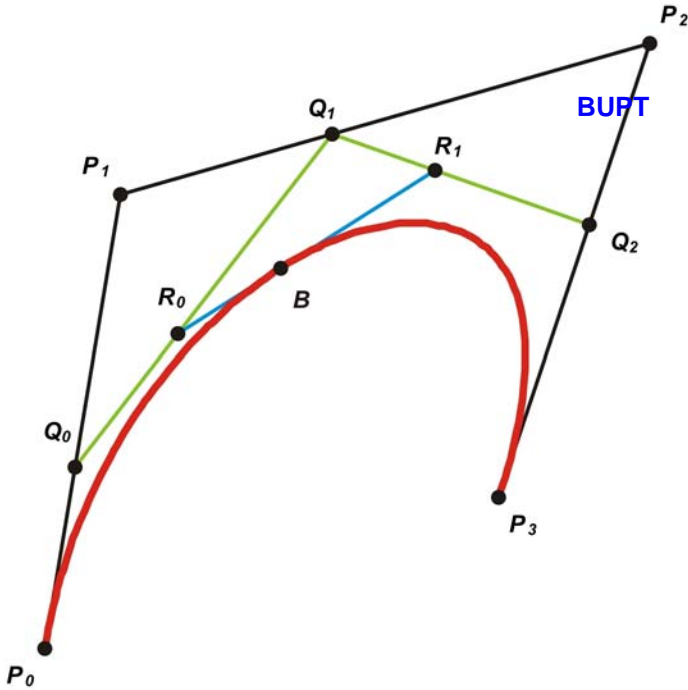


Fig. 2.3.3.1. Curbă Bézier de ordinul al treilea (cubică).

Pentru o valoare oarecare dată a parametrului  $t$ , coordonatele  $(x_{Q0}; y_{Q0})$  ale punctului  $Q_0$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_0P_1}$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x_{Q0} &= (1-t)x_0 + tx_1 \\ y_{Q0} &= (1-t)y_0 + ty_1 \end{aligned} \quad (2.3.3.1)$$

În același timp, pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , coordonatele  $(x_{Q1}; y_{Q1})$  ale punctului  $Q_1$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_1P_2}$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x_{Q1} &= (1-t)x_1 + tx_2 \\ y_{Q1} &= (1-t)y_1 + ty_2 \end{aligned} \quad (2.3.3.2)$$

În final, tot pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , coordonatele  $(x_{Q2}; y_{Q2})$  ale punctului  $Q_2$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_2P_3}$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x_{Q2} &= (1-t)x_2 + tx_3 \\ y_{Q2} &= (1-t)y_2 + ty_3 \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

Linia dreaptă trasată prin punctele  $Q_0$  și  $Q_1$  reprezintă la rândul ei o curbă Bézier de ordinul întâi. Coordonatele  $(x_{R_0}; y_{R_0})$  ale punctului  $R_0$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\overline{Q_0Q_1}$ , pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , sunt date de relațiile următoare:

**BUPT**

$$\begin{aligned} x_{R_0} &= (1-t)x_{Q_0} + tx_{Q_1} \\ y_{R_0} &= (1-t)y_{Q_0} + ty_{Q_1} \end{aligned} \quad (2.3.3.4)$$

De asemenea, linia dreaptă trasată prin punctele  $Q_1$  și  $Q_2$  reprezintă tot o curbă Bézier de ordinul întâi. Coordonatele  $(x_{R_1}; y_{R_1})$  ale punctului  $R_1$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\overline{Q_1Q_2}$ , pentru aceeași valoare dată a parametrului  $t$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x_{R_1} &= (1-t)x_{Q_1} + tx_{Q_2} \\ y_{R_1} &= (1-t)y_{Q_1} + ty_{Q_2} \end{aligned} \quad (2.3.3.5)$$

La rândul ei, linia dreaptă trasată prin punctele  $R_0$  și  $R_1$  reprezintă tot o curbă Bézier de ordinul întâi. Coordonatele  $(x; y)$  ale punctului  $B$  care aparține curbei Bézier de ordinul întâi  $\overline{R_0R_1}$ , pentru valoarea dată a parametrului  $t$ , sunt date de relațiile următoare:

$$\begin{aligned} x &= (1-t)x_{R_0} + tx_{R_1} \\ y &= (1-t)y_{R_0} + ty_{R_1} \end{aligned} \quad (2.3.3.6)$$

Introducând relațiile 2.3.3.1 → 2.3.3.5 în relațiile 2.3.3.6, se obține:

$$\begin{aligned} x &= (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + \\ &\quad + (-3x_0 + 3x_1)t + x_0 = B_x(t) \\ y &= (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + \\ &\quad + (-3y_0 + 3y_1)t + y_0 = B_y(t) \end{aligned}, \quad t \in [0;1] \quad (2.3.3.7)$$

Relațiile 2.3.3.7 reprezintă tocmai ecuațiile parametrice ale curbei Bézier de ordinul al treilea  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ . Aceste relații se mai pot scrie sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3(1-t)^2 tx_1 + 3(1-t)t^2 x_2 + t^3 x_3 \\ y &= B_y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3(1-t)^2 ty_1 + 3(1-t)t^2 y_2 + t^3 y_3 \end{aligned}, \quad t \in [0;1] \quad (2.3.3.7')$$

această formă fiind cel mai des utilizată. Curba Bézier de ordinul al treilea (cubică)  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  reprezintă traiectoria punctului  $B$ . Pentru  $t = 0$  rezultă  $P_0 \equiv Q_0 \equiv R_0 \equiv B$ ,  $P_1 \equiv Q_1 \equiv R_1$  și  $P_2 \equiv Q_2$ , iar pentru  $t = 1$  rezultă  $P_3 \equiv Q_2 \equiv R_1 \equiv B$ ,  $P_2 \equiv Q_1 \equiv R_0$  și  $P_1 \equiv Q_0$ .

Curba Bézier de ordinul al treilea  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  are două proprietăți importante:

1) Segmentul de dreaptă  $\overline{P_0P_1}$  este tangent la curba Bézier cubică  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  în punctul  $P_0$ :

$$\frac{dy}{dx}_{P_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{BUPT}$$

2) Segmentul de dreaptă  $\overline{P_2P_3}$  este tangent la curba Bézier cubică  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  în punctul  $P_3$ :

$$\frac{dy}{dx}_{P_3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Dacă cele patru noduri sunt date în spațiul tridimensional (3D), nodurile având coordonatele  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $P_3(x_3; y_3; z_3)$  curba Bézier 3D de ordinul al treilea (cubică)  $\overline{P_0P_1P_2P_3}$  este definită prin funcțiile următoare:

$$\begin{aligned} x &= B_x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3(1-t)^2 t x_1 + 3(1-t)t^2 x_2 + t^3 x_3 \\ y &= B_y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3(1-t)^2 t y_1 + 3(1-t)t^2 y_2 + t^3 y_3, \quad t \in [0; 1] \quad (2.3.3.8) \\ z &= B_z(t) = (1-t)^3 z_0 + 3(1-t)^2 t z_1 + 3(1-t)t^2 z_2 + t^3 z_3 \end{aligned}$$

### 2.3.4. Curbe Bézier de ordin superior.

Pentru a stabili expresiile generale ale unei curbe Bézier de ordin superior, se pornește de la expresia binomului lui Newton:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n a^0 b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \end{aligned} \quad (2.3.4.1)$$

Astfel, se poate scrie:

$$1 = 1^n = [(1-t) + t]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (1-t)^{n-k} t^k \quad (2.3.4.2)$$

Expresiile de forma:

$$C_n^k (1-t)^{n-k} t^k = b_{k,n}(t) \quad (2.3.4.3)$$

se numesc *polinoame Bernstein* sau *funcții Bernstein*. Pornind de la aceste expresii se poate scrie:

$$\begin{aligned} b_{0,1}(t) &= 1-t \\ b_{1,1}(t) &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{0,2}(t) &= (1-t)^2 \\
 b_{1,2}(t) &= 2(1-t)t \\
 b_{2,2}(t) &= t^2 \\
 b_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\
 b_{1,3}(t) &= 3(1-t)^2t \\
 b_{2,3}(t) &= 3(1-t)t^2 \\
 b_{3,3}(t) &= t^3
 \end{aligned}$$

BUPT

Având calculate polinoamele Bernstein  $b_{0,i}(t) \rightarrow b_{3,3}(t)$ , expresiile generale ale curbelor Bézier liniare, cuadratice și cubice se pot scrie sub următoarea formă:  
 - curbe Bézier liniare (de ordinul întâi):

$$\begin{aligned}
 x &= B_x(t) = x_0b_{0,1}(t) + x_1b_{1,1}(t) \\
 y &= B_y(t) = y_0b_{0,1}(t) + y_1b_{1,1}(t) \quad , \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.4)
 \end{aligned}$$

- curbe Bézier cuadratice (de ordinul al doilea):

$$\begin{aligned}
 x &= B_x(t) = x_0b_{0,2}(t) + x_1b_{1,2}(t) + x_2b_{2,2}(t) \\
 y &= B_y(t) = y_0b_{0,2}(t) + y_1b_{1,2}(t) + y_2b_{2,2}(t) \quad , \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.5)
 \end{aligned}$$

- curbe Bézier cubice (de ordinul al treilea):

$$\begin{aligned}
 x &= B_x(t) = x_0b_{0,3}(t) + x_1b_{1,3}(t) + x_2b_{2,3}(t) + x_3b_{3,3}(t) \\
 y &= B_y(t) = y_0b_{0,3}(t) + y_1b_{1,3}(t) + y_2b_{2,3}(t) + y_3b_{3,3}(t) \quad , \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.6)
 \end{aligned}$$

Dacă în planul  $xOy$  se consideră  $n$  noduri (puncte) distincte definite prin coordonatele  $x$  și  $y$  ale acestora:  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ , ...,  $P_n(x_n; y_n)$ , *curba Bézier de ordinul  $n-1$*   $\overline{P_0P_1P_2...P_n}$  (care nu trece prin nodurile  $P_1$ ,  $P_2$  ... și  $P_{n-1}$ ) va avea coordonatele  $(x; y)$  ale punctelor sale definite de următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
 x &= B_x(t) = x_0b_{0,n}(t) + x_1b_{1,n}(t) + x_2b_{2,n}(t) + \dots + x_nb_{n,n}(t) \\
 y &= B_y(t) = y_0b_{0,n}(t) + y_1b_{1,n}(t) + y_2b_{2,n}(t) + \dots + y_nb_{n,n}(t) \quad , \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.7)
 \end{aligned}$$

Aceste expresii se mai pot scrie sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}
 x &= B_x(t) = \sum_{k=0}^n x_k b_{k,n}(t) \\
 y &= B_y(t) = \sum_{k=0}^n y_k b_{k,n}(t) \quad , \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.7')
 \end{aligned}$$

Din aceste ultime două expresii se deduce faptul că expresia unei curbe Bézier de ordinul  $n-1$   $\overline{P_0P_1\dots P_n}$  reprezintă o *combinație liniară de polinoame Bernstein*.

Dacă cele  $n$  noduri sunt date în spațiul tridimensional (3D), nodurile având coordonatele  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2; z_2)$ , ...,  $P_n(x_n; y_n; z_n)$  curba Bézier 3D de ordinul  $n-1$   $\overline{P_0P_1P_2\dots P_n}$  este definită prin funcțiile următoare:

$$\begin{aligned}x &= B_x(t) = \sum_{k=0}^n x_k b_{k,n}(t) \\y &= B_y(t) = \sum_{k=0}^n y_k b_{k,n}(t), \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.8) \\z &= B_z(t) = \sum_{k=0}^n z_k b_{k,n}(t)\end{aligned}$$

Din punct de vedere ingineresc, se poate face o analogie între curbele Bézier și centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale. De exemplu, se consideră în planul  $xOy$  patru puncte materiale cu masele  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  și  $m_3$ , ale căror centre de greutate reprezintă punctele  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$  și  $P_3(x_3; y_3)$ . Punctul  $G(x; y)$  reprezintă centrul de greutate al sistemului format din cele patru puncte materiale. Coordonatele acestui punct se calculează cu relațiile următoare:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_0 m_0 + x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} \\y &= \frac{y_0 m_0 + y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}\end{aligned} \quad (2.3.4.9)$$

În continuare, se presupune că valorile maselor punctelor materiale ale sistemului nu sunt constante și reprezintă variații ale unor funcții parametrice. De exemplu se consideră:

$$\begin{aligned}m_0 &= (1-t)^3 = b_{0,3}(t) \\m_1 &= 3(1-t)^2 t = b_{1,3}(t) \\m_2 &= 3(1-t) t^2 = b_{2,3}(t) \\m_3 &= t^3 = b_{3,3}(t)\end{aligned}, \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.10)$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 1 \quad (2.3.4.11)$$

Utilizând relațiile anterioare, coordonatele centrului de greutate  $G(x; y)$  al sistemului de puncte materiale vor fi date de următoarele relații:



$$\begin{aligned} x &= (1-t)^3 x_0 + 3(1-t)^2 t x_1 + 3(1-t)t^2 x_2 + t^3 x_3, \\ y &= (1-t)^3 y_0 + 3(1-t)^2 t y_1 + 3(1-t)t^2 y_2 + t^3 y_3, \end{aligned} \quad t \in [0;1] \quad (2.3.4.12)$$

### BUPT

Aceste două relații reprezintă de fapt ecuațiile curbei Bézier cubice definite de punctele  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$  și  $P_3(x_3; y_3)$ . Cum valorile maselor variază după funcțiile considerate, centrul de greutate al sistemului de puncte materiale descrie o traiectorie care este o curbă Bézier cubică. Pentru  $t = 0$  rezultă  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 0$  și  $G \equiv P_0$ , iar pentru  $t = 1$  rezultă  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 1$  și  $G \equiv P_3$ .

Se mai poate spune că aceste curbe Bézier reprezintă o medie ponderată a coordonatelor punctelor prin care ele se trasează, ponderile fiind polinoamele sau funcțiile Bernstein, acestea din urmă mai numindu-se *funcții de bază* sau *funcții de amestec* (*basis functions* sau *blending functions*). În figurile 2.3.4.1 → 2.3.4.3 sunt redată graficele funcțiilor de bază (Bernstein) pentru curbele Bézier liniare, cuadratică respectiv cubice.

O altă proprietate importantă a curbelor Bézier este că acestea se află plasate întotdeauna în interiorul poligonului închis format de nodurile curbelor (*convex hull property*) [85] [100] (figura 2.3.3.4).

În general, în aplicațiile CAD se folosesc curbele Bézier cubice, evitându-se utilizarea curbelor de ordin superior pentru mărirea vitezei de calcul. În cazul în care se dorește realizarea unor curbe complicate, acestea se trasează prin legarea mai multor curbe Bézier cubice.

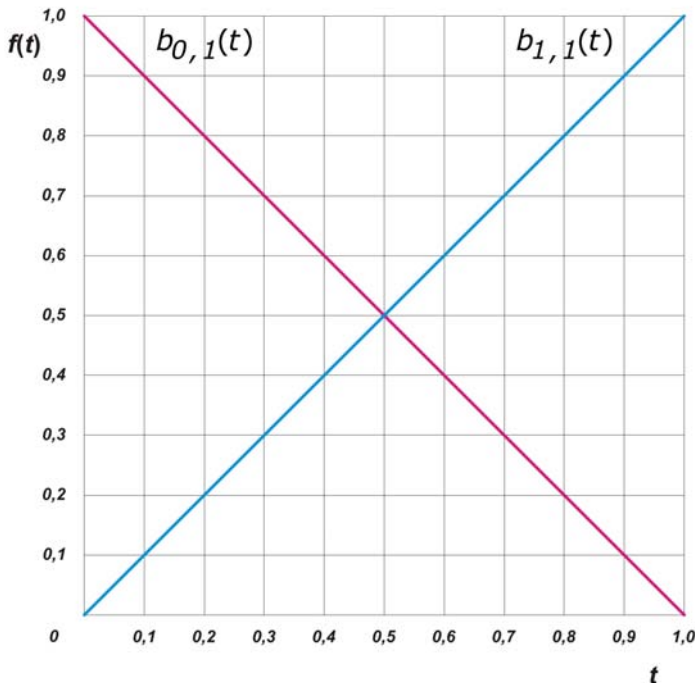


Fig. 2.3.4.1. Funcțiile de bază pentru curbele Bézier liniare.

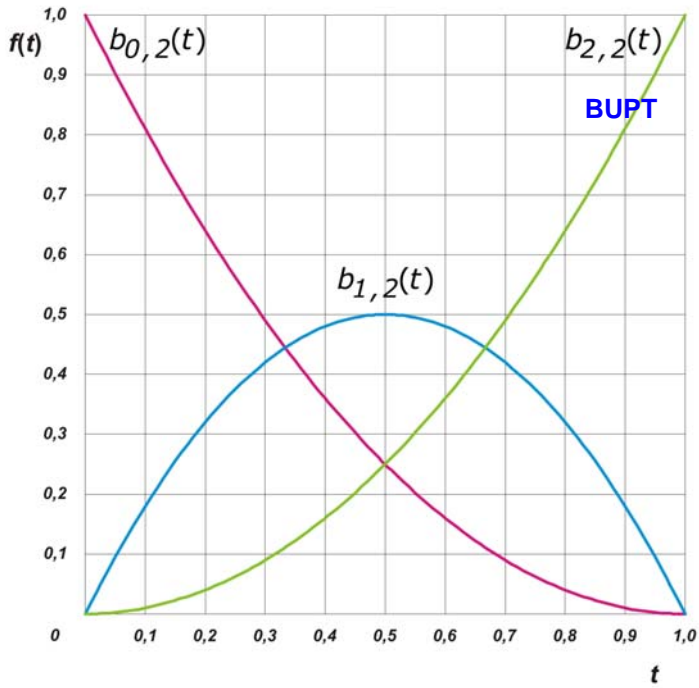


Fig. 2.3.3.2. Funcțiile de bază pentru curbele Bézier cuadratice.

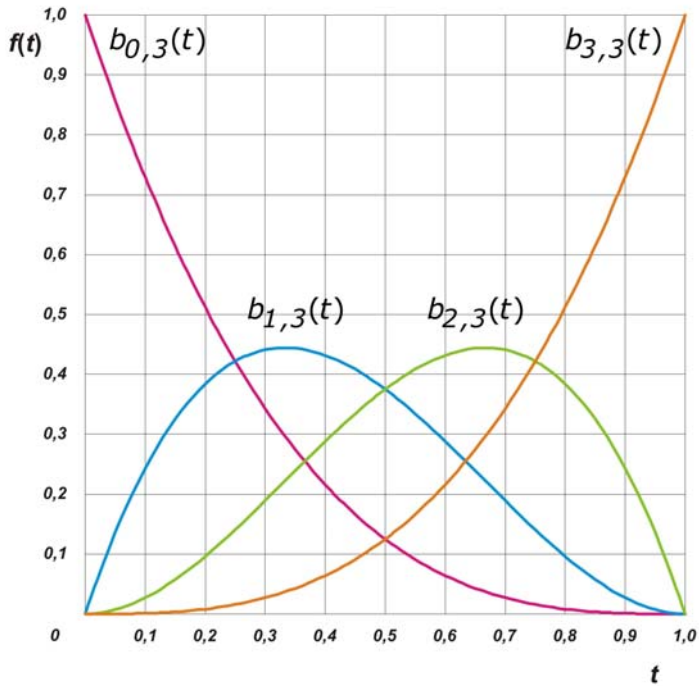
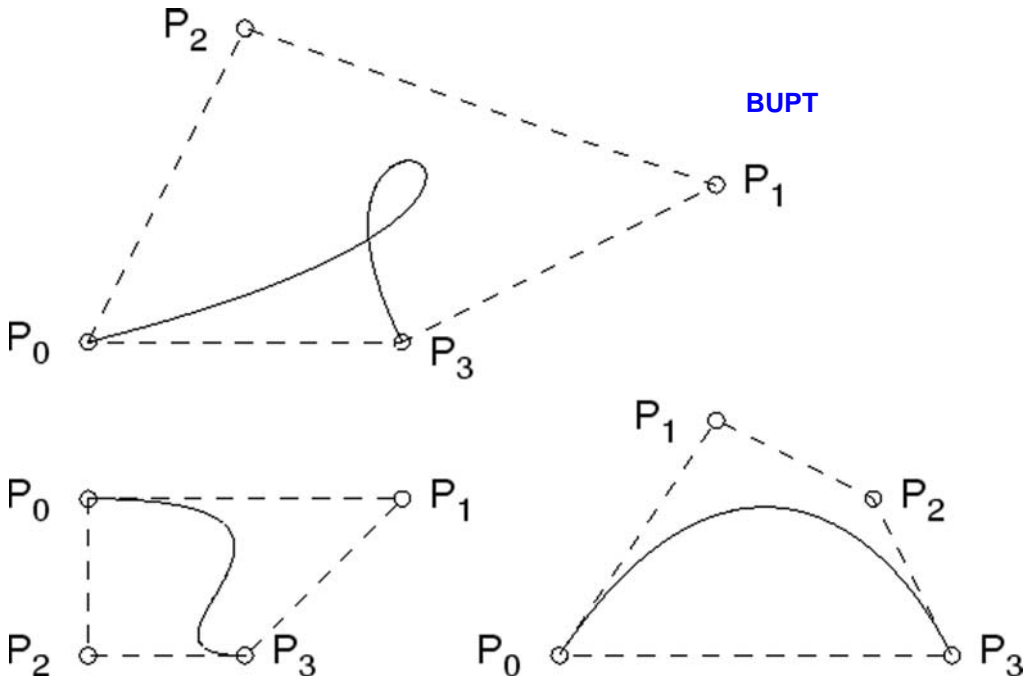


Fig. 2.3.3.3. Funcțiile de bază pentru curbele Bézier cubice.

Fig. 2.3.3.4. Proprietatea *convex hull*.

## 2.4. Suprafețe de tip Bézier.

Suprafețele Bézier [100] au fost pentru prima dată descrise în anul 1972 de către inginerul francez Pierre Bézier și alături de curbele care îi poartă numele au fost folosite inițial în activitatea de proiectare a caroseriilor automobilelor.

Definirea unei curbe Bézier de ordinul  $n$  necesită  $n+1$  noduri și un singur parametru  $t \in [0;1]$ . În analogie, o suprafață Bézier posedă nu un singur ordin, ci două, astfel că definirea unei suprafețe oarecare cu ordinul  $m, n$  necesită  $(m+1)(n+1)$  noduri și doi parametri independenți:  $u \in [0;1]$ ,  $v \in [0;1]$ . Ținând cont de acest aspect și de denumirea curbelor Bézier fundamentale (liniare, cuadratică și cubice), suprafețele Bézier de bază sunt cele biliniare (ordinea  $1,1$ ), bicuadratică (ordinea  $2,2$ ) și bicubice (ordinea  $3,3$ ).

În general, suprafețele Bézier bicubice oferă rezultate foarte bune în majoritatea aplicațiilor CAD, astfel că folosirea suprafețelor de ordin superior nu se justifică practic.

Coordonatele punctelor unei suprafețe Bézier sunt date de funcții parametrice, sub forma:

$$\begin{aligned} x &= B_x(u;v) \\ y &= B_y(u;v), \quad u;v \in [0;1] \quad (2.4.1) \\ z &= B_z(u;v) \end{aligned}$$

### 2.4.1. Suprafețe Bézier biliniare.

În spațiul tridimensional, se consideră patru noduri distincte:  $P_{00}(x_{00};y_{00};z_{00})$ ,  $P_{01}(x_{01};y_{01};z_{01})$ ,  $P_{10}(x_{10};y_{10};z_{10})$  și  $P_{11}(x_{11};y_{11};z_{11})$  (figura 2.4.1.1).

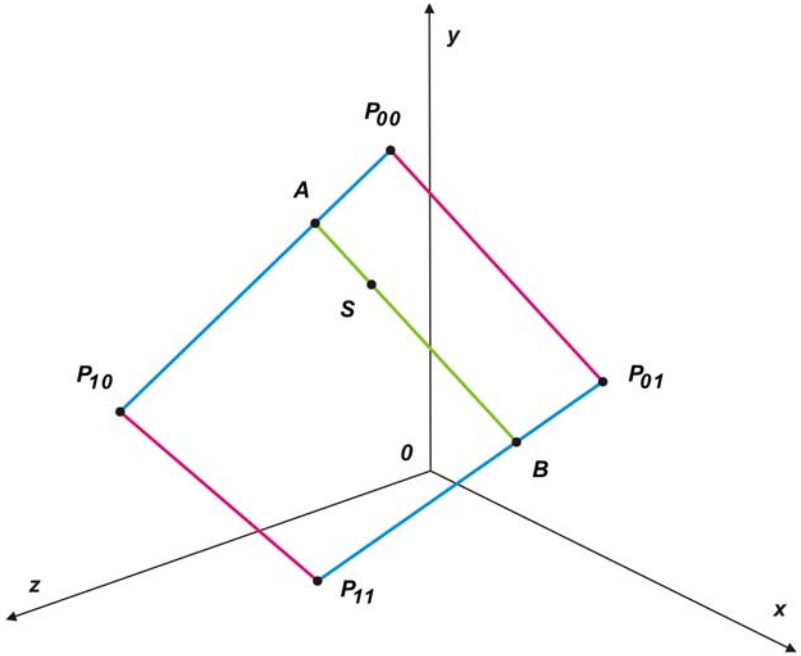


Fig. 2.4.1.1. Construcția unei suprafețe Bézier biliniare.

Prin punctele  $P_{00}$  și  $P_{01}$  se trasează o curbă Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_{00}P_{01}}$  definită, de exemplu, în funcție de parametrul  $u \in [0;1]$ . Utilizând polinoamele Bernstein, coordonatele punctelor aparținătoare acestei curbe sunt determinate de relațiile :

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,1}(u) + x_{01}b_{1,1}(u) \\ \widehat{P_{00}P_{01}} : y &= y_{00}b_{0,1}(u) + y_{01}b_{1,1}(u), \quad u \in [0;1] \quad (2.4.1.1) \\ z &= z_{00}b_{0,1}(u) + z_{01}b_{1,1}(u) \end{aligned}$$

Concomitent, prin punctele  $P_{10}$  și  $P_{11}$  se trasează o altă curbă Bézier de ordinul întâi  $\widehat{P_{10}P_{11}}$  definită tot în funcție de parametrul  $u$ . Această curbă este determinată de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{10}b_{0,1}(u) + x_{11}b_{1,1}(u) \\ \widehat{P_{10}P_{11}} : y &= y_{10}b_{0,1}(u) + y_{11}b_{1,1}(u), \quad u \in [0;1] \quad (2.4.1.2) \\ z &= z_{10}b_{0,1}(u) + z_{11}b_{1,1}(u) \end{aligned}$$

Se observă faptul că cele două curbe nu au nici un punct comun. De asemenea se mai pot construi două curbe Bézier de ordinul întâi  $\overline{P_{00}P_{10}}$ , respectiv  $\overline{P_{01}P_{11}}$ , definite de această dată în funcție de parametrul  $v \in [0;1]$ . Aceste două curbe sunt determinate de relațiile :

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,1}(v) + x_{10}b_{1,1}(v) \\ \overline{P_{00}P_{10}} : y &= y_{00}b_{0,1}(v) + y_{10}b_{1,1}(v), \quad v \in [0;1] \quad (2.4.1.3) \\ z &= z_{00}b_{0,1}(v) + z_{10}b_{1,1}(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_{01}b_{0,1}(v) + x_{11}b_{1,1}(v) \\ \overline{P_{01}P_{11}} : y &= y_{01}b_{0,1}(v) + y_{11}b_{1,1}(v), \quad v \in [0;1] \quad (2.4.1.4) \\ z &= z_{01}b_{0,1}(v) + z_{11}b_{1,1}(v) \end{aligned}$$

Pentru o valoare oarecare a parametrului  $v$  există punctele  $A(x_A; y_A; z_A)$  și  $B(x_B; y_B; z_B)$  aparținătoare curbelor  $\overline{P_{00}P_{10}}$ , respectiv  $\overline{P_{01}P_{11}}$ , a căror coordonate sunt calculate cu relațiile:

$$\begin{aligned} x_A &= x_{00}b_{0,1}(v) + x_{10}b_{1,1}(v) \\ y_A &= y_{00}b_{0,1}(v) + y_{10}b_{1,1}(v) \quad (2.4.1.5) \\ z_A &= z_{00}b_{0,1}(v) + z_{10}b_{1,1}(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= x_{01}b_{0,1}(v) + x_{11}b_{1,1}(v) \\ y_B &= y_{01}b_{0,1}(v) + y_{11}b_{1,1}(v) \quad (2.4.1.6) \\ z_B &= z_{01}b_{0,1}(v) + z_{11}b_{1,1}(v) \end{aligned}$$

Prin punctele  $A$  și  $B$  se trasează o curbă Bézier de ordinul întâi  $\overline{AB}$  definită în funcție de parametrul  $u$ . Pe această curbă se consideră un punct  $S(x_S; y_S; z_S)$ , a cărui coordonate sunt calculate pentru o valoare oarecare a parametrului  $u$ . Valorile coordonatelor punctului  $S$  sunt calculate cu relațiile:

$$\begin{aligned} x_S &= x_A b_{0,1}(u) + x_B b_{1,1}(u) \\ y_S &= y_A b_{0,1}(u) + y_B b_{1,1}(u) \quad (2.4.1.7) \\ z_S &= z_A b_{0,1}(u) + z_B b_{1,1}(u) \end{aligned}$$

Introducând relațiile 2.4.1.5 și 2.4.1.6 în relația 2.4.1.7, se obține:

$$\begin{aligned} x_S &= x_{00}b_{0,1}(u)b_{0,1}(v) + x_{01}b_{1,1}(u)b_{0,1}(v) + x_{10}b_{0,1}(u)b_{1,1}(v) + x_{11}b_{1,1}(u)b_{1,1}(v) \\ y_S &= y_{00}b_{0,1}(u)b_{0,1}(v) + y_{01}b_{1,1}(u)b_{0,1}(v) + y_{10}b_{0,1}(u)b_{1,1}(v) + y_{11}b_{1,1}(u)b_{1,1}(v) \\ z_S &= z_{00}b_{0,1}(u)b_{0,1}(v) + z_{01}b_{1,1}(u)b_{0,1}(v) + z_{10}b_{0,1}(u)b_{1,1}(v) + z_{11}b_{1,1}(u)b_{1,1}(v) \end{aligned} \quad (2.4.1.8)$$

De asemenea, introducând în relația 2.4.1.8 și expresiile polinoamelor Bernstein, rezultă:

$$\begin{aligned} x_S &= x_{00}(1-u)(1-v) + x_{01}u(1-v) + x_{10}(1-u)v + x_{11}uv \\ y_S &= y_{00}(1-u)(1-v) + y_{01}u(1-v) + y_{10}(1-u)v + y_{11}uv \\ z_S &= z_{00}(1-u)(1-v) + z_{01}u(1-v) + z_{10}(1-u)v + z_{11}uv \end{aligned} \quad (2.4.1.9)$$

Pentru totalitatea valorilor parametrilor  $u$  și  $v$  coordonatele punctului  $S$  descriu o suprafață intitulată *suprafață Bézier biliniară (de ordinul 1,1)* (figura 2.4.1.2).

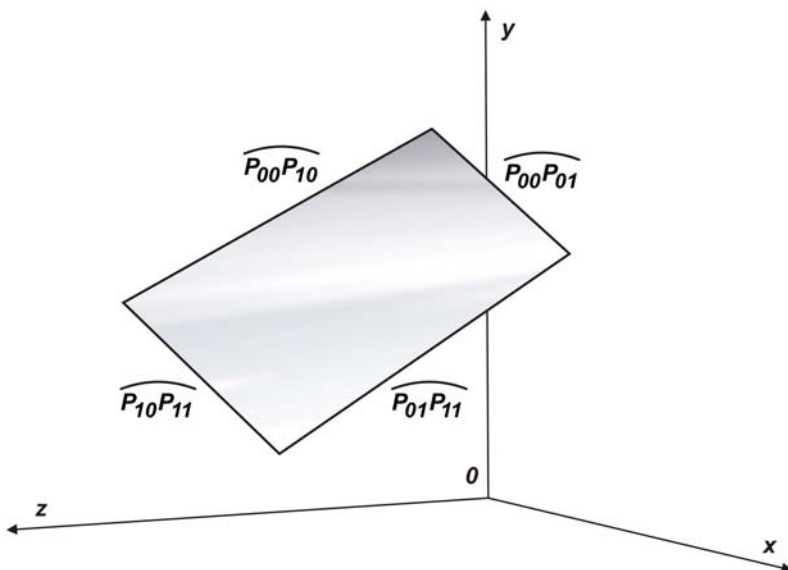


Fig. 2.4.1.2. Suprafață Bézier biliniară.

În relația 2.4.1.9 dacă  $v = 0$ , se obține ecuația curbei  $\widehat{P_{00}P_{01}}$ . Pentru  $v = 1$  rezultă ecuația curbei  $\widehat{P_{10}P_{11}}$ . Având  $u = 0$  rezultă ecuația curbei  $\widehat{P_{00}P_{10}}$ , iar pentru  $u = 1$  rezultă ecuația curbei  $\widehat{P_{01}P_{11}}$ .

Un aspect deosebit de important în stabilirea ulterioară a ecuațiilor suprafețelor Bézier bicuadrice și bicubice este acela că relațiile 2.4.1.9 se pot obține dacă în relațiile 2.4.1.1 se înlocuiesc coordonatele punctelor  $P_{00}(x_{00}; y_{00}; z_{00})$ , respectiv  $P_{01}(x_{01}; y_{01}; z_{01})$  cu componentele  $x$ ,  $y$  și  $z$  ale ecuațiilor curbelor  $\widehat{P_{00}P_{10}}$ , respectiv  $\widehat{P_{01}P_{11}}$  (relațiile 2.4.1.3 și 2.4.1.4). Concret, în relațiile 2.4.1.1, termenii  $x_{00}$ , respectiv  $x_{01}$  se înlocuiesc cu expresiile  $x_{00}b_{0,1}(v) + x_{10}b_{1,1}(v)$ , respectiv  $x_{01}b_{0,1}(v) + x_{11}b_{1,1}(v)$ . La fel se procedează pentru termenii  $y_{00}$ , respectiv  $y_{01}$  și  $z_{00}$ , respectiv  $z_{01}$ , aceștia înlocuindu-se cu expresiile corespunzătoare.

### 2.4.2. Suprafețe Bézier bicuadractice.

Pentru construcția unei suprafețe Bézier bicuadractice (ordinea 2,2), în spațiul tridimensional, se consideră nouă noduri distincte:  $P_{00}(x_{00};y_{00};z_{00})$ ,  $P_{01}(x_{01};y_{01};z_{01})$ ,  $P_{02}(x_{02};y_{02};z_{02})$ ,  $P_{10}(x_{10};y_{10};z_{10})$ ,  $P_{11}(x_{11};y_{11};z_{11})$ ,  $P_{12}(x_{12};y_{12};z_{12})$ ,  $P_{20}(x_{20};y_{20};z_{20})$ ,  $P_{21}(x_{21};y_{21};z_{21})$  și  $P_{22}(x_{22};y_{22};z_{22})$ , (figura 2.4.2.1).

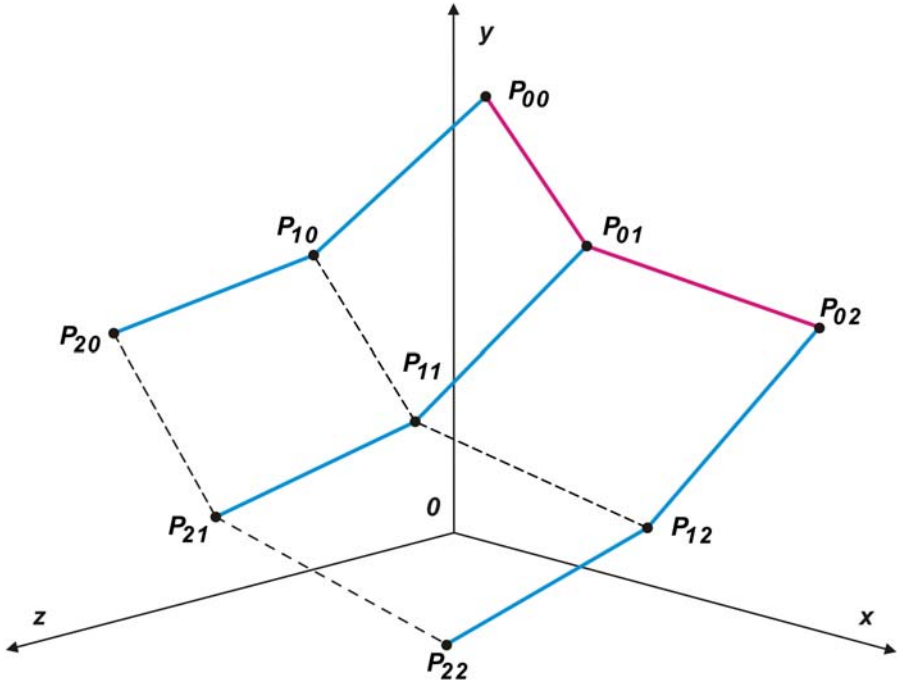


Fig. 2.4.2.1. Construcția unei suprafețe Bézier bicuadractice.

Coordonatele punctelor aparținătoare curbei Bézier cuadratrice  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}}$ , definite în funcție de parametrul  $u$  sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,2}(u) + x_{01}b_{1,2}(u) + x_{02}b_{2,2}(u) \\ \overline{P_{00}P_{01}P_{02}} : y &= y_{00}b_{0,2}(u) + y_{01}b_{1,2}(u) + y_{02}b_{2,2}(u), \quad u \in [0;1] \quad (2.4.2.1) \\ z &= z_{00}b_{0,2}(u) + z_{01}b_{1,2}(u) + z_{02}b_{2,2}(u) \end{aligned}$$

Dacă s-ar trasa curbele Bézier cuadratrice  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}}$ ,  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}}$ ,  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}}$  în funcție de parametrul  $v$ , aceste curbe ar fi definite de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,2}(v) + x_{10}b_{1,2}(v) + x_{20}b_{2,2}(v) \\ \overline{P_{00}P_{10}P_{20}} : y &= y_{00}b_{0,2}(v) + y_{10}b_{1,2}(v) + y_{20}b_{2,2}(v), \quad v \in [0;1] \quad (2.4.2.2) \\ z &= z_{00}b_{0,2}(v) + z_{10}b_{1,2}(v) + z_{20}b_{2,2}(v) \end{aligned}$$

$$\overline{P_{01}P_{11}P_{21}} : \begin{aligned} x &= x_{01}b_{0,2}(v) + x_{11}b_{1,2}(v) + x_{21}b_{2,2}(v) \\ y &= y_{01}b_{0,2}(v) + y_{11}b_{1,2}(v) + y_{21}b_{2,2}(v), \quad v \in [0;1] \quad (2.4.2.3). \\ z &= z_{01}b_{0,2}(v) + z_{11}b_{1,2}(v) + z_{21}b_{2,2}(v) \end{aligned} \quad \text{BUPT}$$

$$\overline{P_{02}P_{12}P_{22}} : \begin{aligned} x &= x_{02}b_{0,2}(v) + x_{12}b_{1,2}(v) + x_{22}b_{2,2}(v) \\ y &= y_{02}b_{0,2}(v) + y_{12}b_{1,2}(v) + y_{22}b_{2,2}(v), \quad v \in [0;1] \quad (2.4.2.4). \\ z &= z_{02}b_{0,2}(v) + z_{12}b_{1,2}(v) + z_{22}b_{2,2}(v) \end{aligned}$$

Pentru realizarea suprafeței Bézier bicuadratică, se recurge la aspectul important observat în cadrul suprafețelor Bézier biliniare. În consecință, cele trei noduri ale curbei  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}}$  sunt înlocuite de curbele  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}}$ ,  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}}$ , respectiv  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}}$ . Astfel, coordonatele totalității punctelor aparținătoare suprafeței Bézier bicuadratică (figura 2.4.2.2) sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,2}(u)b_{0,2}(v) + x_{01}b_{1,2}(u)b_{0,2}(v) + x_{02}b_{2,2}(u)b_{0,2}(v) + \\ &+ x_{10}b_{0,2}(u)b_{1,2}(v) + x_{11}b_{1,2}(u)b_{1,2}(v) + x_{12}b_{2,2}(u)b_{1,2}(v) + \\ &+ x_{20}b_{0,2}(u)b_{2,2}(v) + x_{21}b_{1,2}(u)b_{2,2}(v) + x_{22}b_{2,2}(u)b_{2,2}(v) \\ y &= y_{00}b_{0,2}(u)b_{0,2}(v) + y_{01}b_{1,2}(u)b_{0,2}(v) + y_{02}b_{2,2}(u)b_{0,2}(v) + \\ &+ y_{10}b_{0,2}(u)b_{1,2}(v) + y_{11}b_{1,2}(u)b_{1,2}(v) + y_{12}b_{2,2}(u)b_{1,2}(v) + \quad (2.4.2.5) \\ &+ y_{20}b_{0,2}(u)b_{2,2}(v) + y_{21}b_{1,2}(u)b_{2,2}(v) + y_{22}b_{2,2}(u)b_{2,2}(v) \\ z &= z_{00}b_{0,2}(u)b_{0,2}(v) + z_{01}b_{1,2}(u)b_{0,2}(v) + z_{02}b_{2,2}(u)b_{0,2}(v) + \\ &+ z_{10}b_{0,2}(u)b_{1,2}(v) + z_{11}b_{1,2}(u)b_{1,2}(v) + z_{12}b_{2,2}(u)b_{1,2}(v) + \\ &+ z_{20}b_{0,2}(u)b_{2,2}(v) + z_{21}b_{1,2}(u)b_{2,2}(v) + z_{22}b_{2,2}(u)b_{2,2}(v) \end{aligned}$$

Introducând în relația 2.4.2.5 și expresiile polinoamelor Bernstein, rezultă:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}(1-u)^2(1-v)^2 + x_{01}2(1-u)u(1-v)^2 + x_{02}u^2(1-v)^2 + \\ &+ x_{10}(1-u)^2 2(1-v)v + x_{11}4(1-u)u(1-v)v + x_{12}u^2 2(1-v)v + \\ &+ x_{20}(1-u)^2 v^2 + x_{21}2(1-u)uv^2 + x_{22}u^2 v^2 \\ y &= y_{00}(1-u)^2(1-v)^2 + y_{01}2(1-u)u(1-v)^2 + y_{02}u^2(1-v)^2 + \\ &+ y_{10}(1-u)^2 2(1-v)v + y_{11}4(1-u)u(1-v)v + y_{12}u^2 2(1-v)v + \quad (2.4.2.6) \\ &+ y_{20}(1-u)^2 v^2 + y_{21}2(1-u)uv^2 + y_{22}u^2 v^2 \\ z &= z_{00}(1-u)^2(1-v)^2 + z_{01}2(1-u)u(1-v)^2 + z_{02}u^2(1-v)^2 + \\ &+ z_{10}(1-u)^2 2(1-v)v + z_{11}4(1-u)u(1-v)v + z_{12}u^2 2(1-v)v + \\ &+ z_{20}(1-u)^2 v^2 + z_{21}2(1-u)uv^2 + z_{22}u^2 v^2 \end{aligned}$$



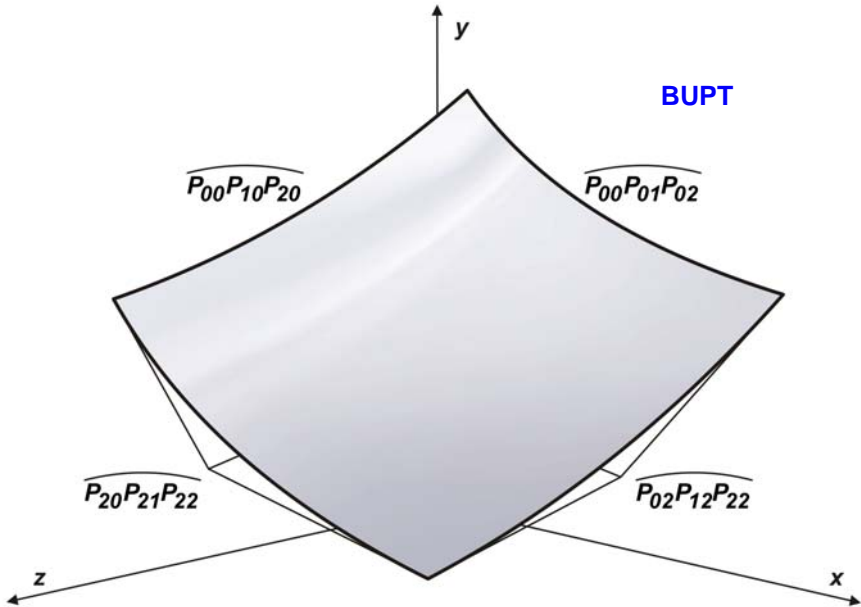


Fig. 2.4.2.2. Suprafață Bézier bicuadratică.

În relația 2.4.2.6 dacă  $v = 0$ , se obține ecuația curbei  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}}$ . Pentru  $v = 1$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{20}P_{21}P_{22}}$ . Având  $u = 0$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}}$ , iar pentru  $u = 1$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}}$ .

Este important de remarcat faptul că suprafața nu conține curbele  $\overline{P_{10}P_{11}P_{12}}$  și  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}}$ .

### 2.4.3. Suprafețe Bézier bicubice.

Pentru construcția unei suprafețe Bézier bicubice (ordinea 3,3), în spațiul tridimensional, se consideră șaisprezece noduri distincte:  $P_{00}(x_{00};y_{00};z_{00})$ ,  $P_{01}(x_{01};y_{01};z_{01})$ ,  $P_{02}(x_{02};y_{02};z_{02})$ ,  $P_{03}(x_{03};y_{03};z_{03})$ ,  $P_{10}(x_{10};y_{10};z_{10})$ ,  $P_{11}(x_{11};y_{11};z_{11})$ ,  $P_{12}(x_{12};y_{12};z_{12})$ ,  $P_{13}(x_{13};y_{13};z_{13})$ ,  $P_{20}(x_{20};y_{20};z_{20})$ ,  $P_{21}(x_{21};y_{21};z_{21})$ ,  $P_{22}(x_{22};y_{22};z_{22})$ ,  $P_{23}(x_{23};y_{23};z_{23})$ ,  $P_{30}(x_{30};y_{30};z_{30})$ ,  $P_{31}(x_{31};y_{31};z_{31})$ ,  $P_{32}(x_{32};y_{32};z_{32})$  și  $P_{33}(x_{33};y_{33};z_{33})$  (figura 2.4.3.1).

Coordonatele punctelor aparținătoare curbei Bézier cubice  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}P_{03}}$ , definite în funcție de parametrul  $u$  sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,3}(u) + x_{01}b_{1,3}(u) + x_{02}b_{2,3}(u) + x_{03}b_{3,3}(u) \\ \overline{P_{00}P_{01}P_{02}P_{03}} : y &= y_{00}b_{0,3}(u) + y_{01}b_{1,3}(u) + y_{02}b_{2,3}(u) + y_{03}b_{3,3}(u), \quad u \in [0;1] \\ z &= z_{00}b_{0,3}(u) + z_{01}b_{1,3}(u) + z_{02}b_{2,3}(u) + z_{03}b_{3,3}(u) \end{aligned} \quad (2.4.3.1)$$

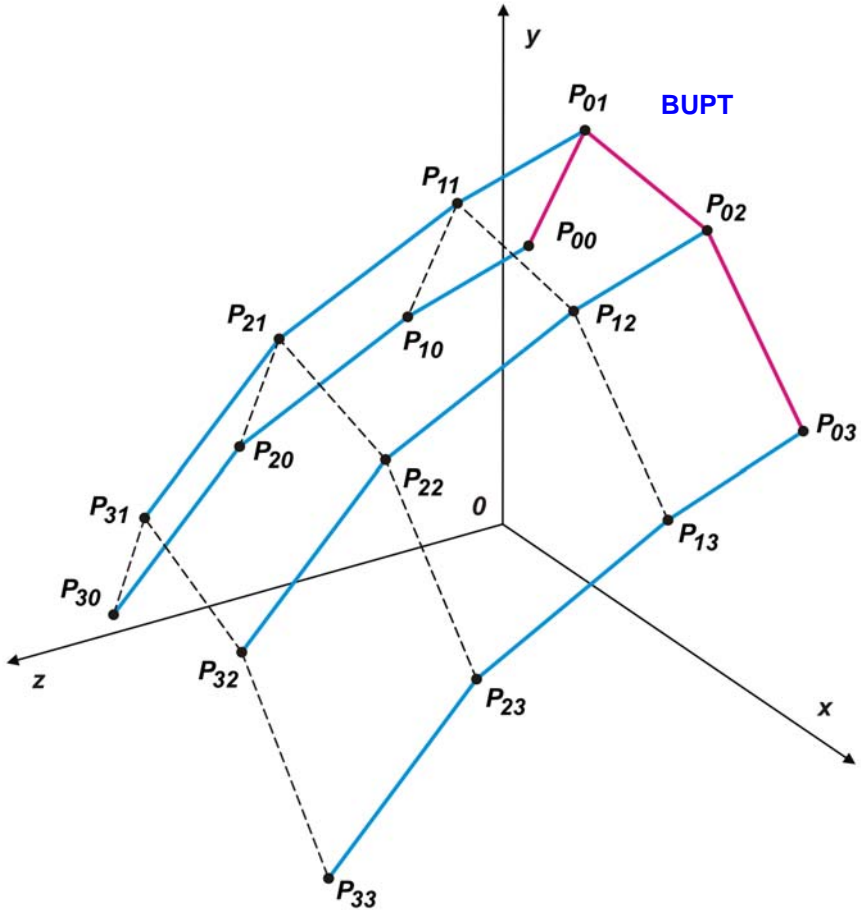


Fig. 2.4.3.1. Construcția unei suprafețe Bézier bicubice.

Dacă s-ar trasa curbele Bézier cuadratice  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}P_{30}}$ ,  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}P_{31}}$ ,  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}P_{32}}$ ,  $\overline{P_{03}P_{13}P_{23}P_{33}}$  în funcție de parametrul  $v$ , aceste curbe ar fi definite de relațiile:

$$\begin{aligned} x &= x_{00}b_{0,3}(v) + x_{10}b_{1,3}(v) + x_{20}b_{2,3}(v) + x_{30}b_{3,3}(v) \\ \overline{P_{00}P_{10}P_{20}P_{30}} : y &= y_{00}b_{0,3}(v) + y_{10}b_{1,3}(v) + y_{20}b_{2,3}(v) + y_{30}b_{3,3}(v), \quad v \in [0;1] \\ z &= z_{00}b_{0,3}(v) + z_{10}b_{1,3}(v) + z_{20}b_{2,3}(v) + z_{30}b_{3,3}(v) \end{aligned} \quad (2.4.3.2)$$

$$\begin{aligned} x &= x_{01}b_{0,3}(v) + x_{11}b_{1,3}(v) + x_{21}b_{2,3}(v) + x_{31}b_{3,3}(v) \\ \overline{P_{01}P_{11}P_{21}P_{31}} : y &= y_{01}b_{0,3}(v) + y_{11}b_{1,3}(v) + y_{21}b_{2,3}(v) + y_{31}b_{3,3}(v), \quad v \in [0;1] \\ z &= z_{01}b_{0,3}(v) + z_{11}b_{1,3}(v) + z_{21}b_{2,3}(v) + z_{31}b_{3,3}(v) \end{aligned} \quad (2.4.3.3)$$

$$\begin{aligned}
 & x = x_{02}b_{0,3}(v) + x_{12}b_{1,3}(v) + x_{22}b_{2,3}(v) + x_{32}b_{3,3}(v) \\
 \overline{P_{02}P_{12}P_{22}P_{32}} : & y = y_{02}b_{0,3}(v) + y_{12}b_{1,3}(v) + y_{22}b_{2,3}(v) + y_{32}b_{3,3}(v), \quad v \in [0;1] \\
 & z = z_{02}b_{0,3}(v) + z_{12}b_{1,3}(v) + z_{22}b_{2,3}(v) + z_{32}b_{3,3}(v)
 \end{aligned}$$

BUP

(2.4.3.4)

$$\begin{aligned}
 & x = x_{03}b_{0,3}(v) + x_{13}b_{1,3}(v) + x_{23}b_{2,3}(v) + x_{33}b_{3,3}(v) \\
 \overline{P_{03}P_{13}P_{23}P_{33}} : & y = y_{03}b_{0,3}(v) + y_{13}b_{1,3}(v) + y_{23}b_{2,3}(v) + y_{33}b_{3,3}(v), \quad v \in [0;1] \\
 & z = z_{03}b_{0,3}(v) + z_{13}b_{1,3}(v) + z_{23}b_{2,3}(v) + z_{33}b_{3,3}(v)
 \end{aligned}$$

(2.4.3.5)

Pentru realizarea suprafeței Bézier bicubice, cele patru noduri ale curbei  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}P_{03}}$  sunt înlocuite de curbele  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}P_{30}}$ ,  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}P_{31}}$ ,  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}P_{32}}$  respectiv  $\overline{P_{03}P_{13}P_{23}P_{33}}$ . Astfel, coordonatele totalității punctelor aparținătoare suprafeței Bézier bicubice (figura 2.4.3.2) sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned}
 x &= x_{00}b_{0,3}(u)b_{0,3}(v) + x_{01}b_{1,3}(u)b_{0,3}(v) + x_{02}b_{2,3}(u)b_{0,3}(v) + x_{03}b_{3,3}(u)b_{0,3}(v) + \\
 &+ x_{10}b_{0,3}(u)b_{1,3}(v) + x_{11}b_{1,3}(u)b_{1,3}(v) + x_{12}b_{2,3}(u)b_{1,3}(v) + x_{13}b_{3,3}(u)b_{1,3}(v) + \\
 &+ x_{20}b_{0,3}(u)b_{2,3}(v) + x_{21}b_{1,3}(u)b_{2,3}(v) + x_{22}b_{2,3}(u)b_{2,3}(v) + x_{23}b_{3,3}(u)b_{2,3}(v) + \\
 &+ x_{30}b_{0,3}(u)b_{3,3}(v) + x_{31}b_{1,3}(u)b_{3,3}(v) + x_{32}b_{2,3}(u)b_{3,3}(v) + x_{33}b_{3,3}(u)b_{3,3}(v) \\
 y &= y_{00}b_{0,3}(u)b_{0,3}(v) + y_{01}b_{1,3}(u)b_{0,3}(v) + y_{02}b_{2,3}(u)b_{0,3}(v) + y_{03}b_{3,3}(u)b_{0,3}(v) + \\
 &+ y_{10}b_{0,3}(u)b_{1,3}(v) + y_{11}b_{1,3}(u)b_{1,3}(v) + y_{12}b_{2,3}(u)b_{1,3}(v) + y_{13}b_{3,3}(u)b_{1,3}(v) + \\
 &+ y_{20}b_{0,3}(u)b_{2,3}(v) + y_{21}b_{1,3}(u)b_{2,3}(v) + y_{22}b_{2,3}(u)b_{2,3}(v) + y_{23}b_{3,3}(u)b_{2,3}(v) + \\
 &+ y_{30}b_{0,3}(u)b_{3,3}(v) + y_{31}b_{1,3}(u)b_{3,3}(v) + y_{32}b_{2,3}(u)b_{3,3}(v) + y_{33}b_{3,3}(u)b_{3,3}(v) \\
 z &= z_{00}b_{0,3}(u)b_{0,3}(v) + z_{01}b_{1,3}(u)b_{0,3}(v) + z_{02}b_{2,3}(u)b_{0,3}(v) + z_{03}b_{3,3}(u)b_{0,3}(v) + \\
 &+ z_{10}b_{0,3}(u)b_{1,3}(v) + z_{11}b_{1,3}(u)b_{1,3}(v) + z_{12}b_{2,3}(u)b_{1,3}(v) + z_{13}b_{3,3}(u)b_{1,3}(v) + \\
 &+ z_{20}b_{0,3}(u)b_{2,3}(v) + z_{21}b_{1,3}(u)b_{2,3}(v) + z_{22}b_{2,3}(u)b_{2,3}(v) + z_{23}b_{3,3}(u)b_{2,3}(v) + \\
 &+ z_{30}b_{0,3}(u)b_{3,3}(v) + z_{31}b_{1,3}(u)b_{3,3}(v) + z_{32}b_{2,3}(u)b_{3,3}(v) + z_{33}b_{3,3}(u)b_{3,3}(v)
 \end{aligned}$$

(2.4.3.6)

Introducând în relația 2.4.3.6 și expresiile polinoamelor Bernstein, rezultă:

$$\begin{aligned}
 x &= x_{00}(1-u)^3(1-v)^3 + x_{01}3(1-u)^2u(1-v)^3 + x_{02}3(1-u)^2u(1-v)^3 + x_{03}u^3(1-v)^3 + \\
 &+ x_{10}(1-u)^33(1-v)^2v + x_{11}9(1-u)^2u(1-v)^2v + x_{12}9(1-u)^2u(1-v)^2v + \\
 &+ x_{13}u^33(1-v)^2v + x_{20}(1-u)^33(1-v)v^2 + x_{21}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + \\
 &+ x_{22}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + x_{23}u^33(1-v)v^2 + x_{30}(1-u)^3v^3 + x_{31}3(1-u)^2uv^3 + \\
 &+ x_{32}3(1-u)^2uv^3 + x_{33}u^3v^3
 \end{aligned}$$

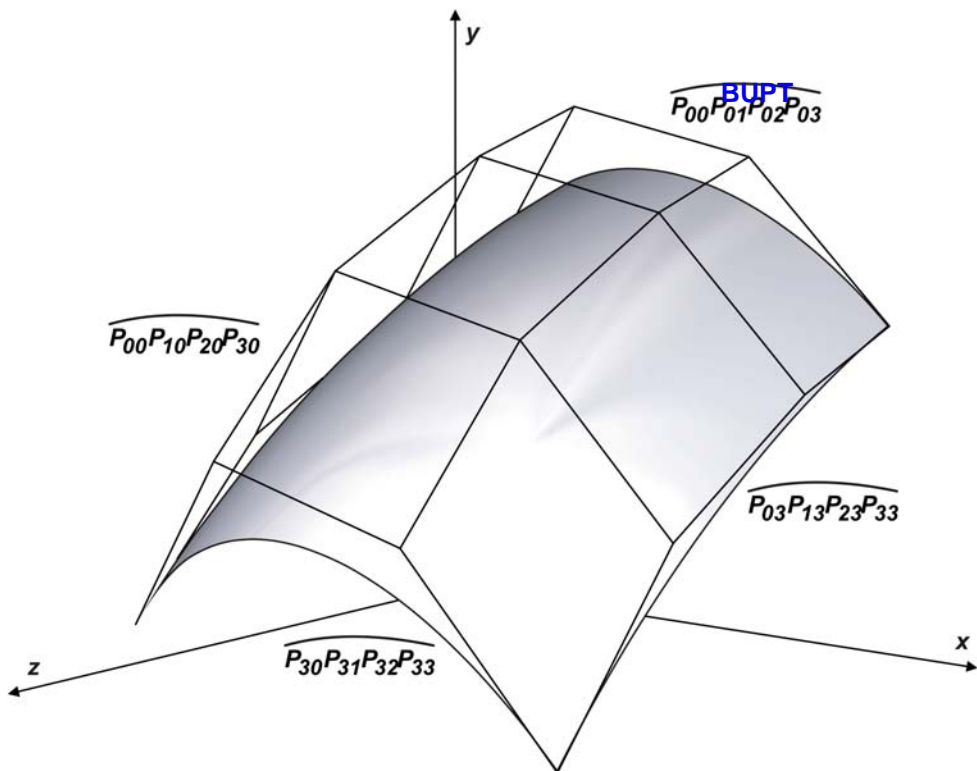


Fig. 2.4.3.2. Suprafață Bézier bicubică.

$$\begin{aligned}
 y = & y_{00}(1-u)^3(1-v)^3 + y_{01}3(1-u)^2u(1-v)^3 + y_{02}3(1-u)^2u(1-v)^3 + y_{03}u^3(1-v)^3 + \\
 & + y_{10}(1-u)^33(1-v)^2v + y_{11}9(1-u)^2u(1-v)^2v + y_{12}9(1-u)^2u(1-v)^2v + \\
 & + y_{13}u^33(1-v)^2v + y_{20}(1-u)^33(1-v)v^2 + y_{21}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + \\
 & + y_{22}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + y_{23}u^33(1-v)v^2 + y_{30}(1-u)^3v^3 + y_{31}3(1-u)^2uv^3 + \\
 & + y_{32}3(1-u)^2uv^3 + y_{33}u^3v^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z = & z_{00}(1-u)^3(1-v)^3 + z_{01}3(1-u)^2u(1-v)^3 + z_{02}3(1-u)^2u(1-v)^3 + z_{03}u^3(1-v)^3 + \\
 & + z_{10}(1-u)^33(1-v)^2v + z_{11}9(1-u)^2u(1-v)^2v + z_{12}9(1-u)^2u(1-v)^2v + \\
 & + z_{13}u^33(1-v)^2v + z_{20}(1-u)^33(1-v)v^2 + z_{21}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + \\
 & + z_{22}9(1-u)^2u(1-v)v^2 + z_{23}u^33(1-v)v^2 + z_{30}(1-u)^3v^3 + z_{31}3(1-u)^2uv^3 + \\
 & + z_{32}3(1-u)^2uv^3 + z_{33}u^3v^3
 \end{aligned}$$

(2.4.3.7)

În relația 2.4.3.7 dacă  $v = 0$ , se obține ecuația curbei  $\overline{P_{00}P_{01}P_{02}P_{03}}$ . Pentru  $v = 1$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{30}P_{31}P_{32}P_{33}}$ . Având  $u = 0$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{00}P_{10}P_{20}P_{30}}$ , iar pentru  $u = 1$  rezultă ecuația curbei  $\overline{P_{03}P_{13}P_{23}P_{33}}$ .

De asemenea, este important de remarcat faptul că suprafața nu conține curbele  $\overline{P_{10}P_{11}P_{12}P_{13}}$ ,  $\overline{P_{20}P_{21}P_{22}P_{23}}$ ,  $\overline{P_{01}P_{11}P_{21}P_{31}}$  și  $\overline{P_{02}P_{12}P_{22}P_{32}}$ .

#### 2.4.4. Suprafețe Bézier de ordin superior.

Definirea unei suprafețe Bézier cu ordinele  $m, n$  necesită  $(m+1)(n+1)$  noduri și doi parametri independenți:  $u \in [0;1]$ ,  $v \in [0;1]$ . Coordonatele totalității punctelor care constituie suprafața sunt date de următoarele relații:

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_{ij} b_{i,n}(u) b_{j,m}(v) \\
 y &= y(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m y_{ij} b_{i,n}(u) b_{j,m}(v) \\
 z &= z(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m z_{ij} b_{i,n}(u) b_{j,m}(v)
 \end{aligned} \quad (2.4.4.1)$$

## 3. Stadiul actual al ingineriei inverse în modelarea CAD a structurilor biomecanice

### 3.1. Aspecte generale.

În multe aplicații industriale se dorește crearea de modele geometrice solide CAD ale unor obiecte existente pentru care nu se dispun astfel de modele.

Ingineria inversă [97], în esență, reprezintă o disciplină care acoperă o multitudine de activități. Capitolul de față tratează procesele ingineriei inverse în modelarea geometrică, dar o interpretare mai largă a conceptului de inginerie inversă, care să implice înțelegerea conceptului de intenție de proiectare, este de asemenea posibilă.

În timp ce ingineria convențională transformă concepte și modele în piese și ansambluri reale, în ingineria inversă relația de transformare este inversă, în sensul că piesele și ansamblurile reale se transformă în concepte și modele ingineresti. Folosirea extensivă a platformelor CAD/CAE/CAM reprezintă materializarea fundamentală a ingineriei inverse în modelarea geometrică. Rezultatul proceselor aferente ingineriei inverse în modelarea geometrică reprezintă un model geometric solid CAD care aduce creșteri semnificative în calitatea și eficiența activității de proiectare, în procesele tehnologice de fabricație și în activitățile de analiză. Ingineria inversă în modelarea geometrică începe cu operația de măsurare a unui obiect fizic existent pentru deducerea din acest obiect a unui model geometric solid CAD sau a unui model geometric care conține doar suprafețele exterioare și/sau interioare a obiectului măsurat.

Există o serie de domenii de aplicație a ingineriei inverse în modelarea geometrică. De multe ori este necesară producerea unei copii a unei piese în cazul în care documentația originală de execuție a piesei respective nu este disponibilă. În alte cazuri se dorește reproiectarea unei piese existente atunci când sunt necesare analize și modificări pentru realizarea unei variante îmbunătățite a piese respective. În domenii unde aspectul estetic al proiectării este important, cum ar fi domeniul industriei automobilelor, se realizează machete la scară naturală din lut sau lemn, deoarece proiectanții din acest domeniu se bazează mai mult pe obiecte în mărime naturală decât pe modele geometrice solide CAD la scară redusă, chiar dacă acestea din urmă sunt afișate pe ecranele de înaltă rezoluție ale calculatoarelor performante destinate aplicațiilor CAD. Un alt domeniu de aplicație foarte important este acela al personalizării diferitelor articole care sunt în corespondență geometrică cu diferitele suprafețe ale corpului uman, de exemplu articole de protecție (căști, costume speciale, etc.) sau proteze.

Este important să se realizeze distincția clară dintre conceptele de *copiator 3D* și *scanner 3D*. Un *copiator 2D* (fotocopiator - xerox) preia o foaie de hârtie oarecare și produce o altă foaie identică cu prima. Un *copiator 3D* constituie un dispozitiv care preia un obiect existent și produce un alt obiect identic cu primul ca formă, dar nu neapărat din același material. De altfel principiile și tehnologiile implementate în procesul de copiere a diferitelor piese sunt cunoscute și considerate clasice. Un *scanner 2D* preia o foaie de hârtie din care recunoaște textul și diversele elemente grafice, care ulterior pot fi stocate în fișiere. În mod similar, un *scanner*

3D achiziționează date primare de natură geometrică ale unui obiect fizic oarecare, dar aceste date sunt interpretate, astfel realizându-se un model geometric CAD inițial. Se obțin ulterior date secundare necesare în recunoașterea diferitelor forme geometrice simple și se realizează combinarea corespunzătoare a acestor forme în vederea reproducerii formei geometrice complexe a obiectului considerat. În final, este posibil calculul diferitelor cantități caracteristice cum ar fi volumul sau aria suprafeței totale a obiectului considerat.

Obiectivul suprem, al sistemelor care deserveșc ingineria inversă în modelarea geometrică, îl constituie realizarea unui scanner 3D inteligent, capabil să obțină automat și cu fidelitate maximă modelul geometric solid CAD al oricărui obiect scanat. Acest obiectiv este relativ îndepărtat. Chiar capturarea formei geometrice a oricărui obiect fizic și transformarea formei acestuia într-un model geometric solid CAD este o problemă dificilă și complexă. În ciuda câtorva rezultate parțiale încurajatoare din domenii de aplicație restrânșe, crearea unei soluții tehnice automatizate de obținere a unui model geometric solid CAD fidel prezintă încă o provocare. Scopul prezentului capitol este de a descrie cele mai importante elemente ale ingineriei inverse în modelarea geometrică. În același timp se dorește trecerea în revistă a realizărilor actuale din domeniul ingineriei inverse în modelarea geometrică.

Ingineria inversă în modelarea geometrică constituie ansamblul etapelor fundamentale structurate în itinerariul logic de desfășurare a acestora, prezentat în figura 3.1.1. Desigur, acest itinerariu logic de desfășurare a etapelor este strict convenșional. De fapt, în realitate, aceste etape se pot suprapune, iar itinerariul se poate desfășura cu mai multe iterații.

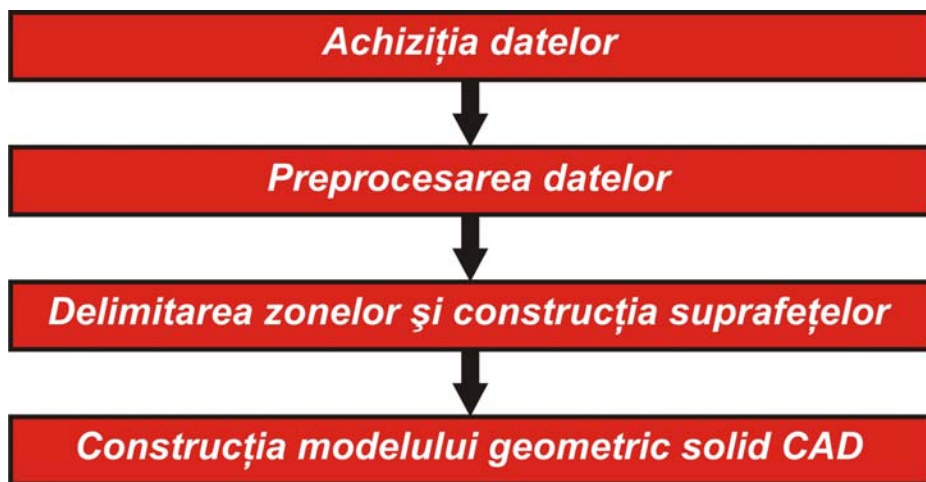


Fig. 3.1.1. Etapele fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea geometrică.

*Achiziția datelor* este o etapă crucială a ingineriei inverse în modelarea geometrică. Această etapă produce fișiere organizate de date care cuprind coordonatele punctelor măsurate și conștinate în suprafețele obiectului fizic analizat.

În etapa *preprocesării datelor* se realizează prin rețele de triangulație extrapolarea formei obiectului scanat pornind de la coordonatele punctelor măsurate, folosindu-se modelarea prin fațetare, proces denumit *reconstrucție geometrică*.

Etapa *delimitării zonelor și construcției suprafețelor* are de asemenea o importanță deosebită. În esență, în cadrul acestei etape, forma realizată prin rețele de triangulație a obiectului scanat este delimitată în zone utilizând diferite criterii geometrice, iar pentru fiecare zonă se construiesc suprafețe adecvate care urmăresc să reproducă geometria zonei respective. Aceste suprafețe se extind din punct de vedere geometric de la plane și quadrice la suprafețe complexe ale formelor geometrice libere. Tot în cadrul acestei etape se urmărește realizarea "etanșeității" ansamblului suprafețelor, materializată prin lipsa discontinuităților între suprafețe.

Etapa *construcției modelului geometric solid CAD* al obiectului scanat presupune realizarea compatibilității la nivel de reprezentare a suprafețelor realizate în etapa anterioară cu platformele CAD. Tot în cadrul acestei etape se realizează "solidificarea" modelului geometric virtual al obiectului prin luarea în considerare a volumului delimitat de suprafețele obiectului și posibilitatea asocierii acestui volum a unor proprietăți masice specifice unui material considerat.

Capitolul prezent se focalizează pe realizarea modelelor geometrice solide CAD, caracterizate de suprafețe acceptate de platformele CAD. Identificarea muchiiilor ascuțite, asigurarea continuității în locațiile unde conexiuni line între suprafețe sunt necesare, asigurarea constrângerilor de natură geometrică constituie probleme specifice ingineriei inverse în modelarea geometrică.

### 3.2. Achiziția de date. Scannerul 3D.

Scannerul 3D este un dispozitiv care analizează un obiect fizic pentru a achiziționa seturi de date referitoare la forma obiectului respectiv. Seturile de date achiziționate se utilizează la crearea unui model geometric solid CAD al obiectului scanat. Procesul de achiziție a datelor utilizând un scanner 3D se numește *scanare 3D* sau *măsurare 3D*. Aplicațiile tipice ale scannerelor 3D sunt cuprinse în design industrial, protetică medicală, ingineria inversă în modelarea geometrică, controlul calității, documentarea artefactelor culturale și industria cinematografică.

Utilizarea unui scanner 3D are de obicei ca rezultat un fișier care cuprinde, în urma procesului de scanare 3D, coordonatele punctelor conținute în suprafețele obiectului analizat. Ansamblul punctelor captate în urma procesului de scanare 3D se intitulează "nor de puncte", punctele fiind ulterior utilizate în extrapolarea formei obiectului solid analizat, proces denumit *reconstrucție geometrică*. Dacă la fiecare punct măsurat sau scanat se colectează și informație de culoare, atunci pot fi reproduse culorile suprafețelor obiectului analizat.

Scannerele 3D sunt în mare măsură asemănătoare cu aparatura foto-video. Ca și în cazul unui aparat foto, un scanner 3D are un câmp de vizualizare conic. În timp ce un aparat foto colectează informații de culoare în câmpul de vizualizare, un scanner 3D colectează informații legate de distanța față de punctele cuprinse în câmpul de vizualizare.

Sistemele de achiziție a datelor sunt constrânse de aspectele fizice ale achiziției datelor dintr-o regiune limitată a suprafeței unui obiect fizic. În majoritatea cazurilor, o singură scanare nu este suficientă pentru crearea modelului geometric solid CAD al obiectului fizic analizat. De aceea multiple scanări efectuate din diferite direcții sunt necesare la crearea modelului geometric solid CAD al obiectului analizat. Aceste scanări multiple trebuie reperate la un sistem de coordonate comun, proces intitulat *aliniere a scanărilor multiple*. Combinarea acestor multiple scanări rezolvă reconstrucția geometrică a obiectului fizic analizat.



### 3.2.1. Tehnologia scannerelor 3D.

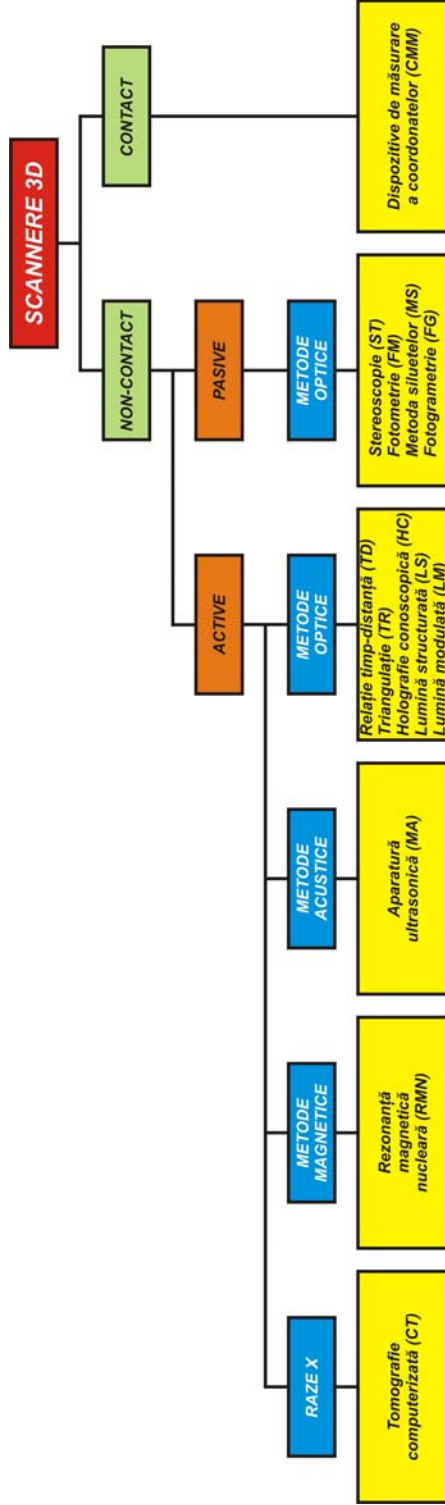
La ora actuală există o serie de tehnologii implementate în construcția scannerelor 3D. Aceste tehnologii se bazează pe metode diferite în captarea datelor legate de forma obiectelor fizice, așa cum acestea sunt ilustrate în figura 3.2.1.1. În esență, fiecare metodă se bazează pe un mecanism sau fenomen în interacțiunea cu suprafața obiectului fizic scanat. Există *scannere 3D bazate pe metode non-contact*, în care se utilizează lumina, sunetul sau câmpul magnetic, iar în celelalte metode - *metode contact (metode tactile)* - obiectul scanat este palpat prin intermediul unor traductoare specializate atașate la suportți mecanizați (brațe robotizate). La rândul lor, scannererele 3D bazate pe metode non-contact se împart în *active* și *pasive*. În cadrul fiecărei metode, o analiză adecvată trebuie efectuată pentru determinarea pozițiilor punctelor conținute în suprafața obiectului măsurat, pe baza citirilor fizice. Fiecare metodă are avantaje și dezavantaje care necesită selecția atentă a scannerului 3D corelată cu funcționalitatea capturii formei obiectului măsurat sau scanat.

#### 3.2.1.1. Scannerele 3D non-contact active.

Scannerele 3D non-contact active utilizează emisia de lumină, ultrasunete, unde electromagnetice și raze X în scanarea obiectelor solide. Cele care utilizează emisia de lumină sunt la rândul lor bazate pe: *relația timp-distanță*, *triangulație*, *conoscopie holografică*, *lumină structurată*, *lumină modulată*.

Scannerele 3D non-contact active bazate pe *relația timp-distanță (TD)* utilizează tehnica laser în scanarea obiectelor. Un emițător laser emite o rază spre un punct al unei suprafețe conținute în obiectul analizat și măsoară timpul în care această rază se întoarce înapoi și este detectată de un senzor. Timpul  $t$  în care raza laser parcurge distanța spre punctul de interes și înapoi spre emițător fiind măsurat, iar viteza  $c$  a luminii fiind cunoscută, distanța spre punctul de interes este egală cu  $(ct)/2$ . În mod evident, acuratețea unui astfel de scanner 3D depinde de precizia de măsurare a timpului  $t$ . La o anumită orientare a emițătorului, scannerul 3D poate măsura distanța față de un singur punct al suprafeței obiectului, deci în consecință măsurarea distanțelor față de mai multe puncte ale suprafeței obiectului se poate realiza prin schimbarea orientării emițătorului, sau printr-un sistem de oglinzi mobile. De obicei se folosește sistemul de oglinzi mobile, deoarece sunt mai ușor de manipulat și mai precis de poziționat. Un astfel de scanner 3D poate efectua măsurători ale distanțelor față de 10.000 - 100.000 de puncte în fiecare secundă. Figura 3.2.1.2 ilustrează un echipament TD.

Scannerele 3D non-contact active bazate pe *triangulație (TR)* utilizează tehnica laser în scanarea obiectelor. Acest tip de scanner emite o rază laser spre un punct al unei suprafețe conținute în obiectul analizat și folosește o cameră video care vizualizează locația spotului razei laser pe suprafața obiectului. În funcție de distanța dintre emițătorul razei laser și punctul analizat, conținut în suprafața obiectului, spotul luminos al razei apare în diferite locații în cadrul câmpului de vizualizare al camerei video. Tehnica se intitulează triangulație datorită faptului că spotul luminos al razei pe suprafața obiectului, camera video și emițătorul laser formează un triunghi. Una dintre laturile acestui triunghi, respectiv distanța dintre camera video și emițătorul laser este cunoscută. Unghiul față de această latură a emițătorului laser este de asemenea cunoscut. Unghiul față de latura amintită a camerei video se determină prin observarea poziției spotului luminos al razei laser în



BUPT

Fig. 3.2.1.1.1.1. Metode implementate în tehnologia scannerilor 3D.



Fig. 3.2.1.2. Echipament TD.

câmpul de vizualizare al camerei video. Cele trei elemente geometrice aminite determină în mod unic forma și dimensiunile triunghiului alcătuit și permite calcularea distanței dintre emițătorul laser și punctul conținut în suprafața obiectului

analizat, rezultând implicit și coordonatele punctului. În cele mai multe cazuri se folosește un fascicol laser de tip bandă în loc de un emițător cu o singură rază, pentru a accelera procesul de scanare. Emițătorul laser și camera video se montează de obicei pe o platformă mobilă care produce multiple scanări ale suprafeței interesate a obiectului scanat. În consecință, scanările reprezintă măsurători relative la suprafața obiectului. Figura 3.2.1.3 ilustrează principiul de funcționare al unui scanner 3D TR. Fascicolul laser este proiectat pe obiectul scanat. Lentila focalizează fascicolul laser spre senzorul CCD. O deplasare  $DZ$  a obiectului cauzează o deplasare similară  $dz$  în imaginea captată de senzorul CCD.

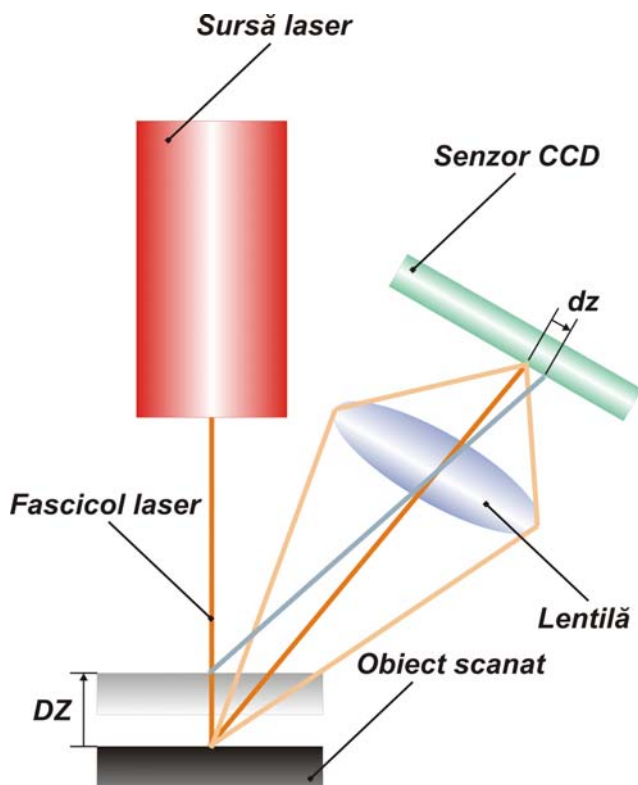


Fig. 3.2.1.3. Principiul de funcționare al unui scanner 3D TR.

Scannerele 3D non-contact active TD și TR au fiecare în parte avantaje și dezavantaje care fac posibilă utilizarea lor în situații diferite. Avantajul scannerelor TD este capacitatea lor de funcționare pentru distanțe foarte mari, de ordinul kilometrilor. De aceea, aceste scannere sunt capabile să scaneze structuri mari, de exemplu clădiri sau entități geografice. Dezavantajul scannerelor TD constă în precizia relativ scăzută. Datorită vitezei luminii foarte ridicate, măsurarea timpului parcurs de raza laser este dificilă și de aceea precizia măsurării distanțelor se încadrează în ordinul milimetrilor. Scannerele TR se află într-o situație opusă celor de tip TD. Distanța lor de măsurare este mult mai mică (de ordinul metrilor) decât a celor de tip TD, dar precizia de măsurare este ridicată, de ordinul zecimilor de micrometru.

Precizia scannerelor TD poate fi afectată în momentul în care raza laser atinge un punct conținut în muchia unui obiect, deoarece informația trimisă înapoi la scanner provine din două locații diferite la un singur fascicol laser. Poziția punctului conținut în muchia obiectului va fi calculată ca o medie, deci va fi eronată, iar în cazul unei scanări de înaltă rezoluție, în vecinătatea muchiei va apărea zgomot de fond în datele achiziționate. Scannerele cu un diametru mic al fascicolului laser pot preîntâmpina acest neajuns dar sunt limitate ca distanță de măsurare, datorită faptului că diametrul fascicolului laser se mărește proporțional cu distanța de măsurare. De asemenea se mai utilizează corecții adecvate în cadrul programelor de achiziție a datelor, pentru îndepărtarea neajunsului amintit.

La o rată de eșantionare de ordinul a 10.000 de puncte de măsură pe secundă, o scanare de joasă rezoluție durează sub o secundă, dar o scanare de înaltă rezoluție care necesită milioane de puncte de măsură poate dura minute pentru unele scannere TD. Acest neajuns generează problema distorsiunilor cauzate de mișcare. Fiecare punct fiind măsurat la un moment precis, orice mișcare a obiectului scanat sau a scannerului în sine afectează corectitudinea achiziției datelor. De aceea este obligatorie fixarea obiectului scanat și a scannerului pe platforme stabile pentru a minimiza vibrațiile. În consecință, folosirea scannerelor TD și TR la măsurarea obiectelor în mișcare este foarte dificilă. La ora actuală se efectuează cercetări intense în legătură cu compensarea distorsiunilor cauzate de vibrații.

La scanarea pe o perioadă îndelungată a unui obiect într-o singură poziție, se pot produce anumite mișcări ale scannerului datorită variațiilor de temperatură. În cazul scannerelor TD, dacă sunt poziționate pe un trepid și o parte este puternic încălzită datorită radiațiilor solare, aceea parte se va dilata și vor apărea distorsiuni lente în achiziția datelor. Majoritatea scannerelor TD au incorporate în structura lor compensatoare de nivel care înlătură efectele nedorite ale mișcării scannerelor.

Scannerele 3D non-contact active bazate pe *holografie conoscopică (HC)* utilizează tehnica laser în scanarea obiectelor. Un fascicol laser este proiectat pe suprafața obiectului scanat și reflecția fascicolului pe direcția incidentă este trecută printr-un cristal conoscopic și proiectată pe un senzor CCD. Rezultatul reprezintă o secvență de difracție care este analizată spectral pentru a determina distanța față de suprafața scanată. Avantajul principal al scannerelor HC constă în folosirea unui singur fascicol laser în procedura de măsurare, recomandând acest tip de scannere de exemplu la măsurarea alezajelor de mici dimensiuni.

Scannerele 3D non-contact active bazate pe *lumină structurată (LS)* proiectează pe suprafața obiectului scanat o secvență luminoasă organizată sub formă de linii și urmăresc deformația secvenței luminoase la contactul acesteia cu suprafața obiectului. Secvența luminoasă poate fi unidimensională sau bidimensională. În cazul secvenței unidimensionale se folosește o singură linie luminoasă care "mătură" suprafața obiectului scanat, iar în cazul secvenței bidimensionale se folosesc mai multe linii luminoase paralele. Sursa de lumină folosită poate proveni de la un proiector LCD sau de la un fascicol laser. O cameră video care conține un senzor CCD, poziționată în raport cu sursa secvenței de lumină, observă deformația secvenței de lumină și folosește o tehnică similară cu triangulația pentru a calcula poziția fiecărui punct din secvența de lumină deformată. Figura 3.2.1.4 descrie principiul de funcționare a unui scanner LS, iar figurile 3.2.1.5 a și b ilustrează o aplicație practică de scanare a unui scaun de automobil.

O serie de programe specializate sunt utilizate în calculul poziției punctelor în secvența luminoasă deformată. Aceste programe utilizează algoritmi complicați de calcul. Ambiguitatea este un factor crucial luat în considerare de acești algoritmi

complicați. De exemplu, să considerăm o secvență luminoasă laser, organizată de la stânga la dreapta în linii paralele echidistante verticale, îndreptată spre suprafața

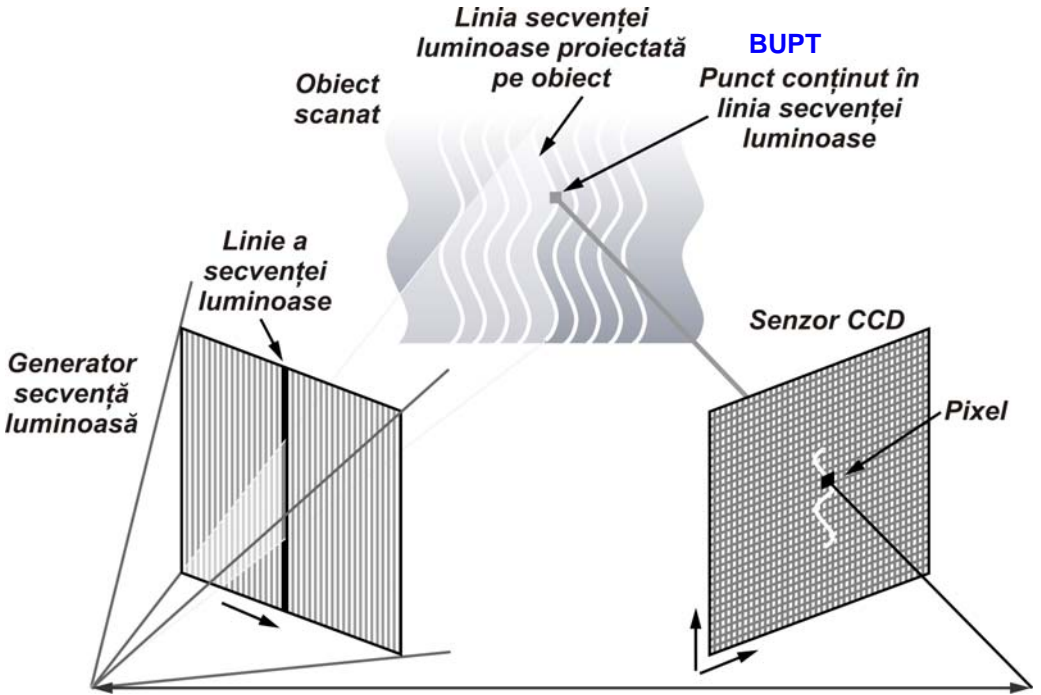


Fig. 3.2.1.4. Principiul de funcționare a unui scanner LS.

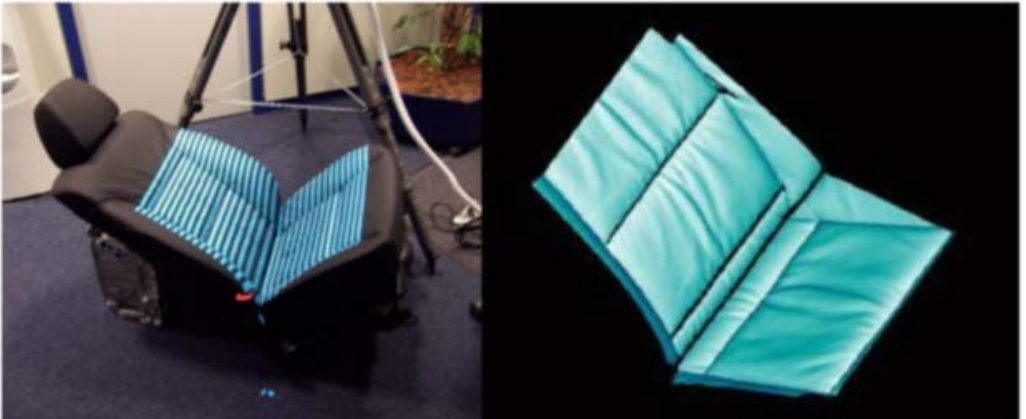


Fig. 3.2.1.5. a - scanarea scaunului de automobil;  
b - suprafața reconstruită a scaunului de automobil.

unui obiect. Analizând imaginea secvenței luminoase deformate în urma proiectării sale pe suprafața obiectului scanat, în cel mai favorabil caz, ordinea liniilor deformate corespunde cu cea a liniilor laser ale secvenței luminoase. În cazul

obiectelor care prezintă orificii sau schimbări rapide de formă, ordinea liniilor deformate poate să nu mai corespundă cu cea a liniilor laser ale secvenței luminoase. Acest efect poartă numele de *ambiguitate de scanare*. La ora actuală se efectuează cercetări intense în eliminarea acestui efect, având în vedere și faptul că scannerele LS sunt încă în faza de dezvoltare.

**BUPT**

Avantajul major al scannerelor LS constă în viteza ridicată de scanare. În loc de a măsura un singur punct, scannererele LS pot măsura mai multe puncte deodată sau chiar totalitatea punctelor aflate în câmpul de măsurare. Acest avantaj reduce la minimum problema distorsiunii cauzate de mișcare. Ultimele scannere LS avansate sunt capabile să scaneze în timp real obiecte aflate în mișcare.

Recent, Song Zhang și Peisen Huang de la Stony Brook University au dezvoltat un scanner LS, bazat pe un sistem digital de emisie a secvenței luminoase, care scanează în timp real, cu rezoluții ridicate, detalii ale obiectelor deformabile dinamic (de exemplu expresii faciale umane) la o rată de 40 cadre pe secundă.

Scannererele 3D non-contact active bazate pe *lumină modulată (LM)* proiectează pe suprafața obiectului scanat o secvență luminoasă alternantă, de obicei după un ciclu sinusoidal. O cameră video detectează lumina reflectată de suprafața obiectului și modul de schimbare a acesteia în urma alternanței secvenței luminoase. Utilizarea secvenței luminoase modulate permite scannerului LM să ignore lumina emisă de alte surse decât cea proprie, în consecință eliminându-se interferențele.

Scannererele 3D non-contact active bazate pe *metode acustice (MA)* utilizează reflexia sunetului la contactul cu suprafața obiectelor. Metodele acustice sunt considerate clasice în domeniul măsurării distanțelor. În acest scop, sonarul este echipamentul cel mai des utilizat. Scannererele MA sunt în mare măsură asemănătoare cu cele TD. Sunetul emis de o sursă este reflectat de suprafața obiectului scanat și se măsoară timpul parcurs de sunetul reflectat, cunoscându-se viteza sunetului. Ca dezavantaje ale acestor scannere se amintesc sensibilitatea la interferențele acustice sau zgomotul de fond. Dispozitivele ultraacustice folosesc tehnica imagisticii dinamice în achiziția de date referitoare la structura internă a obiectelor scanate.

Scannererele 3D non-contact active bazate pe *metode magnetice (MM)* utilizează interacțiunea câmpurilor magnetice cu obiectul scanat. În domeniul medical, cu precădere, se folosește rezonanța magnetică în achiziția datelor legate de structura internă a organelor. Metoda rezonanței magnetice nucleare (RMN) folosește activarea atomilor materialului obiectului scanat și este măsurat răspunsul acestora.

Scannererele 3D non-contact active bazate pe *emisii de raze X (RX)* se folosesc în domeniul medical (tomografele computerizate - CT) și în domeniul controlului nedistructiv (NDT). Aceste scannere achiziționează date legate de structura internă a obiectelor scanate.

### **3.2.1.2. Scannerere 3D non-contact pasive.**

Scannererele 3D non-contact pasive nu emit în nici un fel radiații, în schimb tehnicile de măsurare utilizate se bazează pe detecția reflexiei radiațiilor ambientale. Majoritatea scannerelor din această categorie detectează lumina vizibilă, deoarece aceasta este o radiație ușor de exploatat. De asemenea se mai pot utiliza radiațiile infraroșu. Scannererele 3D non-contact pasive sunt în general sisteme ieftine, deoarece nu necesită echipamente adecvate complicate.

Scannerele 3D non-contact pasive *stereoscopice* (ST) constituie sisteme compuse din două camere video identice poziționate sub unghiuri diferite față de obiectul scanat. Analizând diferențele dintre imaginile vizualizate de fiecare cameră video în parte, este posibilă determinarea coordonatelor punctelor din imagini. Această metodă se bazează pe vederea stereoscopică umană. **BUPT**

Scannerele 3D non-contact pasive *fotometrice* (FM) sunt sisteme care folosesc de obicei o singură cameră video, dar captează multiple imagini ale obiectului scanat în diferite condiții de iluminare a mediului în care se află obiectul. Aceste sisteme urmăresc orientarea punctelor suprafețelor obiectului în funcție de luminozitatea pixelilor din imaginile captate.

Scannerele 3D non-contact pasive bazate pe *metoda siluetelor* (MS) utilizează contururile obiectului scanat (siluetele) dintr-un șir de fotografii realizate în condițiile unui fundal care contrastează puternic cu obiectul. Cu ajutorul conturilor se reproduce suprafața exterioară a obiectului scanat.

Scannerele 3D non-contact pasive bazate pe *tehnica fotogrametriei* (FG) constituie sisteme alcătuite dintr-un aparat foto digital și un software specializat de prelucrare a imaginilor captate. În esență, coordonatele punctelor conținute în suprafața unui obiect pot fi determinate din multiplele fotografii captate sub diferite unghiuri ale obiectului măsurat. Modelele geometrice create pe baza tehnicii fotogrametriei sunt în general aproximative, datorită preciziei relativ scăzute a acestei tehnici.

### 3.2.1.3. Scannerele 3D tactile.

Scannerele 3D tactile măsoară obiectele prin atingere fizică (palpare). Procesul de măsurare a unui obiect cu ajutorul unui scanner 3D tactil se numește *digitizare*. Un dispozitiv de măsurare a coordonatelor (coordonate measuring machine - CMM) constituie un exemplu de scanner 3D tactil. Acest tip de scanner este foarte des utilizat în cadrul fabricației pieselor și are o precizie foarte ridicată. De asemenea dispozitivele CMM sunt utilizate în industria auto la digitizarea în mărime naturală a modelelor la scară redusă a caroseriilor. Dezavantajul dispozitivelor CMM este acela al contactului fizic cu obiectul măsurat, de aceea procesul de măsurare poate modifica sau defecta obiectul digitizat. Acest dezavantaj trebuie luat în considerare la măsurarea obiectelor delicate sau valoroase, cum ar fi artefactele istorice. Un alt dezavantaj ar fi viteza de măsurare relativ scăzută în comparație cu alte metode de scanare. Un dispozitiv CMM poate opera la frecvențe de ordinul sutelor de herți, în comparație cu scannerele 3D laser care pot opera la frecvențe de ordinul sutelor de kiloherți. Figura 3.2.1.6 ilustrează un echipament CMM.

### 3.2.2. Problemele practice ale achiziției de date.

La ora actuală există o serie de probleme practice întâlnite în procesul achiziției datelor la măsurarea obiectelor solide. În majoritatea cazurilor, aceste probleme practice sunt legate de:

- Calibrare;
- Precizie;
- Accesibilitate;
- Ocluzie;
- Fixarea obiectului măsurat;



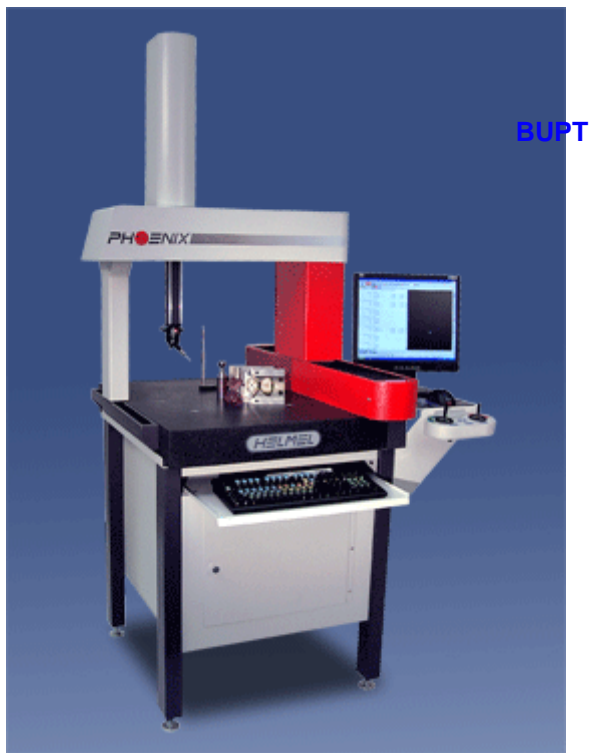


Fig. 3.2.1.6. Echipament CMM.

- Utilizarea orientărilor multiple;
- Zgomot de fond;
- Restaurarea datelor lipsă;
- Calitatea suprafeței obiectului măsurat.

*Calibrarea* aparaturii de scanare reprezintă o problemă majoră care afectează direct corectitudinea datelor achiziționate. Erori sistematice de măsurare se pot produce datorită distorsiunilor lentilelor, neliniarității părții electronice a camerelor video și altor surse de neliniarități. Orice tip de măsurare trebuie calibrată pentru:

- determinarea precisă a unor parametri cum ar fi de exemplu poziția și orientarea camerelor video;
- a permite și modela cât mai precis sursele posibile de erori.

*Precizia* sistemelor de scanare bazate pe metode optice depinde efectiv în mare măsură de rezoluția camerelor video utilizate. Distanța de la suprafața măsurată și precizia mecanismelor mobile ale sistemului de scanare contribuie de asemenea într-o mare măsură la precizia de măsurare în ansamblu.

*Accesibilitatea* se referă la dificultatea sau chiar imposibilitatea achiziției datelor datorită configurației sau topologiei obiectului măsurat. De obicei sunt necesare scanări multiple, dar în cazul anumitor metode de măsurare, achiziția datelor este imposibilă. Golurile interioare ale obiectelor constituie un exemplu de suprafețe inaccesibile măsurării în cazul anumitor metode de măsurare.

*Ocluzia* reprezintă blocarea mediului de scanare în care se află obiectul măsurat datorită apariției umbrelor sau obstrucționării. Aceasta este în esență o problemă a sistemelor de scanare bazate pe metode optice, dar poate apărea și la sistemele bazate pe metode acustice sau magnetice. În majoritatea cazurilor, problema ocluziei poate fi eliminată prin folosirea simultană a mai multor sisteme de scanare.

*Fixarea obiectelor măsurate* necesită deseori introducerea în mediul de scanare a unor suporturi sau alte elemente de legătură care sunt scanate odată cu obiectele. Astfel, geometria suporturilor sau a elementelor de legătură apare nedorit integrată în geometria obiectului măsurat, fiind în majoritatea cazurilor dificil de eliminat, chiar prin utilizarea multiplelor orientări ale obiectului.

*Utilizarea orientărilor multiple* ale obiectului măsurat introduce erori legate de corelarea datelor achiziționate în diferitele poziții ale obiectului.

Eliminarea *zgomotului de fond* din seturile de date achiziționate este o problemă extrem de dificilă. Zgomotul de fond poate apărea datorită vibrațiilor exterioare, reflecțiilor nedorite ale fascicolului laser și altor cauze. Există diferite procedee de filtrare a datelor achiziționate pentru eliminarea zgomotului de fond. De multe ori se pune întrebarea asupra momentului aplicării procedeelelor de filtrare: înainte de achiziția datelor, în timpul sau după achiziția datelor. De asemenea există situații care nu necesită deloc eliminarea zgomotului de fond. Deși filtrarea datelor achiziționate este necesară în majoritatea cazurilor, poate distruge acuratețea datelor în sensul că se pierd detalii ale suprafețelor. De exemplu în urma procesului de scanare a unui obiect, se pot pierde muchiile ascuțite, acestea fiind înlocuite cu racordări, care în unele cazuri nu deranjează, dar în alte cazuri conduc la probleme serioase în recunoașterea tipurilor suprafețelor.

O altă problemă care apare în procesul de scanare a unui obiect este aceea a *restaurării datelor lipsă*. Lipsa datelor este cauzată în mare parte de inaccesibilitate sau ocluzie. Mai mult, datorită naturii scanării optice sau chiar tactile, datele legate de punctele aflate în vecinătatea muchiilor ascuțite sunt adesea imprecise. De asemenea există situații unde doar anumite zone ale unei suprafețe pot fi scanate, restul suprafeței fiind acoperit de alte elemente ale obiectului. În orice caz trebuie reconstruită întreaga suprafață pornind doar de la zonele vizibile care au fost scanate. Din acest motiv s-au dezvoltat tehnici de extensie a suprafețelor și de umplere a golurilor de suprafață.

O ultimă problemă adusă în discuție este aceea a *calității suprafeței obiectului măsurat* sau scanat. Rugozitatea materialului obiectului scanat sau tipul acoperirii suprafețelor obiectului afectează în mod dramatic procesul achiziției datelor. Scanarea prin metode optice sau tactile produce mai mult zgomot de fond la scanarea unei suprafețe rugoase decât la scanarea unei suprafețe netede. Acoperirea suprafețelor obiectului care generează reflexia fascicolului laser poate conduce la imposibilitatea scanării prin metode optice a obiectului respectiv. La scanarea feței umane se poate produce zgomot de fond în zona ochilor. Părul constituie de asemenea un exemplu de suprafață rugoasă care ridică probleme serioase în procesul de scanare.

În final, ne putem imagina un scanner ideal: obiectul scanat plutește în spațiul tridimensional, deci este accesibil din orice direcție. Seturile de date sunt achiziționate cu precizie maximă într-un singur sistem de coordonate, fără necesitatea filtrării zgomotului de fond. De asemenea achiziția datelor este adaptivă, de exemplu densitatea datelor este mai mare în zonele de mici dimensiuni. Din păcate, un asemenea scanner nu există în prezent. Dar cu toate problemele amintite, la ora actuală se pot achiziționa cantități considerabile de date în timp

relativ reduși, chiar și cu echipamentele de scanare bazate pe metodele expuse.

Odată cu încheierea procesului de scanare sau măsurare a obiectului de interes, activitatea de recunoaștere a suprafețelor obiectului și implicit reconstrucția suprafețelor sale sub forma unui model geometric solid CAD poate începe.

Cele patru etape fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea geometrică sunt tratate fiecare în parte în cadrul realizării modelelor geometrice solide CAD ale următoarelor structuri biomecanice: proteză dentară totală, craniu și femur uman.

## 4. Principiile generale ale analizei cu metoda elementului finit (MEF)

### 4.1. Scurtă istorie a MEF.

Bazele mecanicii analitice clasice au fost puse de către Euler și Lagrange în secolul XVIII și a fost dezvoltată ulterior de către Hamilton și Jacobi ca o abordare sistematică a mecanicii Newtoniene. Studiile pe modele ale sistemelor mecanice de dimensiuni dintre cele mai variate, de la puncte materiale la structuri și sisteme gigantice (Sistemul Solar), constituie preocupările acestei științe [40] [41] [42].

Începutul analizei cu MEF (FEM - Finite Element Method) datează din 1943, fiind meritul lui R. Courant, care a utilizat metoda Ritz a analizei numerice și minimizarea calculului variațional în vederea obținerii unei soluții aproximative pentru sistemele vibratoare. Studiile lui Courant au fost continuate printr-o lucrare publicată în 1956 de către M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, și L. J. Topp, intitulată "Stiffness and Deflection of Complex Structures", care stabilea o definiție cu caracter general a analizei numerice [109].

Perioada anilor '70 a adus o limitare a utilizării analizei cu MEF din cauza prețurilor prohibitive ale calculatoarelor mainframe, singurele capabile în acea perioadă de a aborda pe această cale rezolvarea problemelor complexe. Aceste calculatoare erau în exclusivitate, la acea vreme, în dotarea concernelor din industria aeronautică, constructoare de automobile, militară și nucleară, deoarece aceste concerne beneficiau de sumele necesare achiziționării și operării acestor calculatoare.

Dezvoltarea rapidă a tehnologiei platformelor calculatoarelor, evidențiată prin creșterea puterii și a vitezei de calcul a acestora, concomitent cu scăderea prețurilor de achiziție, a condus la o implementare pe scară largă a analizei cu MEF.

Odată cu dezvoltarea tehnologiei calculatoarelor s-au produs numeroase pachete software capabile să simuleze, prin analiza cu MEF, fenomene fizice de o complexitate ridicată. Aceste pachete software, cum ar fi: ANSYS, FEMAP, COSMOS, ABAQUS, NASTRAN, ADAMS fac parte din categoria programelor CAE (Computer Aided Engineering).

### 4.2. Definiția analizei cu MEF.

Analiza cu MEF este o metodă numerică utilizată în scopul obținerii soluțiilor ecuațiilor diferențiale care descriu sau aproximează o varietate largă de fenomene fizice.

Ideea de bază a MEF este aceea conform căreia un domeniu complicat poate fi *divizat* într-o serie de *subdomenii* mai mici pentru care ecuațiile diferențiale respective se pot rezolva. Prin asamblarea ulterioară a seturilor de ecuații aparținătoare fiecărui subdomeniu se determină comportamentul fenomenului studiat pe întregul domeniu.

Fiecare sudomeniu se materializează printr-un *element finit* iar procesul de divizare a unui domeniu complex într-un număr finit de elemente se numește *discretizare (meshing)*.

Rezolvarea problemelor prin analiza cu MEF conduce, proporțional cu complexitatea problemelor, la un număr foarte mare de ecuații care pot fi soluționate rapid cu ajutorul unui calculator. De aici se desprinde concluzia că această metodă este imposibil de utilizat fără implicarea unui calculator, motiv pentru care dezvoltarea metodei este strâns legată de evoluția calculatoarelor.

Elementele finite se împart, din punct de vedere al principiilor care stau la baza formulării continuității lor, în:

- *elemente finite structurale* - din care fac parte elementele finite de tip bară și elementele de tip înveliș;
- *elemente finite continue* - din care fac parte elementele finite plane sau masive.

### 4.3. Etapele aplicării analizei cu MEF.

În exemplificarea etapelor aplicării analizei cu MEF se consideră stările de tensiune și deformație dintr-o structură solidă la aplicarea unor sarcini exterioare. În vederea evaluării cât mai apropiate de realitate a stărilor de tensiune și deformație prin utilizarea analizei cu MEF, este necesară parcurgerea următoarelor etape:

A) *Evaluarea structurii* în vederea alegerii unui model de calcul și a tipului de elemente finite adecvate, care să permită reproducerea cât mai fidelă a stărilor reale de tensiune și deformație. Astfel, alegerea tipurilor de elemente finite trebuie să se facă în concordanță cu precizia și calitatea rezultatelor care se doresc a fi obținute.

B) *Discretizarea structurii* trebuie realizată astfel încât în zonele de interes (concentratori de tensiune, discontinuități, sau unde se dorește un calcul cât mai exact) dimensiunile elementelor finite să fie cât mai reduse (figura 4.3.1).

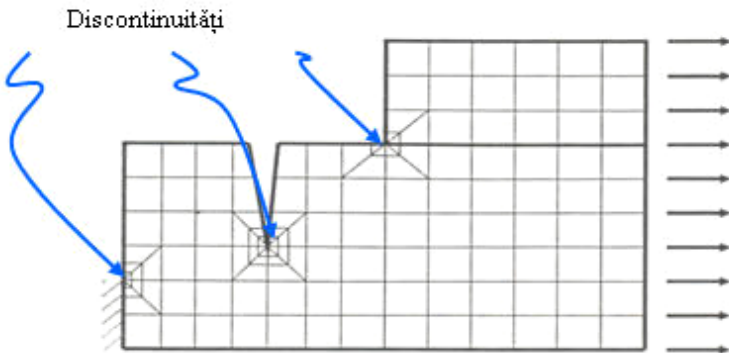


Fig. 4.3.1. Zone care necesită reducerea dimensiunilor elementelor finite.

Trecerea de la zonele discretizate în elemente finite de dimensiuni mari la cele discretizate în elemente finite de dimensiuni mici trebuie să se facă progresiv, prin intermediul zonelor discretizate în elemente finite de trecere a căror dimensiuni variază uniform între cele două valori extreme. Trecerea are ca scop eliminarea

distorsiunilor care se produc la variații bruște ale dimensiunilor elementelor finite. Procedeeul poartă denumirea de *control al discretizării (mesh control)* și este ilustrat în figura 4.3.2.

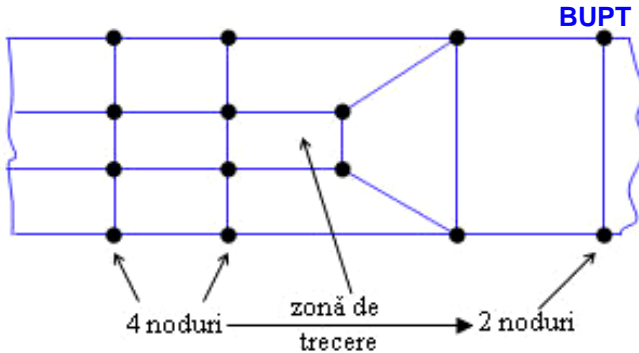


Fig. 4.3.2. Aplicarea controlului discretizării.

Modul de discretizare în elemente finite poate genera distorsiunea elementelor. Pentru evitarea acestei situații, se recomandă ca valoarea raportului dintre dimensiunile laturilor elementelor finite să fie apropiat de unitate, iar în plus, în cazul elementelor finite de tip patrulater sau hexaedrale se va avea în vedere ca unghiurile dintre laturile elementelor să fie apropiate de  $90^\circ$ . Distorsiunile care apar în geometria elementelor finite conduc la erori majore ale rezultatelor obținute. În cazul pachetelor software CAE profesionale există module de preprocesare cu ajutorul cărora se pot face discretizări parametrice sau automate. Din aceste considerente, operațiunile de discretizare a structurii în elemente finite trebuie să i se acorde o importanță maximă în scopul obținerii rezultatelor cu erori minime.

C) *Studiul elementelor finite* în vederea construcției ecuațiilor elementelor finite. Ecuațiile care descriu comportarea mediului în cuprinsul unui element poartă denumirea de *ecuații elementale*. Necunoscutele în aceste ecuații reprezintă gradele de libertate impuse pentru tipul de element utilizat. Construcția ecuațiilor elementale se poate face în mai multe moduri în funcție de categoria din care face parte problema studiată.

*Metoda directă* a cărei aplicare este sugerată de metoda deplasărilor, este o metodă simplă, intuitivă și ușor de aplicat, dar aplicarea acesteia se poate face doar la calculul structurilor alcătuite din bare. În cazul structurilor de rezistență se ajunge la un sistem de ecuații de forma:

$$\{P_e\} = [K_e] \{U_e\} \quad (4.3.1), \text{ unde:}$$

-  $[K_e]$  reprezintă matricea caracteristicilor fizico-geometrice a elementului finit, cunoscută și sub denumirea de matricea de rigiditate elementului. Această matrice se bucură de proprietăți speciale cum ar fi: faptul că este matrice pătratică simetrică în raport cu diagonala principală, iar diagonala principală conține numai elemente pozitive;

-  $\{U_e\}$  este o matrice coloană și reprezintă vectorul deplasărilor nodale necunoscute pentru elementul finit;

-  $\{P_e\}$  este o matrice coloană și reprezintă vectorul forțelor nodale generalizate ale elementului finit.

*Metodele variaționale.* Aceste metode sunt cele mai utilizate în analiza cu MEF a problemelor mecanice și termice. Dintre acestea amintim principiul lucrului mecanic virtual și teorema minimului energiei interne de deformație.

*Metoda reziduurilor.* Este o metodă generală care se folosește în cazul în care metodele variaționale nu pot fi aplicate. Aceasta permite o abordare unitară a problemelor liniare și neliniare, de propagare și de valori proprii. În cadrul acestei metode se înlocuiește criteriul de minimizare a energiei interne de deformație cu minimizarea reziduuului.

D) *Transformarea matricelor de rigiditate* a elementelor finite din sistemul de coordonate local în sistemul de coordonate global al structurii.

E) *Asamblarea ecuațiilor elementale* în sistemul de ecuații atașat structurii sau asamblarea elementelor finite. În cadrul acestei etape se impune condiția ca funcțiile necunoscute ale problemei să aibă aceleași valori în nodurile comune.

Asamblarea ecuațiilor elementale constă de fapt în asamblarea matricelor de rigiditate  $[K_e]$  ale elementelor finite în matricea de rigiditate  $[K_g]$  a structurii și a vectorilor forțelor nodale generalizate  $\{P_e\}$  în vectorul forțelor nodale generalizate  $\{P_g\}$  pentru întreaga structură. În urma operației de asamblare se obține un sistem de ecuații de forma:

$$\{P_g\} = [K_g] \{U_g\} \quad (4.3.2)$$

unde  $\{U_g\}$  reprezintă vectorul funcțiilor necunoscute pentru întreaga structură.

Rezolvarea problemei se face luându-se în considerare condițiile pe contur. Cum anumite deplasări sunt cunoscute în conformitate cu modul de rezemare al structurii și de asemenea anumite forțe din noduri sunt date, numărul total de necunoscute ale problemei se va reduce corespunzător. Rezultă deci un sistem redus de ecuații de forma:

$$\{P_r\} = [K_r] \{U_r\} \quad (4.3.3)$$

Trebuie menționat că în acest sistem de ecuații matricea de rigiditate redusă  $[K_r]$  se obține prin suprimarea în matricea de rigiditate  $[K_g]$  a acelor linii și coloane corespunzătoare gradelor de libertate pentru care deplasările sunt nule, în conformitate cu modul de rezemare al întregii structuri. Matricea de rigiditate  $[K_r]$  a structurii se bucură de aceleași proprietăți ca și matricea de rigiditate  $[K_e]$  și în plus este o matrice a căror elemente sunt dispuse în jurul diagonalei principale, celelalte elemente fiind nule. Această ultimă proprietate facilitează operația de inversare a ei cu necesități minime de memorie din partea calculatorului.

F) *Rezolvarea sistemului de ecuații* (4.3.3) se face prin unul din procedeele numerice cunoscute (metoda Gauss, metoda iterativă Jacobi, metoda Gauss-Siedel și metoda relaxării). În acest mod se determină necunoscutele principale ale problemei care sunt de fapt valorile gradelor de libertate din noduri.

G) *Calculul necunoscutelor secundare* ale problemei care în cazul structurilor de rezistență sunt deformațiile specifice  $\varepsilon; \gamma$  și componentele  $\sigma; \tau$  ale tensorului tensiune. Programele de analiză cu MEF sunt prevăzute cu module de postprocesare a datelor de ieșire, etapă în care se realizează o prelucrare superioară a mărimilor care caracterizează starea de tensiune și deformație a corpului.

Etapetele necesare a fi parcurse în vederea realizării unei analize cu elemente finite se pot prezenta sintetic sub forma unei diagrame, conform figurii 4.3.3.

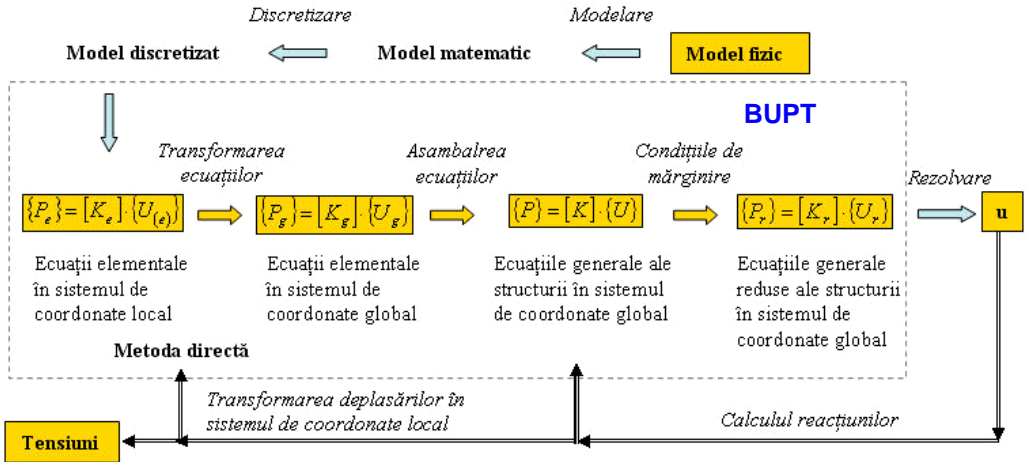


Fig. 4.3.3. Etapele analizei cu metoda elementului finit.

#### 4.4. Tipuri de elemente finite și funcții de interpolare.

O problemă deosebit de importantă în aplicarea analizei cu MEF este legată de alegerea celei mai potrivite discretizări și al celor mai potrivite tipuri de elemente finite care să conducă la elaborarea unui model de calcul care să asigure posibilitatea obținerii unor rezultate cât mai apropiate de fenomenul real.

Tipurile de elemente finite utilizate în elaborarea modelelor de calcul se deosebesc între ele prin forma lor geometrică, numărul și tipul nodurilor, tipul variabilelor de nod precum și tipul funcțiilor de interpolare folosite. Funcțiile de interpolare nu pot fi alese arbitrar întrucât ele trebuie să îndeplinească condițiile de continuitate și condițiile de convergență a soluției aproximatăe.

Continuitatea poate fi asigurată în anumite condiții prin alegerea funcției de interpolare sub forma unui polinom algebric. Condițiile de compatibilitate între elemente impune ca funcția care descrie comportamentul necunoscutului problemei pe domeniul elementului finit și o parte din derivatele ei să fie continue. Astfel în cazul barelor solicitate numai de sarcini axiale este suficientă satisfacerea continuității funcției de deplasare  $u(x)$ . În cazul barelor solicitate la încovoiere pe lângă funcția de deplasare  $v(x)$  trebuie asigurată și continuitatea derivatei  $dv/dx$ . La elementele finite din această categorie continuitatea poate fi satisfăcută dacă se aleg ca și grade de libertate în noduri deplasările a căror continuitate este cerută.

La elementele finite cu două sau trei dimensiuni, ca de exemplu în cazul stărilor plane de tensiune și deformație, probleme de elasticitate tridimensionale, sau în cazul plăcilor, asigurarea continuității are un caracter diferit. Pentru exemplificare considerăm elementul finit triunghiular  $m$ , din figura 4.4.1.a, utilizat frecvent în formularea problemelor plane.

Cea de-a treia dimensiune, grosimea  $g$ , este reprezentată cu linii întrerupte, întrucât este constantă pe întreg domeniul elementului finit. Aceasta nu apare în reprezentările obișnuite ale acestui tip de element finit întrucât se asociază acestuia ca o constantă reală. De fapt, în discretizările care se fac pentru plăci, elementele finite sunt reprezentate prin suprafața lor mediană.



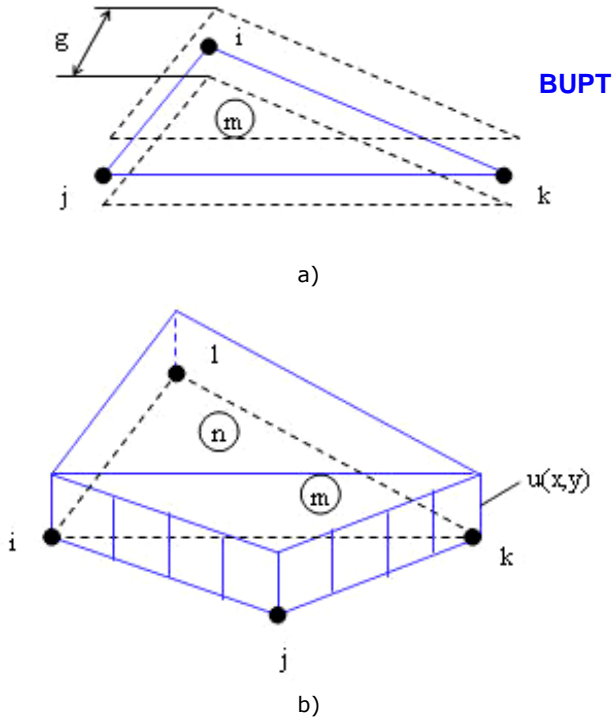


Fig. 4.4.1. Elemente finite izolate și învecinate: a) – element triunghiular, b) – elemente învecinate.

În figura 4.4.1.b s-a reprezentat pentru două elemente finite învecinate  $m$  și  $n$  variația funcției de deplasare  $u(x,y)$  prin folosirea polinoamelor de interpolare de tip liniar. În acest caz continuitatea interelementară este satisfăcută în mod implicit prin impunerea continuității funcției în noduri. În cazul în care se utilizează polinoame de interpolare de ordin superior, condiția de continuitate poate să nu fie satisfăcută la nivelul zonelor interelemente (figura 4.4.2).

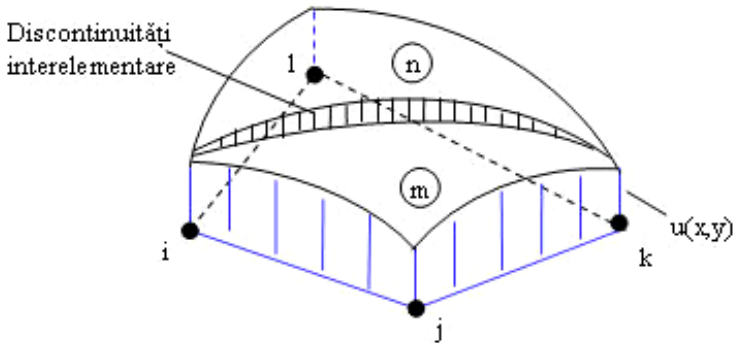


Fig. 4.4.2. Discontinuități la nivelul zonelor interelemente.

Elementele finite care conduc la o modelare în care ca o consecință a impunerii condițiilor de continuitate pe direcțiile gradelor de libertate din noduri este satisfăcută în mod automat continuitatea la nivelul zonelor interelemente se numesc *compatibile* sau *conforme*.

După configurația geometrică elementele finite se împart în patru categorii: elemente finite unidimensionale, elemente finite bidimensionale, elemente finite axial simetrice și elemente finite tridimensionale.

Elementele finite tridimensionale (3D) reprezintă o categorie utilizată pentru studiul structurilor de tip masiv sau a structurilor cu pereți groși. Elementele finite 3D pot fi *tetraedrale* sau *hexaedrale* (figura 4.4.3).

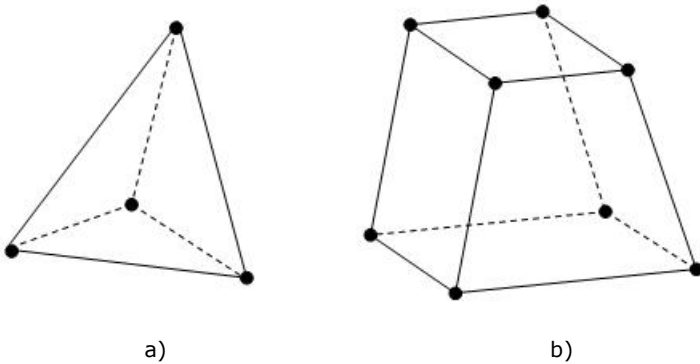


Fig. 4.4.3. Elemente finite tridimensionale : a) – tetraedrale, b) – hexaedrale.

Este bine de știut că în cazul utilizării unor elemente finite de ordinul al doilea, pe muchiile tetraedului sau hexaedrului mai apare câte un nod suplimentar plasat la mijlocul acestor muchii.

## 4.5. Elemente finite tetraedrice.

Cele mai simple elemente folosite în problemele de elasticitate spațială sunt elementele finite de tip tetraedru cu patru noduri (figura 4.5.1).

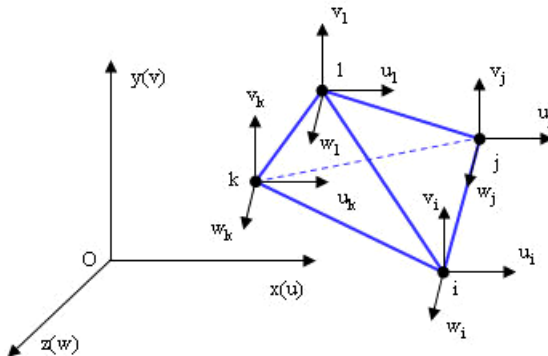


Fig. 4.5.1. Element finit de tip tetraedric.

În acest caz se impun drept grade de libertate în noduri componentele deplasărilor  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , după cele trei axe ale sistemului  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Dacă se admit pentru aproximarea deplasărilor pe domeniul elementului finit polinoame de gradul întâi de forma:

**BUPT**

$$\begin{aligned} u &= C_1 + C_2x + C_3y + C_4z \\ v &= C_5 + C_6x + C_7y + C_8z \\ w &= C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

atunci coeficienții  $C_1, C_2, \dots, C_{12}$  se determină punând următoarele condiții:

$$\begin{aligned} u(x_i; y_i; z_i) &= u_i \\ v(x_i; y_i; z_i) &= v_i \\ w(x_i; y_i; z_i) &= w_i \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

unde  $(x_i, y_i, z_i)$  reprezintă coordonatele nodului  $i$ . Rezultă deci următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} u_i &= C_1 + C_2x_i + C_3y_i + C_4z_i \\ u_j &= C_1 + C_2x_j + C_3y_j + C_4z_j \\ u_k &= C_1 + C_2x_k + C_3y_k + C_4z_k \\ u_l &= C_1 + C_2x_l + C_3y_l + C_4z_l \\ v_i &= C_5 + C_6x_i + C_7y_i + C_8z_i \\ v_j &= C_5 + C_6x_j + C_7y_j + C_8z_j \\ v_k &= C_5 + C_6x_k + C_7y_k + C_8z_k \\ v_l &= C_5 + C_6x_l + C_7y_l + C_8z_l \\ w_i &= C_9 + C_{10}x_i + C_{11}y_i + C_{12}z_i \\ w_j &= C_9 + C_{10}x_j + C_{11}y_j + C_{12}z_j \\ w_k &= C_9 + C_{10}x_k + C_{11}y_k + C_{12}z_k \\ w_l &= C_9 + C_{10}x_l + C_{11}y_l + C_{12}z_l \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Acest sistem se poate scrie în formă matriceală (4.5.4) efectuând o serie de notații:  $\{U_e\}$  este matricea coloană a deplasărilor,  $\{C\}$  este matricea coeficienților iar  $[A]$  este matricea coordonatelor nodurilor.

$$\{U_e\} = [A] \{C\} \quad (4.5.4), \text{ sau}$$

$$\{C\} = [A]^{-1} \{U_e\} \quad (4.5.5)$$

Rezolvarea ecuației matriceale de forma (4.5.5) se face prin calculul deplasărilor pe domeniul elementului finit cu ajutorul polinoamelor de interpolare, după care, prin rezolvarea sistemului de ecuații obținut se determină coeficienții  $C_i$ . Ecuația matriceală devine foarte dificilă mai ales în cazul elementelor finite cu un număr foarte mare de elemente.

## 5. Modelul CAD al unei proteze dentare totale

### 5.1. Aspecte generale.

În general, modelarea geometrică a protezelor dentare, implementată în cadrul programelor CAD are ca scop optimizarea formei acestora în vederea creșterii durabilității și a gradului de confort al pacienților. Pornind de la modelele geometrice solide CAD ale protezelor, se realizează diferite analize cu MEF pentru atingerea scopului menționat anterior.

Pentru realizarea modelului geometric solid CAD s-a folosit o proteză dentară totală, ilustrată în figura 5.1.1. Proteza este realizată din materialul Superacryl.



Fig. 5.1.1. Proteză dentară totală utilizată în modelarea geometrică.

## 5.2. Etapa achiziției datelor prin scanare 3D.

Proteza dentară a fost supusă unei operațiuni de scanare 3D cu ajutorul unui echipament laser Roland LPX-1200, ilustrat în figura 5.2.1. Achiziția datelor s-a efectuat prin intermediul pachetului software Dr. Picza 3 din dotarea echipamentului de scanare. Operația de scanare și implicit cea de achiziție a datelor are ca rezultat crearea fișierului norului de puncte care sunt conținute în suprafețele protezei dentare. Acest fișier, de tip text ASCII, este alcătuit din coordonatele în spațiu ale punctelor măsurate prin operația de scanare 3D, coordonatele fiind raportate la un sistem de axe propriu al echipamentului de scanare. Figura 5.2.2 ilustrează fereastra de lucru a programului Dr. Picza 3 împreună cu norul de puncte al suprafețelor protezei. Figura 5.2.3 ilustrează organizarea datelor sub formă de coordonate  $(x;y;z)$  ale norului de puncte, în cadrul accesării fișierului ASCII cu programul Notepad din sistemul de operare Windows XP. Fiecare punct obținut în urma operațiunii de scanare este unic determinat prin cele trei coordonate  $(x;y;z)$  raportate la sistemul de axe propriu al echipamentului de scanare.



Fig. 5.2.1. Scannerul 3D laser Roland LPX-1200.

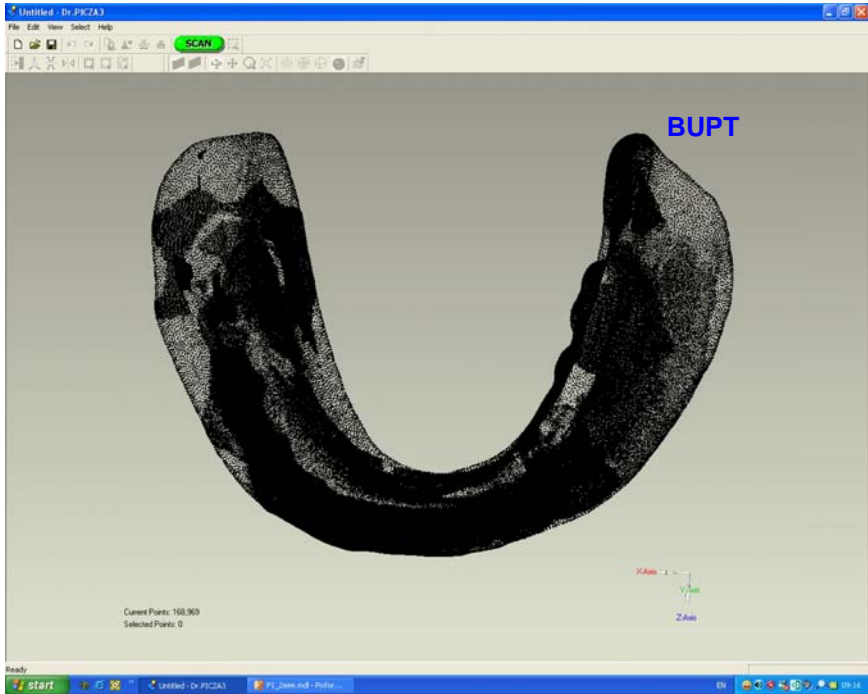


Fig. 5.2.2. Fereastra de lucru a programului Dr. Picza 3 împreună cu norul de puncte al suprafețelor protezei.

coordonata X	coordonata Y	coordonata Z
12.541809	1.628269	34.360181
12.435325	1.572055	34.265172
12.703806	1.661588	34.296345
13.116190	1.800926	34.382834
13.253148	1.838139	34.355100
12.344484	1.532769	34.155830
12.577989	1.607155	34.207969
12.776685	1.664690	34.229516
12.975605	1.725972	34.240228
13.171097	1.772200	34.250007
13.332069	1.828136	34.258791
13.545509	1.927660	34.310735
13.695413	2.055415	34.346438
12.261841	1.502816	34.073192
12.479792	1.562419	34.102454
12.716113	1.635868	34.128241
12.862387	1.675787	34.140548
13.089588	1.734044	34.165621
13.265050	1.784124	34.178989
13.485732	1.875086	34.206113
13.632502	1.946621	34.227183
13.864151	2.089011	34.208569
13.980922	2.186398	34.228201
14.197782	2.338690	34.199236
14.568440	2.801293	34.263645
12.028306	1.472352	33.914929

Fig. 5.2.3. Coordonatele punctelor conținute în suprafețele protezei, organizate în cadrul fișierului ASCII.

### 5.3. Etapa preprocesării datelor.

În cadrul acestei etape se realizează reconstrucția geometrică a suprafețelor protezei dentare pornind de la fișierul ASCII al norului de puncte. Suprafețele reconstruite ale protezei formează rețeaua de triangulație, determinată printr-un algoritm de calcul specializat bazat pe coordonatele norului de puncte achiziționat la scanare, rețeaua fiind obținută cu tehnica modelării prin fațetare. Rețeaua de triangulație se stochează în general în fișiere cu extensia STL.

Fișierul ASCII al norului de puncte corespunzător suprafețelor exterioare ale protezei a fost importat în programul Geomagic Studio. Acest program este specializat în domeniul modelării geometrice prin inginerie inversă acoperind toate cele patru etape fundamentale cunoscute. Figura 5.3.1 ilustrează fereastra de lucru a programului Geomagic Studio împreună cu o regiune a norului de puncte al suprafețelor protezei.

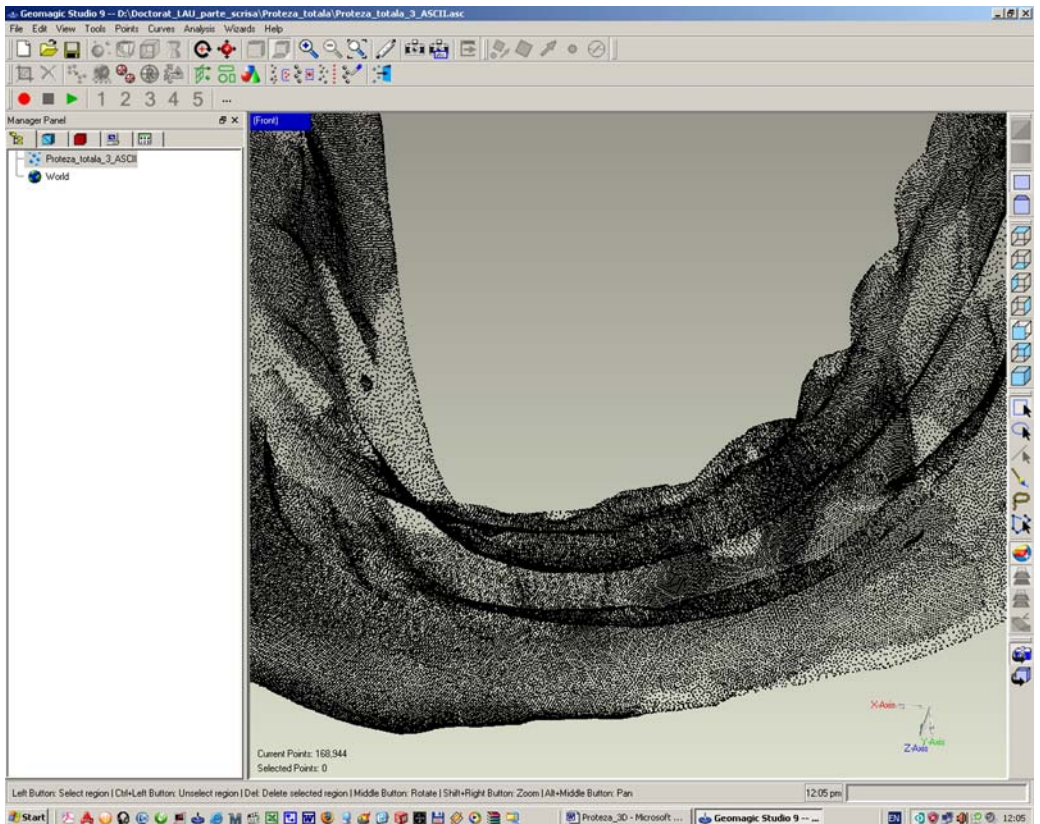


Fig. 5.3.1. Fereastra de lucru a programului Geomagic Studio conținând o regiune a norului de puncte al suprafețelor protezei.

Rețeaua de triangulație care reprezintă reconstrucția suprafețelor protezei este realizată automat în cadrul programului amintit prin apelarea comenzii *Wrap* a meniului *Points*. Norul de puncte conține 168.944 puncte, iar în urma realizării

rețelei de triangulație au rezultat 332.990 fațete. Figura 5.3.2 ilustrează rețeaua de triangulație a protezei dentare în programul Geomagic Studio.

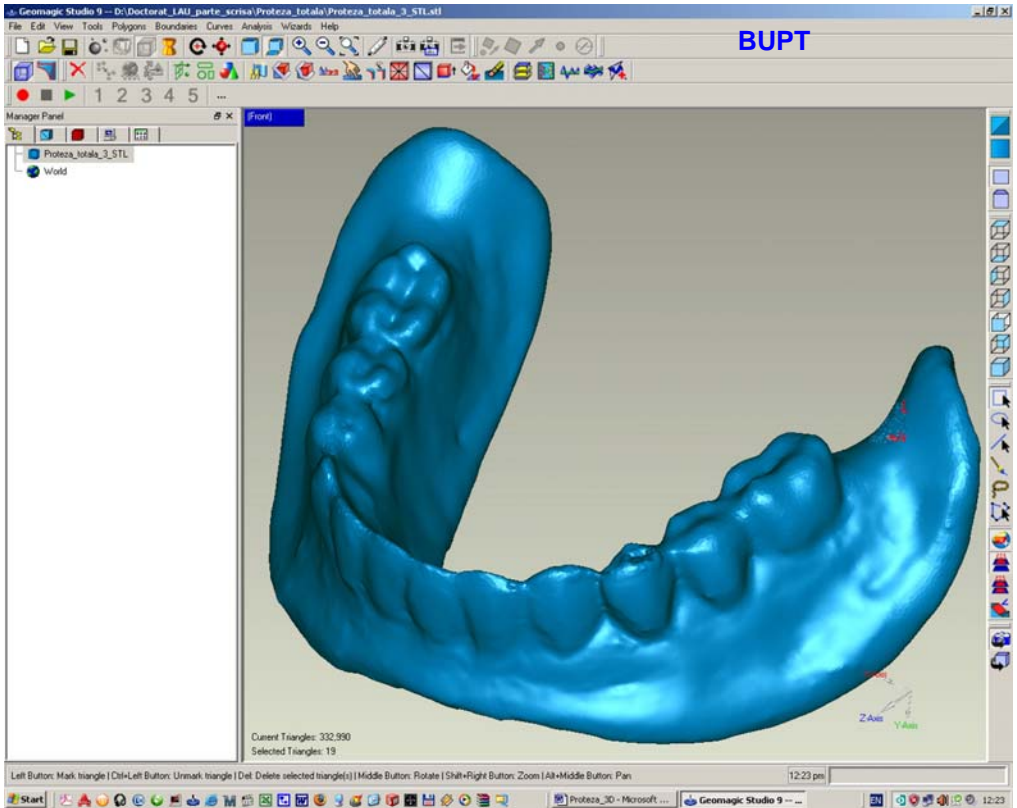


Fig. 5.3.2. Rețeaua de triangulație a protezei dentare în programul Geomagic Studio.

În general, în urma realizării rețelei de triangulație, pot apărea defecte de tip discontinuități (goluri), care neapărat trebuie înlăturate prin operațiuni de umplere. Figura 5.3.3 ilustrează defecte de tip goluri ale rețelei de triangulație. De asemenea, fațetele pot avea un grad ridicat de neuniformitate dimensională a laturilor. De aceea se recomandă ca rețeaua de triangulație să fie supusă unei operațiuni de rafinare care are ca rezultat uniformizarea dimensiunilor laturilor fațetelor. În cazul de față, operațiunile de umplere a golurilor și de rafinare a rețelei de triangulație au fost realizate în cadrul programului Rapidform XOR. Acest program este de asemenea specializat în domeniul modelării geometrice prin inginerie inversă, dar nu realizează achiziția datelor în procesul de scanare 3D, programul acoperind însă celelalte trei etape fundamentale. Umplerea defectelor de tip goluri se realizează prin apelarea comenzii *Fill Holes*. Figura 5.3.4 exemplifică o regiune a rețelei de triangulație, înainte și după aplicarea operației de umplere a golurilor. Rafinarea rețelei de triangulație se lansează prin intermediul comenzii *Global Remesh*. Inițial, rețeaua de triangulație a conținut 332.990 fațete cu dimensiunea medie a laturilor de 0,20 mm. Operațiunea de rafinare a rețelei de triangulație, deși este automatizată, presupune introducerea de către utilizator a valorii dimensiunii medii a laturilor fațetelor care se dorește a fi obținută.



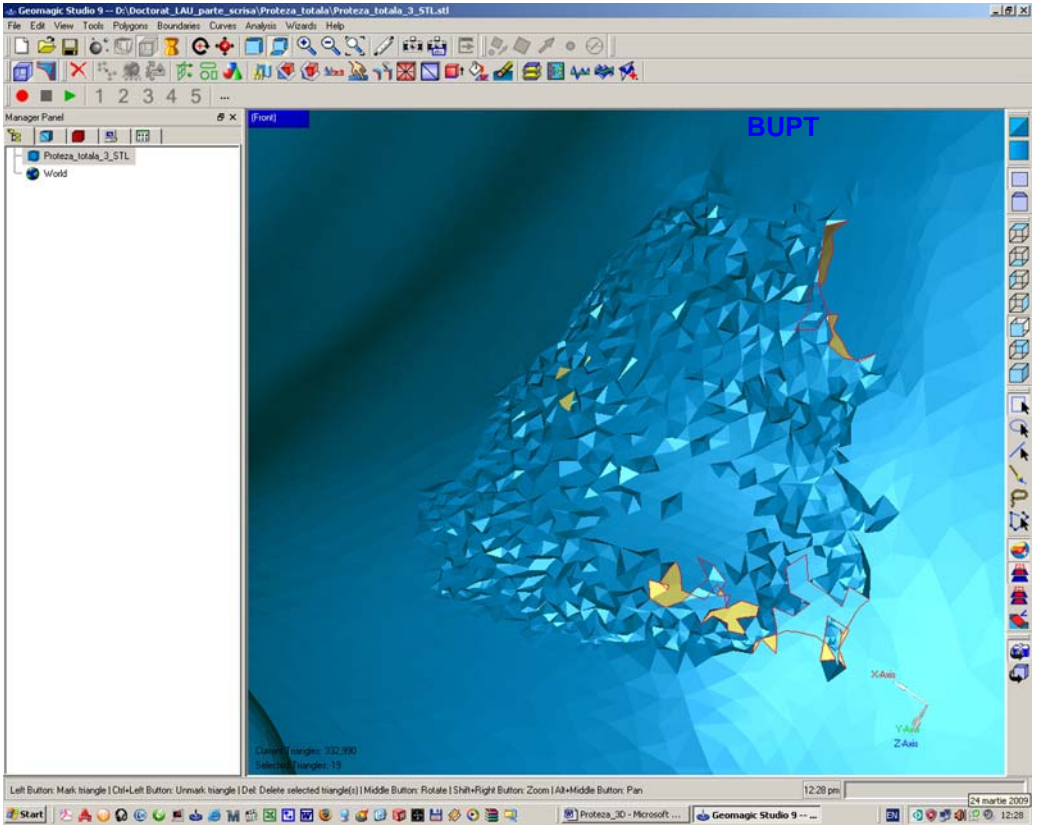


Fig. 5.3.3. Defecte de tip discontinuități (goluri) ale rețelei de triangulație (Geomagic Studio).

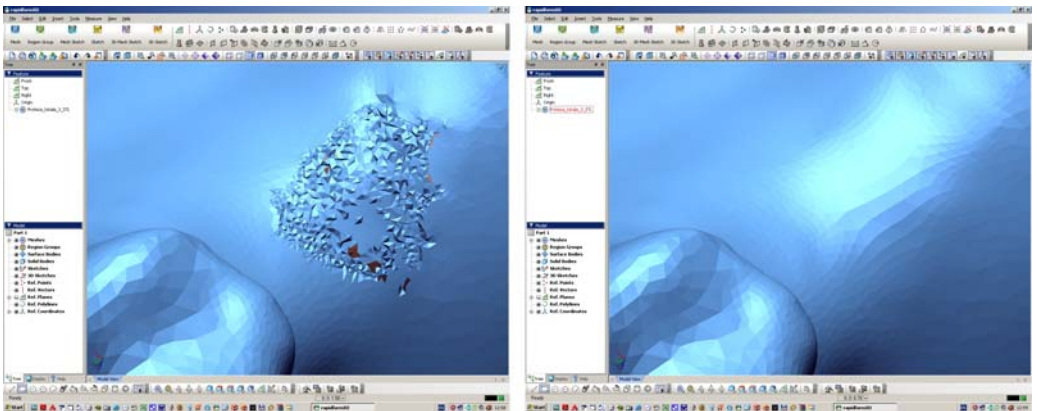


Fig. 5.3.4. Regiune a rețelei de triangulație, înainte și după aplicarea operației de umplere a golurilor (Rapidform XOR).

Rafinarea rețelei de triangulație s-a realizat prin patru iterații succesive ajungând-se la o dimensiune medie a laturilor fațetelor de 0,16 mm, valoare care s-

a dovedit a fi suficientă pentru a oferi rețelei de triangulație un grad înalt de netezime și uniformitate.

După efectuarea operațiunilor de umplere a golurilor și de rafinare a rețelei de triangulație a rezultat un număr de 626.608 fațete cu dimensiunea medie a laturilor de 0,16 mm. Figura 5.3.5 ilustrează varianta finală, rafinată, a rețelei de triangulație a protezei dentare, în cadrul programului Rapidform XOR.

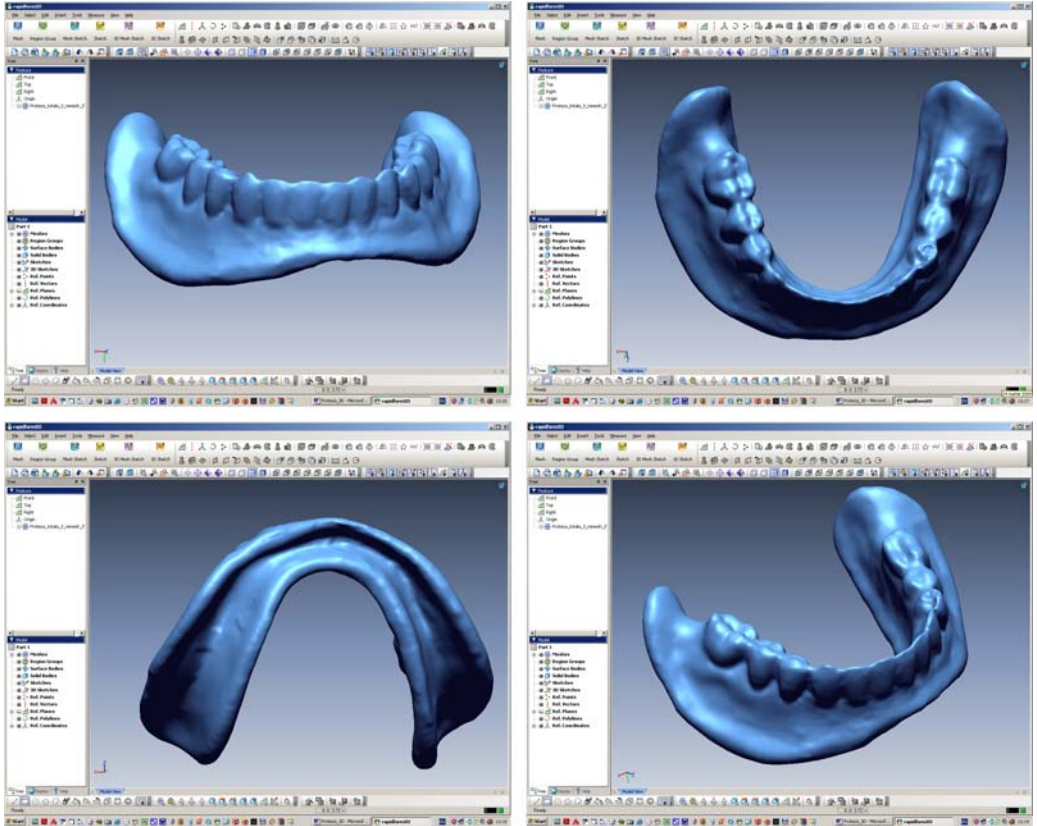


Fig. 5.3.5. Rețeaua de triangulație rafinată a protezei dentare (Rapidform XOR).

#### 5.4. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor.

În cadrul acestei etape, rețeaua de triangulație este divizată într-o mulțime de zone (regiuni) luându-se în considerare variația curburilor după care sunt orientate fațetele în spațiu. Operația de delimitare a zonelor sau regiunilor se mai numește *segmentare*. Pe baza regiunilor rezultate din operațiunea de segmentare, se realizează suprafețele 3D curbe care reproduc geometria obiectului scanat 3D, aceste suprafețe fiind interconectate după criterii de continuitate și tangență. Suprafețele 3D curbe pot fi de tip Bézier sau NURBS. Cu alte cuvinte, în cadrul etapei, se realizează trecerea de la mulțimea suprafețelor plane triunghiulare (fațetelor) ale rețelei de triangulație la mulțimea suprafețelor 3D curbe.

În cazul protezei dentare, etapa delimitării zonelor și crearea suprafețelor a fost realizată tot în programul Rapidform XOR. Acest program generează suprafețe de tip Bézier. Delimitarea în zone sau regiuni a rețelei de triangulație se lansează prin intermediul comenzii *Auto Segment*, operațiunea fiind automatizată. Figura 5.4.1 ilustrează regiunile obținute în urma segmentării rețelei de triangulație.

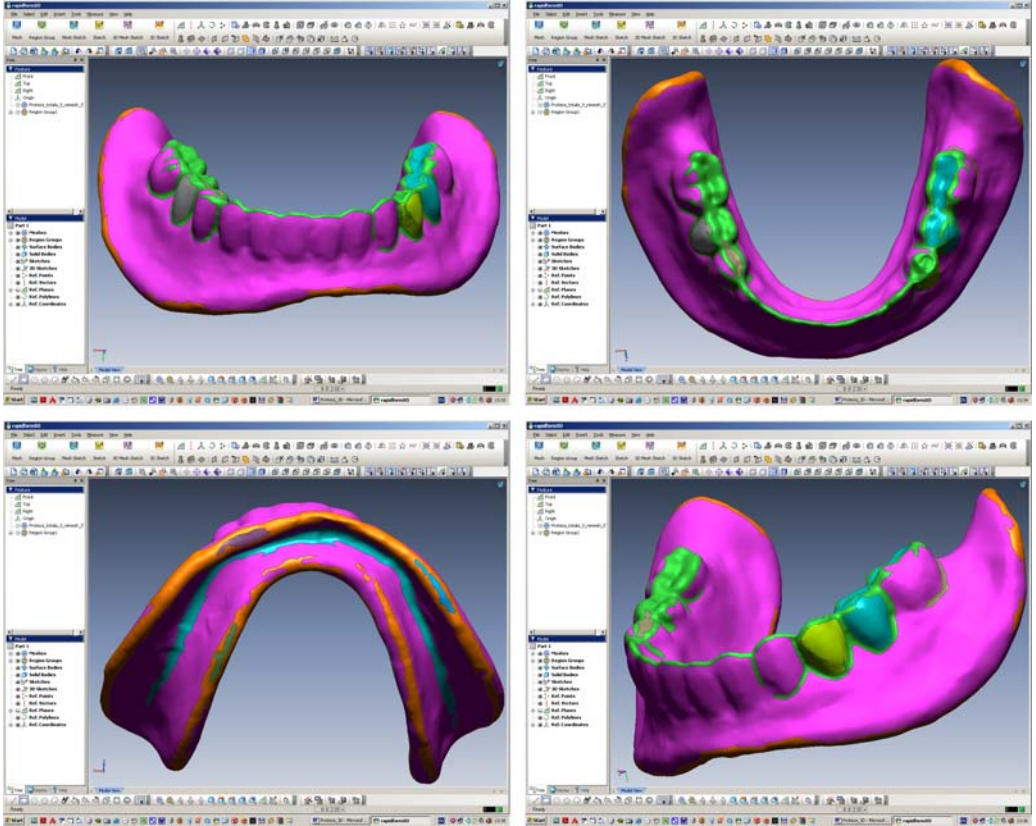


Fig. 5.4.1. Obținerea regiunilor în urma segmentării rețelei de triangulație (Rapidform XOR).

Realizarea suprafețelor Bézier se lansează în execuție prin intermediul comenzii *Auto Surfacing*, operațiunea fiind automatizată. Utilizatorul trebuie să introducă totuși, numărul mediu de suprafețe Bézier care se dorește a fi obținut. Acest număr se alege prin iterații succesive, astfel încât mulțimea suprafețelor Bézier să se suprapună perfect peste rețeaua de triangulație, moment în care se consideră că s-a atins nivelul maxim de precizie. Inițial, s-a optat pentru un număr mediu de 1.000 suprafețe, obținându-se practic 1.108, apoi s-a ales valoarea de 2.000, rezultând 2.170 suprafețe, valorile adoptate dovedindu-se a fi insuficiente. În final, s-a introdus valoarea medie de 3.000, obținându-se practic 3.248 suprafețe, moment în care s-a observat suprapunerea perfectă a mulțimii suprafețelor Bézier peste rețeaua de triangulație. Figura 5.4.2 ilustrează mulțimea suprafețelor Bézier, împreună cu muchiile acestora, care constituie modelul geometric al protezei dentare. În vederea compatibilizării ulterioare a suprafețelor Bézier cu platformele CAD, acestea au fost salvate într-un fișier IGES.

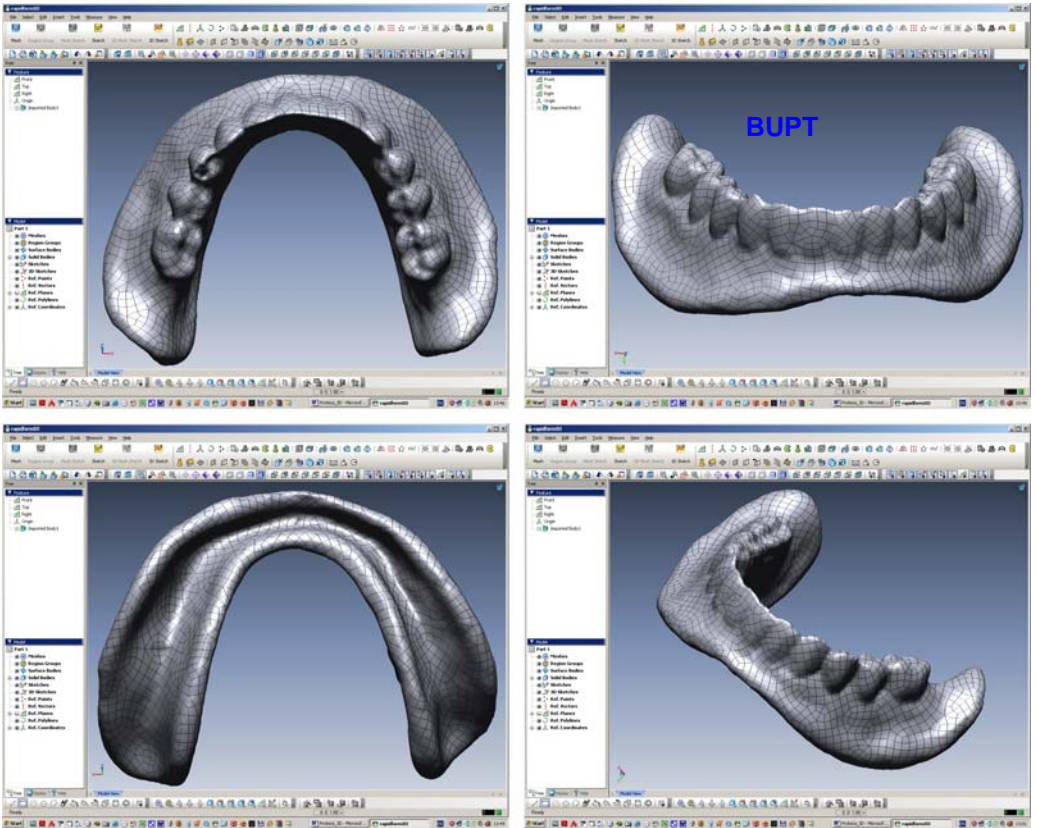


Fig. 5.4.2. Suprafețele Bézier, împreună cu muchii acestora, care alcătuiesc modelul geometric al protezei dentare (Rapidform XOR).

## 5.5. Etapa construcției modelului geometric solid CAD.

În cadrul acestei etape se realizează compatibilitatea la nivel de reprezentare și consistență a suprafețelor Bézier cu platformele CAD. Această compatibilitate depinde în totalitate de tipul fișierului care stochează informațiile suprafețelor Bézier, fișier realizat în momentul finalizării etapei anterioare. Din acest motiv, în general, suprafețele de tip Bézier se salvează în fișiere IGES, aceste fișiere având compatibilitate 100% cu majoritatea platformelor CAD. Tot în cadrul acestei etape se realizează "solidificarea" modelului geometric al protezei prin luarea în considerare a volumului delimitat de mulțimea suprafețelor Bézier și posibilitatea asocierii acestui volum a unor proprietăți masice specifice unui material considerat.

În cazul de față, al protezei dentare totale, operațiunile aferente etapei au fost realizate în cadrul programului CAD SolidWorks 2007 x64.

Inițial, s-a importat fișierul IGES al mulțimii suprafețelor Bézier realizate în programul Rapidform XOR. "Solidificarea" modelului geometric al protezei dentare, reprezentat prin mulțimea suprafețelor Bézier, a fost realizată prin lansarea în execuție a comenzii *Knit Surfaces*, cu opțiunea *Try to form solid* bifată, în urma selectării din interfața grafică a tuturor suprafețelor. În acest moment s-a obținut

modelul geometric solid CAD al protezei dentare. Figura 5.5.1 ilustrează modelul geometric solid CAD al protezei dentare în cadrul programului SolidWorks 2007 x64.

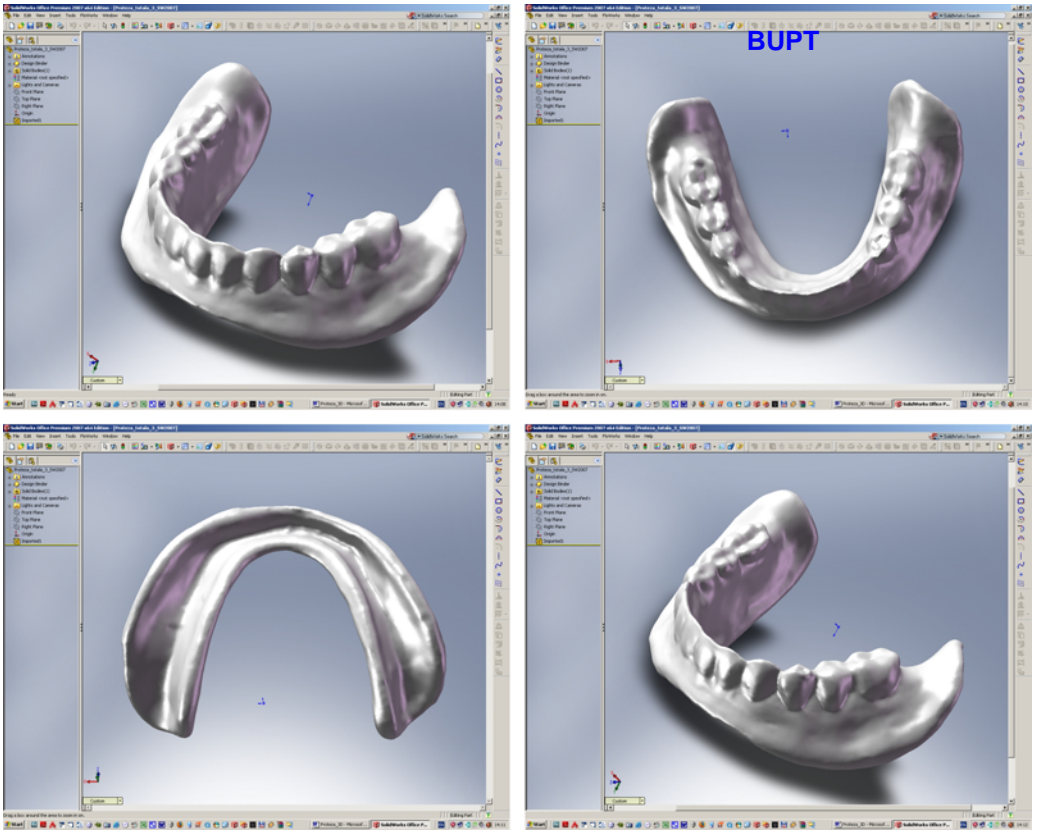


Fig. 5.5.1. Modelul geometric solid CAD al protezei dentare (SolidWorks 2007 x64).

## 6. Analiza stărilor de tensiune și deformație la nivelul craniului uman datorate inserării unui disjunctor ortodontic, cu ajutorul MEF

### 6.1. Disjunctorul ortodontic.

Un disjunctor ortodontic reprezintă un dispozitiv care realizează expansiunea maxilarului uman superior pentru o aliniere corectă a danturii acestuia cu cea a maxilarului inferior. Procesul de expansiune a maxilarului superior se realizează prin deschiderea suturii boltei palatine rezultând astfel un spațiu între dinții frontali. Inițial, s-a crezut că aceste dispozitive pot fi aplicate pacienților doar în perioada de creștere, fără a se recurge la intervenții chirurgicale, decât în cazul depășirii acestei perioade. Cercetările ulterioare au arătat că dispozitivul poate fi aplicat pacienților de aproape orice vârstă.

Din punct de vedere constructiv, disjunctoarele ortodontice se realizează în două variante: cu două sau patru brațe (figura 6.1.1). Aceste brațe sunt atașate într-o parte de un mecanism cu șurub filetat în ambele sensuri. Celălalt capăt al brațelor este fixat de dantură. Acționarea șurubului determină depărtarea brațelor și implicit prin intermediul danturii se transmite forța care determină expansiunea maxilarului superior. Acțiunea brațelor asupra danturii este simetrică datorită construcției simetrice a disjunctorului ortodontic.

Prezența disjunctoarelor ortodontice necesită acomodare din partea pacienților, o parte din aceștia acuzând migrene. Din acest motiv, este necesară determinarea stării de tensiune și deformație la nivelul craniului datorită acțiunii acestor dispozitive. Elaborarea unui model de calcul a acestor tensiuni și deformații necesită un model geometric solid CAD al craniului uman și analiza acestuia cu MEF.

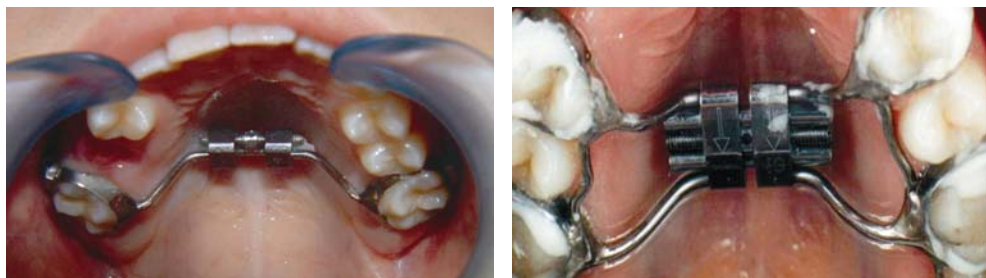


Fig. 6.1.1. Variante constructive ale disjunctoarelor ortodontice (cu două brațe - stânga și cu patru brațe - dreapta).

### 6.2. Modelul CAD al craniului uman.

Realizarea modelului CAD al craniului parcurge cele patru etape fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea geometrică. Pentru elaborarea

modelului geometric solid CAD s-a apelat la un model fizic al craniului uman, realizat din mase plastice.

### 6.2.1. Etapa achiziției datelor prin scanare tomografică.

BUPT

Avantajul scanării tomografice a unui model fizic realizat din mase plastice constă în obținerea unor secțiuni transversale (ca imagini) de o claritate înaltă a conturilor și implicit având un contrast sporit. Este cunoscut faptul că scanarea tomografică a oaselor reale implică o neclaritate a conturilor secțiunilor transversale datorată variațiilor densității materiei osoase, acest lucru având o consecință negativă asupra prelucrărilor ulterioare a imaginilor și implicit asupra preciziei geometriei modelelor CAD.

Craniul confecționat din mase plastice a fost scanat tomografic, cu un pas de scanare de 2 mm, rezultând 95 imagini ale secțiunilor transversale. În figura 6.2.1.1 se redă o parte din imaginile secțiunilor transversale prin craniul uman rezultate în urma procesului de scanare tomografică.

### 6.2.2. Etapa preprocesării datelor.

În cadrul acestei etape se realizează reconstrucția geometrică a suprafețelor craniului pornind de la imaginile secțiunilor transversale obținute prin scanarea tomografică. Suprafețele reconstruite ale craniului formează rețeaua de triangulație, obținută prin tehnica modelării prin fațetare.

Imaginile secțiunilor transversale au fost importate în programul MATERIALISE Mimics 10.01. Acest program este specializat în domeniul modelării geometrice prin inginerie inversă, nerealizând însă achiziția datelor. Figura 6.2.2.1 ilustrează fereastra de lucru a programului MATERIALISE Mimics 10.01.

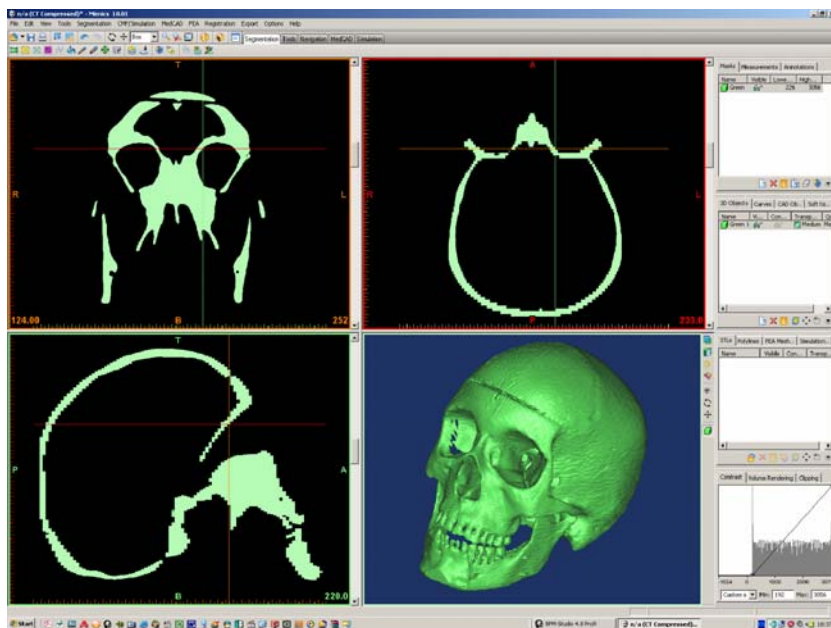


Fig. 6.2.2.1. Fereastra de lucru a programului MATERIALISE Mimics 10.01.



Fig. 6.2.1.1. Imagini ale unor secțiuni transversale prin craniu rezultate în urma procesului de scanare tomografică.



Programul detectează automat orientarea în spațiu a obiectului scanat tomografic, precum și pasul la care au fost realizate imaginile secțiunilor transversale. Totodată se observă (figura 6.2.2.1) faptul că în urma importării tuturor imaginilor secțiunilor transversale, programul MATERIALISE Mimics 10.01 compune (pe baza secțiunilor transversale) și alte imagini din secțiuni longitudinale (verticale și orizontale) în funcție de poziția curentă a unei anumite secțiuni transversale.

De obicei, imaginile secțiunilor transversale obținute în urma procesului de scanare tomografică a unui obiect fizic, sunt reprezentate într-o paletă de culori alb-negru cu rezoluția culorilor de 12 biți. Această rezoluție indică faptul că pixelii imaginilor posedă  $2^{12} = 4096$  valori posibile de culoare (nuanțe de gri) cuprinse între valorile culorilor fundamentale *negru* respectiv *alb*.

În cadrul programului MATERIALISE Mimics 10.01, valorile de culoare sunt numerotate în intervalul  $-1024$  (negru) și  $+3072$  (alb), totalizând cele 4096 valori posibile. Aceste valori de culoare au în corespondență nivelele diferitelor densități masice care alcătuiesc materia constitutivă în ansamblu a obiectului fizic scanat tomografic. În funcție de imaginea unei anumite secțiuni transversale a obiectului scanat, fiecare pixel al imaginii respective este caracterizat de o valoare din cele 4096 valori de culoare posibile. În funcție de regiunile de interes ale obiectului scanat tomografic, programul grupează în *măști de culoare (colour masks)* pixelii fiecărei imagini în parte care posedă o anumită valoare de culoare sau cei care posedă culori cuprinse într-un anumit interval de valori de culoare. De exemplu, se pot grupa într-o mască oarecare pixelii care posedă valoare de culoare 2981, sau cei care posedă culori în intervalul  $[-41; +242]$ . Mulțimea pixelilor care aparțin unei măști de culoare oarecare este marcată într-o altă culoare din spectrul color (diferită de cele 4096 valori de nuanțe de gri, de exemplu culoarea verde, albastru, roșu, galben, etc.) pentru a diferenția foarte clar regiunile de interes ale obiectului fizic scanat tomografic. De exemplu, se definește masca de culoare verde pentru pixelii colorați în intervalul de valori  $[-452; +2073]$  (toți pixelii totalității imaginilor care posedă valori de culoare în intervalul amintit vor fi marcați în culoarea verde). Astfel, în cadrul reconstrucției geometrice a unui obiect fizic scanat tomografic se pot defini mai multe măști de culoare în funcție de zonele de interes a căror geometrie urmează a fi reconstruită. Măștile de culoare reprezintă punctul de plecare esențial în reconstrucția geometrică a oricărui obiect fizic scanat tomografic.

Pentru fiecare mască de culoare în parte, programul MATERIALISE Mimics 10.01 realizează cu tehnica modelării prin fațetare câte o rețea de triangulație (*polygon mesh* sau *mesh*). Obținerea unei rețele de triangulație pornind de la o mască de culoare anume se efectuează automat în cadrul programului prin apelarea comenzii *Calculate 3D from Mask*.

Reconstrucția geometriei craniului s-a realizat pe baza unei singure măști, de culoare verde, datorită faptului că modelul craniului, fiind confecționat din mase plastice (prin injecție), posedă o omogenitate a materialului, programul detectând astfel două valori posibile de culoare ale pixelilor imaginilor secțiunilor transversale obținute la scanarea tomografică ( $-1024 \rightarrow$  negru și  $+3072 \rightarrow$  alb). Definirea măștii de culoare verde a reunit toți pixelii imaginilor secțiunilor transversale care au aparținut craniului (de culoare albă) mai puțin cei care au aparținut fundalului imaginilor (de culoare neagră). Mesh-ul craniului a fost salvat într-un fișier cu extensia STL.

Figurile 6.2.2.2, 6.2.2.3, 6.2.2.4 și 6.2.2.5 ilustrează mesh-ul craniului în diferite vederi. În figurile menționate se observă aspectul relativ rugos al mesh-ului craniului și neuniformitatea dimensională a triunghiurilor (fațetelor).

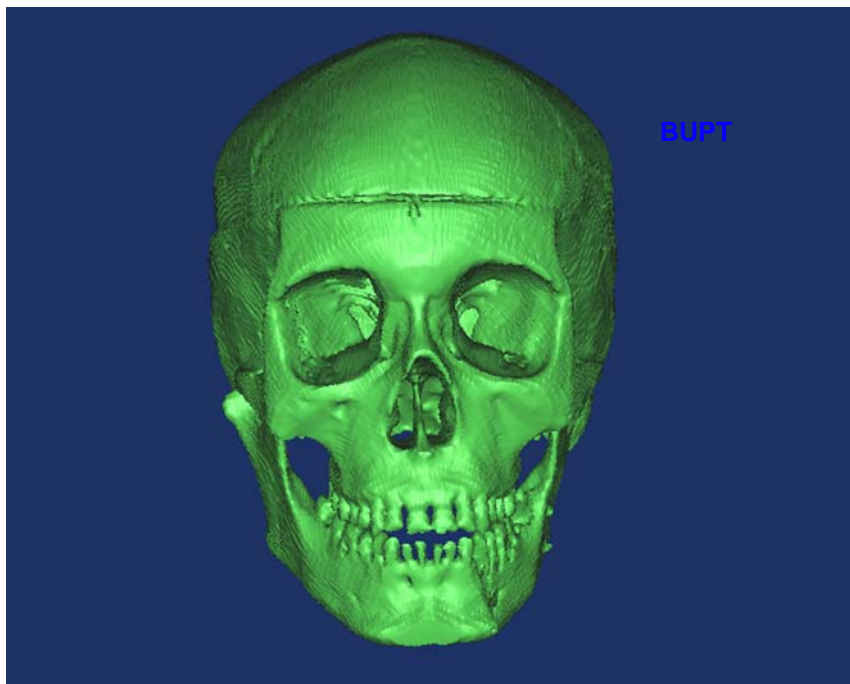


Fig. 6.2.2.2. Vedere frontală a mesh-ului craniului.

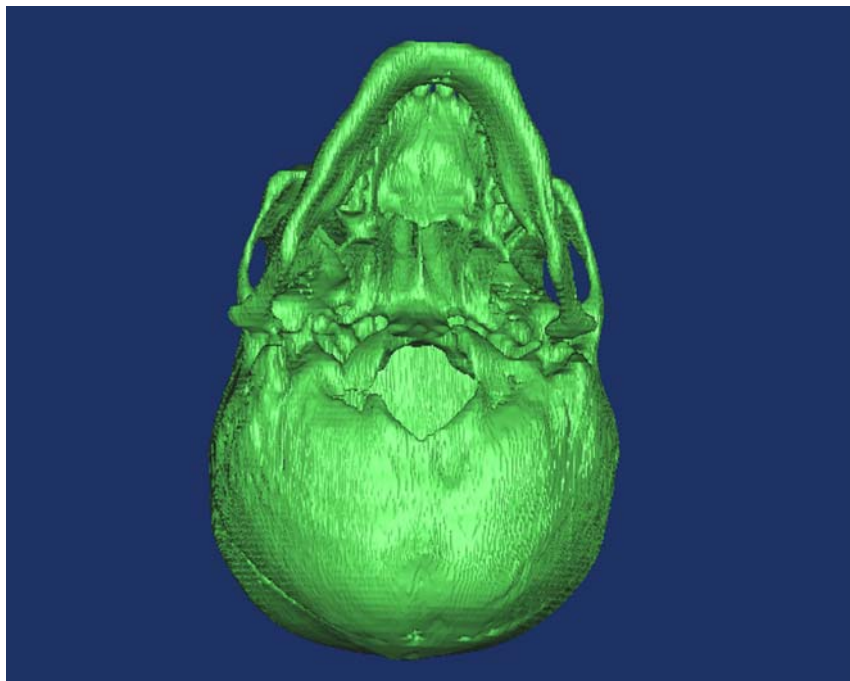


Fig. 6.2.2.3. Vedere inferioară (de desubt) a mesh-ului craniului.

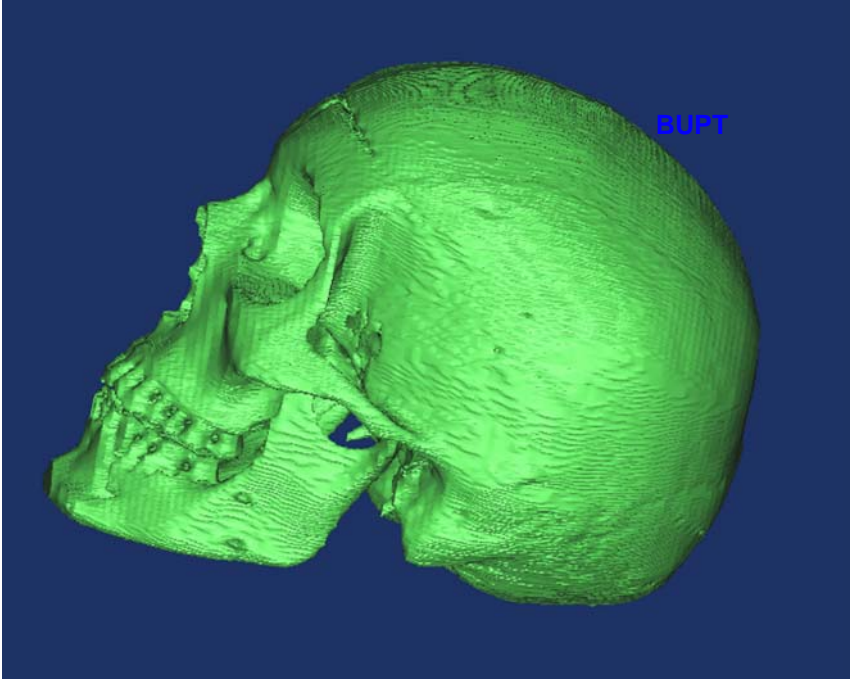


Fig. 6.2.2.4. Vedere laterală a mesh-ului craniului.

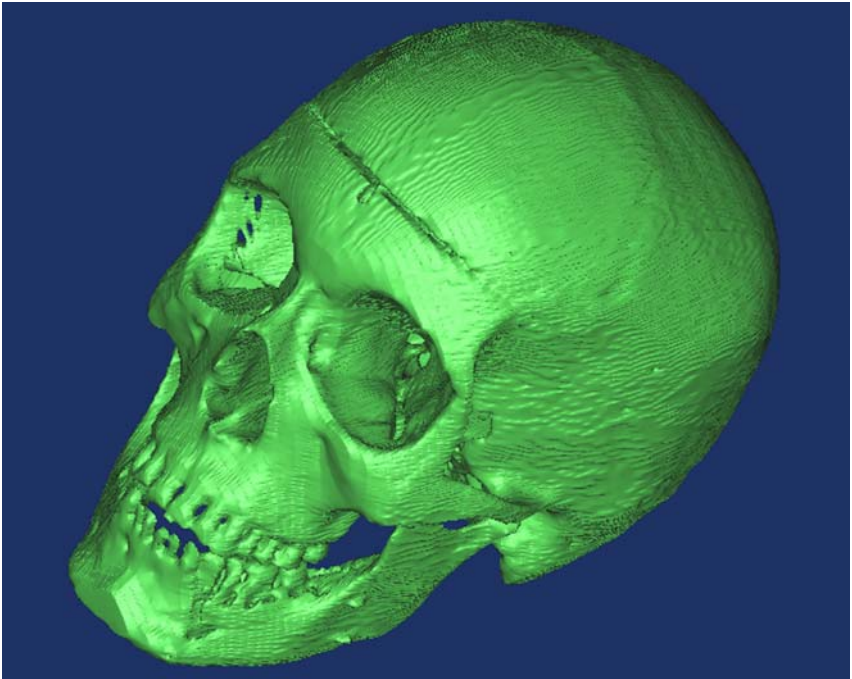


Fig. 6.2.2.5. Vedere izometrică a mesh-ului craniului.

De asemenea se observă discontinuități (goluri - altele decât cele anatomice) în mesh. Această observație denotă un aspect foarte important deoarece prezența discontinuităților în mesh determină imposibilitatea închiderii volumului aferent geometriei craniului determinat de suprafața exterioară, respectiv interioară, deci implicit nu se poate realiza ulterior modelul CAD al craniului necesar analizei cu MEF. Este de asemenea important de menționat faptul că mesh-ul reprezintă o mulțime finită de suprafețe triunghiulare plane (fațete) interconectate în spațiu și nicidecum un volum.

În următoarea etapă s-a realizat repararea și rafinarea mesh-ului craniului. Repararea mesh-ului constă în umplerea golurilor cu fațete corespunzătoare ca dimensiuni și orientare. Rafinarea mesh-ului constă în uniformizarea dimensională a laturilor fațetelor. Astfel se realizează un aspect neted al mesh-ului craniului, accentuându-se detaliile geometrice. Pentru realizarea operațiunilor de reparare și rafinare a mesh-ului craniului s-a apelat la programul Rapidform XOR, prin importarea fișierului STL.

Pe lângă operațiunile de reparare și rafinare a mesh-ului craniului, s-au mai efectuat o serie de modificări a acestuia în scopul unei mai bune adaptabilități la analiza ulterioară cu MEF. În primul rând s-a eliminat din mesh maxilarul inferior, care nu constituie corp comun cu restul craniului și datorită faptului că disjunctoarele ortodontice sunt plasate la nivelul maxilarului superior, acționând asupra danturii superioare. De asemenea s-a eliminat din mesh și dantura superioară, dinții prin intermediul cărora acționează disjunctoarele ortodontice urmând a fi realizați ulterior în cadrul modelului CAD al craniului.

Datorită faptului că există o simetrie geometrică aproximativă a craniului după un plan median longitudinal vertical, s-a tăiat mesh-ul craniului cu acest plan, rezultând astfel un nou mesh, cel al craniului pe jumătate. Această operație s-a efectuat și din considerentul simetriei acțiunii disjunctoarelor ortodontice dar și din considerentul definirii ulterioare a problemei de analiză cu MEF. Figurile 6.2.2.6, 6.2.2.7, 6.2.2.8 și 6.2.2.9 ilustrează, în cadrul programului Rapidform XOR, mesh-ul craniului pe jumătate în diferite vederi, în urma efectuării operațiilor menționate. Din figurile amintite se observă că mesh-ul are un aspect neted și uniform. Acest aspect are o importanță majoră pentru analiza cu MEF, deoarece acuratețea discretizării în elemente finite a modelului CAD este dependentă de calitatea suprafețelor modelului. Este preferabilă pierderea unor anumite detalii geometrice nesemnificative prin rafinarea mesh-ului în favoarea creșterii ulterioare a calității suprafețelor modelului CAD în ansamblu.

### **6.2.3. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor.**

Această etapă a fost realizată în programul Geomagic Studio. S-a ales acest program pentru etapa curentă, datorită faptului că permite realizarea directă a suprafețelor Bézier pornind de la mesh-ul craniului, fără a mai fi necesară delimitarea acestuia în zone. Totodată, această alegere s-a făcut și din considerentele performanțelor platformei de calcul utilizate. Geometria craniului fiind complexă, generarea suprafețelor Bézier se face într-un număr ridicat al acestora, utilizând la maxim resursele de procesare respectiv memorare ale platformei de calcul. Mesh-ul craniului pe jumătate conținând un număr mare de fațete (aproximativ 250.000), prin realizarea suprafețelor Bézier, acestea au rezultat într-un număr mult mai mic (aproximativ 800). Figurile 6.2.3.1, 6.2.3.2, 6.2.3.3 și 6.2.3.4 ilustrează în mai multe vederi mulțimea suprafețelor Bézier, împreună cu muchiile acestora, care constituie modelul geometric al craniului pe jumătate.

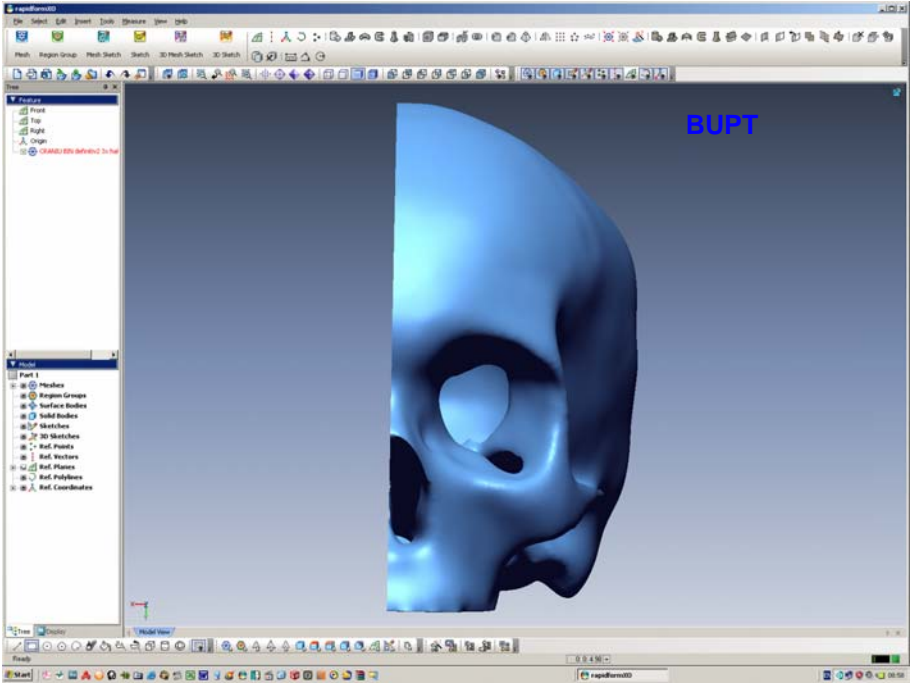


Fig. 6.2.2.6. Mesh-ul craniului pe jumătate - vedere frontală.

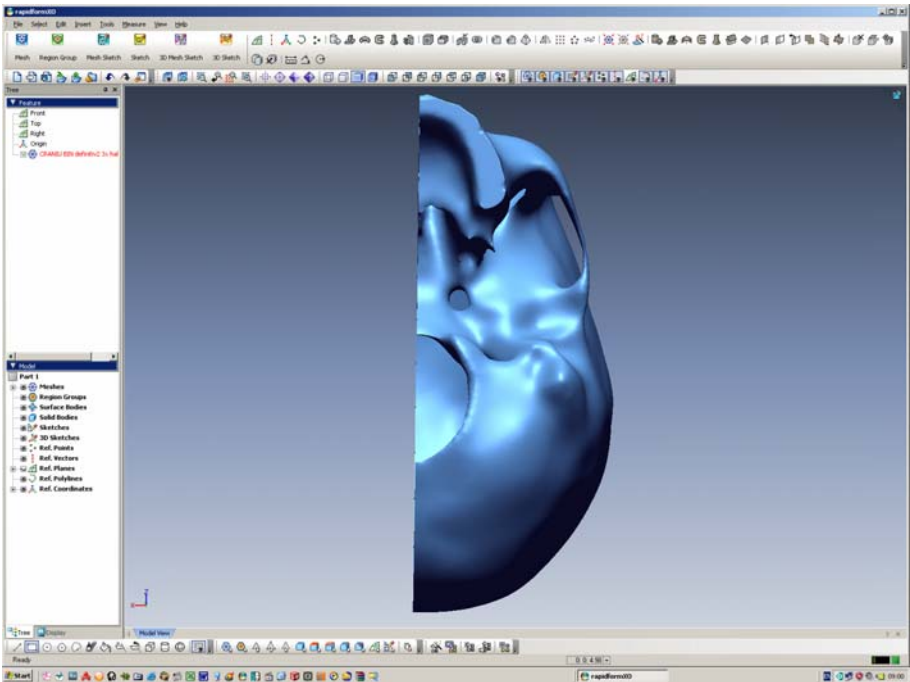


Fig. 6.2.2.7. Mesh-ul craniului pe jumătate - vedere inferioară (de desubt).

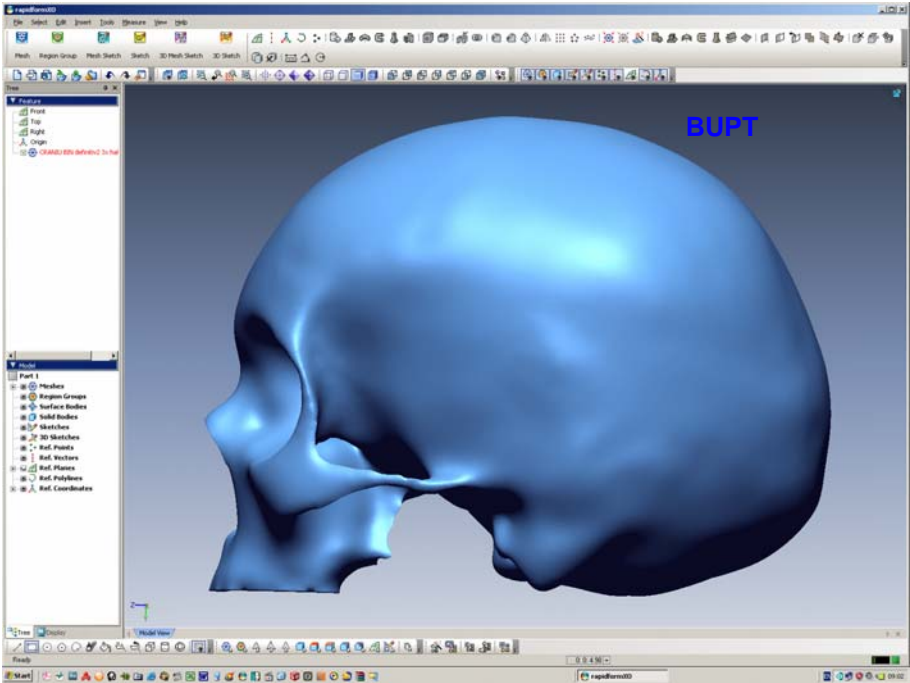


Fig. 6.2.2.8. Mesh-ul craniului pe jumătate - vedere laterală (partea stângă).

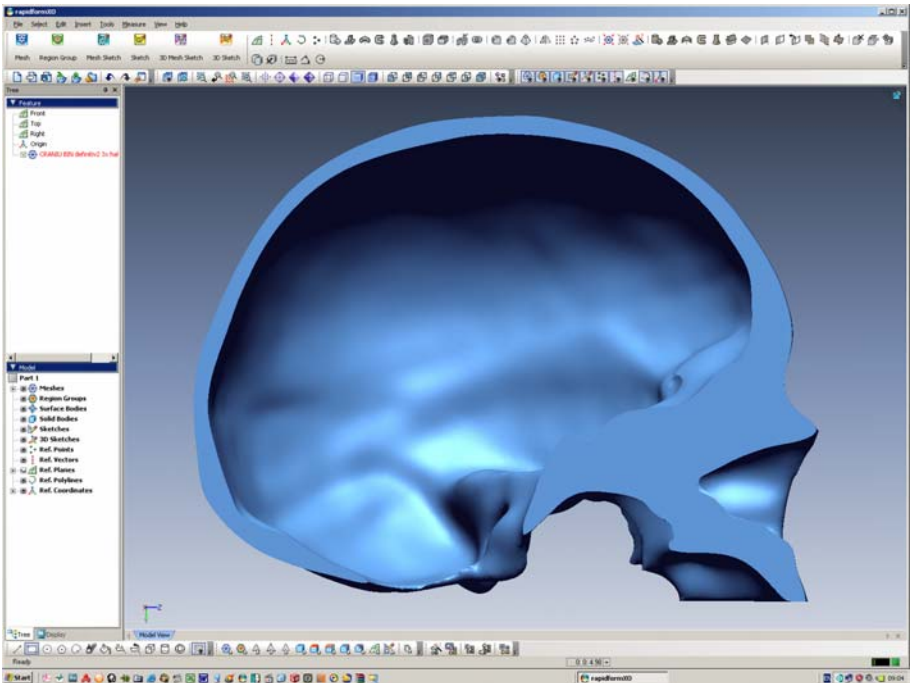


Fig. 6.2.2.9. Mesh-ul craniului pe jumătate - vedere laterală (partea dreaptă).

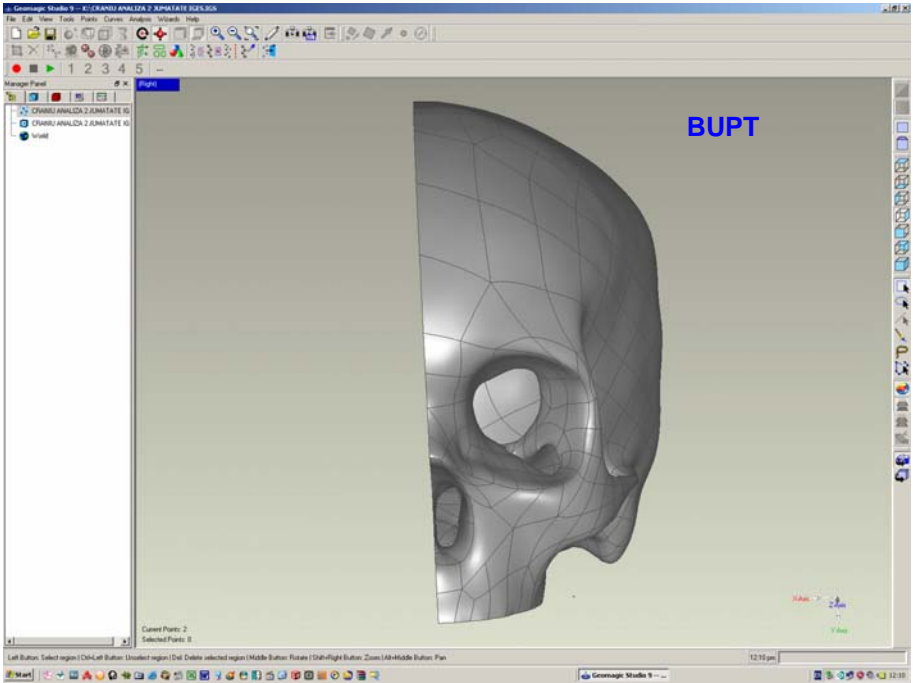


Fig. 6.2.3.1. Suprafețele Bézier ale craniului pe jumătate - vedere frontală.

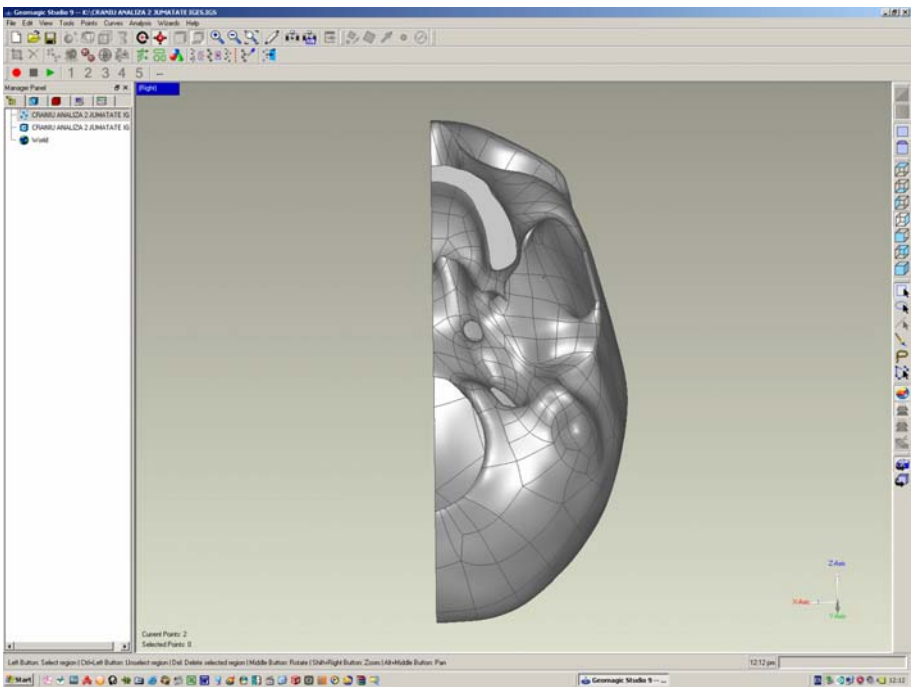


Fig. 6.2.3.2. Suprafețele Bézier ale craniului pe jumătate - vedere inferioară (de deșubt).

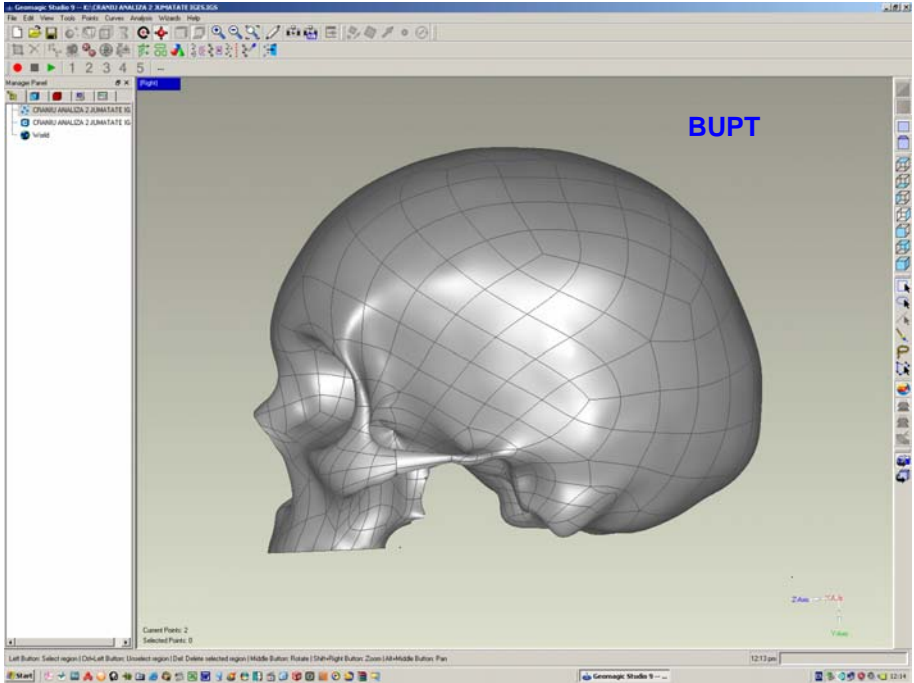


Fig. 6.2.3.3. Suprafețele Bézier ale craniului pe jumătate - vedere laterală (partea stângă).

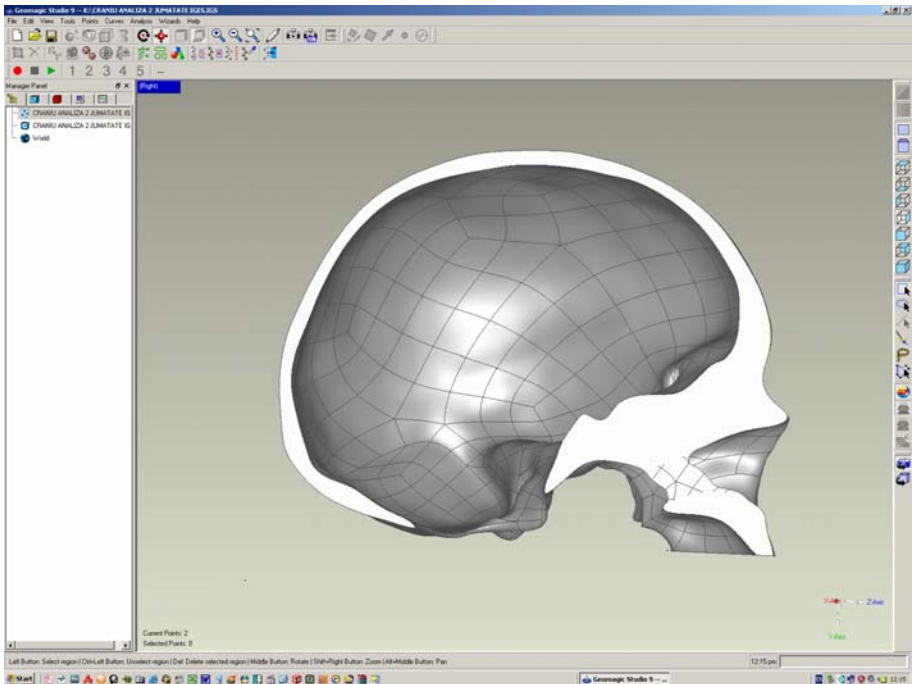


Fig. 6.2.3.4. Suprafețele Bézier ale craniului pe jumătate - vedere laterală (partea dreaptă).



În vederea compatibilizării ulterioare a suprafețelor Bézier cu platformele CAD, acestea au fost salvate într-un fișier IGES.

#### 6.2.4. Etapa construcției modelului geometric solid CAD.

BUPT

Datorită complexității geometriei craniului, prin realizarea suprafețelor Bézier apar anumite erori ca de exemplu suprafețe care se întrepătrund. Aceste suprafețe întrepătrunse împiedică formarea modelului geometric solid CAD al craniului și în consecință trebuie reparate. Această operațiune este realizată automat în programul SolidWorks 2005 în momentul importării fișierului IGES al suprafețelor Bézier. Există însă o serie de suprafețe întrepătrunse care nu pot fi reparate automat și în consecință trebuie reparate manual, prin înlocuire cu suprafețe echivalente ca formă și orientare în spațiu, care trebuie să se racordeze perfect cu suprafețele adiacente.

Odată efectuate reparațiile necesare, suprafețele Bézier finale au fost salvate într-un alt fișier IGES. Acest fișier a fost importat în programul SolidWorks 2005, iar "solidificarea" modelului geometric al craniului pe jumătate, reprezentat prin mulțimea suprafețelor Bézier, a fost realizată prin lansarea în execuție a comenzii *Knit Surfaces*, cu opțiunea *Try to form solid* bifată, în urma selectării din interfața grafică a tuturor suprafețelor. În acest moment s-a obținut modelul geometric solid CAD (pe scurt - modelul CAD) al craniului pe jumătate. Figurile 6.2.4.1 → 6.2.4.5 ilustrează modelul CAD al craniului pe jumătate în cadrul programului SolidWorks 2005.

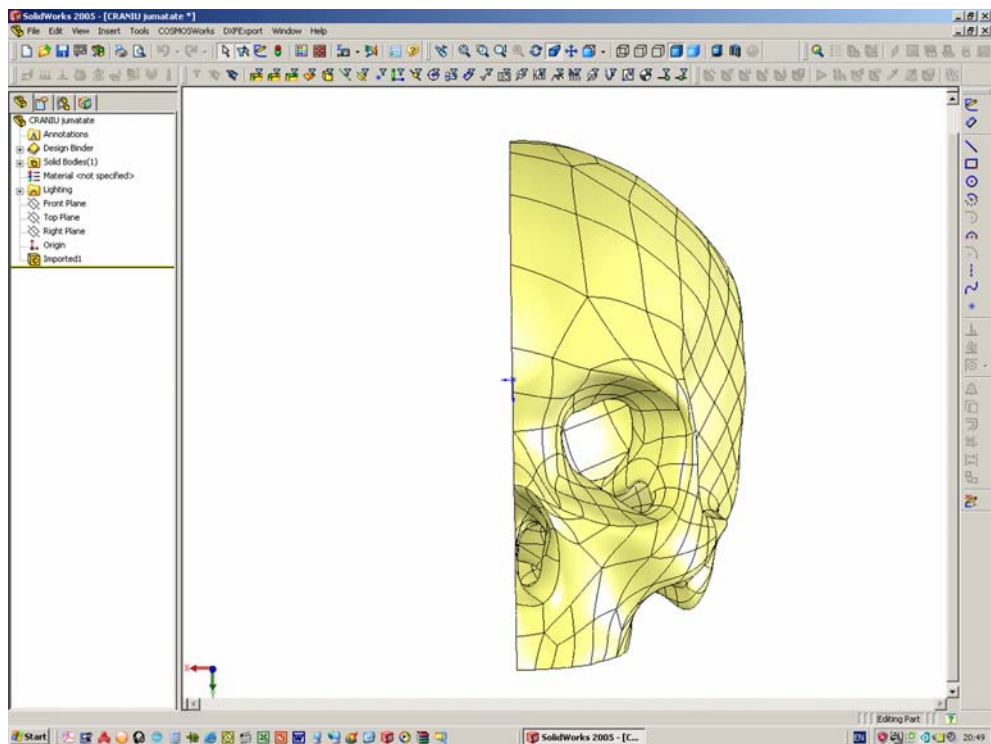


Fig. 6.2.4.1. Modelul CAD al craniului pe jumătate - vedere frontală.

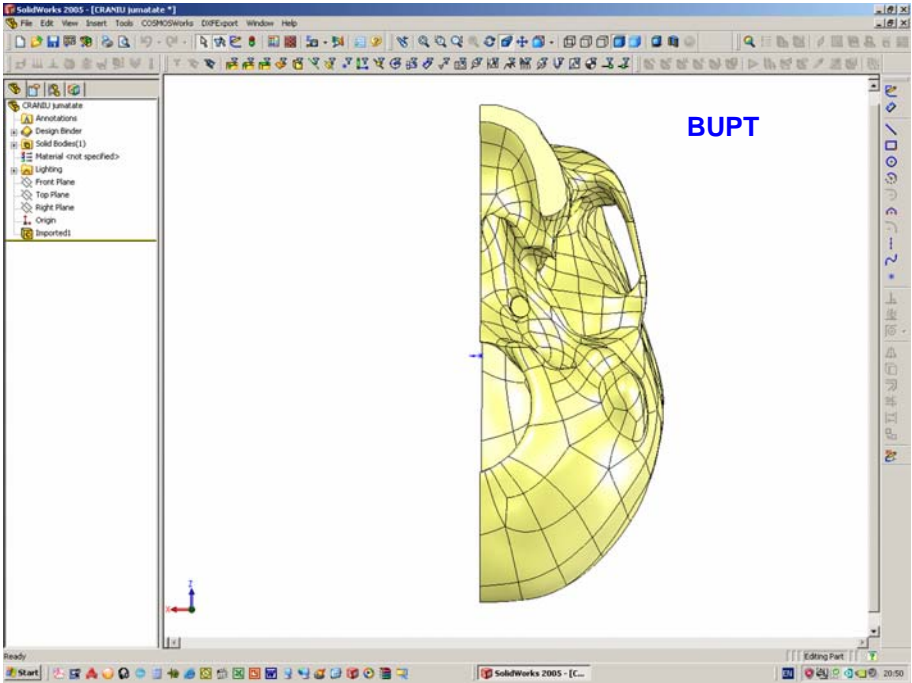


Fig. 6.2.4.2. Modelul CAD al craniului pe jumătate - vedere inferioară (de deșubt).

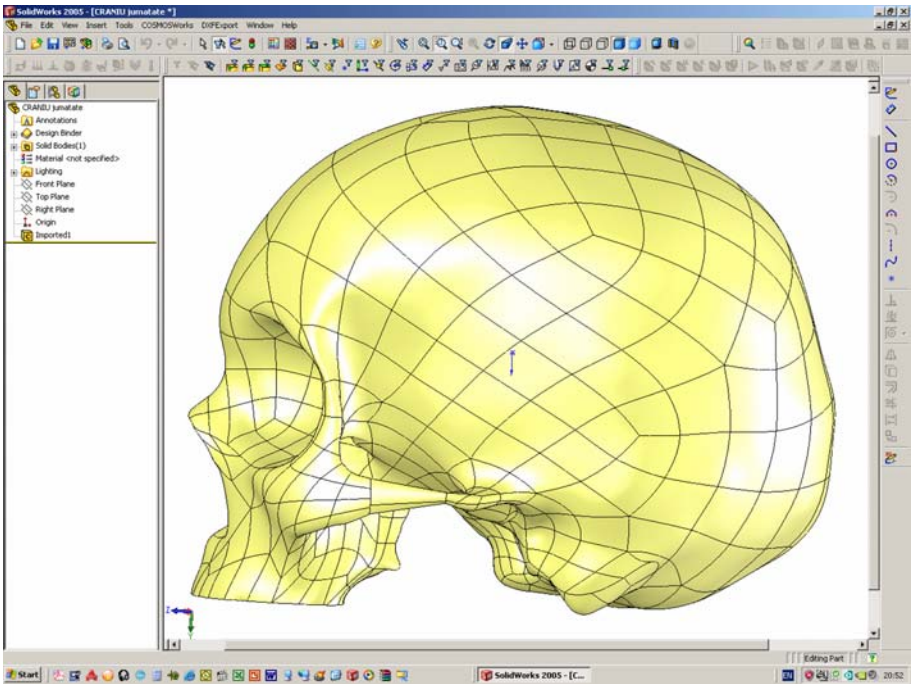


Fig. 6.2.4.3. Modelul CAD al craniului pe jumătate - vedere laterală (partea stângă).

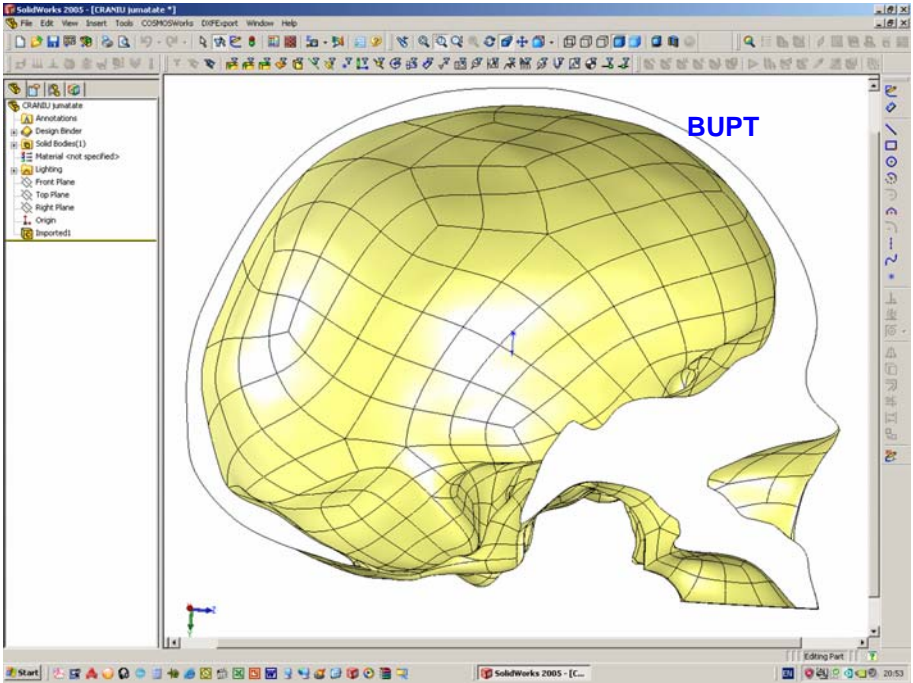


Fig. 6.2.4.4. Modelul CAD al craniului pe jumătate - vedere laterală (partea dreaptă).

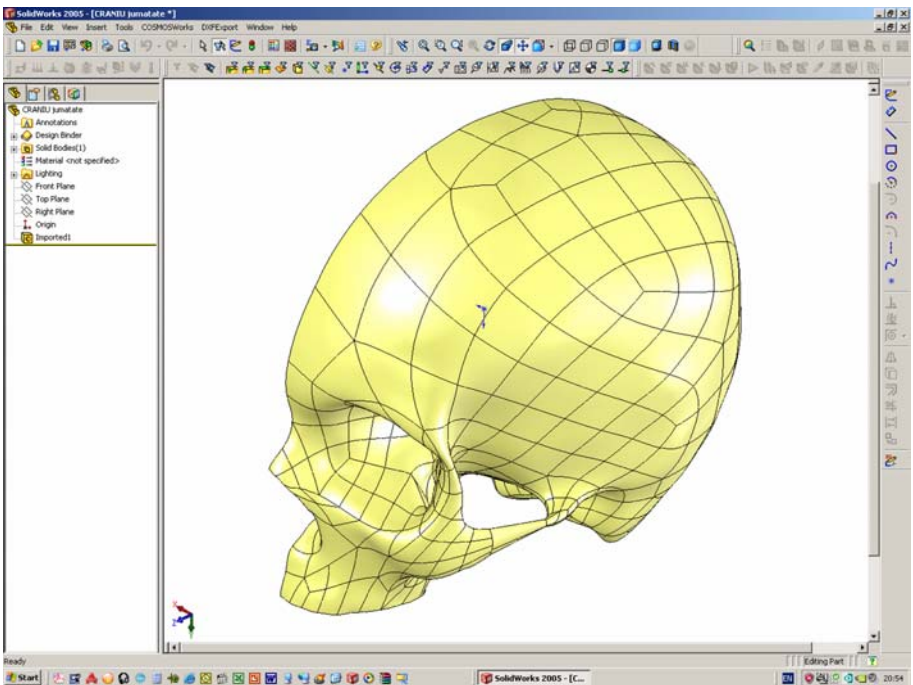


Fig. 6.2.4.5. Modelul CAD al craniului pe jumătate - vedere izometrică.

### 6.2.5. Adaptarea modelului CAD pentru analiza cu MEF.

S-a menționat faptul că maxilarul inferior cât și dantura superioară au fost eliminate din mesh-ul craniului. Disjunctorul ortodontic este însă plasat în cavitatea bucală, fixat fiind de dantura superioară care nu este prezentă în modelul CAD al craniului pe jumătate. De asemenea nici disjunctorul ortodontic nu este modelat CAD.

Din punct vedere mecanic, forța dezvoltată de disjunctorul ortodontic pentru deschiderea suturii boltei palatine, este transmisă craniului prin intermediul danturii superioare. O fracțiune din această forță se pierde datorită jocului aparent al dinților (de care este fixat disjunctorul) în spațiul alveolar. În concluzie, situația cea mai defavorabilă pentru craniu este aceea în care dantura ar fi solidară și rigidizată cu craniul, astfel întreaga forță dezvoltată de disjunctorul ortodontic ar fi transmisă craniului. Această situație nu se regăsește însă în realitate, dar poate fi reprodusă în cadrul analizei cu MEF.

Pentru cazul de față, geometria dinților, de care este fixat disjunctorul ortodontic (în ambele sale variante constructive), nu prezintă importanță, mai ales datorită faptului că disjunctorul nu este modelat CAD. Acești dinți, din punct de vedere geometric au fost modelați prin forme cilindrice amplasate în poziția anatomică a dinților respectivi. Diametrul formelor cilindrice a fost adoptat în funcție de dimensiunile anatomice ale dinților reali. În figura 6.2.5.1 este ilustrat modelul CAD al craniului pe jumătate împreună cu cele două forme cilindrice. Disjunctorul ortodontic, în ambele variante constructive ale sale - cel cu patru brațe, respectiv cel cu două brațe - fiind simetric ca geometrie, acționează asupra celor două, respectiv uneia din formele cilindrice.

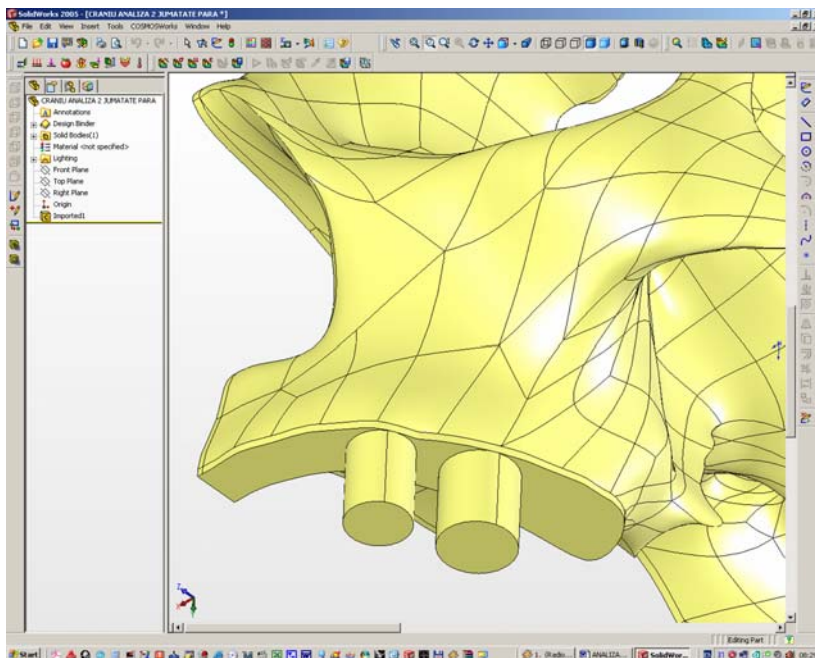


Fig. 6.2.5.1. Cele două forme cilindrice care modelează cei doi dinți de care este fixat disjunctorul ortodontic.

În ultima fază s-a modelat sutura boltei palatine. Aceasta s-a realizat printr-o tăietură extrudată din suprafața conținută în planul de simetrie al craniului (figura 6.2.5.2).

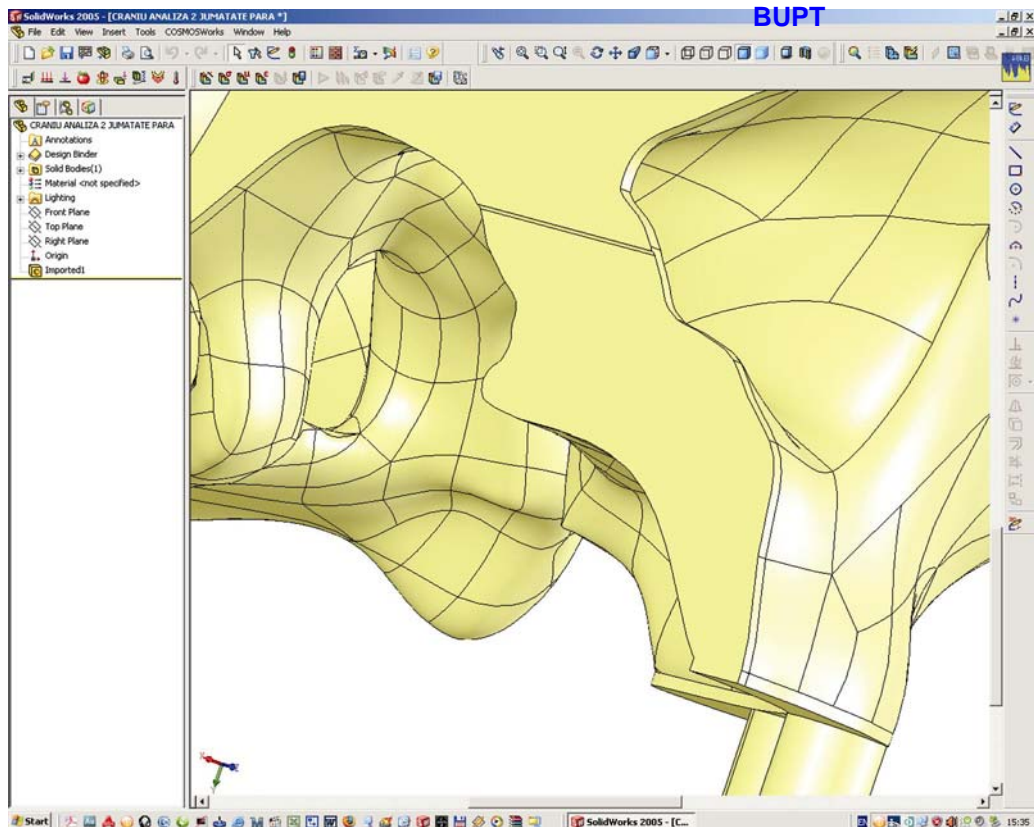


Fig. 6.2.5.2. Modelarea suturii boltei palatine.

Odată realizat modelul CAD al craniului, acesta reprezintă în cadrul programului SolidWorks 2005 un solid, căruia i se asociază un material, prin precizarea valorii densității masice. Pentru materia osoasă, în [26] se amintește o valoare medie a densității de  $1800 \text{ kg/m}^3$ . În momentul precizării valorii densității, programul calculează automat valoarea masei totale, determină poziția centrului de greutate și calculează momentele principale de inerție. În continuare se redau o parte din valorile acestor caracteristici:

- densitatea:  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ ;
- masa totală:  $m = 397 \text{ g}$ ;
- volumul total:  $V = 220814,886 \text{ mm}^3$ ;
- suprafața totală:  $S = 84357,721 \text{ mm}^2$ ;
- coordonatele centrului de greutate:
  - $x_G = -30,242 \text{ mm}$ ;
  - $y_G = 12,320 \text{ mm}$ ;
  - $z_G = 9,102 \text{ mm}$ .

### 6.3. Efectuarea analizei cu MEF.

În cele ce urmează se prezintă modul de realizare a analizei cu MEF a modelului CAD al craniului pe jumătate. Ca principal obiectiv îl constituie modul de distribuție a tensiunilor și deformațiilor totale în ansamblul craniului, datorate forțelor dezvoltate de acțiunea disjuncturului ortodontic.

Principalele caracteristici mecanice ale materiei osoase din compoziția craniului uman (menționate ca valori medii pentru analizele cu MEF, în [26]) sunt:

- modulul de elasticitate longitudinal:  $E = 9,6 \cdot 10^3$  MPa
- coeficientul lui Poisson:  $\nu = 0,3$ .

Pachetul software CAE care realizează analiza cu MEF în cadrul programului CAD SolidWorks 2005 se intitulează COSMOSWorks 2005. Pachetul COSMOSWorks 2005 poate efectua analize liniare sau neliniare, determinări ale pulsațiilor proprii, flambaj, efecte termice, optimizare sau oboseală. De asemenea se pot efectua teste de cădere liberă a corpurilor (drop test).

Studiul de față a fost realizat în două variante: prima pentru disjunctorul ortodontic cu patru brațe, iar cea de-a doua pentru cel cu două brațe. Forțele (măsurate experimental de către colectivul departamentului de Ortodonție al Facultății de Medicină Dentară "Victor Babeș" din Timișoara) dezvoltate în urma acțiunii celor două tipuri de disjunctoare ortodontice sunt:

- $F = 22,5$  N - disjunctorul ortodontic cu patru brațe;
- $F = 45$  N - disjunctorul ortodontic cu două brațe.

Din programul SolidWorks 2005 se lansează modulul COSMOSWorks 2005. Inițial se precizează tipul analizei ce urmează a fi efectuată. S-a ales tipul "*Static Analysis*", deoarece se consideră că forțele dezvoltate din acțiunea disjuncturului ortodontic sunt statice.

După definirea tipului analizei, se introduc caracteristicile mecanice ale materialului asociat modelului CAD. Într-o ipoteză simplificatoare, materia osoasă asociată ca material modelului CAD al craniului, s-a considerat perfect omogenă și izotropă.

Într-o etapă următoare, se alege tipul discretizării (meshing) în elemente finite. În cazul de față s-au folosit elemente finite de tipul tetraedric cu patru noduri per element TETRA4, caracteristice analizei corpurilor solide. Programul oferă posibilitatea de a alege calitatea discretizării, mai precis dimensiunile elementelor finite, fapt care se reflectă în precizia de discretizare a modelului CAD. Cu cât dimensiunile laturilor elementelor finite sunt mai reduse, cu atât precizia de calcul este mai ridicată, dar numărul de elemente finite crește considerabil și implicit numărul de noduri. Cu creșterea numărului de noduri, durata rezolvării analizei este sensibil mai mare. De asemenea rezolvarea analizei presupune resurse sporite din partea platformei de calcul, mai ales ca putere de calcul (frecvență de lucru a procesorului) și memorie RAM.

S-a adoptat o precizie relativ ridicată de discretizare, cu care să se poată efectua analiza în condiții de stabilitate a platformei de calcul, dimensiunea medie a laturilor elementelor finite fiind de 2 mm. Discretizarea modelului CAD al craniului conține 234.020 elemente finite totalizând 364.174 noduri. În figura 6.3.2 este prezentată discretizarea modelului CAD al craniului.

Următoarea etapă a analizei cu MEF o constituie impunerea condițiilor pe contur și a încărcărilor modelului CAD al craniului. Condițiile pe contur s-au impus prin imobilizarea suprafeței cuprinse în planul de simetrie al întregului craniu, pentru a simula efectul prezenței părții simetrice excluse a geometriei craniului. Cu alte cu-

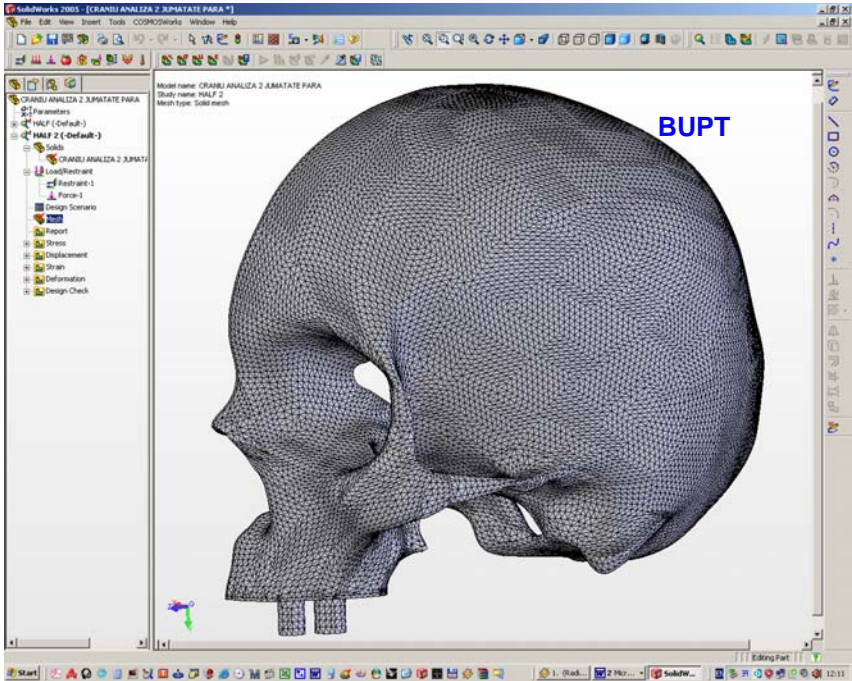


Fig. 6.3.2. Discretizarea modelului CAD al craniului pe jumătate.

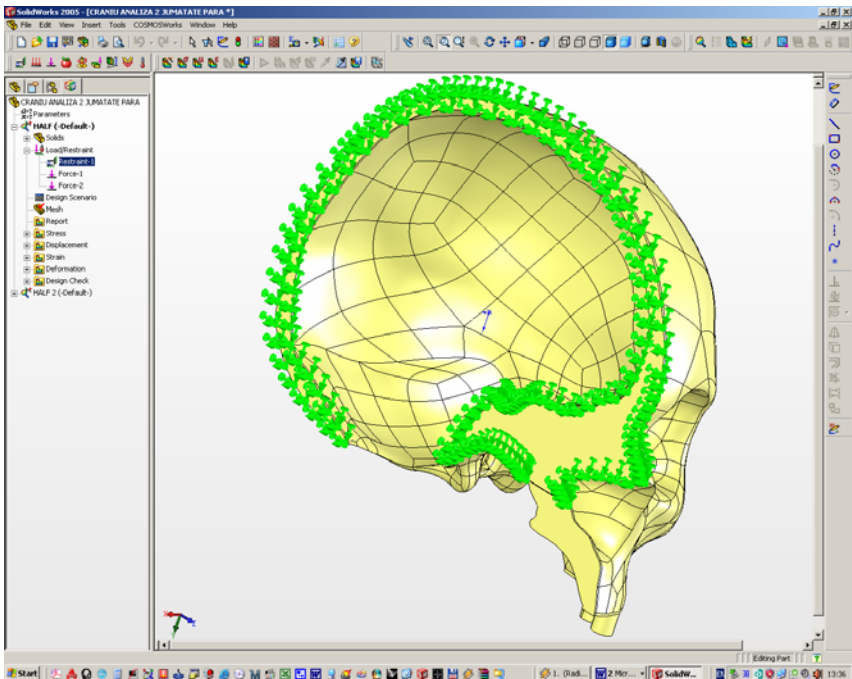


Fig. 6.3.3. Suprafața imobilizată a modelului CAD al craniului pe jumătate.

vinte, se poate spune că modelul CAD al craniului pe jumătate este "încadrat" în partea simetrică nemodelată. În figura 6.3.3 este marcată suprafața imobilizată a modelului CAD al craniului pe jumătate.

În continuare, s-au aplicat forțele la nivelul formelor cilindrice care modelează dinții asupra cărora acționează disjunctorul ortodontic în ambele sale variante constructive. În figura 6.3.4 este ilustrat modul de aplicare al forțelor pentru disjunctorul cu patru brațe (două forțe cu valoarea de 22,5 N), respectiv în figura 6.3.5, pentru cel cu două brațe (o forță cu valoarea de 45 N).

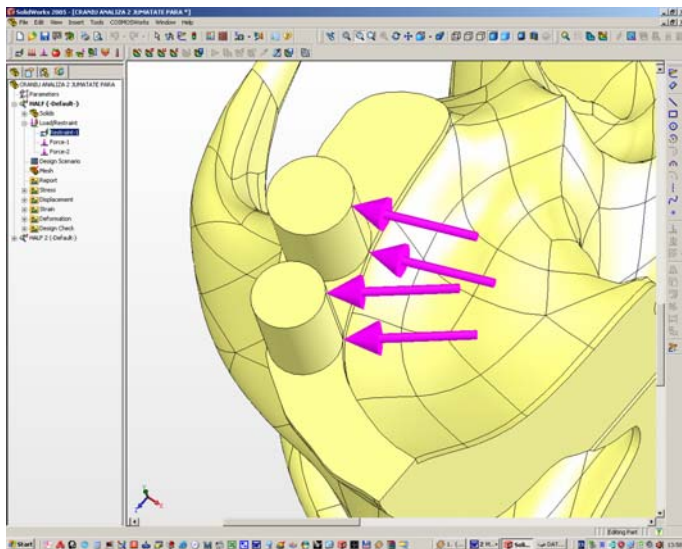


Fig. 6.3.4. Aplicarea celor două forțe în cazul disjunctorului cu patru brațe.

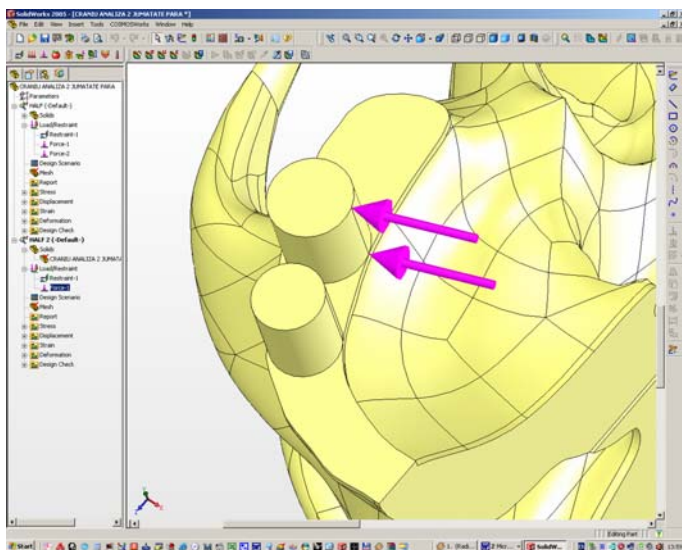


Fig. 6.3.5. Aplicarea forței în cazul disjunctorului cu două brațe.



Odată realizată discretizarea modelului CAD al craniului pe jumătate și după aplicarea condițiilor pe contur, respectiv a forțelor, programul este gata să ruleze analiza. Aceasta se inițializează prin comanda *Run* din meniul COSMOSWorks 2005.

Conform criteriului vonMises, tensiunea echivalentă este calculată cu următoarea relație:

BUPT

$$\sigma_{vonMises} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} \quad [\text{MPa}] \quad (6.3.1),$$

unde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  reprezintă cele trei tensiuni principale.

Deplasarea resultantă a unui punct oarecare aparținător modelului CAD al craniului pe jumătate este calculată cu relația:

$$U_{res} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \quad [\text{mm}] \quad (6.3.2),$$

unde  $U_x$ ,  $U_y$  și  $U_z$  sunt cele trei deplasări ale punctului considerat orientate după direcția axelor  $x$ ,  $y$  și  $z$ .

Rezultatele analizei cu MEF constă în afișarea câmpului tensiunilor totale  $\sigma_{vonMises}$  și a celui al deplasărilor rezultante  $U_{res}$ . Aceste două câmpuri sunt reprezentate pe alura deformată a modelului CAD al craniului pe jumătate.

În cele ce urmează, se prezintă cele două câmpuri pentru fiecare variantă constructivă a disjunctivului ortodontic în parte.

**A. Disjunctivul cu patru brațe.** În figura 6.3.6 este ilustrat câmpul tensiunilor  $\sigma_{vonMises}$ . Valoarea maximă de 9,364 MPa s-a înregistrat la nivelul bazei suturii boltei palatine. O ușoară stare de tensiune se poate observa și la nivelul bazei formelor cilindrice. Culoarea predominantă albastră indică zonele nesolicitate. Faptul că valoarea maximă a tensiunii  $\sigma_{vonMises}$  s-a înregistrat la baza suturii boltei palatine confirmă modul de acționare al disjunctivului ortodontic.

Figura 6.3.7 ilustrează câmpul deplasărilor rezultante  $U_{res}$ . Valoarea maximă de 19  $\mu\text{m}$  s-a înregistrat la nivelul extremității libere a formei cilindrice amplasată spre partea frontală a modelului craniului. Extremitatea liberă a celeilalte forme cilindrice a înregistrat o deplasare de 14  $\mu\text{m}$ . Deși forțele transmise prin intermediul brațelor disjunctivului sunt egale, se poate concluziona că brațul orientat spre partea frontală a craniului contribuie într-o mai mare măsură la deschiderea suturii boltei palatine decât brațul adiacent.

**B. Disjunctivul cu două brațe.** Figura 6.3.8 ilustrează câmpul tensiunilor  $\sigma_{vonMises}$ . Valoarea maximă de 9,69 MPa s-a înregistrat tot la nivelul bazei suturii boltei palatine, fiind ușor mai ridicată decât în cazul disjunctivului cu patru brațe. De asemenea, o ușoară stare de tensiune se poate observa și la baza formei cilindrice asupra căreia s-a aplicat forța dezvoltată de disjunctivul ortodontic cu două brațe. Și în acest caz se confirmă destinația și modul de acționare al disjunctivului ortodontic.

În figura 6.3.9 se ilustrează câmpul deplasărilor rezultante  $U_{res}$ . Valoarea maximă de 20  $\mu\text{m}$  s-a înregistrat la nivelul extremității libere a formei cilindrice asupra căreia s-a aplicat forța dezvoltată de disjunctivul ortodontic cu două brațe.

Interpretând rezultatele obținute în cazul celor două variante constructive ale disjunctivului ortodontic, se recomandă folosirea celui cu patru brațe deoarece produce tensiuni și deformații mai reduse în comparație cu cel cu două brațe, rezultând într-un confort sporit asupra pacientului.

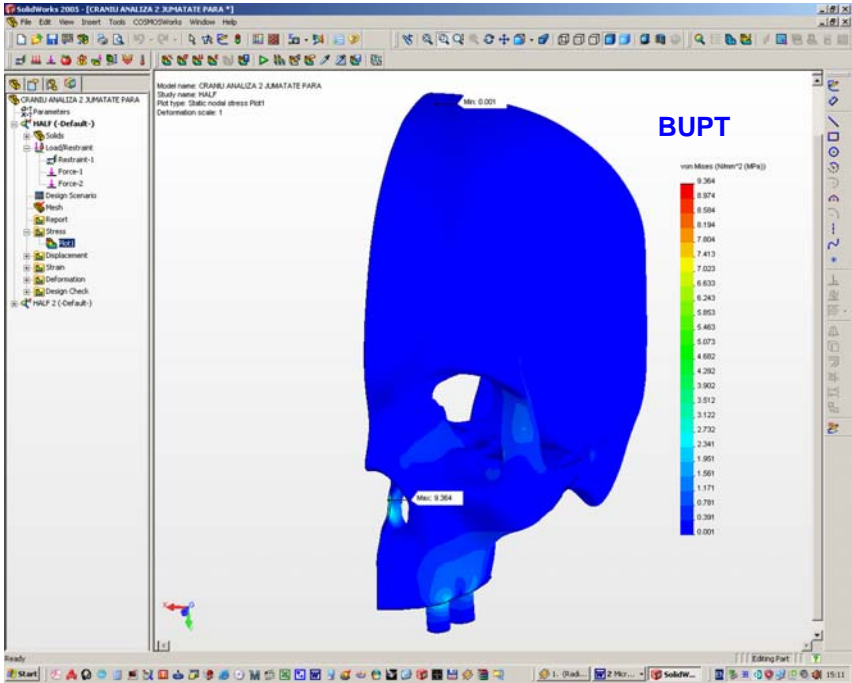


Fig. 6.3.6. Câmpul tensiunilor  $\sigma_{vonMises}$  în varianta disjunctivului cu patru brațe.

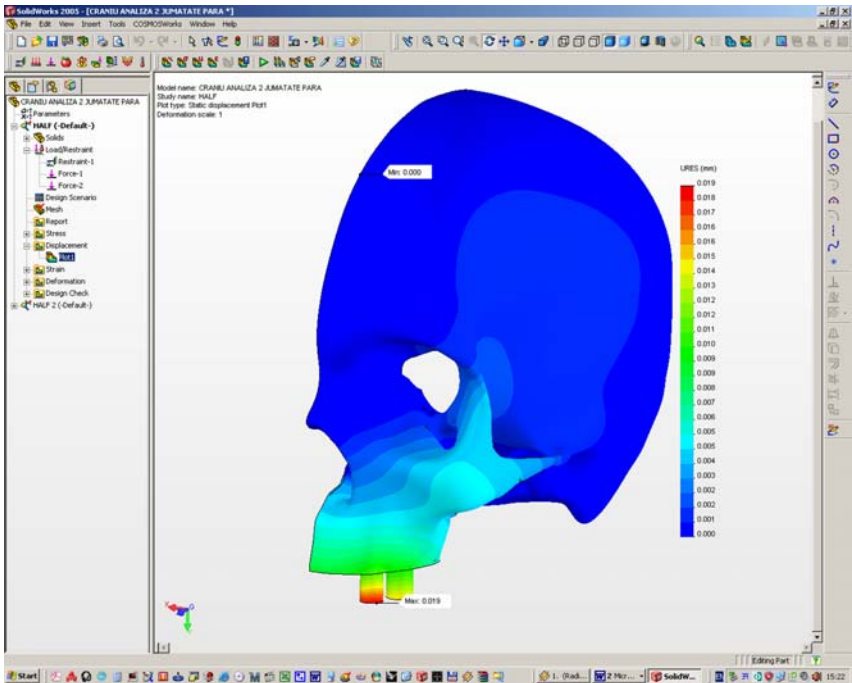


Fig. 6.3.7. Câmpul deplasărilor  $U_{res}$  în varianta disjunctivului cu patru brațe.

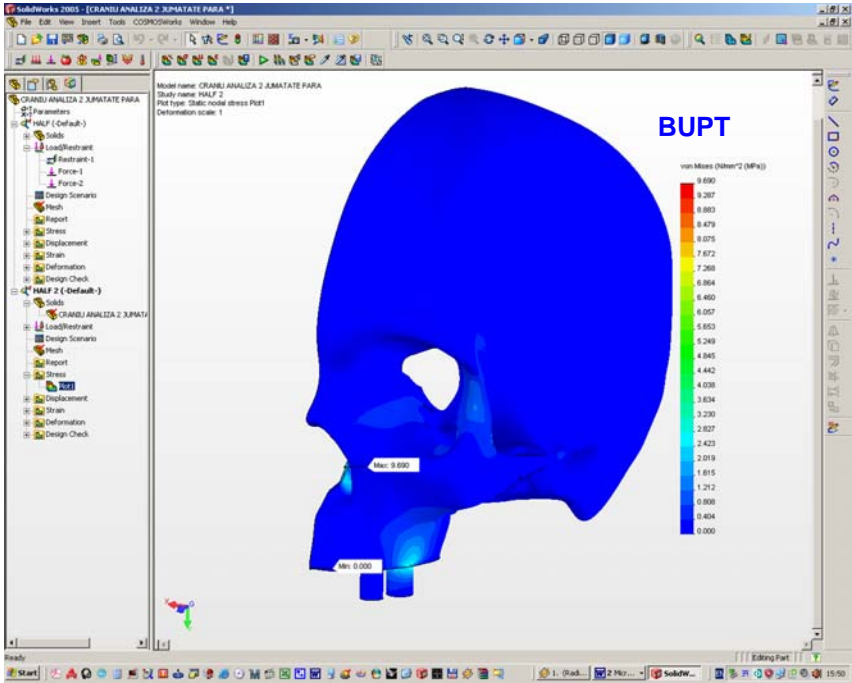


Fig. 6.3.8. Câmpul tensiunilor  $\sigma_{vonMises}$  în varianta disjunctivului cu două brațe.

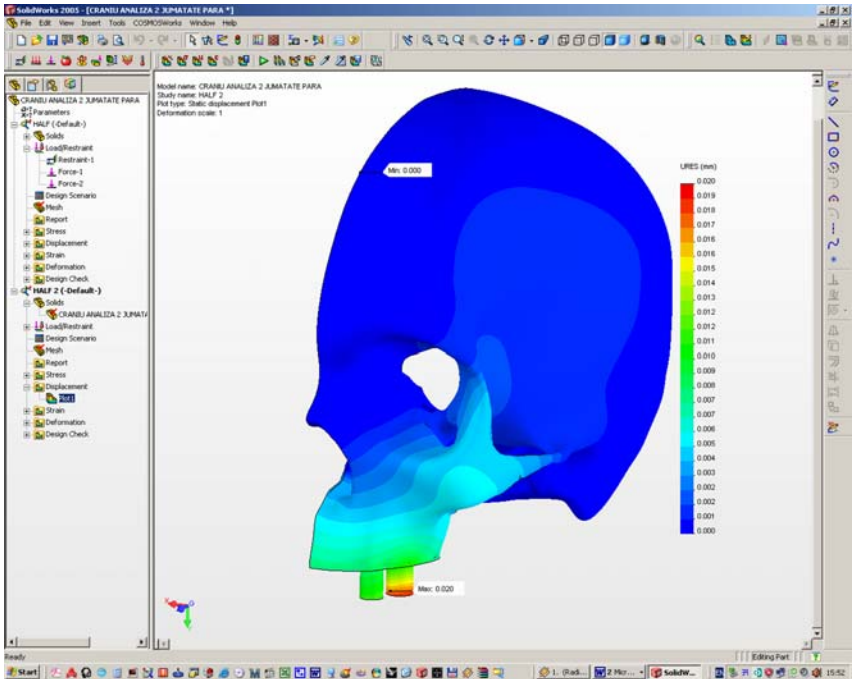


Fig. 6.3.9. Câmpul deplasărilor  $U_{res}$  în varianta disjunctivului cu două brațe.

## 7. Modelul CAD al femurului uman

### 7.1. Etapa achiziției datelor prin scanare tomografică.

Pentru realizarea modelului geometric solid CAD s-a utilizat un femur uman ilustrat în figurile 7.1.1.a și 7.1.1.b.



Fig. 7.1.1.a. Femur uman utilizat în scopul modelării CAD (vedere parțială).



Fig. 7.1.1.b. Femur uman utilizat în scopul modelării CAD (vedere parțială).

Femurul a fost supus operațiunii de scanare tomografică cu ajutorul unui echipament SIEMENS Somatom Plus 4 în cadrul laboratorului de imagistică computerizată a firmei NEUROMED din Timișoara. Scanarea s-a efectuat în poziție longitudinală a femurului, iar secțiunile transversale au fost realizate cu un pas de 1 mm pentru a obține o precizie ridicată a informațiilor imagistice. În final s-au obținut un număr de 409 secțiuni transversale ale femurului, acest număr fiind suficient de mare în scopul realizării unui model CAD de înaltă fidelitate.

În figurile 7.1.2.a, 7.1.2.b, 7.1.2.c și 7.1.2.d sunt redată o parte din imaginile secțiunilor transversale ale femurului uman, obținute în urma procesului de scanare tomografică. Se menționează faptul că s-au ilustrat secțiunile transversale la un pas de 5 mm datorită numărului foarte mare de imagini.

## 7.2. Etapa preprocesării datelor.

În cadrul acestei etape s-a realizat reconstrucția geometrică a suprafețelor femurului pornind de la imaginile secțiunilor transversale obținute prin scanarea tomografică. Suprafețele reconstruite ale femurului formează rețeaua de triangulație (mesh-ul), obținută prin tehnica modelării prin fațetare.

În continuare se prezintă itinerariul reconstrucției suprafețelor exterioare și interioare ale femurului uman scanat tomografic așa cum s-au derulat fazele în cadrul programului MATERIALISE Mimics 10.01.

Inițial, s-au importat în program cele 409 imagini ale secțiunilor transversale obținute în urma scanării tomografice a femurului. Figura 7.2.1 prezintă fereastra de lucru a programului MATERIALISE Mimics 10.01, împreună cu una din imaginile secțiunilor transversale rezultate în urma scanării tomografice a femurului.

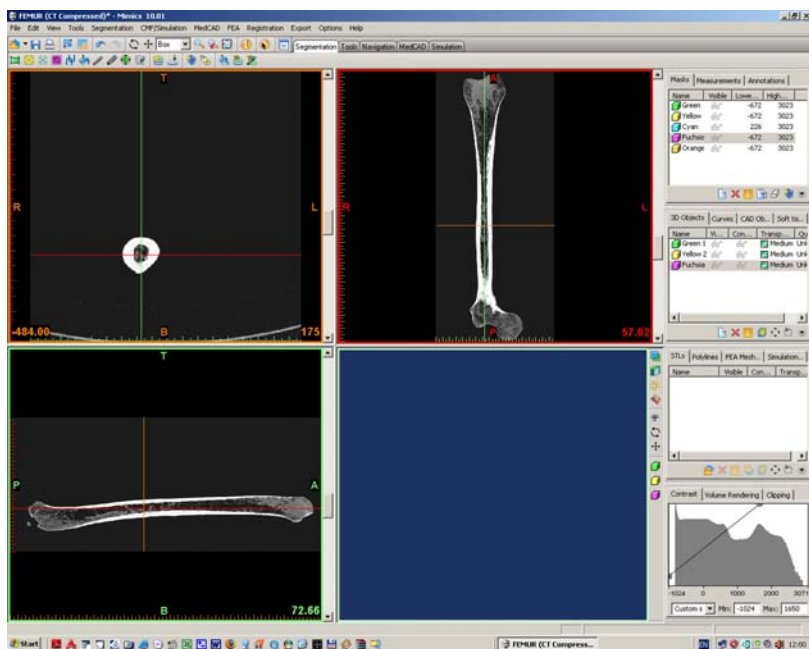


Fig. 7.2.1. Fereastra de lucru a programului MATERIALISE Mimics 10.01.

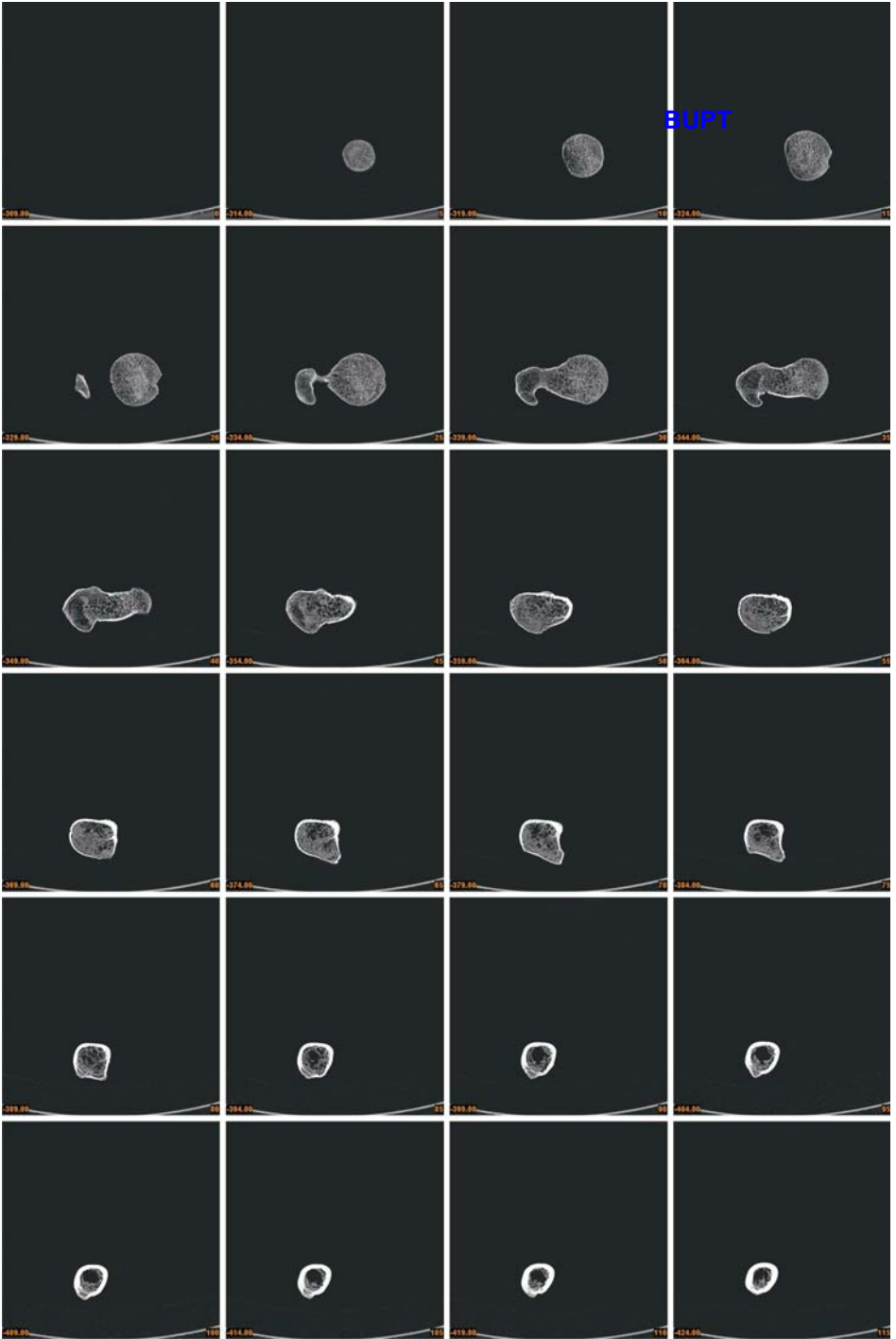


Fig. 7.1.2.a. Imaginile secțiunilor transversale ale femurului rezultate în urma procesului de scanare tomografică (secțiunile 0-115).

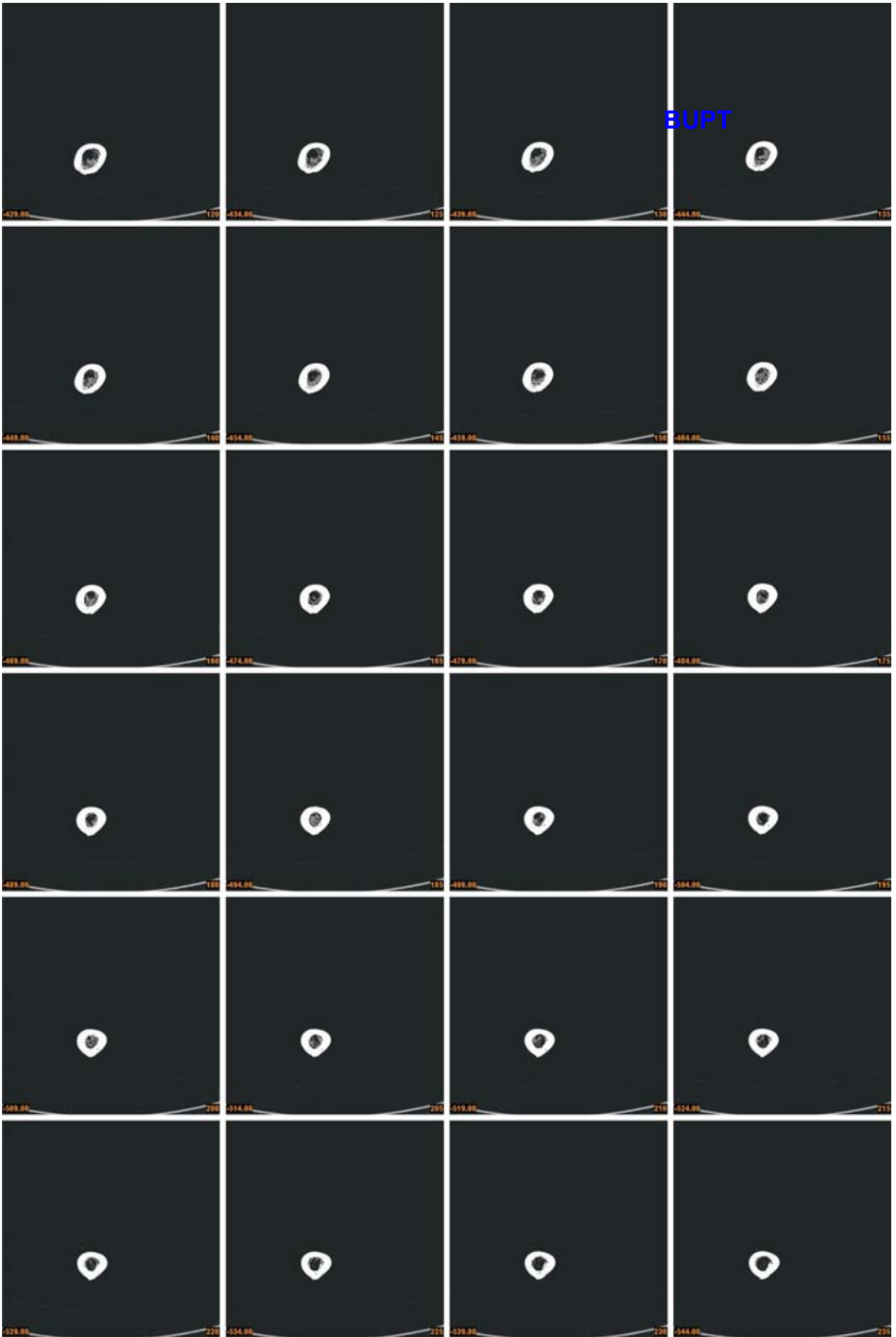


Fig. 7.1.2.b. Imaginile secțiunilor transversale ale femurului rezultate în urma procesului de scanare tomografică (secțiunile 120-235).

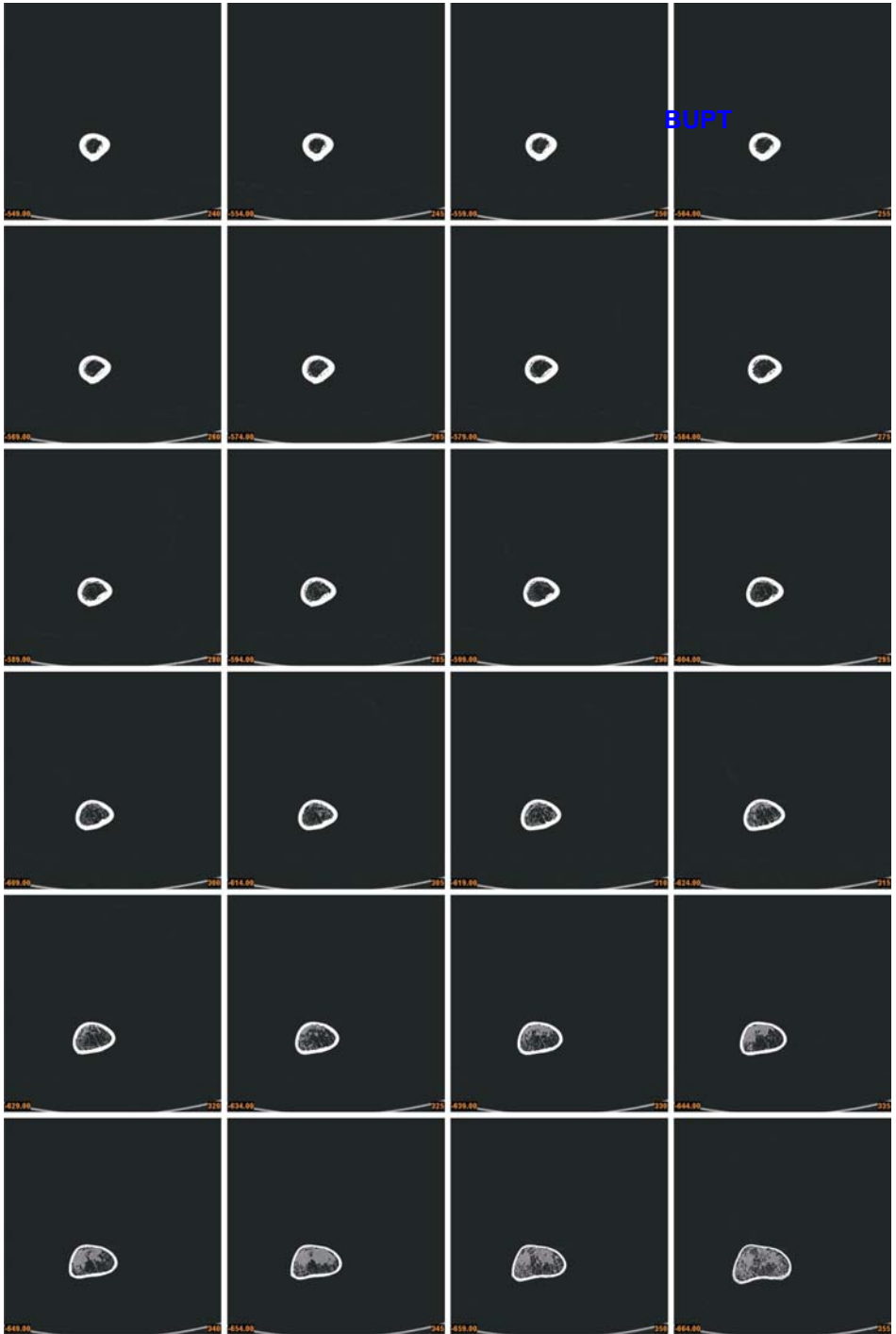


Fig. 7.1.2.c. Imaginile secțiunilor transversale ale femurului rezultate în urma procesului de scanare tomografică (secțiunile 240-355).



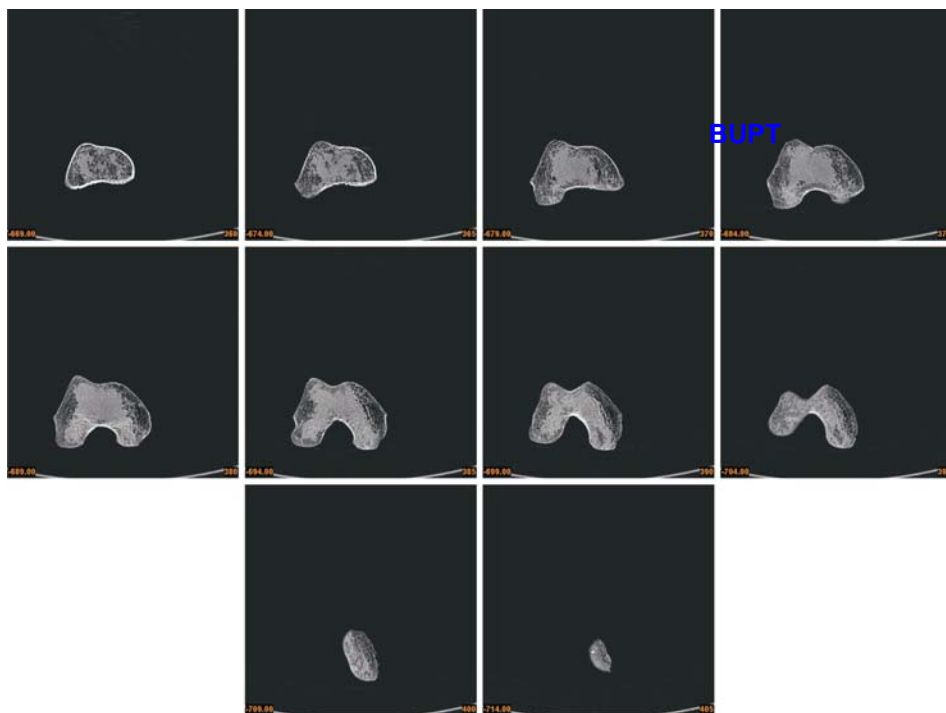


Fig. 7.1.2.d. Imaginile secțiunilor transversale ale femurului rezultate în urma procesului de scanare tomografică (secțiunile 360-405).

Într-o primă etapă s-a reconstruit suprafața exterioară (învelișul exterior) a geometriei femurului pe baza unei măști de culoare verde definită în intervalul  $[-672; +3072]$  valori de nuanțe de gri. Masca de culoare verde a reunit toți pixelii imaginilor secțiunilor transversale care au aparținut femurului mai puțin cei care au aparținut fundalului de culoare neagră a imaginilor. Alegerea limitelor intervalului de valori, pe baza căruia s-a definit masca de culoare verde, s-a dovedit a fi un proces laborios, realizat prin numeroase iterații, datorită numeroaselor nivele ale densității materiei osoase. În principal, s-a urmărit păstrarea cât mai fidelă a informațiilor imagistice aferente femurului, fără a introduce informații nedorite aparținând fundalului imaginilor secțiunilor transversale. Figura 7.2.2 redă masca de culoare verde definită conform celor menționate anterior.

În urma construcției măștii de culoare verde s-a realizat mesh-ul învelișului exterior al geometriei femurului. În momentul în care s-a realizat rețeaua de triangulație a învelișului exterior al femurului, aceasta a fost salvată într-un fișier cu extensia STL. Figurile 7.2.3.a și 7.2.3.b ilustrează în două vederi mesh-ul învelișului exterior al geometriei femurului.

Din cele două imagini anterioare se poate observa gradul înalt de fidelitate al mesh-ului învelișului exterior al geometriei femurului, sub aspectul reproducerii detaliilor.

Este important de menționat faptul că fidelitatea detaliilor suprafețelor oricărui obiect fizic, a cărui reconstrucție geometrică s-a realizat în urma scanării sale tomografice, depinde de acuratețea imaginilor secțiunilor transversale în sine și implicit de performanțele echipamentului de scanare tomografică. Echipamentele to-

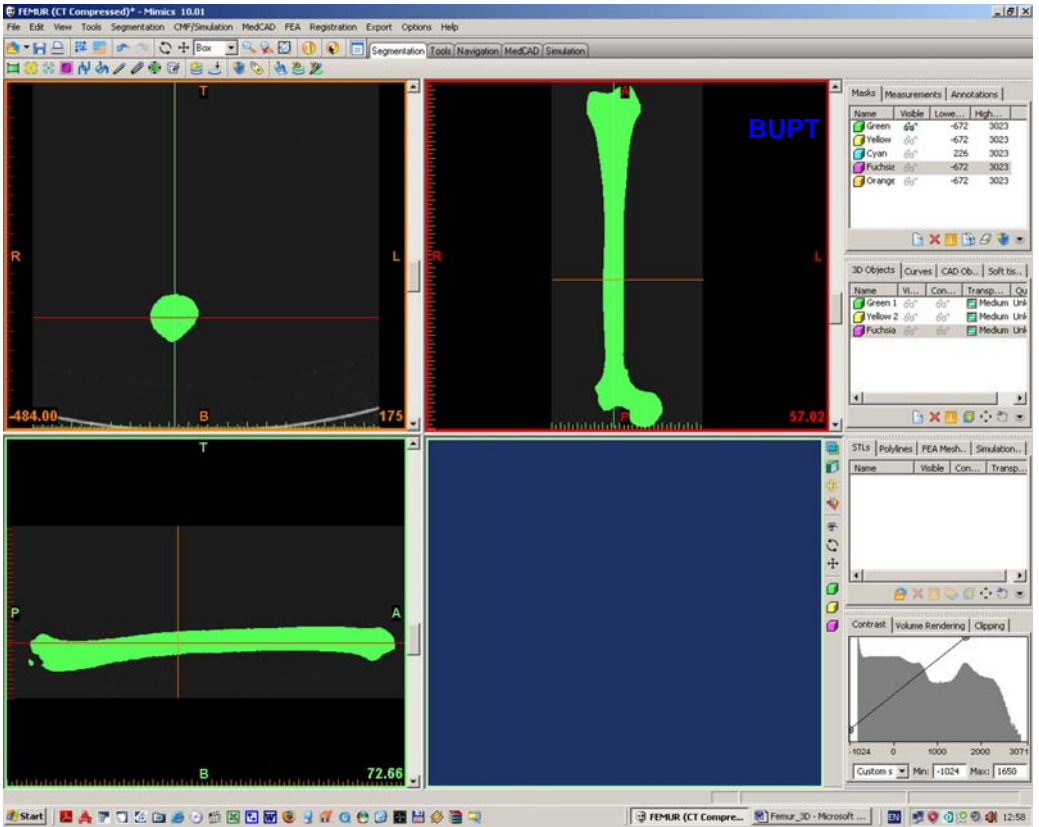


Fig. 7.2.2. Masca de culoare verde definită în programul MATERIALISE® Mimics® 10.01.

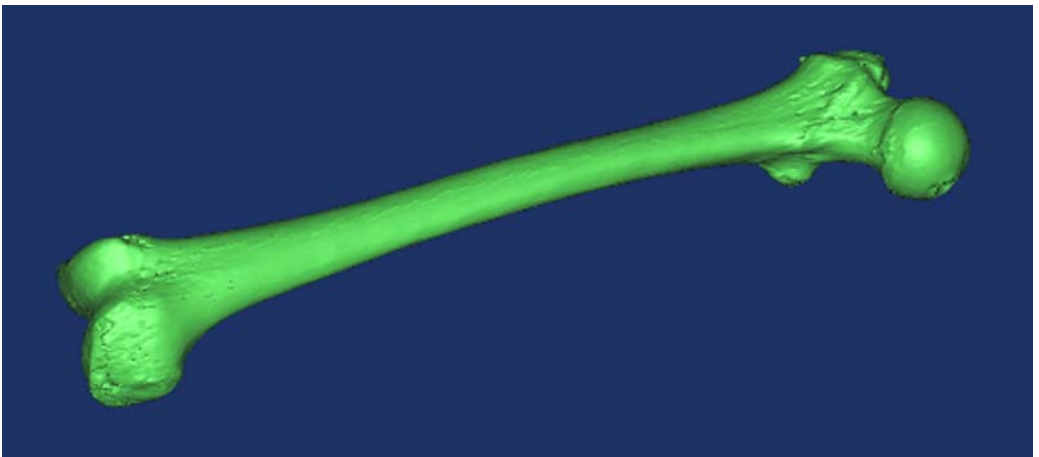


Fig. 7.2.3.a. Rețeaua de triangulație a învelișului exterior al femurului (vederea a).

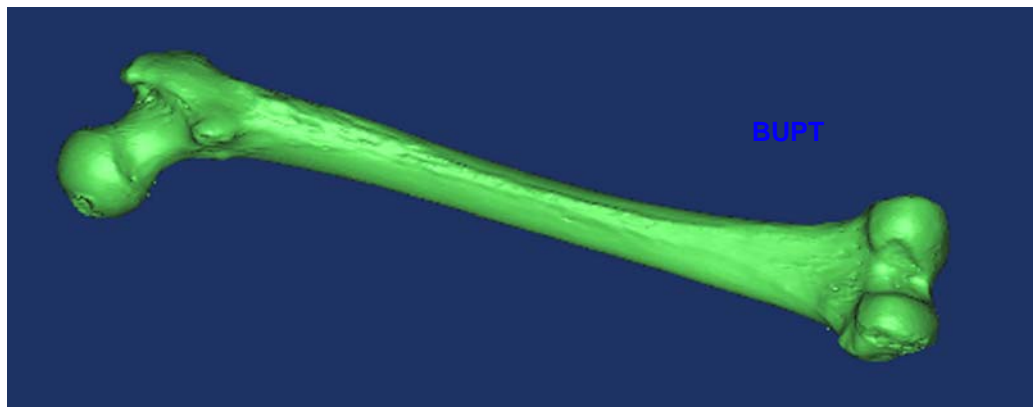


Fig. 7.2.3.b. Rețeaua de triangulație a învelișului exterior al femurului (vederea b).

mografice de ultimă generație sunt capabile de performanțe foarte ridicate în ceea ce privește realizarea imaginilor secțiunilor transversale ale oricărui obiect fizic. De aceea utilizarea unor echipamente tomografice performante coroborată cu adoptarea programelor adecvate de reconstrucție geometrică conduce la obținerea unor rezultate impresionante în domeniu.

În continuare, s-a trecut la faza realizării mesh-ului învelișului interior al geometriei femurului. Figura 7.2.4 ilustrează două secțiuni tomografice longitudinale (orizontală și verticală) ale femurului realizate de către program pe baza imaginilor secțiunilor transversale.

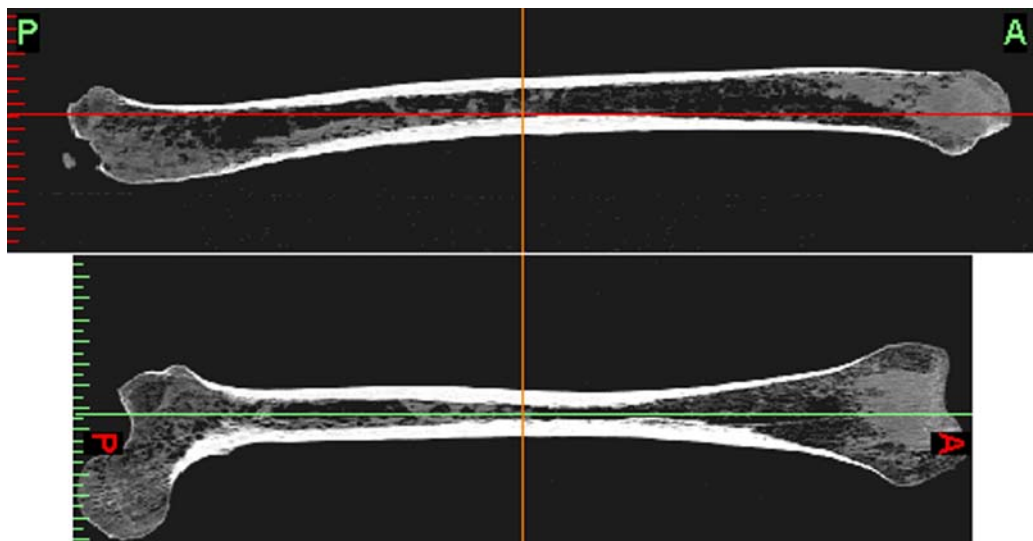


Fig. 7.2.4. Secțiuni tomografice longitudinale (orizontală și verticală) ale femurului.

Analizând figura 7.2.4 se observă structura interioară tubulară a părții mediane a femurului. Această structură tubulară posedă o grosime variabilă a pereților și este prezentă în cea mai mare parte a regiunii mediane a femurului.

Epifizele, sau părțile extreme ale femurului, au mai degrabă o structură de tip "coajă". Peretele părții tubulare este alcătuit dintr-o structură fibroasă care posedă o densitate relativ constantă, după cum se poate deduce din analiza imaginii. Epifizele posedă în interiorul structurii de tip coajă materie spongioasă care se propagă în interiorul părții mediane, dar în această ultimă parte structura spongioasă este caracterizată de o densitate mult mai scăzută decât în zona epifizelor și este discontinuă.

În scopul viitoarei analize cu MEF, s-a realizat reconstrucția geometrică a învelișului interior al femurului pe baza structurii tubulare a părții mediane și a celei de tip coajă a epifizelor, care posedă structură fibroasă, considerându-se într-o ipoteză simplificatoare faptul că doar această structură fibroasă este capabilă să preia sarcini exterioare.

Pentru reconstrucția geometrică a învelișului interior corespunzător zonei de tip coajă a epifizelor s-a pornit de la masca de culoare verde. Într-o primă fază s-a creat o mască de culoare galbenă prin erodarea celei de culoare verde cu o grosime de 4 pixeli care corespunde grosimii zonei de tip coajă. Operațiunea de erodare presupune eliminarea unui contur de pixeli din masca de culoare considerată. Dacă masca de culoare verde a fost erodată cu o grosime de 4 pixeli, acest fapt indică eliminarea consecutivă a 4 contururi de pixeli din mască. Fiecare contur de pixeli al unei măști are grosimea de un pixel. Procedeeul de erodare este ilustrat în figura 7.2.5 pentru obținerea măștii de culoare galbenă care este suprapusă peste cea de culoare verde.

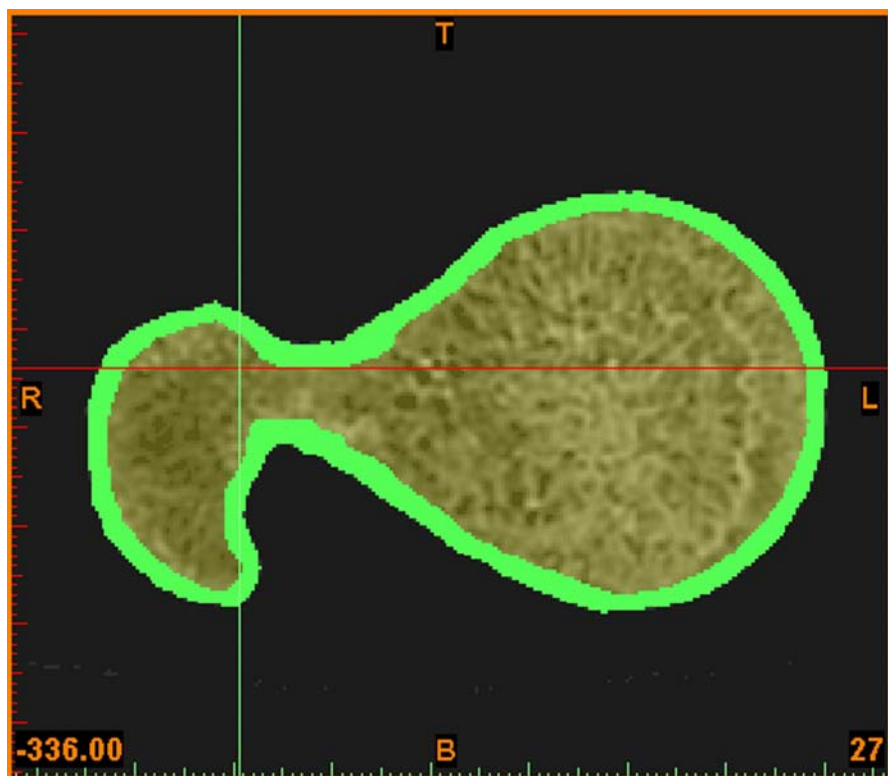


Fig. 7.2.5. Masca de culoare galbenă obținută prin erodarea celei de culoare verde.

În continuare s-a realizat delimitarea zonelor de tip coajă ale epifizelor în raport cu cea mediană de structură tubulară. Această delimitare nu este precisă ci doar convențională datorită structurii neomogene în ansamblu a femurului. Astfel s-au analizat cele 409 imagini ale secțiunilor transversale, iar zona cuprinsă între prima secțiune și secțiunea 81 împreună cu zona cuprinsă între secțiunea 351 și ultima secțiune (409) s-au considerat a fi caracterizate de structura de tip coajă amintită anterior. Astfel din masca de culoare galbenă s-au păstrat zonele aparținând structurii de tip coajă și s-a eliminat zona cuprinsă între secțiunile 81 - 351, care nu s-a considerat a fi de acest tip ci tubulară cu grosime variabilă a peretelui. Zona de tip coajă reprezintă diferența dintre suprafața măștii de culoare verde și cea de culoare galbenă (Fig. 7.2.5). După definirea măștii de culoare galbenă s-a realizat mesh-ul aferent măștii, care este format din două părți distincte corespunzătoare învelișului interior din zonele de tip coajă ale celor două epifize. În concluzie, din mesh-ul realizat pe baza măștii de culoare galbenă lipsește partea care formează zona mediană a învelișului interior al femurului, zonă considerată cu structură tubulară. Mesh-ul (format din cele două părți distincte) creat pe baza măștii de culoare galbenă a fost salvat într-un fișier STL, fiind ilustrat în două vederi, în figurile 7.2.6.a și 7.2.6.b.



Fig. 7.2.6.a. Mesh-ul învelișului interior al femurului în zonele de tip coajă (vederea a).



Fig. 7.2.6.b. Mesh-ul învelișului interior al femurului în zonele de tip coajă (vederea b).

În etapa finală a reconstrucției geometrice a învelișului interior al femurului s-a realizat mesh-ul învelișului interior al zonei considerate tubulară, respectiv zona mediană a femurului. În acest scop s-a creat o mască de culoare violet care

cuprinde pixelii aparținând interiorului femurului din zona mediană și care nu conțin din punct de vedere imagistic structura fibroasă a peretelui zonei mediane considerate tubulară, ci doar măduva osoasă prezentă în zona mediană. Masca de culoare violet a fost creată pe baza imaginilor aferente intervalului 81 → 351 de secțiuni transversale ale femurului, secțiuni care nu au fost prezente în definirea măștii de culoare galbenă. Figura 7.2.7 ilustrează masca de culoare violet așa cum aceasta apare în două secțiuni tomografice longitudinale (orizontală și verticală) și una transversală.

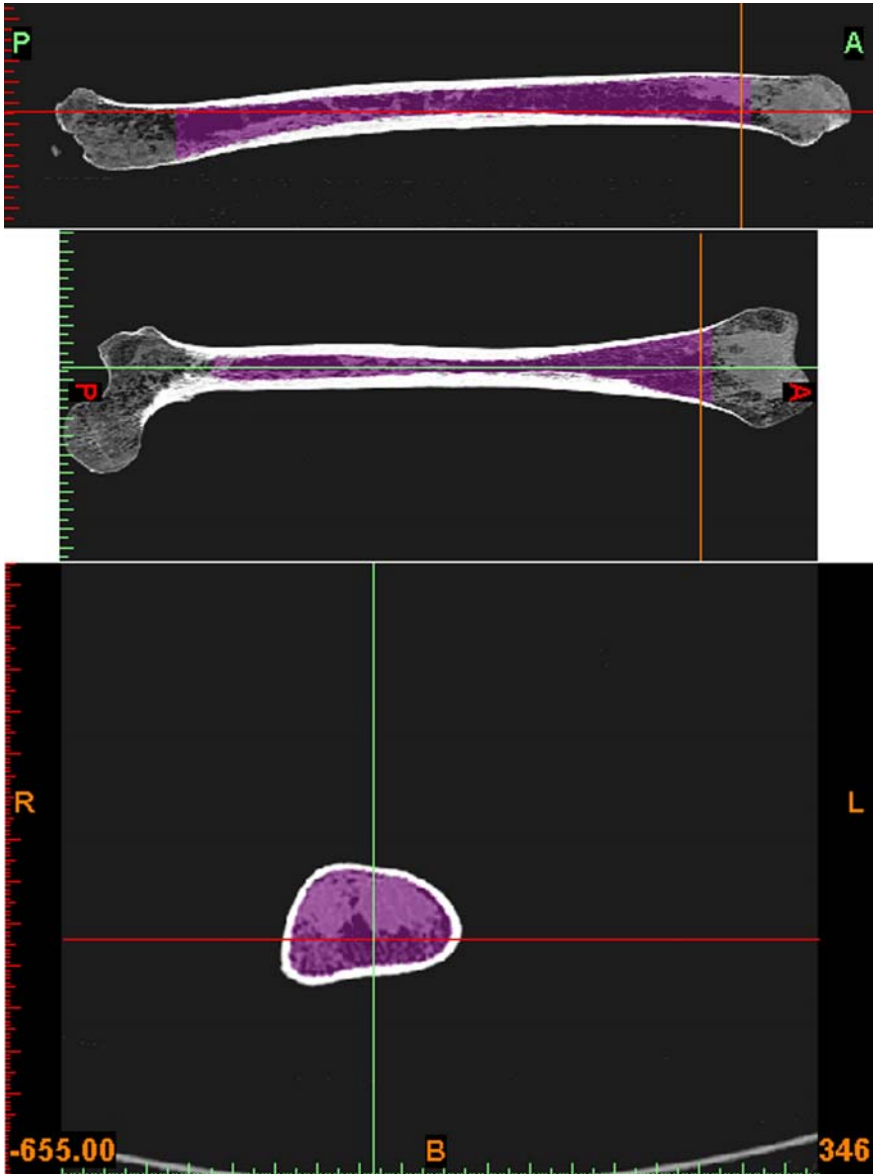


Fig. 7.2.7. Masca de culoare violet.

Pe baza măștii de culoare violet s-a realizat mesh-ul învelișului interior al femurului din zona mediană considerată cu structură tubulară. Mesh-ul realizat pe baza măștii de culoare violet a fost salvat într-un fișier STL, fiind ilustrat în două vederi, în figurile 7.2.8.a și 7.2.8.b.

**BUPT**

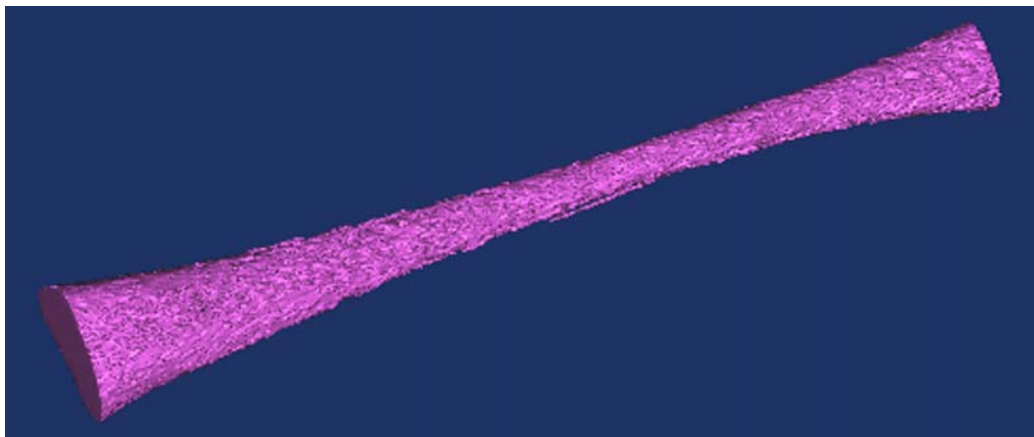


Fig. 7.2.8.a. Mesh-ul învelișului interior al femurului în zona mediană de tip tubular (vederea a).

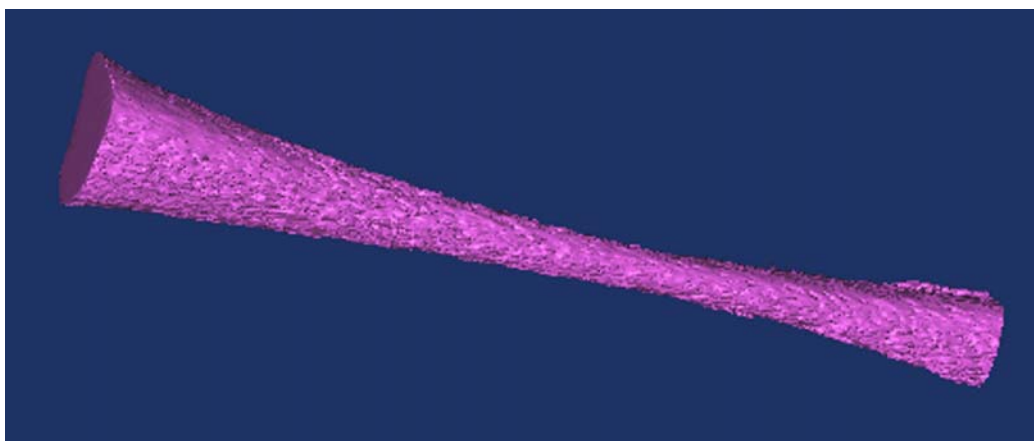


Fig. 7.2.8.b. Mesh-ul învelișului interior al femurului în zona mediană de tip tubular (vederea b).

În concluzie, învelișul interior al întregului femur a reunit mesh-urile zonelor de tip coajă, corespunzătoare celor două epifize, și a zonei mediane de tip tubular, rețelele fiind ilustrate în două vederi, în figurile 7.2.9.a și 7.2.9.b.

Din punct de vedere geometric, reconstrucția suprafețelor (învelișurilor exterioare și interioare) femurului reprezintă diferența dintre mesh-urile învelișului exterior (un singur mesh) și cel interior (două mesh-uri pentru zonele epifizelor și unul pentru zona mediană).

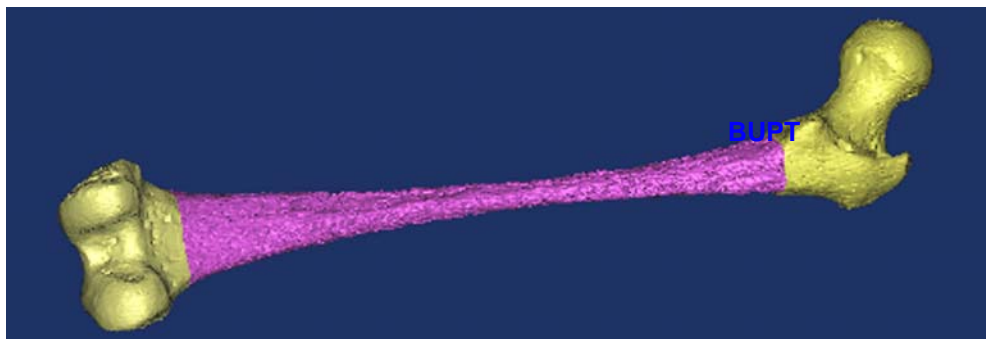


Fig. 7.2.9.a. Mesh-ul final al învelișului interior al femurului (vederea a).

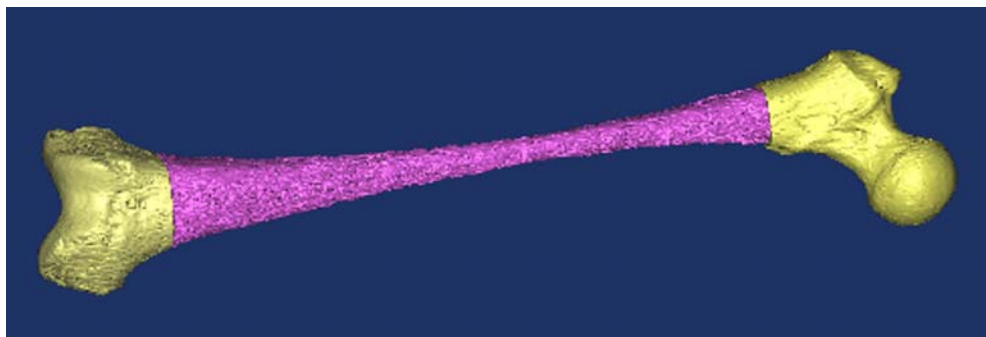


Fig. 7.2.9.b. Mesh-ul final al învelișului interior al femurului (vederea b).

Mesh-urile învelișului exterior, respectiv interior al femurului, așa cum au fost realizate în cadrul programului MATERIALISE Mimics 10.01, au necesitat o operațiune ulterioară de rafinare în vederea creșterii gradului de uniformitate a dimensiunilor laturilor fațetelor. Această operațiune a fost realizată în cadrul programului Rapidform XOR.

Într-o primă fază s-a importat în program fișierul STL al mesh-ului învelișului exterior al femurului. Acest mesh s-a rafinat prin apelarea comenzii *Global Remesh*. Figura 7.2.10 prezintă o vedere a mesh-ului rafinat al învelișului exterior al femurului.

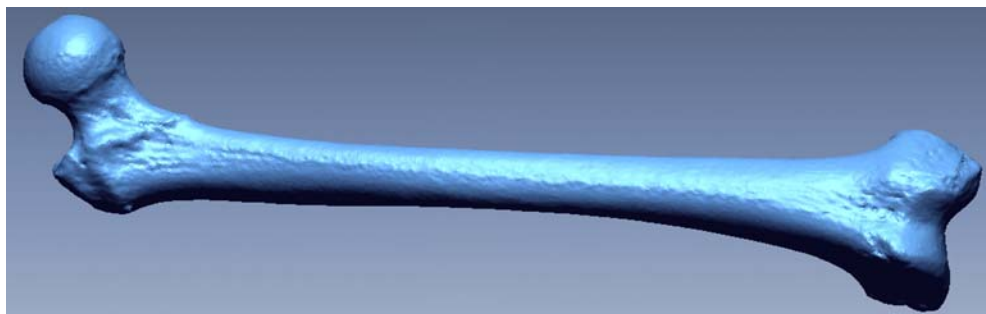


Fig. 7.2.10. Vedere a mesh-ului rafinat al învelișului exterior al femurului.



În continuare a fost realizată rafinarea mesh-ului învelișului interior al femurului din zonele celor două epifize. Figurile 7.2.11.a și 7.2.11.b prezintă în două vederi mesh-ul rafinat al învelișului interior al femurului din zonele celor două epifize.

**BUPT**



Fig. 7.2.11.a. Mesh-ul rafinat al învelișului interior al femurului în zonele epifizelor (vederea a).



Fig. 7.2.11.b. Mesh-ul rafinat al învelișului interior al femurului în zonele epifizelor (vederea b).

Într-o fază următoare s-a importat, în programul Rapidform XOR, fișierul STL corespunzător mesh-ului învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară. Datorită gradului ridicat de neuniformitate al acestui mesh, pe lângă operațiunea de rafinare, s-a mai aplicat un procedeu de netezire a mesh-ului. Figurile 7.2.12.a și 7.2.12.b ilustrează în două vederi mesh-ul rafinat și neted al învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară. După cum se poate vedea în cele două figuri amintite, anumite detalii geometrice s-au estompat în urma aplicării procedeeului de netezire, dar această operațiune a fost necesară datorită imposibilității obținerii suprafețelor de tip Bézier, chiar dacă s-a realizat rafinarea mesh-ului.

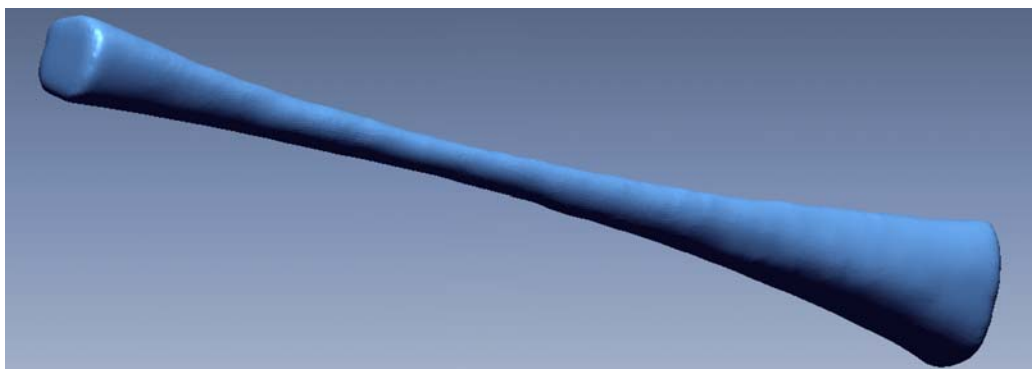


Fig. 7.2.12.a. Mesh-ul rafinat și neted al învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară (vederea a).

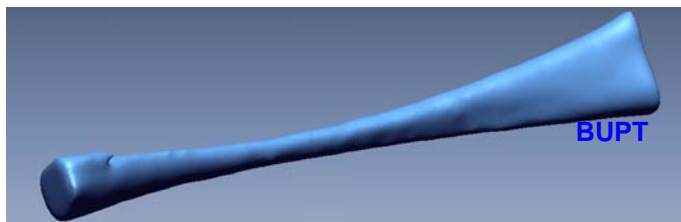


Fig. 7.2.12.b. Mesh-ul rafinat și neted al învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară (vederea b).

### 7.3. Etapa delimitării zonelor și construcției suprafețelor.

Această etapă a fost realizată tot în cadrul programului Rapidform XOR. Acest program permite construcția directă a suprafețelor Bézier, fără a mai fi necesară delimitarea zonelor mesh-urilor.

Într-o primă fază s-au realizat suprafețele Bézier ale învelișului exterior al femurului. Construcția suprafețelor Bézier s-a lansat prin apelarea comenzii *Auto Surfacing*. În momentul apelării comenzii amintite, intervenția utilizatorului constă în specificarea numărului mediu de suprafețe Bézier (1.000) care urmează a fi construite. Concret, din cele 125.064 fațete ale mesh-ului învelișului exterior al femurului s-au obținut 1.108 suprafețe Bézier, care s-au salvat într-un fișier IGES. Figurile 7.3.1.a și 7.3.1.b ilustrează în două vederi suprafețele Bézier ale învelișului exterior al femurului.

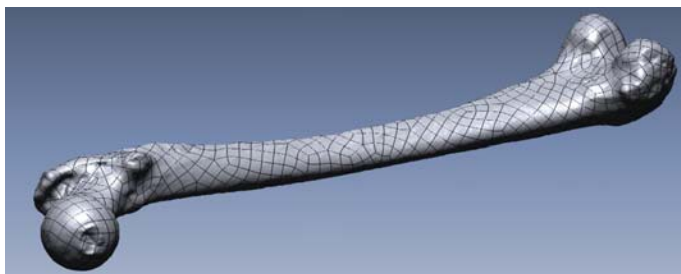


Fig. 7.3.1.a. Suprafețele Bézier ale învelișului exterior al femurului (vederea a).

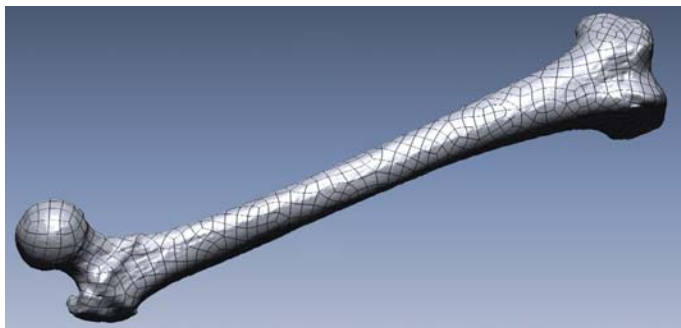


Fig. 7.3.1.b. Suprafețele Bézier ale învelișului exterior al femurului (vederea b).

Ulterior, s-au realizat (conform cu procedeele descrise anterior) suprafețele Bézier ale învelișului interior al femurului în zonele celor două epifize. De asemenea, s-a creat un fișier IGES corespunzător acestor suprafețe. Figurile 7.3.2.a și 7.3.2.b ilustrează în două vederi suprafețele Bézier ale învelișului interior al femurului în zonele celor două epifize.

BUPT



Fig. 7.3.2.a. Suprafețele Bézier ale învelișului interior al femurului în zonele epifizelor (vederea a).



Fig. 7.3.2.b. Suprafețele Bézier ale învelișului interior al femurului în zonele epifizelor (vederea b).

Mesh-ul învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară fiind foarte neted, așa cum s-a putut observa în figurile 7.2.12.a și 7.2.12.b, nu a mai fost necesară crearea suprafețelor Bézier datorită relativei simplități a geometriei zonei. În consecință, s-a realizat o singură suprafață cu tehnica modelării prin propagarea mai multor secțiuni transversale (suprafață de tip *loft*). Pentru realizarea acestei suprafețe s-a secționat transversal mesh-ul cu plane paralele echidistante (cu pasul de 10 mm). Intersecția dintre planele paralele

echidistante și mesh reprezintă curbe închise plane care sunt ilustrate în figura 7.3.3 împreună cu mesh-ul. Suprafața a fost construită automat la apelarea comenzii *Loft*, prin propagarea curbelor închise plane amintite anterior. Suprafața a fost stocată la rândul ei într-un fișier de tip IGES. Figurile 7.3.4.a și 7.3.4.b ilustrează în două vederi suprafața de tip loft care descrie geometria învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară.

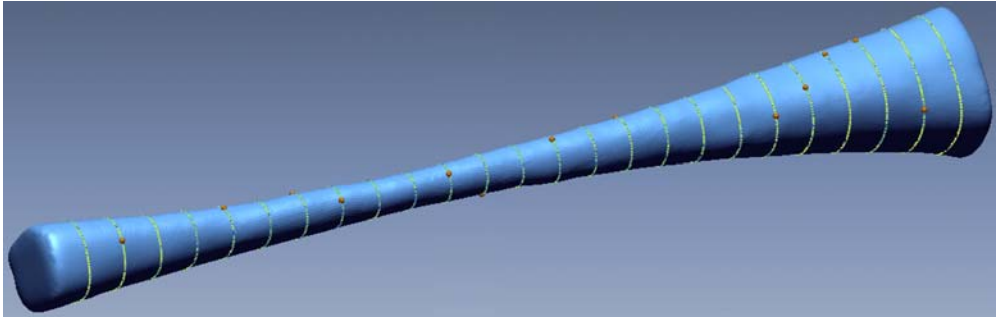


Fig. 7.3.3. Curbele închise plane rezultate în urma secționării cu plane paralele echidistante a mesh-ului învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară.

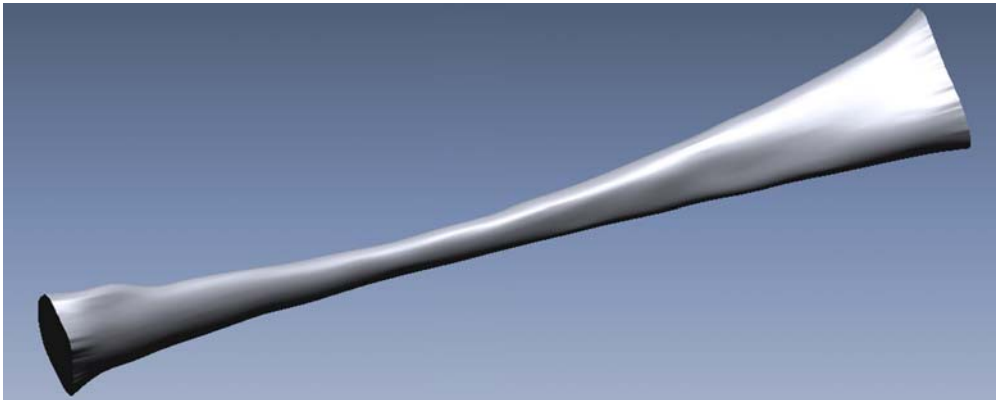


Fig. 7.3.4.a. Suprafața de tip loft care descrie geometria învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară (vederea a).



Fig. 7.3.4.b. Suprafața de tip loft care descrie geometria învelișului interior al femurului în zona considerată cu structură tubulară (vederea b).

Într-o etapă finală s-a realizat suprafața totală a învelișului interior al femurului prin reuniunea celor două fișiere IGES corespunzătoare zonei epifizelor și zonei considerate cu structură tubulară, rezultând astfel un nou fișier IGES. Figurile 7.3.5.a și 7.3.5.b ilustrează în două vederi suprafața care descrie geometria întregului înveliș interior al femurului.

BUPT

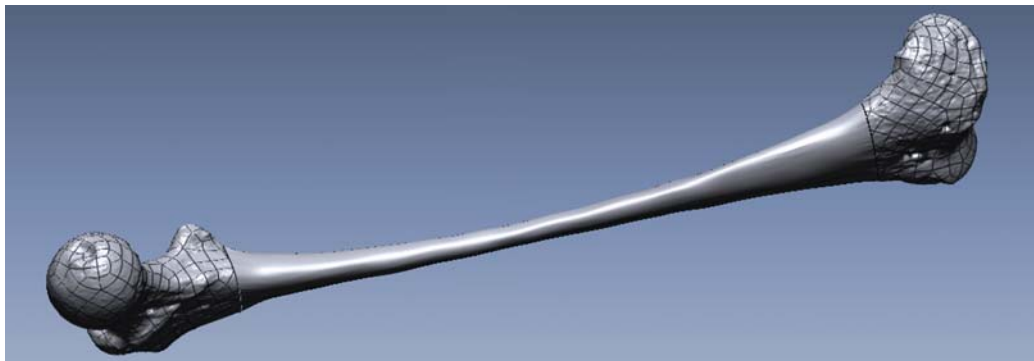


Fig. 7.3.5.a. Suprafața care descrie geometria întregului înveliș interior al femurului (vederea a).

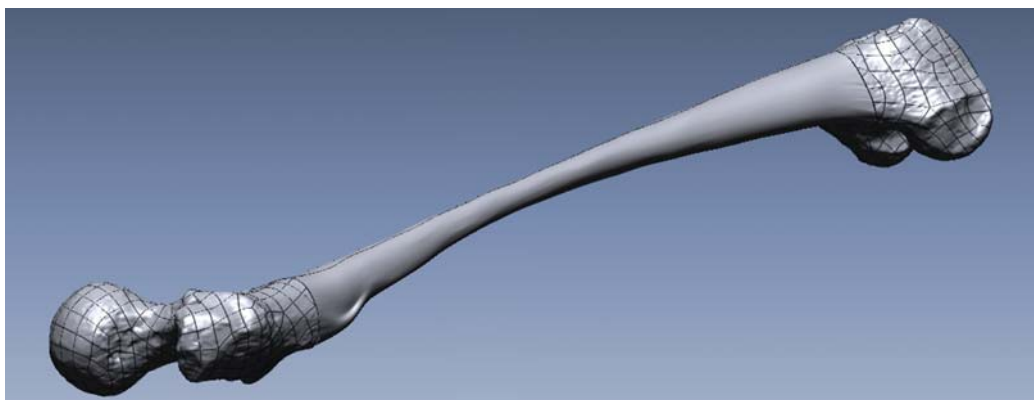


Fig. 7.3.5.b. Suprafața care descrie geometria întregului înveliș interior al femurului (vederea b).

În concluzie, s-au obținut două fișiere de tip IGES care conțin fiecare în parte geometria învelișului exterior, respectiv interior al femurului.

#### **7.4. Etapa construcției modelului geometric solid CAD.**

Construcția modelului CAD al femurului s-a realizat în cadrul programului SolidWorks 2005.

Într-o primă fază s-a importat fișierul IGES al geometriei învelișului exterior al femurului. "Solidificarea" modelului geometric al învelișului exterior al femurului s-a executat prin apelarea comenzii *Knit Surfaces* împreună cu bifarea opțiunii *Try to form Solid*.

Într-o fază intermediară s-a importat fișierul IGES al geometriei învelișului interior al femurului și s-a realizat "solidificarea" acestuia conform cu operațiunile descrise anterior.

În concluzie, s-au obținut două corpuri solide delimitate ca volume de cele două învelișuri (exterior, respectiv interior) ale femurului. **BUPT**

Modelul CAD final al femurului s-a obținut prin operația de diferență între cele două corpuri solide, la apelarea comenzii *Subtract*, în sensul că din volumul corpului solid descris de învelișul exterior s-a scăzut cel descris de învelișul interior. Astfel, a rezultat un singur corp solid care reprezintă modelul CAD final al femurului. Acest model a fost salvat într-un fișier de tip Parasolid în vederea realizării compatibilității modelului cu diferite aplicații CAD și CAE.

Figurile 7.4.1.a și 7.4.1.b ilustrează două vederi ale modelului CAD al femurului, fără a fi afișate contururile suprafețelor de tip Bézier. Pentru o reprezentare cât mai realistă a modelului CAD, s-a adoptat pentru suprafețele de tip Bézier o culoare apropiată de cea a femurului uman real utilizat.

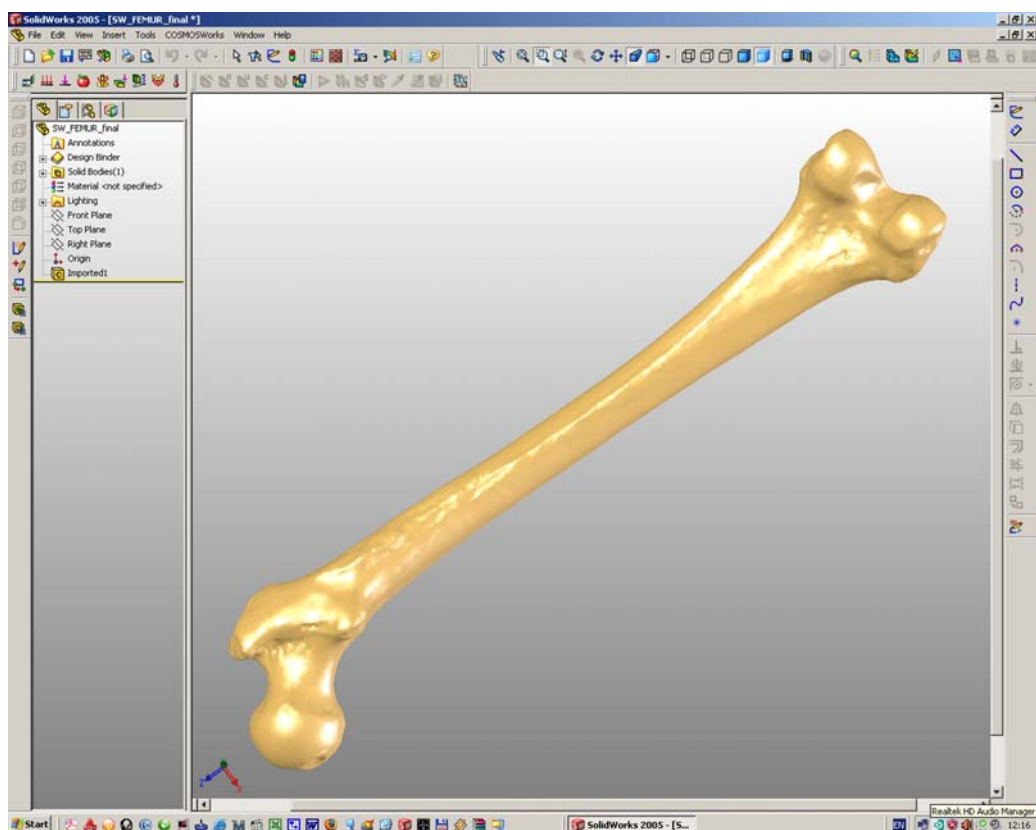


Fig. 7.4.1.a. Modelul CAD al femurului (vederea a).

Figurile 7.4.2.a și 7.4.2.b ilustrează două secțiuni longitudinale (cu un plan longitudinal vertical respectiv orizontal) ale modelului CAD al femurului împreună cu contururile suprafețelor de tip Bézier.

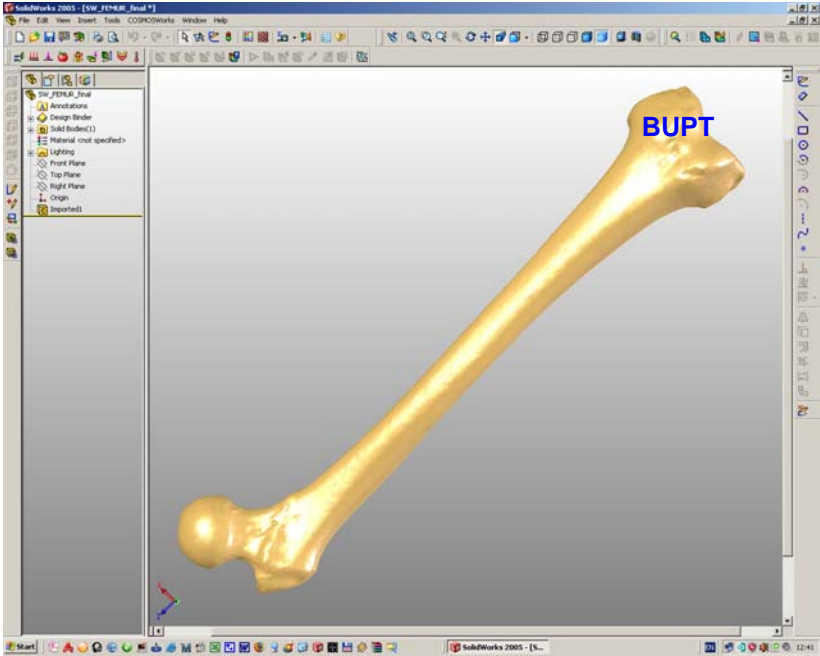


Fig. 7.4.1.a. Modelul CAD al femurului (vederea b).



Fig. 7.4.2.a. Secțiune cu un plan longitudinal vertical prin modelul CAD al femurului.

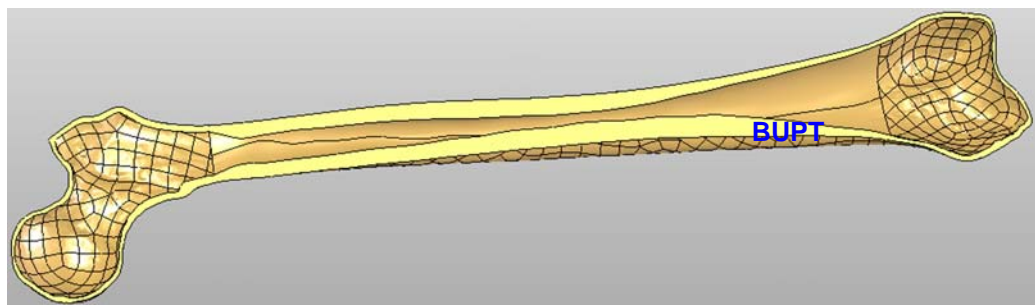


Fig. 7.4.2.b. Secțiune cu un plan longitudinal orizontal prin modelul CAD al femurului.



## 8. Analiza cu MEF a solicitării de încovoiere a femurului uman

### 8.1. Stabilirea modelului de calcul.

Din punct de vedere al formei geometrice a femurului uman, acesta prezintă o dimensiune (lungimea) mult mai mare decât celelalte două dimensiuni care determină secțiunile transversale. Această observație permite schematizarea geometriei femurului sub forma unei grinzi, considerată cu secțiune transversală variabilă. De asemenea s-a observat faptul că femurul poate fi așezat pe un plan rigid orizontal.

Pornind de la considerentele anterioare și de la incidența fracturilor la nivelul femurului, s-a ales solicitarea de încovoiere în trei puncte (în poziție orizontală a femurului) ca fiind cea mai potrivită realizării unui model de calcul cu MEF. De asemenea acest tip de solicitare se pretează validării pe cale experimentală a modelului de calcul cu MEF. Figura 8.1.1 ilustrează schematizarea clasică a modelului de calcul al femurului pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte, într-o vedere frontală.

Cele două reazeme sunt amplasate pe un plan orizontal rigid. Femurul este așezat pe doi suporturi articulați cu cele două reazeme în punctele  $A_1$  și  $A_2$ . Cei doi suporturi sunt poziționați în dreptul punctelor  $C_1$  și  $C_2$  de contact al femurului cu un plan rigid orizontal. De asemenea se consideră cei doi suporturi ca fiind fixați de femur realizând un corp comun. Forța concentrată  $F$  este aplicată în punctul  $P_f$ . Cele trei puncte corespunzătoare solicitării de încovoiere sunt  $A_1$ ,  $A_2$  și  $P_f$ . Punctele  $A_1$  și  $A_2$  reprezintă centrele celor două articulații ale reazemelor. Lungimea  $L$  dintre reazeme

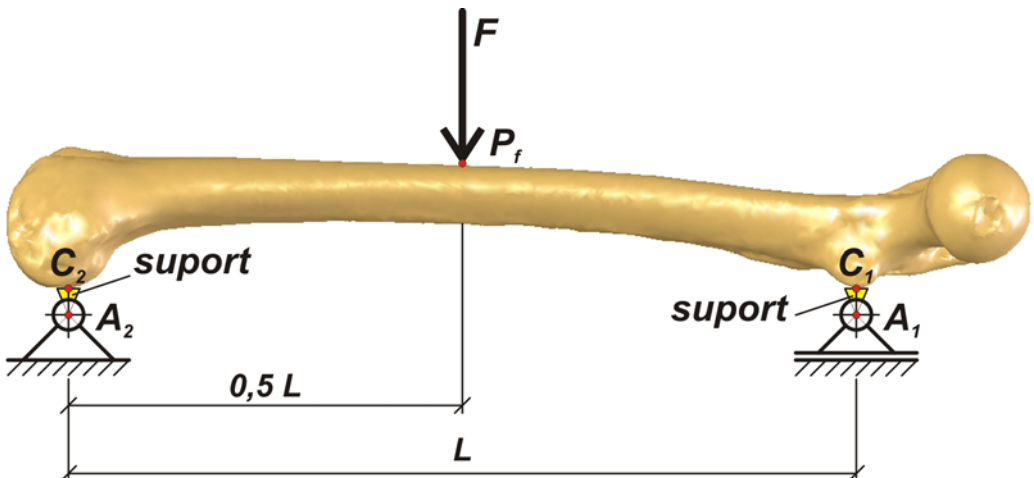


Fig. 8.1.1. Schematizarea clasică a modelului de calcul al femurului pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte.

constituie implicit distanța dintre punctele de contact al femurului cu un plan rigid orizontal. Forța concentrată  $F$  este aplicată la jumătatea distanței dintre reazeme.

Adaptarea modelului de calcul în scopul analizei cu MEF presupune o nouă schematizare raportată la un sistem plan de coordonate  $xOy$ , care este ilustrată în figura 8.1.2.

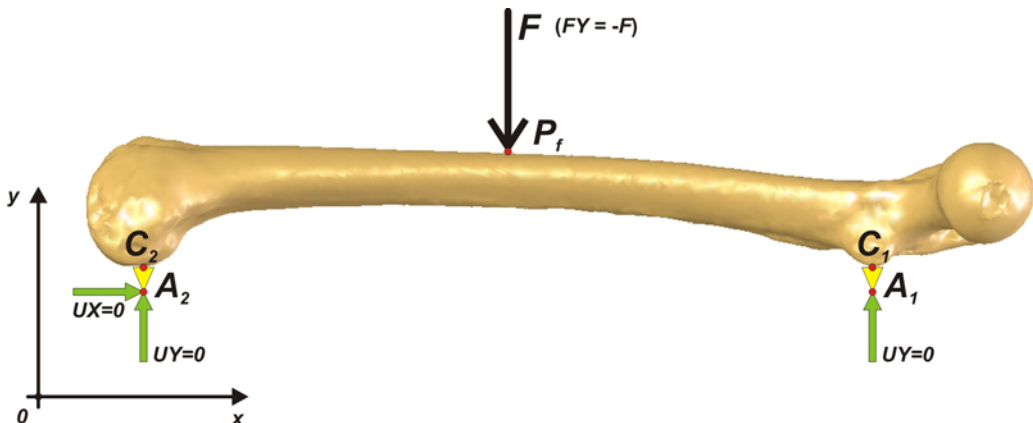


Fig. 8.1.2. Schematizarea modelului de calcul al femurului în scopul analizei cu MEF pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte.

Reazemele au fost suprimate din schematizarea modelului de calcul datorită faptului că efectul acestora se poate reproduce prin impunerea unor condiții de deplasare pentru centrele  $A_1$  și  $A_2$  ale articulațiilor reazemelor. Totodată aceste puncte aparțin celor doi suporturi considerați solidari cu femurul. În consecință, deplasările  $UX$  și  $UY$  ale punctului  $A_2$  după direcția axei  $x$ , respectiv  $y$  sunt nule. Concomitent, deplasarea  $UY$  a punctului  $A_1$  după direcția axei  $y$  este nulă. Rotirile în jurul punctelor  $A_1$  respectiv  $A_2$  și deplasarea punctului  $A_1$  după direcția axei  $x$  sunt permise. Dreapta suport a forței  $F$  fiind paralelă cu axa  $y$ , forța posedă o singură componentă  $FY = -F$ .

Modelul de calcul expus anterior se poate aplica în cazul existenței a două puncte de contact al femurului cu un plan rigid orizontal. În realitate, în urma așezării femurului pe un plan rigid orizontal, s-a observat existența a *trei* puncte de contact. Două dintre aceste puncte de contact sunt amplasate în zona epifizei care intră în articulația genunchiului împreună cu tibia, iar cel de-al treilea punct de contact este amplasat în partea opusă corespunzătoare epifizei care intră în articulația șoldului. În consecință, s-a adaptat modelul de calcul expus anterior, rezultând astfel o nouă schematizare clasică a modelului de calcul al femurului pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte, ilustrată spațial în figura 8.1.3.

Reazemul fix cu centrul articulației în punctul  $A_2$  a fost înlocuit cu două reazeme fixe egal depărtate de punctul  $A_2$ , aceste două reazeme având centrele articulațiilor în punctele  $A_3$  și  $A_4$ . Cele două reazeme fixe sunt așezate astfel încât punctele  $A_1$ ,  $A_3$  și  $A_4$  formează un triunghi isoscel ( $A_1A_3 = A_1A_4$ ) având înălțimea formată de segmentul  $A_1A_2$ . Reazemele fixe sunt articulate în punctele  $A_3$  și  $A_4$  cu doi suporturi (solidari cu femurul) care posedă două puncte  $C_3$  și  $C_4$  de contact al femurului cu un plan rigid orizontal. Triunghiul format de punctele  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4$  este de asemenea isoscel fiind identic cu cel format de punctele  $A_1$ ,  $A_3$  și  $A_4$ . Punctul  $A_f$  reprezintă proiecția forței  $F$  pe planul triunghiului format de punctele  $A_1$ ,  $A_3$  și  $A_4$ .

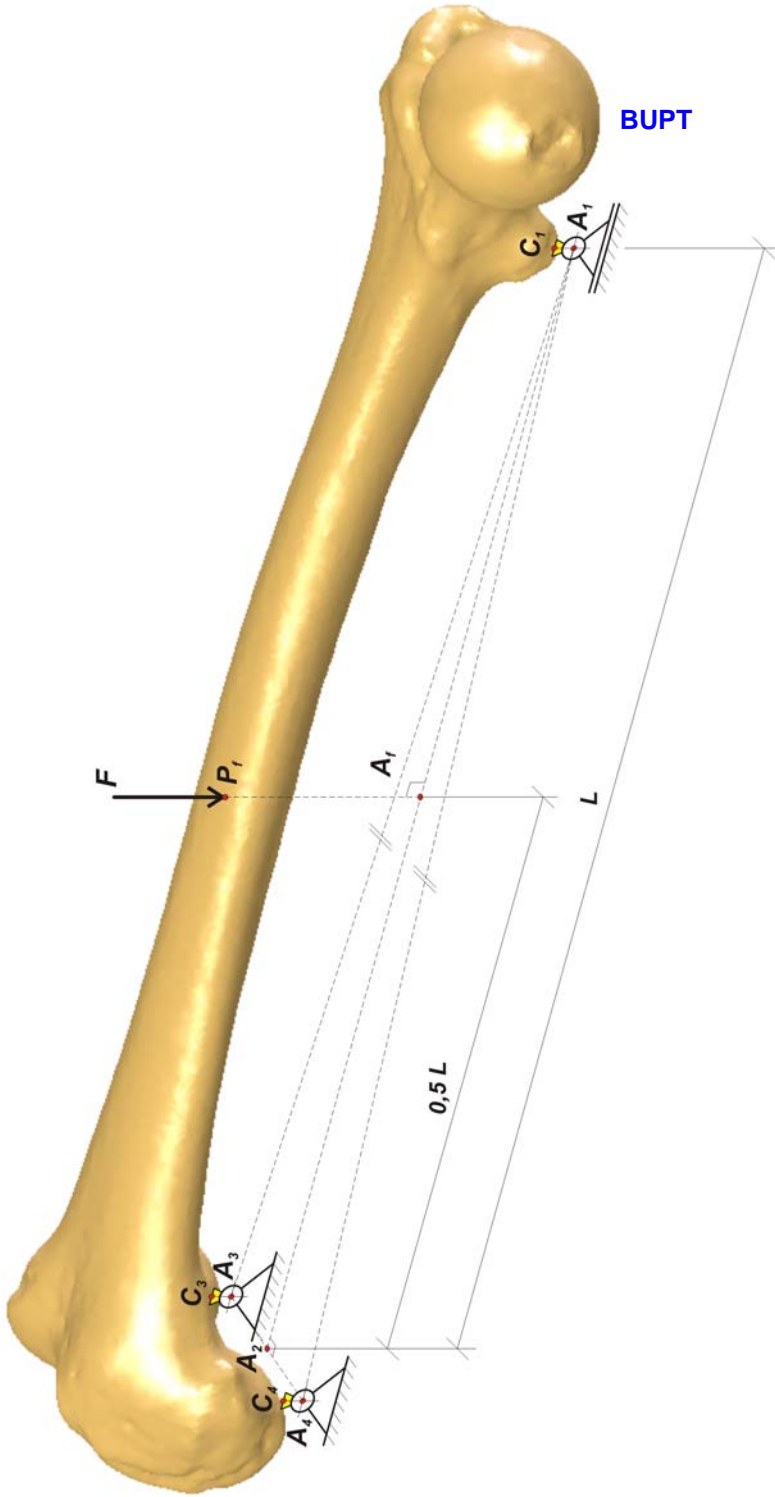


Fig. 8.1.3. Schematizarea 3D a modelului de calcul al femurului în scopul analizei cu MEF pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte.

Triunghiul format de punctele de contact  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4$  este conținut în planul rigid orizontal pe care se poate așeza femurul.

Așezarea celor trei reazeme respectă modelul de calcul al femurului pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte, dar aplicarea modelului este condiționată de cele trei puncte  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4$  de contact al femurului cu planul rigid orizontal, care în mod obligatoriu trebuie să formeze un triunghi isoscel.

## 8.2. Adaptarea modelului CAD al femurului pentru aplicarea modelului de calcul.

După cum s-a menționat în paragrafele anterioare, s-a observat faptul că femurul poate fi așezat într-o poziție orizontală pe un plan rigid, femurul având trei puncte de contact cu planul amintit. În consecință, s-a pus problema determinării acestor trei puncte de contact pentru modelul CAD al femurului, în cadrul programului SolidWorks 2005.

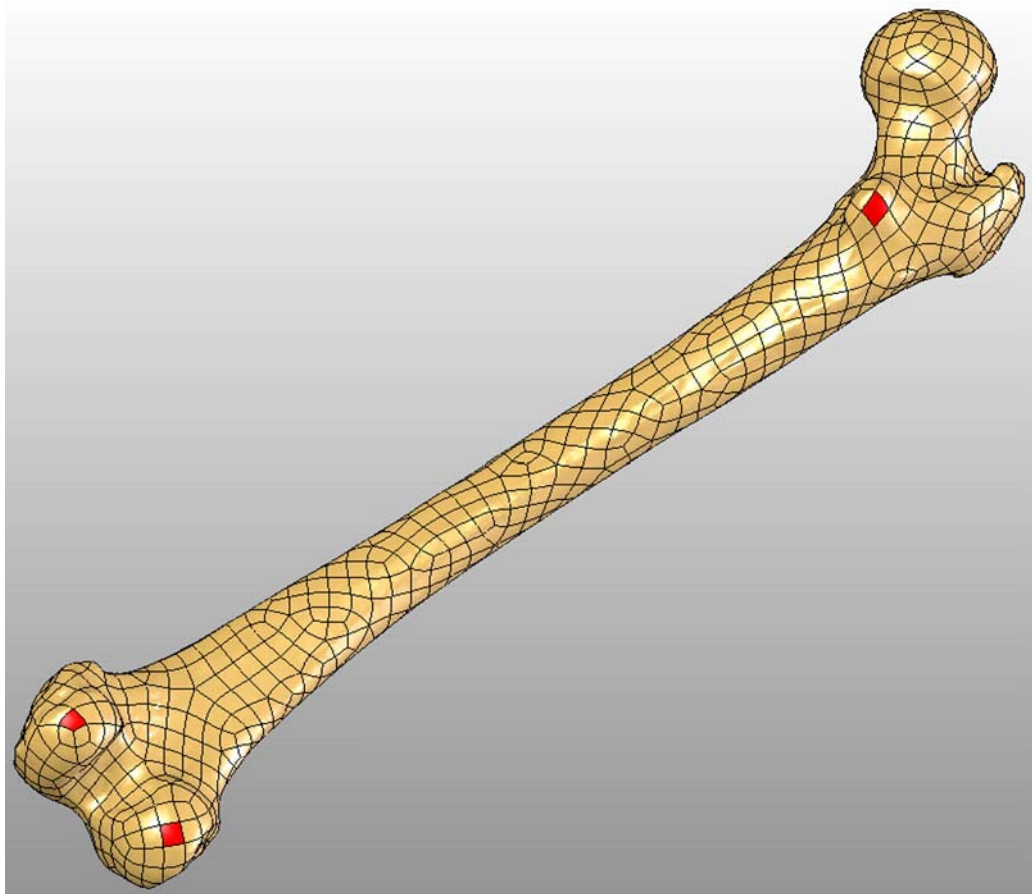


Fig. 8.2.1. Suprafețele Bézier ale modelului CAD al femurului care conțin punctele de contact cu un plan rigid orizontal.

Într-o primă fază s-au stabilit, prin observații directe asupra modelului CAD, suprafețele Bézier care conțin cele trei puncte de contact (deocamdată nedeterminate) cu planul rigid orizontal. Aceste suprafețe sunt ilustrate în figura 8.2.1, fiind marcate în culoare roșie.

Cele trei puncte de contact cu planul rigid orizontal formează un triunghi ale cărui laturi sunt tangente fiecare pe rând cu câte două din cele trei suprafețe Bézier ilustrate în figura anterioară. Pornind de la acest raționament, s-a construit (sub forma unei schițe 3D - *3D Sketch*) triunghiul al cărui vârfuri reprezintă punctele de contact, impunându-se laturilor acestuia condițiile de tangență amintite. Impunându-se condițiile de tangență, a rezultat poziția punctelor de contact. Punctele de contact sunt unic determinate și formează un plan identic cu un plan rigid orizontal pe care se poate așeza modelul CAD al femurului. Figura 8.2.2 ilustrează cele trei puncte de contact  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4$  împreună cu triunghiul format de acestea, în cadrul modelului CAD al femurului. Schița în plan a celor trei puncte de contact împreună cu dimensiunile laturilor triunghiului format de acestea este

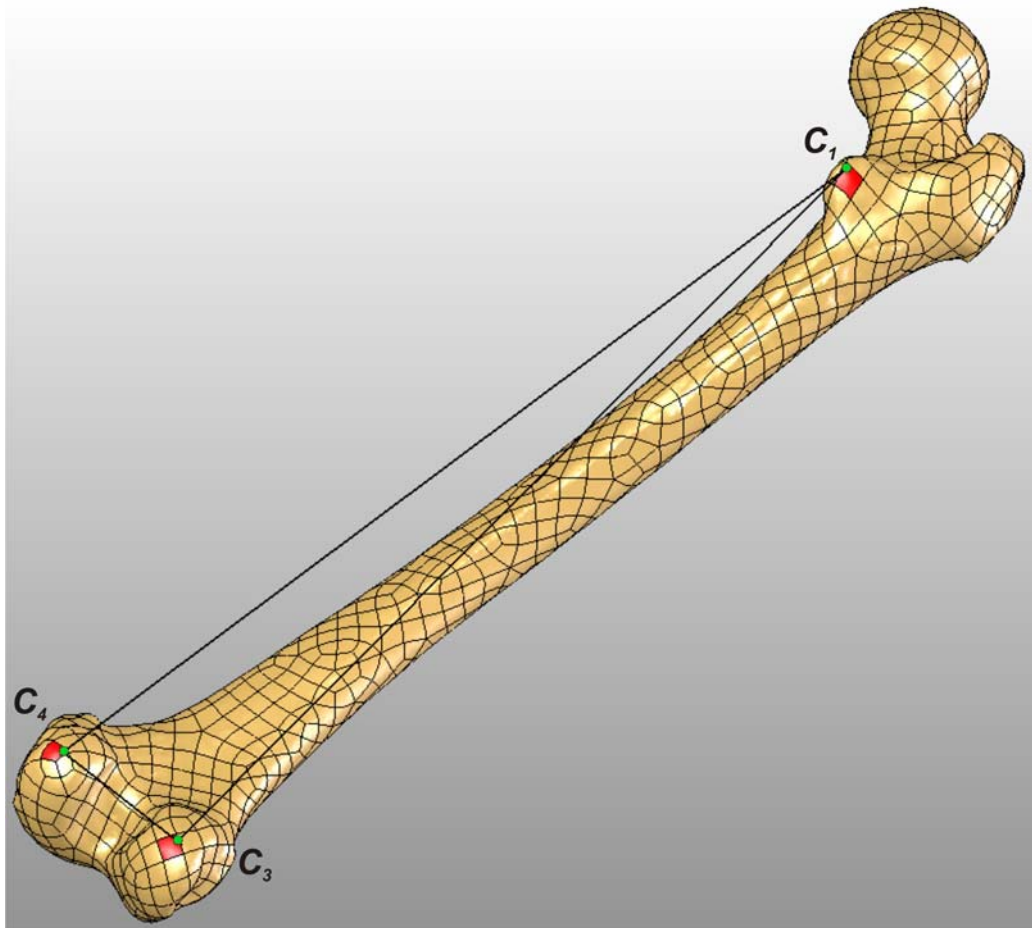


Fig. 8.2.2. Triunghiul punctelor de contact cu un plan rigid orizontal al modelului CAD al femurului.

ilustrată în figura 8.2.3.

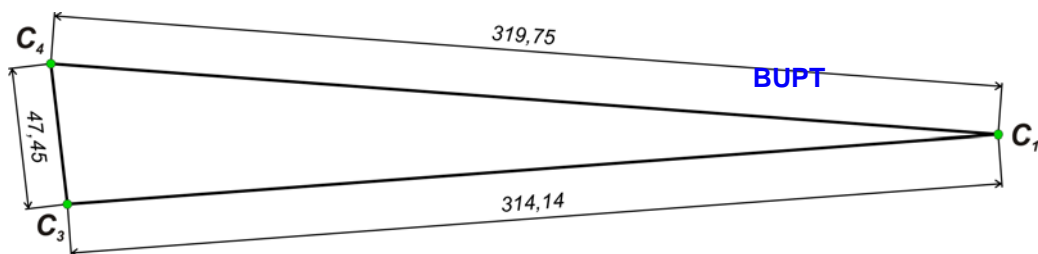


Fig. 8.2.3. Schița în plan a triunghiului punctelor de contact cu un plan rigid orizontal al modelului CAD al femurului.

Triunghiul punctelor de contact constituie baza următoarelor construcții geometrice necesare realizării modelului de calcul expus în paragraful 8.1. Într-o primă fază s-a construit planul *Plane1*, determinat de triunghiul punctelor de contact, ilustrat în figura 8.2.4. Pentru o mai bună vizibilitate, nu s-au mai ilustrat contururile suprafețelor Bézier care alcătuiesc învelișul exterior al modelului femurului. Se observă că triunghiul punctelor de contact nu este isoscel și astfel nu

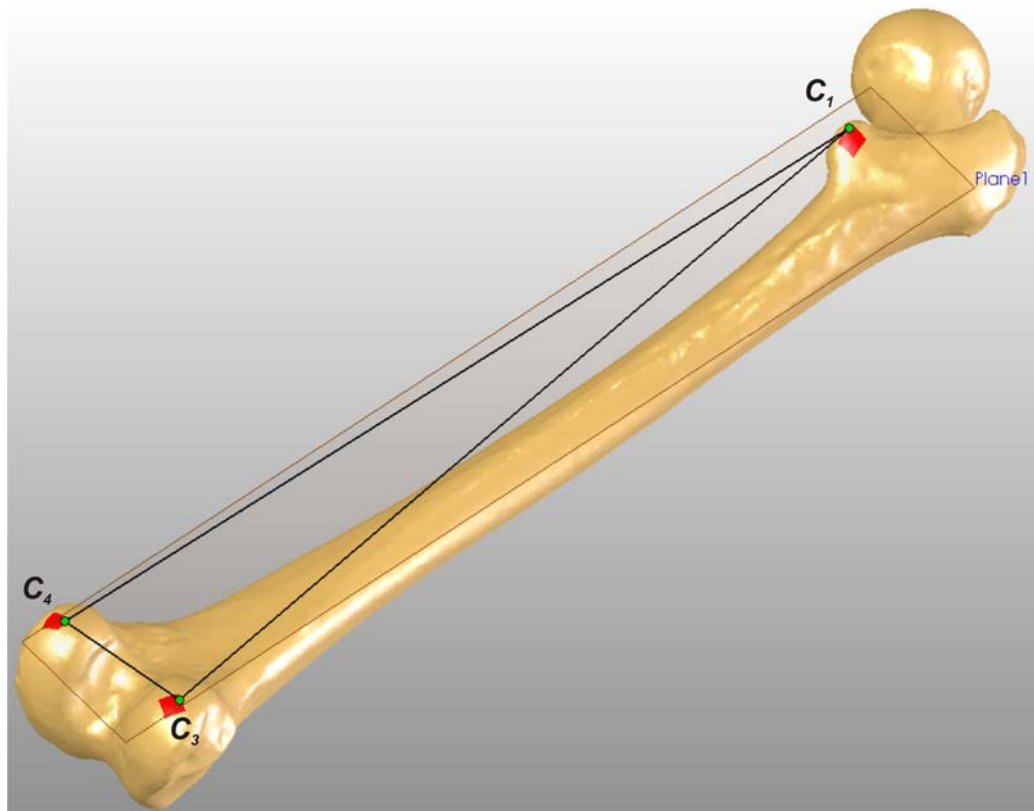


Fig. 8.2.4. Construcția planului *Plane1*.

s-ar putea aplica modelul de calcul expus în paragraful 8.1. În consecință, pornind de la schița ilustrată în figura 8.2.3, în schița din figura 8.2.5, s-a amplasat punctul  $C_4'$  pe segmentul  $C_1C_4$  astfel încât punctele  $C_1$ ,  $C_4'$  și  $C_3$  să formeze un triunghi isoscel ( $C_1C_4' = C_1C_3$ ). De asemenea s-a amplasat punctul  $C_2$  pe segmentul  $C_4'C_3$  astfel încât segmentul  $C_1C_2$  să constituie înălțimea triunghiului isoscel. Punctul  $C_f$  este amplasat la mijlocul segmentului  $C_1C_2$  și constituie proiecția dreptei suport a forței  $F$  pe planul triunghiului format de punctele  $C_1$ ,  $C_4'$  și  $C_3$ . Punctele  $C_1$ ,  $C_4'$  și  $C_3$  constituie locul geometric unde se amplasează suportii articulați cu reazemele din cadrul schematizării modelului de calcul. Construcțiile geometrice realizate anterior sunt ilustrate și în figura 8.2.6, în cadrul modelului CAD al femurului.

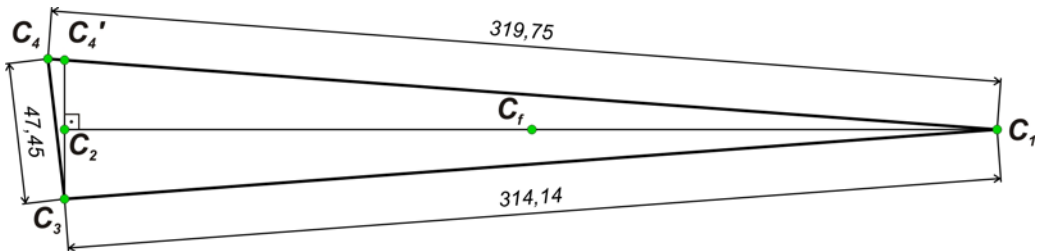


Fig. 8.2.5. Schița în plan realizată în scopul determinării punctelor de amplasament a suportilor articulați cu reazemele din cadrul schematizării modelului de calcul.

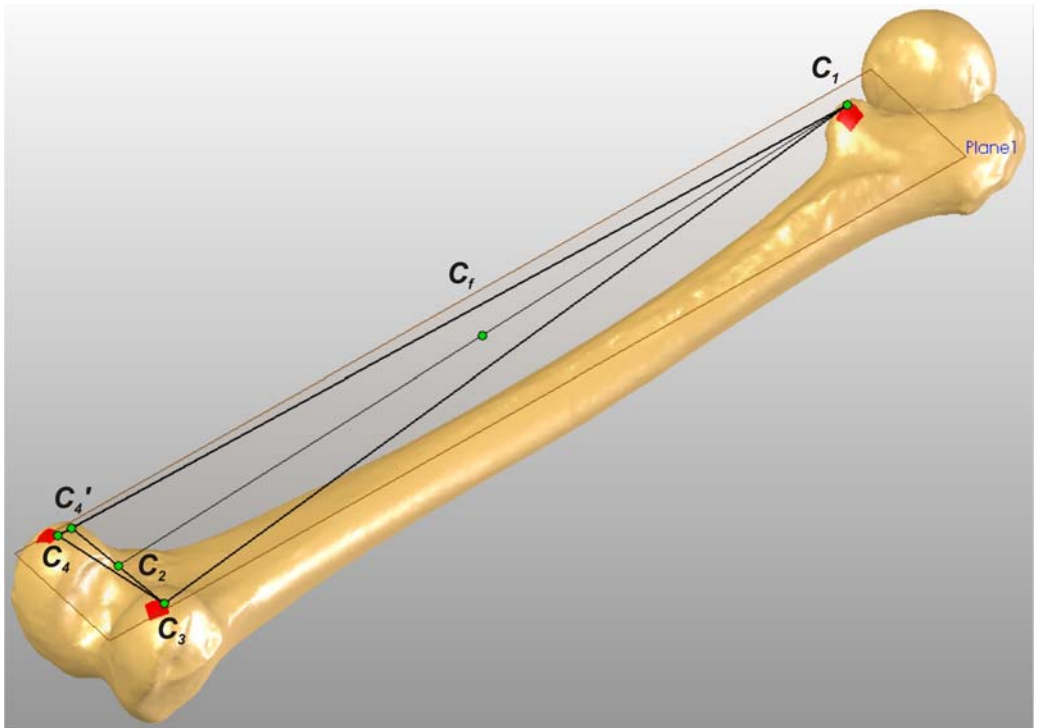


Fig. 8.2.6. Construcția geometrică realizată pe modelul CAD al femurului în scopul determinării punctelor de amplasare a suportilor articulați cu reazemele.

După cum s-a menționat în paragraful 8.1, suportii pe care este așezat în poziție orizontală femurul se consideră a fi solidari cu acesta. Astfel forma geometrică a suportilor este integrată în modelul CAD al femurului. Pentru a nu altera excesiv modelul CAD al femurului, s-a optat pentru dimensiuni cât mai mici ale suportilor. După cum s-a observat în figurile 8.1.1 și 8.1.5 din paragraful 8.1, forma secțiunii transversale a suportilor este triunghiulară. Cei trei suporti fiind identici, înălțimile triunghiurilor care constituie secțiunea transversală a suportilor sunt egale și reprezintă distanțele de la punctele de amplasare a suportilor (punctele de contact cu femurul) la punctele de articulație a suportilor cu reazemele considerate în schematizarea modelului de calcul. Implicit, înălțimile triunghiurilor care constituie secțiunea transversală a suportilor sunt egale cu distanța dintre planul format de punctele de amplasare a suportilor (punctele de contact cu femurul -  $C_1, C_3, C_4'$ ) și planul determinat de punctele de articulație a suportilor cu reazemele, cele două plane fiind paralele. Luând în considerare faptul că s-a dorit realizarea formei geometrice a suportilor cu dimensiuni cât mai mici, s-a ales înălțimea suportilor de 1 mm. În consecință, la distanța de 1 mm față de planul *Plane1* determinat de punctele de amplasare a suportilor (punctele de contact cu femurul), s-a construit planul *Plane2* ilustrat în figura 8.2.7, care conține punctele de articulație a suportilor cu reazemele.

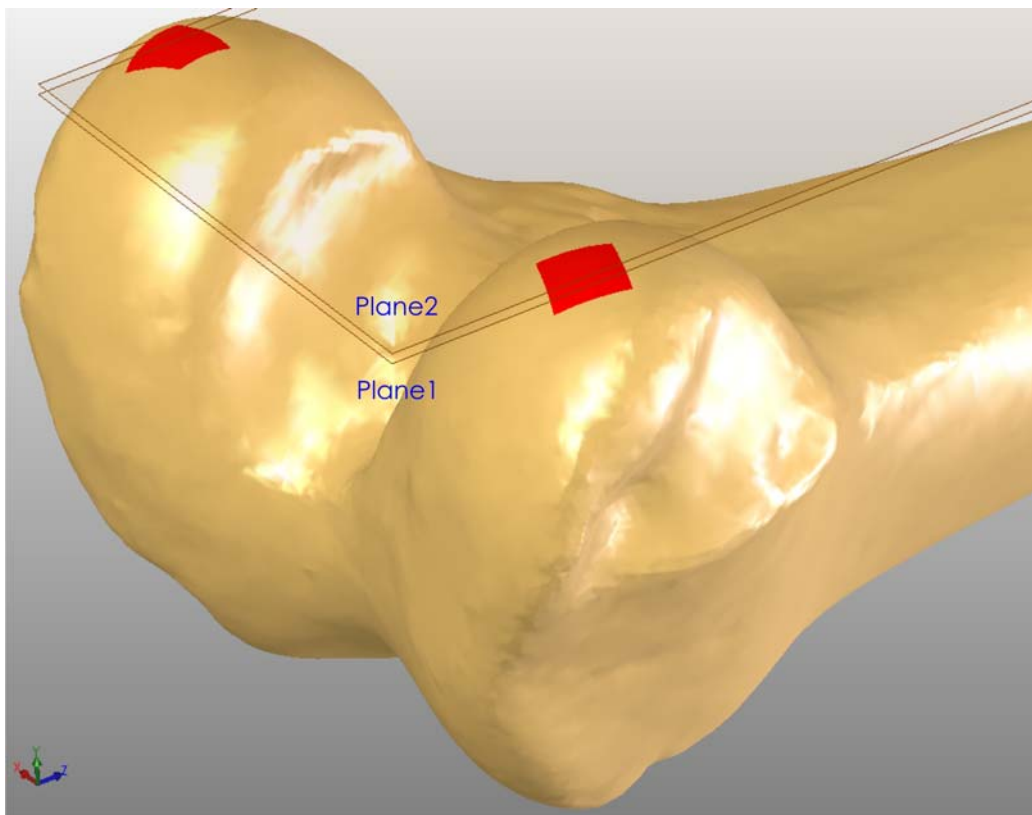


Fig. 8.2.7. Construcția planului *Plane2*.



Pentru o mai bună vizibilitate nu s-a mai reprezentat construcția geometrică realizată pe baza punctelor de contact a suporturilor (și a planului rigid orizontal *Plane1*) cu femurul.

Punctele  $A_1$ ,  $A_3$  și  $A_4$  de articulație a suporturilor cu reazemele din schematizarea modelului de calcul reprezintă proiecțiile în planul *Plane2* ale punctelor  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4'$ . De asemenea în planul *Plane2* s-au proiectat punctele  $C_2$  și  $C_f$  rezultând punctele  $A_2$  respectiv  $A_f$ . Pe baza punctelor  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_2$  și  $A_f$  s-a realizat o construcție geometrică, ilustrată în figura 8.2.8, care este similară cu cea prezentă în cadrul schematizării modelului de calcul din figura 8.1.3, paragraful 8.1. În cadrul figurii 8.2.8 nu s-a mai reprezentat construcția geometrică realizată pe baza punctelor  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4'$ ,  $C_2$  și  $C_f$  împreună cu planul *Plane1* pentru a ameliora vizibilitatea. De asemenea nu s-au mai marcat suprafețele de contact al femurului cu planul rigid orizontal *Plane1* pe care se poate așza femurul.

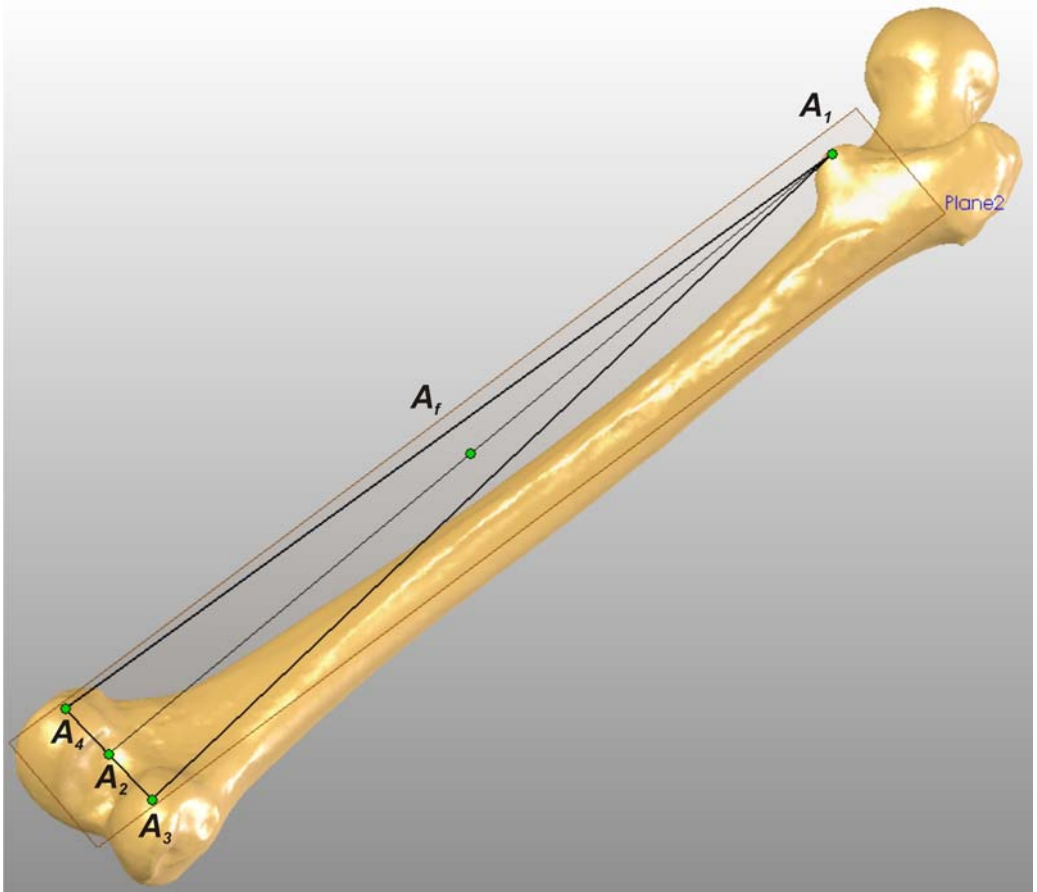


Fig. 8.2.8. Construcția punctelor de articulație a suporturilor cu reazemele considerate în cadrul schematizării modelului de calcul.

În continuare s-a construit, perpendicular pe planul *Plane2*, planul *Plane3* prin segmentul  $A_1A_2$ . Planul *Plane3* este ilustrat în figura 8.2.9. Paralel cu planul

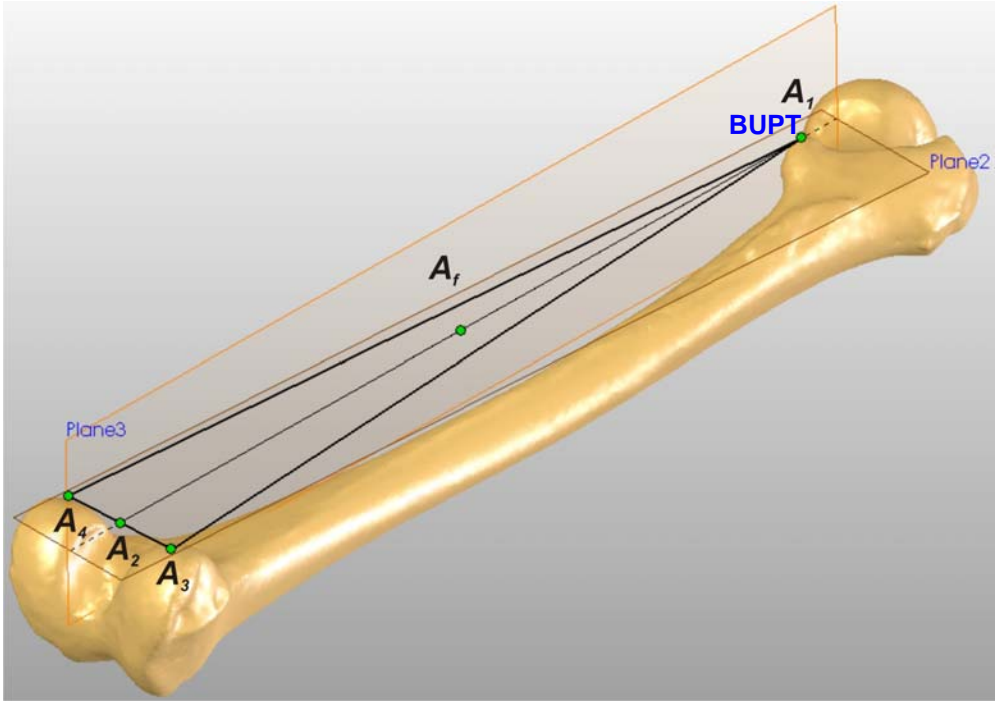


Fig. 8.2.9. Construcția planului *Plane3*.

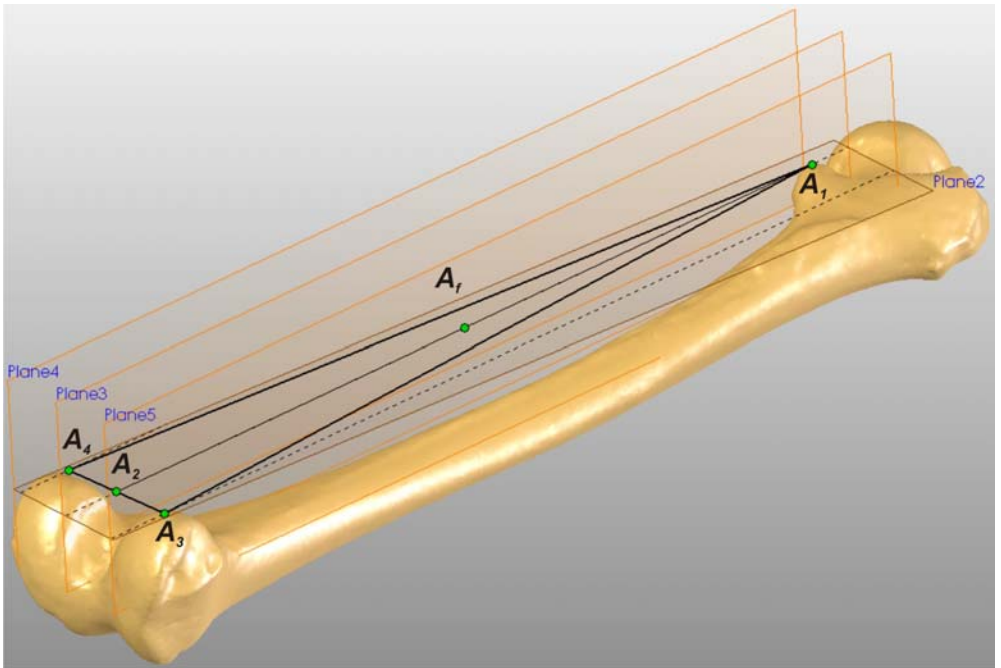


Fig. 8.2.10. Construcția planelor *Plane4* și *Plane5*.

*Plane3*, prin punctele  $A_3$  și  $A_4$  s-au construit planele *Plane4* respectiv *Plane5*, acestea fiind ilustrate în figura 8.2.10.

Suportii, din punct de vedere geometric, reprezintă forme prismatice drepte cu secțiuni transversale triunghiulare, așa cum rezultă din figura 8.1.3 a paragrafului 8.1. În concordanță cu construcțiile geometrice anterioare, în planele *Plane3*, *Plane4* și *Plane5* s-au realizat secțiunile transversale triunghiulare a celor trei suportii. Aceste secțiuni transversale s-au ales a fi triunghiuri echilaterale cu înălțimea adoptată astfel încât formele prismatice ale suportilor să se intersecteze cu modelul CAD al femurului, deoarece suportii s-au considerat a fi solidari cu acesta. Pentru exemplificare, s-a ilustrat în figura 8.2.11 secțiunea transversală a suportului articulat în punctul  $A_1$  cu reazemul mobil.

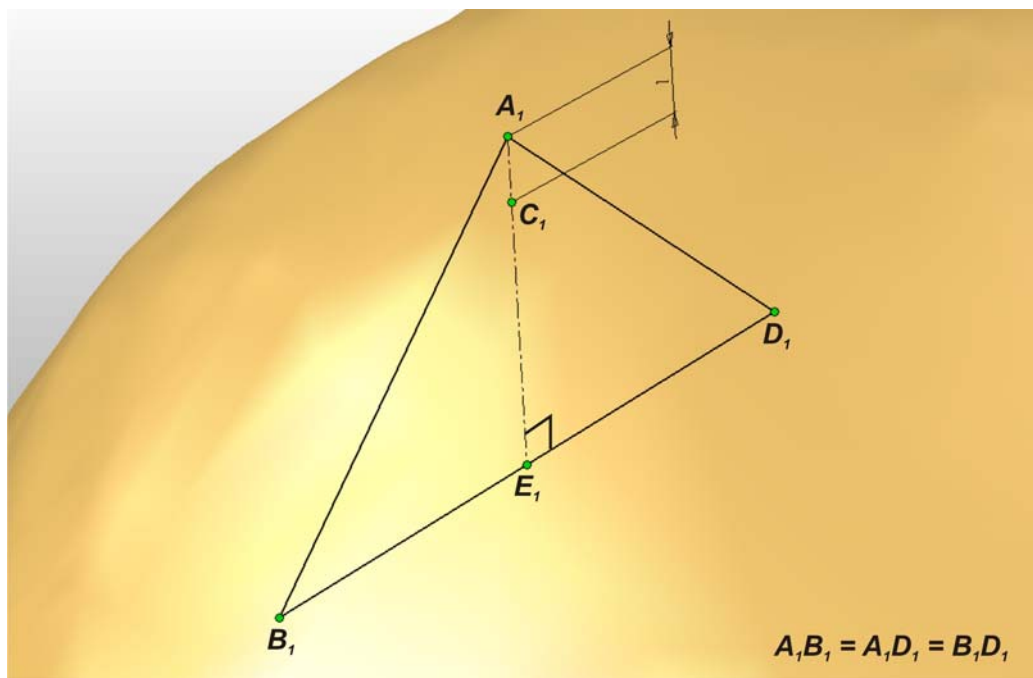


Fig. 8.2.11. Secțiunea transversală a suportului articulat în punctul  $A_1$  cu reazemul mobil din cadrul schematizării modelului de calcul.

Formele prismatice drepte ale suportilor au fost realizate prin extrudarea secțiunilor transversale triunghiulare după o direcție perpendiculară pe planul format de acestea din urmă. Extrudarea secțiunilor transversale s-a realizat astfel încât acestea să constituie în același timp și secțiunile mediane ale prismelor triunghiulare. În figura 8.2.12 s-a ilustrat suportul care conține punctul  $A_1$  de articulație cu reazemul mobil din cadrul schematizării modelului de calcul. Pentru o mai bună vizibilitate a detaliilor geometrice ale suportilor s-au reprezentat și contururile suprafețelor Bézier. Figura 8.2.13 ilustrează detaliile celor trei suportii realizați conform cu operațiunile descrise anterior. Muchiile formelor prismatice ale suportilor care conțin punctele  $A_1$ ,  $A_2$  respectiv  $A_3$  constituie axele articulațiilor reazemelor din schematizarea modelului de calcul.

În următoarea etapă s-au realizat construcțiile geometrice pentru localizarea

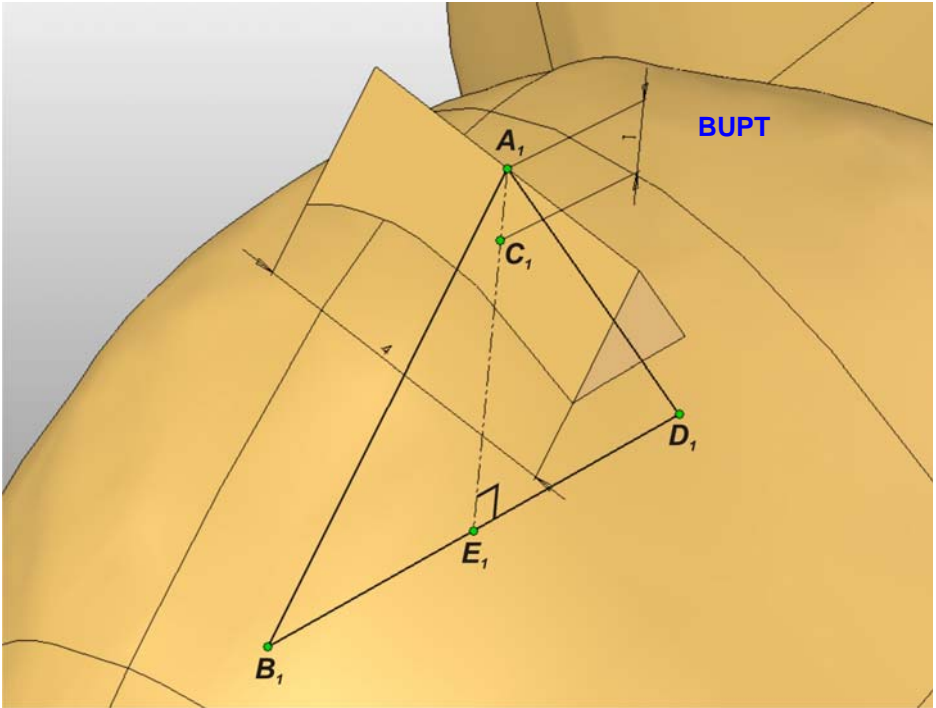


Fig. 8.2.12. Suportul care conține punctul  $A_1$  de articulație cu reazemul mobil.

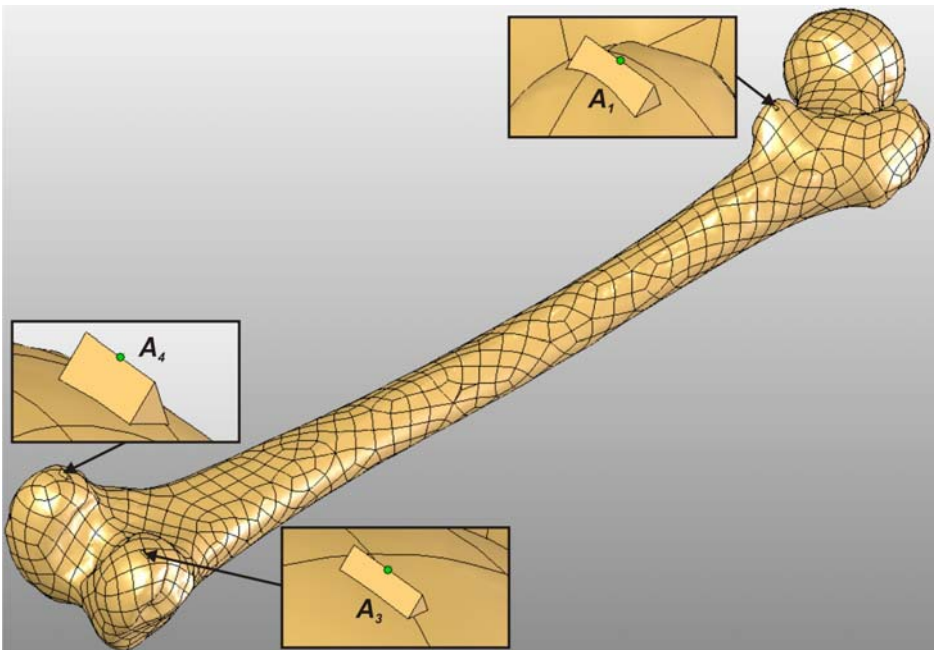


Fig. 8.2.13. Detalii asupra celor trei suporturi articulații cu reazemele.

punctului  $P_f$  unde se aplică forța concentrată  $F$  din cadrul schematizării modelului de calcul. Din punct de vedere geometric, punctul  $P_f$  reprezintă proiecția după o direcție perpendiculară pe planul  $Plane2$  (care conține punctele  $A_1$ ,  $A_3$  și  $A_4$  de articulație cu reazemele) a punctului  $A_f$ , punctul  $P_f$  fiind conținut în suprafața Bézier marcată în culoare albastră în figura 8.2.14. Prin punctul  $P_f$  s-a construit planul  $Plane6$  paralel cu planul  $Plane2$ .

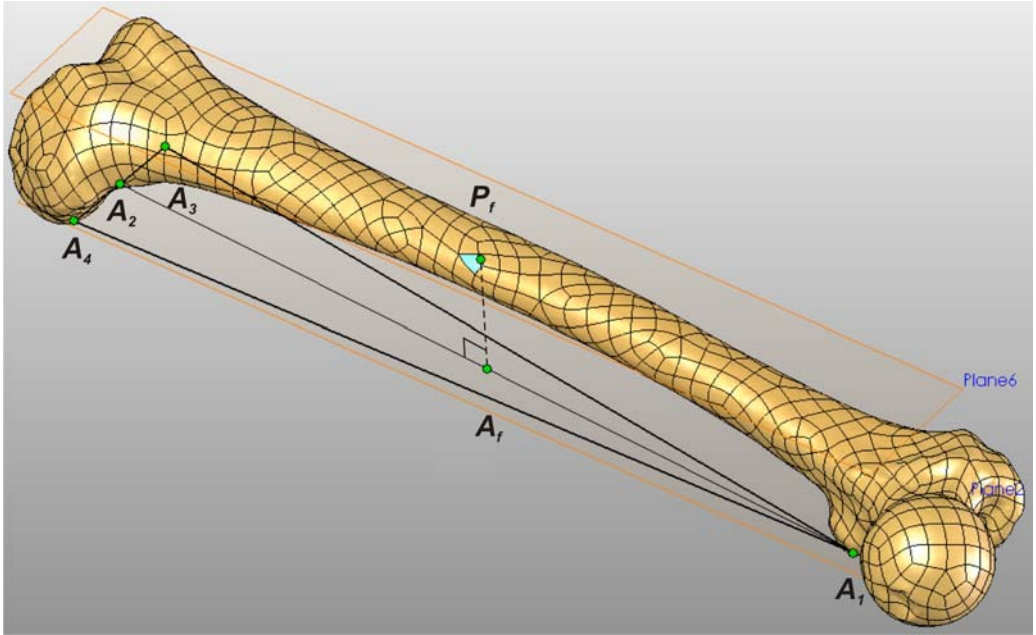


Fig. 8.2.14. Determinarea punctului  $P_f$  unde se aplică forța  $F$  din cadrul schematizării modelului de calcul.

În modelul de calcul, adaptat analizei cu MEF, aplicarea forței concentrate  $F$  în punctul  $P_f$  ar produce un efect nedorit de concentrare a tensiunilor. Pentru evitarea fenomenului amintit, forța concentrată  $F$  se echivalează cu o presiune  $p$  aplicată pe o suprafață circulară  $S$  al cărei centru să constituie proiecția punctului  $P_f$  în raport cu planul  $Plane6$ . În planul  $Plane6$  s-a construit un cerc cu centrul în punctul  $P_f$  (figura 8.2.15). Acest cerc a fost ulterior extrudat după o direcție perpendiculară pe planul  $Plane6$ , rezultând o formă cilindrică solidară cu modelul CAD al femurului (figura 8.2.16). Suprafața  $S$  este tangentă la partea superioară cu modelul CAD al femurului. Diametrul cercului extrudat (6 mm) a fost adoptat astfel încât forma cilindrică să nu altereze în exces modelul CAD al femurului. Intersecția dintre forma cilindrică și modelul CAD al femurului reprezintă un contur tridimensional închis care poate produce un efect nedorit de concentrare a tensiunilor. În consecință, acest contur a fost eliminat prin aplicarea unei racordări cu raza de 0,5 mm (figura 8.2.17). Suprafața Bézier care conține punctul  $P_f$  nu a mai fost marcată în culoare albastră pentru a ameliora vizibilitatea racordării.

Ultima etapă în adaptarea modelului de calcul în scopul analizei cu MEF presupune alinierea modelului CAD al femurului cu planele fundamentale de referință. În cadrul programului SolidWorks 2005 planele fundamentale de referință sunt: *Front Plane* (format de axele  $x$  și  $y$ ), *Top Plane* (format de axele  $x$  și  $z$ ) și

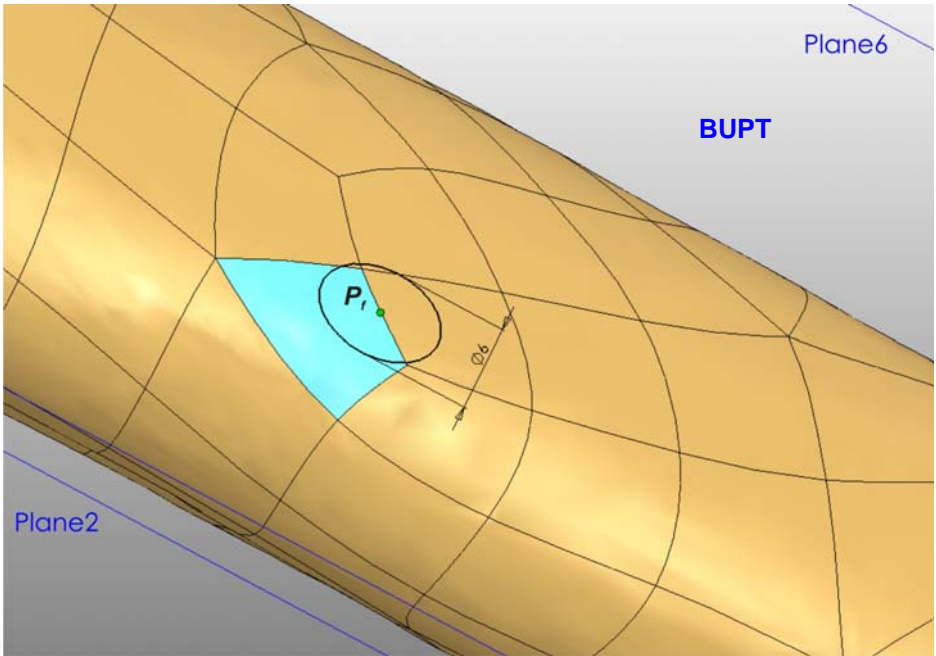


Fig. 8.2.15. Construcția cercului cu centrul în punctul  $P_f$ .

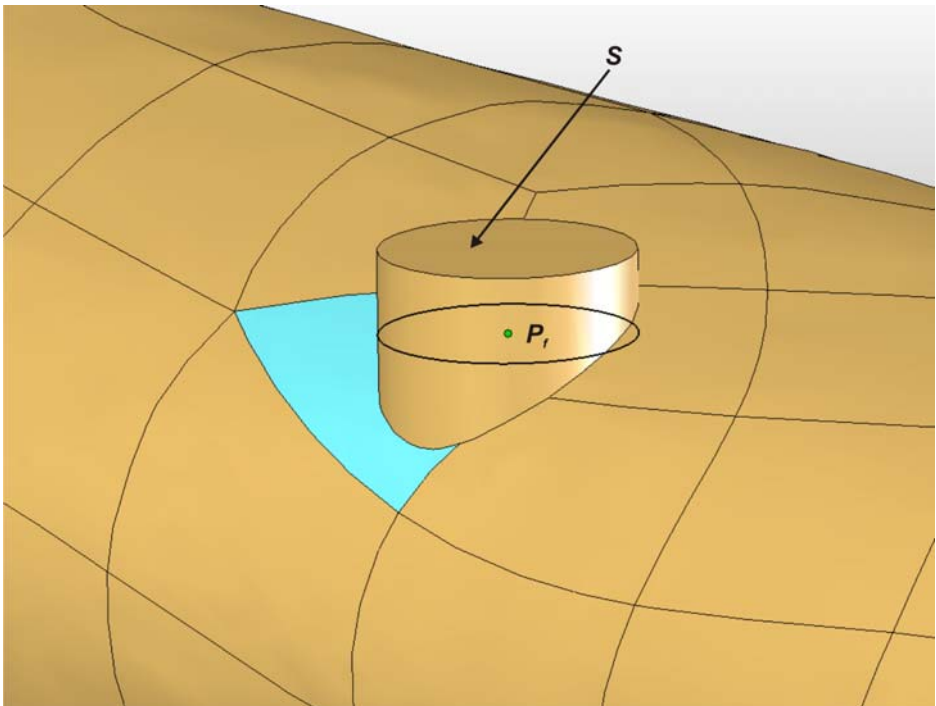


Fig. 8.2.16. Suprafața  $S$  rezultată în urma construcției forme cilindrice.

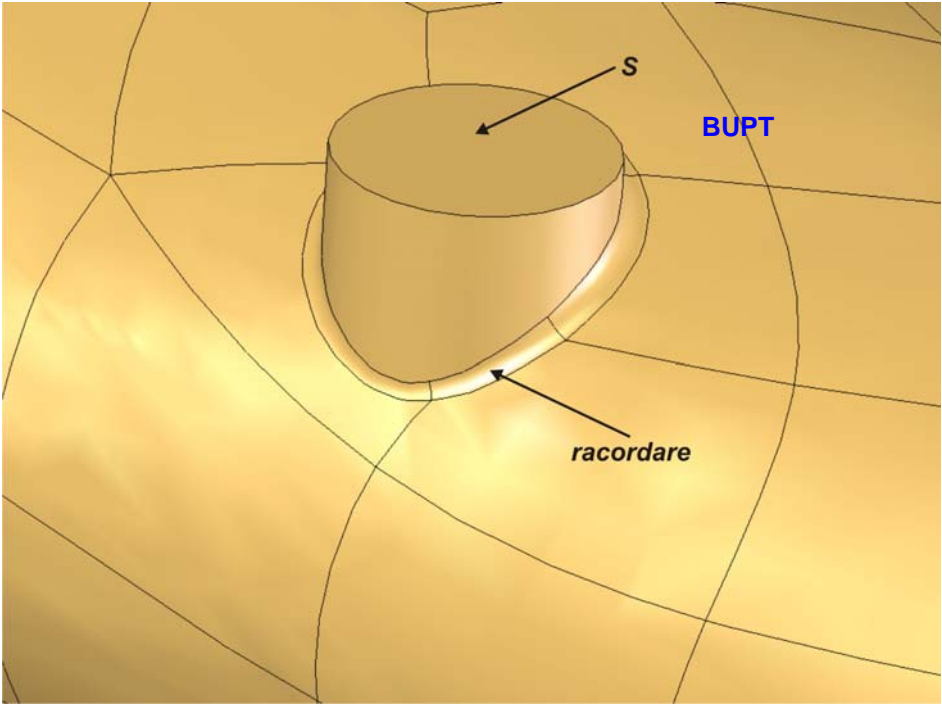


Fig. 8.2.17. Aplicarea racordării în zona de concentrare a tensiunilor.

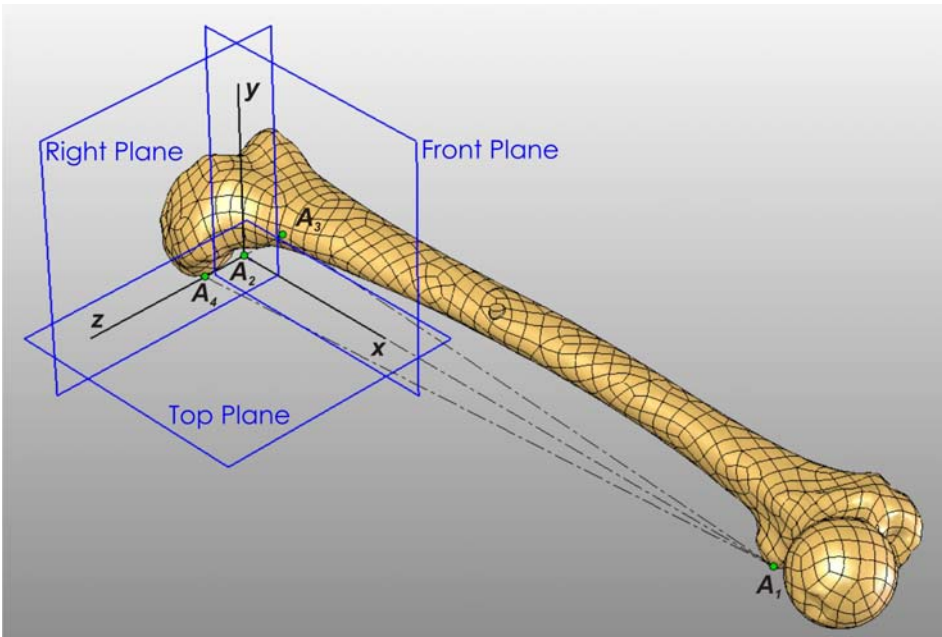


Fig. 8.2.18. Alinierea modelului CAD al femurului față de planele fundamentale de referință.

*Right Plane* (format de axele  $y$  și  $z$ ). În conformitate cu schematizarea modelului de calcul și cu orientarea planelor fundamentale de referință, s-a aliniat modelul CAD al femurului astfel încât au rezultat următoarele relații geometrice:

- planul *Plane3* este coincident cu planul fundamental *Front Plane*;
- planul *Plane2* este coincident cu planul fundamental *Top Plane*;
- segmentul  $A_3A_4$  este conținut în planul fundamental *Right Plane*;
- punctul  $A_2$  este coincident cu originea sistemului de referință.

Figura 8.2.18 ilustrează orientarea finală a modelului CAD al femurului adoptată în continuare în cadrul analizei cu MEF.

În final s-au redat anumiți parametri legați de modelul CAD al femurului:

- masa totală  $m = 332$  g (valoare determinată prin cântărirea femurului);
- volumul total  $V = 128970,23$  mm<sup>3</sup> ;
- densitatea  $\rho = 2574,237$  kg/m<sup>3</sup> (valoare calculată);
- suprafața totală  $S = 85502,24$  mm<sup>2</sup> ;
- coordonatele centrului de greutate:
  - $x_G = 173,78$  mm;
  - $y_G = 32,96$  mm;
  - $z_G = -6,45$  mm.

### 8.3. Rezolvarea modelului de calcul cu ajutorul MEF.

Ca principal obiectiv al rezolvării modelului de calcul cu ajutorul MEF îl constituie modul de distribuție a tensiunilor și deformațiilor în modelul CAD al femurului. Rezolvarea modelului de calcul cu ajutorul MEF s-a realizat în cadrul modulului COSMOSWorks 2005 care este integrat în programul SolidWorks 2005.

Din programul SolidWorks 2005 se lansează modulul COSMOSWorks 2005. Inițial se precizează tipul analizei ce urmează a fi efectuată. S-a ales tipul "*Static Analysis*", deoarece s-a considerat că forța  $F$  din cadrul modelului de calcul se aplică asupra femurului într-un regim static. Ulterior definirii tipului analizei, se declară caracteristicile mecanice ale materialului asociat modelului CAD al femurului. Datorită faptului că pachetul CAD SolidWorks 2005 împreună cu modulul de COSMOSWorks 2005 nu are în baza de date a materialelor caracteristicile materiei osoase, s-a creat o nouă fișă de material cu caracteristicile minim necesare (modulul de elasticitate longitudinal  $EX$  și coeficientul de contracție transversală  $\nu$ ). Pentru femurul uman, [39] menționează valoarea modulului de elasticitate longitudinal  $EX$  în intervalul  $10.000 \div 12.000$  MPa, respectiv 0,3 pentru coeficientul de contracție transversală  $\nu$ . Pentru analiza de față s-au adoptat valorile:  $EX = 11.000$  MPa ,  $\nu = 0,3$ . În figura 8.3.1 este redată fereastra de declarare a caracteristicilor mecanice ale materialului asociat modelului CAD al femurului. Acest material s-a considerat omogen și izotrop, într-o ipoteză simplificatoare.

După declararea tipului de studiu și precizarea caracteristicilor de material, se alege tipul elementelor finite adoptat în cadrul discretizării modelului CAD al femurului. În cazul analizei femurului s-au folosit elemente finite de tipul tetraedric cu patru noduri per element *TETRA4* dedicate analizei corpurilor solide. S-a adoptat o precizie ridicată de discretizare, cu care totuși să se poată efectua analiza în condiții de stabilitate a platformei de calcul, dimensiunea medie a laturilor elementelor finite fiind de 2 mm. În zonele suporturilor și a formei cilindrice din cadrul



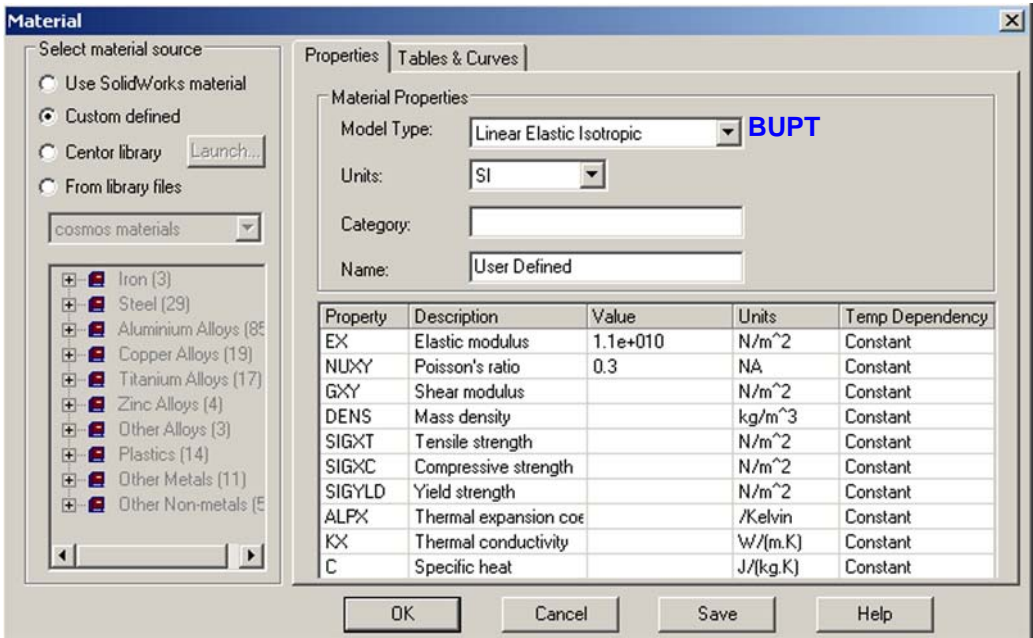


Fig. 8.3.1. Fereastra de declarare a proprietăților de material în modulul COSMOSWorks 2005.

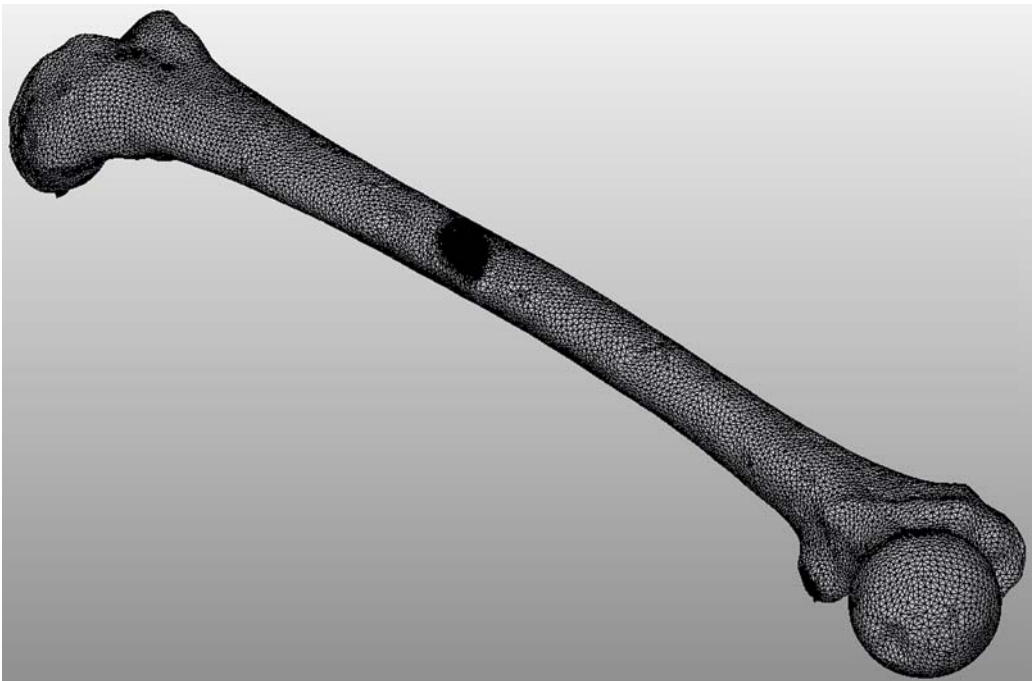


Fig. 8.3.2. Discretizarea în elemente finite a modelului CAD al femurului.

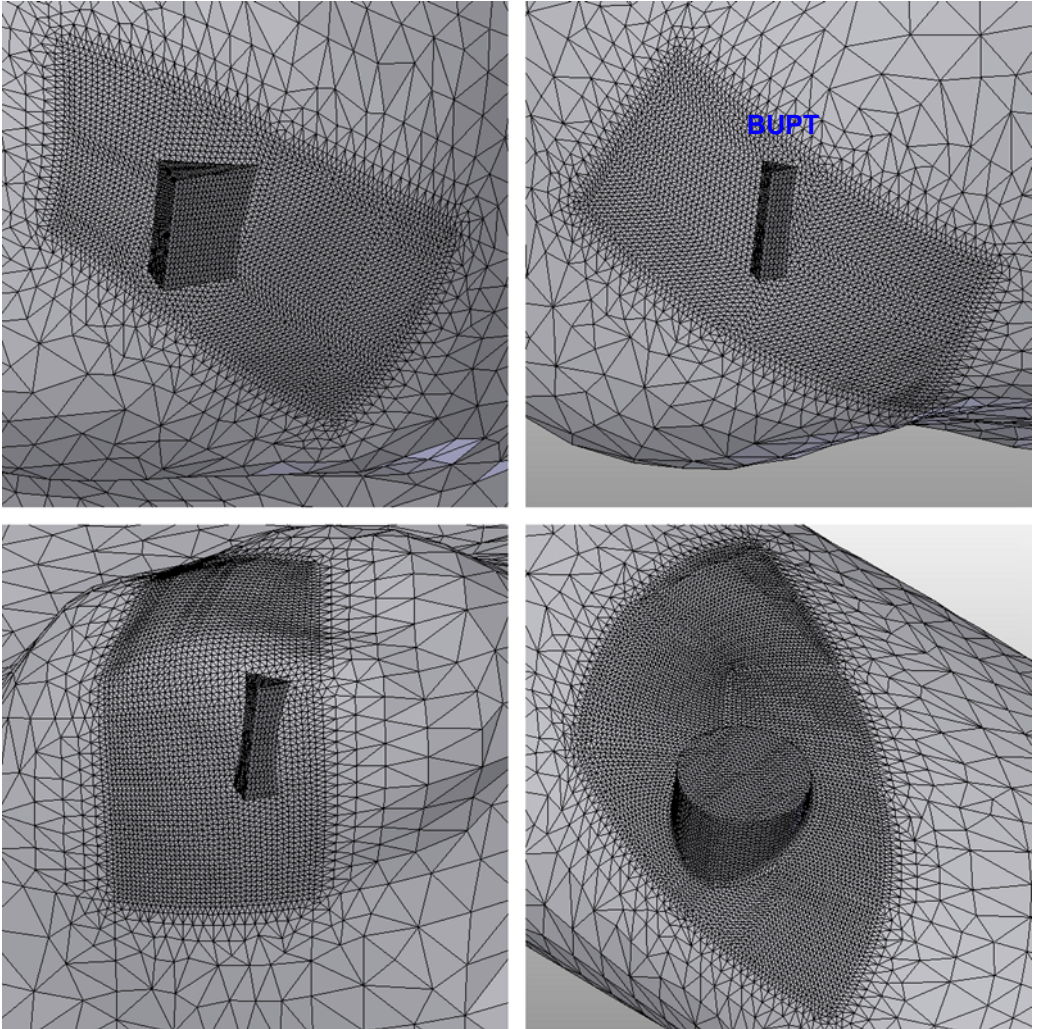


Fig. 8.3.3. Detalii ale discretizării în zonele suporturilor și a formei cilindrice.

modelului CAD al femurului s-a redus treptat dimensiunea medie a laturilor elementelor finite până la valoarea de 0,2 mm în scopul captării cât mai fidele a detaliilor geometrice, datorită faptului că dimensiunile suporturilor și a racordării din zona cilindrică sunt foarte mici.

În urma discretizării modelului CAD al femurului s-au obținut 410.555 elemente finite totalizând 93.658 noduri. Figura 8.3.2 redă o vedere de ansamblu a discretizării în elemente finite a modelului CAD al femurului, iar figura 8.3.3 ilustrează detalii ale discretizării în zonele suporturilor și a formei cilindrice care conține suprafața  $S$  pe care se aplică presiunea  $p$ .

În rezolvarea modelului de calcul cu ajutorul MEF s-a adoptat o valoare inițială a forței  $F$  de 300 N pentru observarea distribuțiilor tensiunilor în modelul CAD al femurului. Această valoare a forței a fost adoptată în urma solicitării (în poziția indicată de modelul de calcul) femurului în mașina de tracțiune-compresiune pe care

s-a realizat ulterior validarea experimentală a modelului de calcul. Până la această valoare inclusiv s-a observat un comportament liniar-elastic al femurului la solicitarea de încovoiere în trei puncte. Depășirea valorii de 300 N a indicat o oarecare abatere de la comportamentul liniar-elastic, în consecință nu s-au adoptat valori superioare pentru a evita o posibilă fractură a femurului.

S-a menționat faptul că forța  $F$  se echivalează cu o presiune  $p$  aplicată pe suprafața circulară  $S$ . În consecință, pentru valoarea adoptată a forței  $F$  și pentru diametrul de 6 mm al suprafeței circulare  $S$  rezultă valoarea presiunii  $p = 10,6103 \text{ N/mm}^2$ . Figura 8.3.4 ilustrează presiunea  $p$  aplicată pe suprafața  $S$ .

Efectul reazemelor articulate, din cadrul modelului de calcul, se realizează prin restricționarea anumitor deplasări ale muchiilor suporturilor care reprezintă axele articulațiilor. Astfel, translațiile în direcțiile axelor  $x$  și  $y$  ale muchiilor care conțin punctele  $A_3$  și  $A_4$  sunt blocate, deci deplasările  $UX$  și  $UY$  ale muchiilor respective sunt nule. În același timp, translația în direcția axei  $y$  a muchiei care conține punctul  $A_1$  este blocată, deci deplasarea  $UY$  a muchiei este nulă. Toate cele trei muchii ale suporturilor, care reprezintă axele articulațiilor reazemelor, sunt blocate să se deplaseze în direcția axei  $z$  (deplasare laterală), în consecință translațiile  $UZ$  ale celor trei muchii sunt nule, rotațiile  $RZ$  (în jurul axei  $z$ ) ale acestora fiind permise. În figura 8.3.5 sunt redate condițiile de deplasare impuse celor trei muchii ale suporturilor.

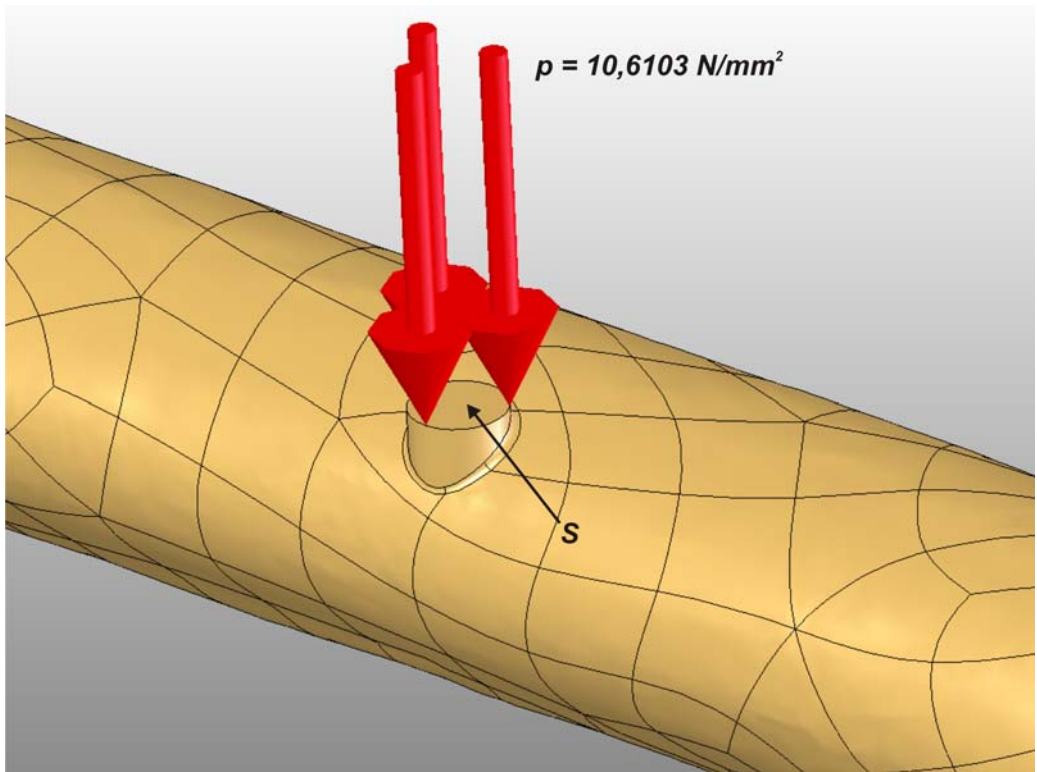


Fig. 8.3.4. Aplicarea presiunii  $p$  pe suprafața  $S$ .

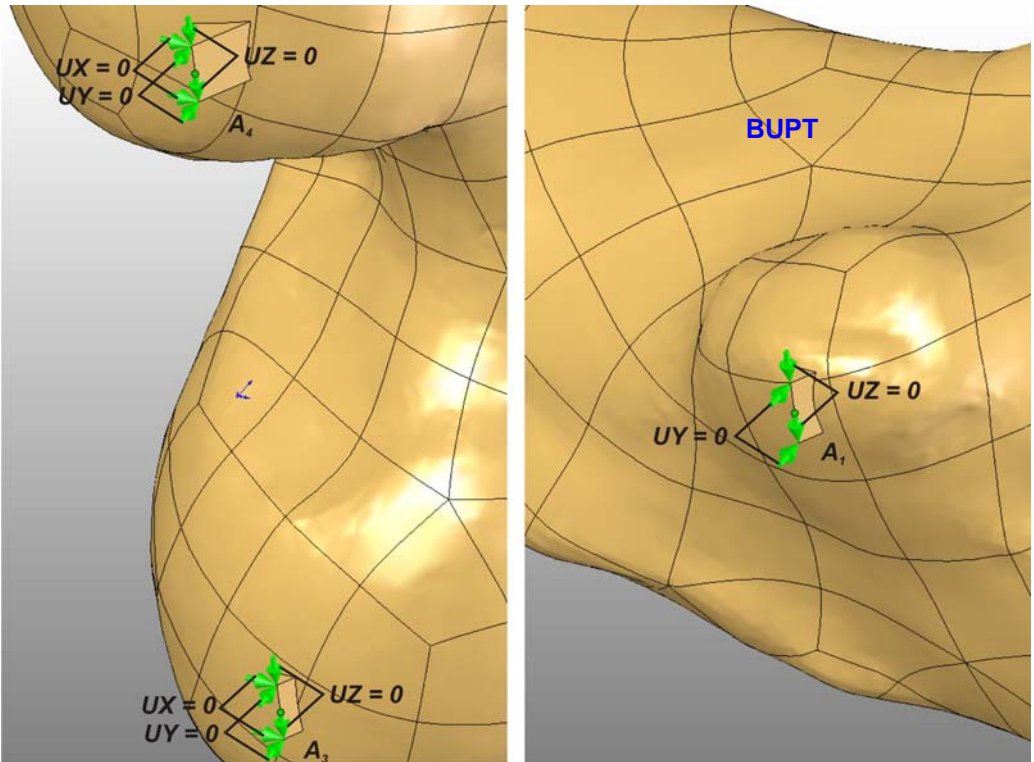


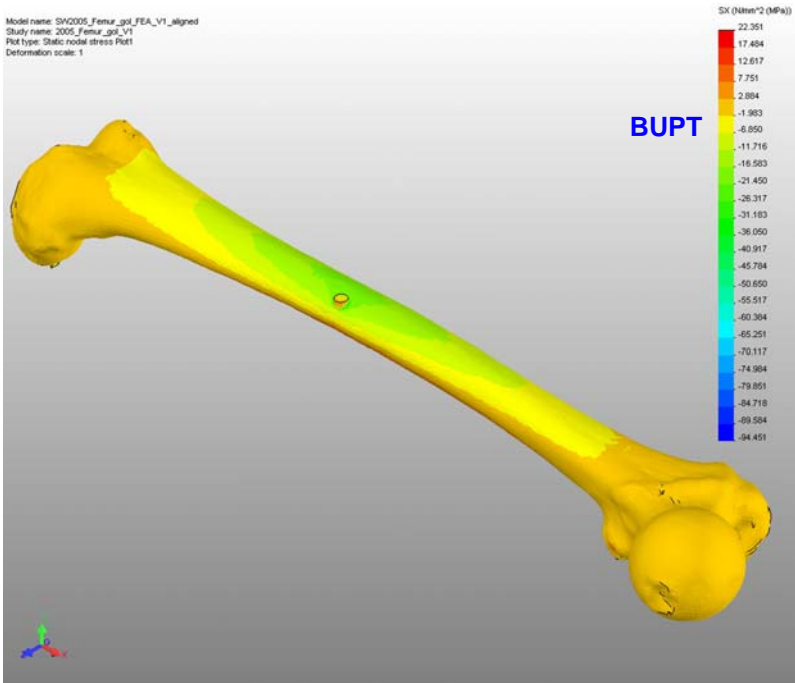
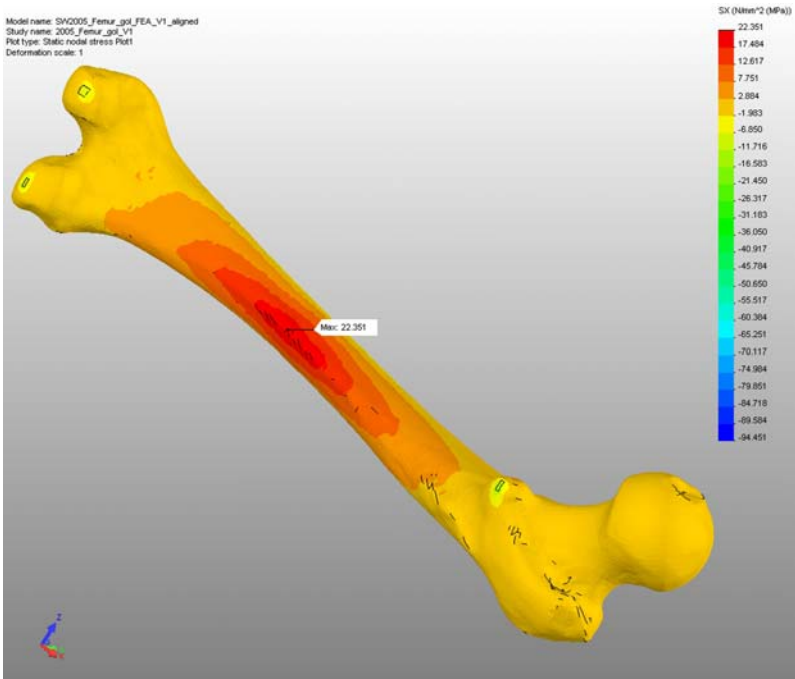
Fig. 8.3.5. Condițiile de deplasare impuse celor trei muchii ale suporturilor.

Odată cu finalizarea impunerii tuturor condițiilor analizei cu MEF, aceasta s-a lansat în execuție. Durata rulării analizei s-a situat în jurul valorii de 4 minute și 15 secunde, pe o platformă PC dotată cu procesor Intel Core 2 Duo E6750 2,66 GHz, 4 GB memorie RAM și sistem de operare Windows XP 32 biți. Se menționează faptul că sistemul de operare Windows XP 32 biți nu poate adresa o cantitate mai mare de 3 GB memorie RAM, în consecință doar această cantitate se poate folosi efectiv din totalul de 4 GB.

Figurile 8.3.6 și 8.3.7 ilustrează în două vederi distribuția tensiunilor normale pe secțiunile transversale ale geometriei femurului, aceste tensiuni fiind orientate după axa  $x$ , deci notate  $\sigma_x$  ( $SX$  în modulul COSMOSWorks 2005). Valoarea maximă a tensiunii  $\sigma_x$  de 23,351 MPa s-a înregistrat, cum era de așteptat, în zona femurului opusă suprafeței  $S$  asupra căreia s-a aplicat presiunea  $p$ , această zonă fiind supusă la întindere. Figura 8.3.8 redă detalii ale acestei zone.

Figurile 8.3.9 și 8.3.10 redau în două vederi distribuția deplasărilor (deformațiilor) verticale, orientate după axa  $y$  și notate  $UY$ , deplasarea maximă a punctului de aplicație al forței  $F$  având valoarea de  $-1,366$  mm. Această valoare este calculată ca fiind media deplasărilor  $UY$  pe suprafața  $S$ .

În cadrul figurii 8.3.11 este ilustrată distribuția deplasărilor rezultante, notate cu  $URES$ , valoarea maximă de  $1,451$  mm înregistrându-se la nivelul suprafeței  $S$  unde s-a aplicat presiunea  $p$ .

Fig. 8.3.6. Distribuția tensiunilor normale  $\sigma_x$  (SX) - vederea a.Fig. 8.3.7. Distribuția tensiunilor normale  $\sigma_x$  (SX) - vederea b.

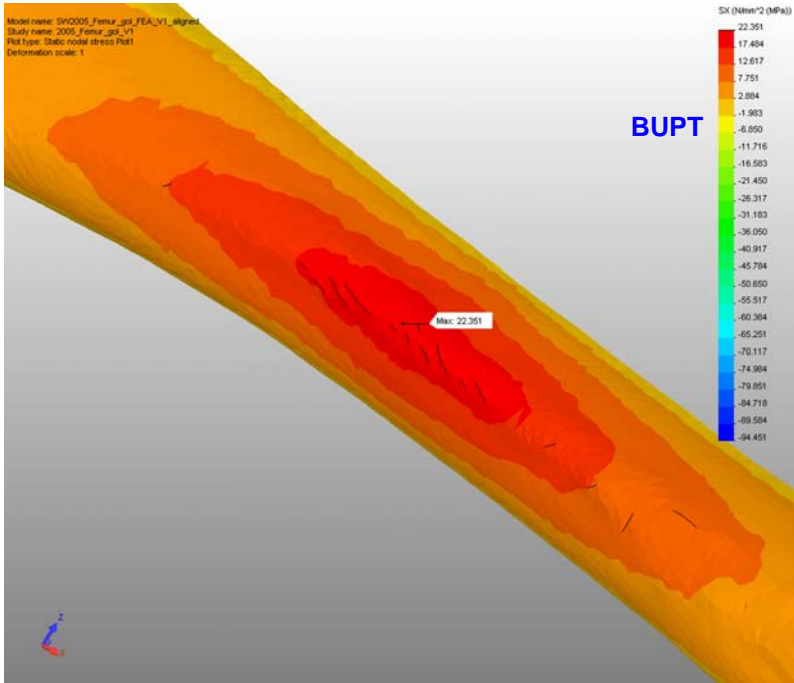


Fig. 8.3.8. Zona tensiunii normale  $\sigma_x$  (SX) maxime.

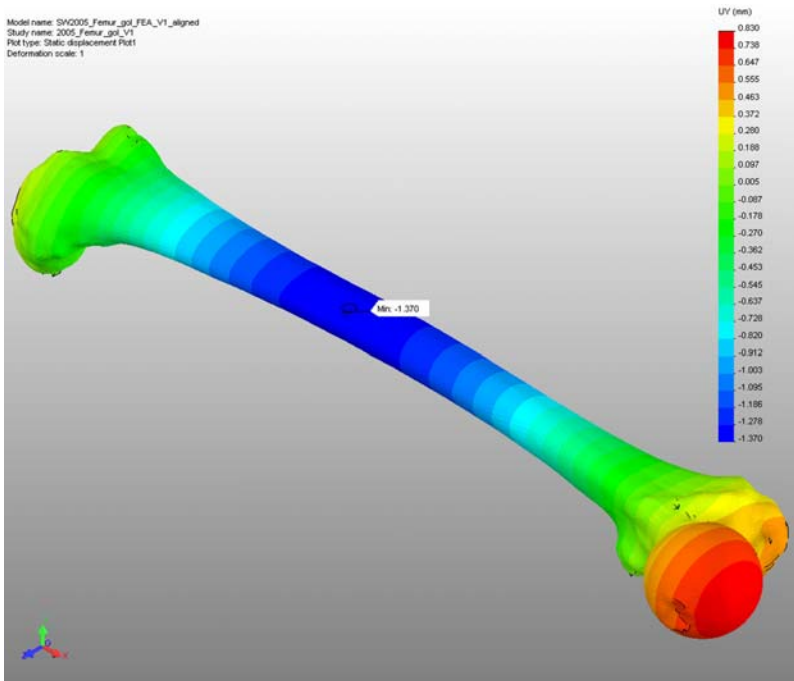
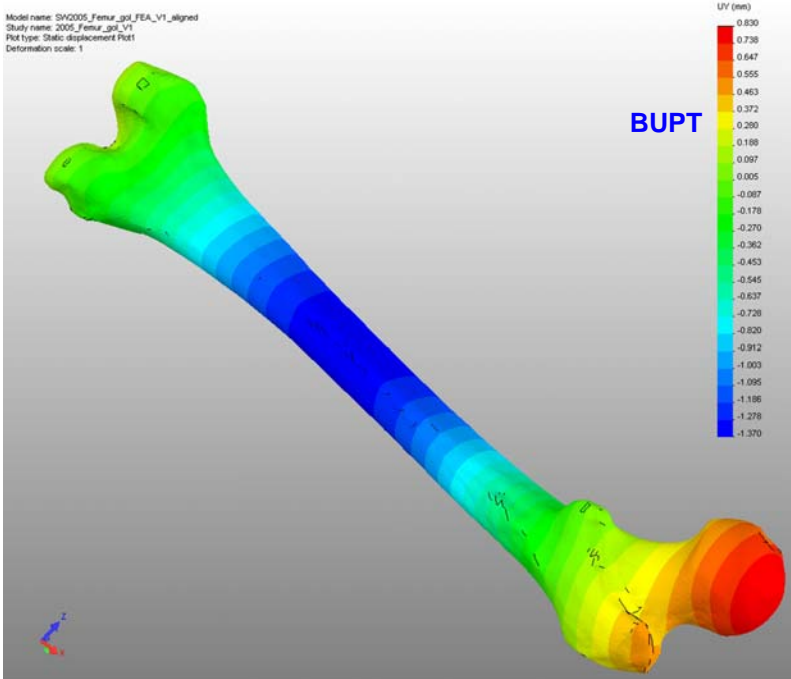
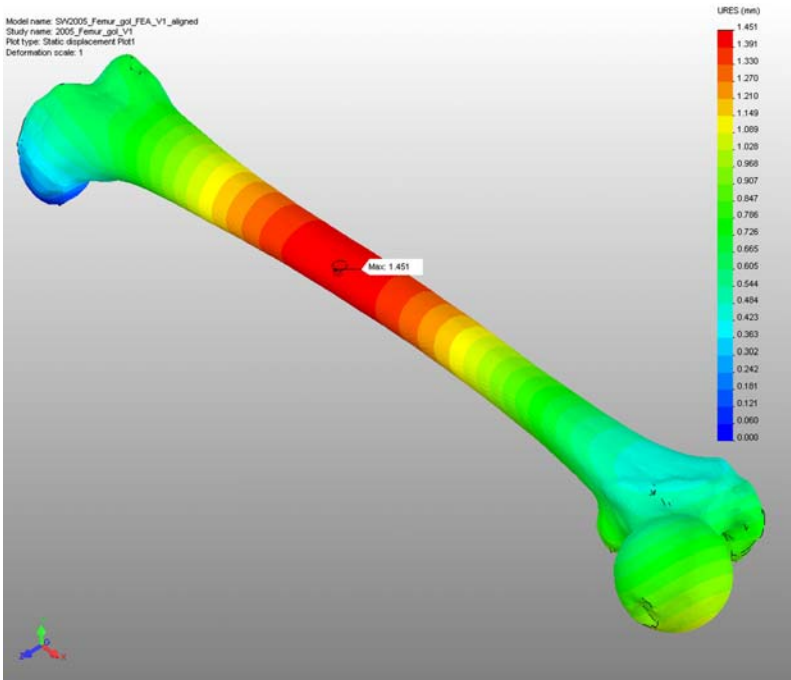


Fig. 8.3.9. Distribuția deplasărilor UY - vederea a.

Fig. 8.3.10. Distribuția deplasărilor  $UY$  - vederea  $b$ .Fig. 8.3.11. Distribuția deplasărilor rezultante  $URES$ .

## 8.4. A doua variantă a modelului de calcul.

Al doilea model de calcul a fost dezvoltat din considerente practice sub aspectul validării sale experimentale ulterioare. În cadrul paragrafelor dedicate primului model de calcul s-a afirmat faptul că femurul poate fi așezat pe un plan orizontal, femurul având trei puncte de contact cu acesta.

Pentru validarea experimentală ulterioară a modelelor de calcul s-a optat pentru utilizarea unei mașini de tracțiune-compresiune Walter+Bai LFV 10-HM care poate funcționa atât în regim static cât și în regim dinamic, forța maximă dezvoltată de mașină având valoarea de 10 kN (12 kN - regim static). O vedere generală a mașinii este ilustrată în figura 8.4.1. Cilindrul hidraulic de forță este situat la partea



Fig. 8.4.1. Vedere generală a mașinii de tracțiune-compresiune Walter+Bai LFV 10-HM.



superioară a mașinii (figura 8.4.2). De tija cilindrului hidraulic este atașat dispozitivul suport al bacurilor superioare, acest dispozitiv fiind mobil pe direcția



Fig. 8.4.2. Cilindrul hidraulic de forță.

verticală a mașinii (figura 8.4.3). Dispozitivul suport al bacurilor inferioare este identic cu cel superior, dar este fix. Ambele dispozitive suport ale bacurilor posedă câte o suprafață orizontală (figura 8.4.4) prevăzută fiecare cu două găuri filetate



Fig. 8.4.3. Dispozitivul suport al bacurilor superioare.

care permit atașarea unor dispozitive auxiliare cum ar fi cele dedicate încercărilor de mecanica ruperii.

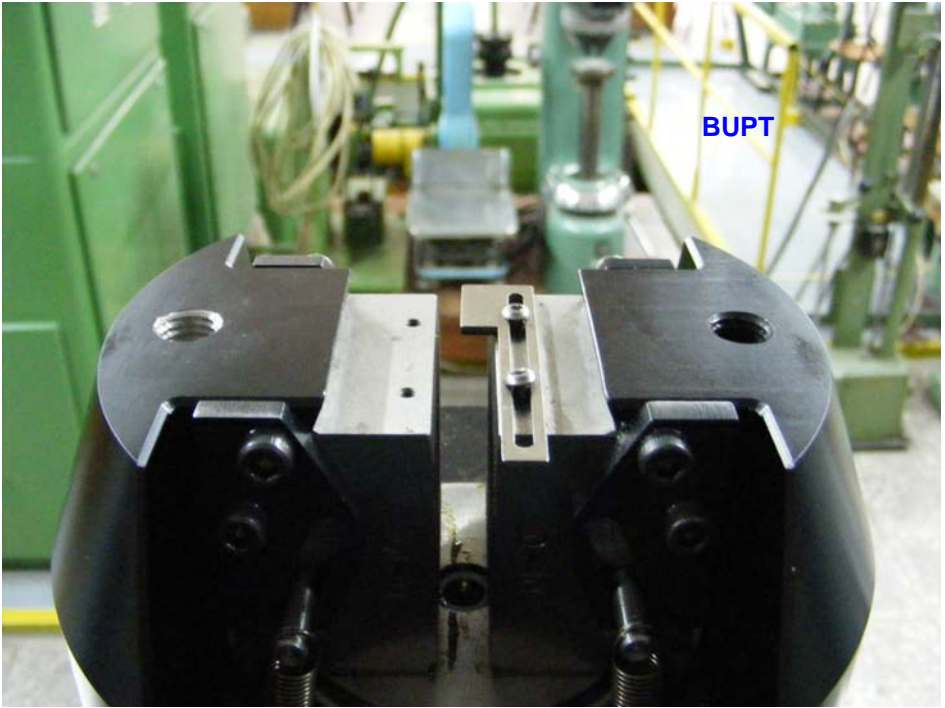


Fig. 8.4.4. Găurile filetate care permit atașarea unor dispozitive auxiliare.

La nivelul dispozitivului suport al bacurilor inferioare, prin intermediul celor două găuri filetate ale acestuia, se poate atașa o placă (cu o rigiditate mult mai mare decât cea a femurului) în poziție orizontală, pe care se poate așeza femurul (figura 8.4.5). În dispozitivul bacurilor superioare, prin strângerea acestora, se

BUPT



Fig. 8.4.5. Placa suport pe care se așează femurul.

poate fixa în poziție verticală o pană prin intermediul căreia se transmite forța necesară solicitării de încovoiere în trei puncte a femurului (figura 8.4.6). Această



Fig. 8.4.6. Pana prin intermediul căreia se transmite femurului forța de încovoiere.

solicitare a fost aleasă ca fiind adecvată în cadrul stabilirii primului model de calcul.

Pornind de la toate aceste considerente, al doilea model de calcul poate fi schematizat în plan (2D) conform figurii 8.4.7.

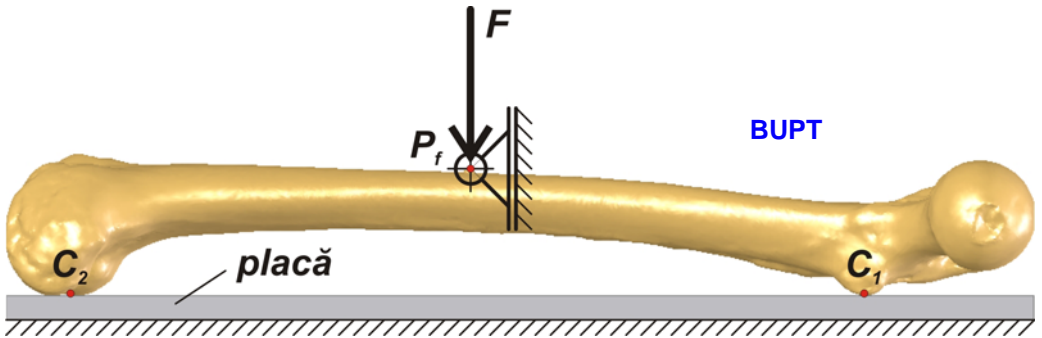


Fig. 8.4.7. Schematizarea celui de-al doilea model de calcul al femurului pentru solicitarea de încovoiere în trei puncte.

Datorită faptului că punctul de aplicație  $P_f$  al forței  $F$  dezvoltată de mașina de tracțiune-compresiune se poate deplasa doar în direcția dreptei suport a forței (datorită construcției mașinii), s-a considerat reazemul mobil articulată în punctul  $P_f$ . Contactul dintre femur și planul superior al plăcii considerate fixe se realizează în punctele  $C_1$  și  $C_2$ . În urma solicitării de încovoiere, punctele de contact  $C_1$  și  $C_2$  se vor deplasa doar într-o direcție orizontală conținută în planul superior al plăcii. Cele trei puncte corespunzătoare solicitării de încovoiere sunt  $C_1$ ,  $C_2$  și  $P_f$ . Poziția punctului  $P_f$  în raport cu o direcție orizontală este deocamdată nedeterminată, depinzând de poziționarea femurului pe placă în raport cu dispozitivul bacurilor superioare și coloanele mașinii de tracțiune-compresiune.

Prin suprapunerea (și fixarea prin asamblare șurub-piuliță) a două plăci din PAL melaminat cu grosimea fiecăreia de 18 mm s-a realizat o placă suport (figura 8.4.8) cu dimensiunile 410 x 300 mm, pe care se așează femurul în mașina de tracțiune-compresiune.



Fig. 8.4.8. Placa suport a femurului.

Pana prin intermediul căreia se transmite forța  $F$ , având dimensiunile 80 x 40 mm s-a confecționat din PFL cu grosimea de 8 mm. Partea inferioară a penei, care intră în contact cu femurul, s-a rotunjit cu raza de 4 mm. Figura 8.4.9 ilustrează pana fixată prin intermediul bacurilor superioare ale mașinii de tracțiune-compresiune. Placa, la rândul ei, a fost atașată de dispozitivul bacurilor inferioare ale mașinii de tracțiune-compresiune, iar în final s-a poziționat femurul pe placă (figura 8.4.10). Poziționarea femurului pe placa suport a necesitat o atenție deosebită datorită faptului că lungimea totală a femurului este aproximativ egală cu distanța dintre coloanele mașinii de tracțiune-compresiune.

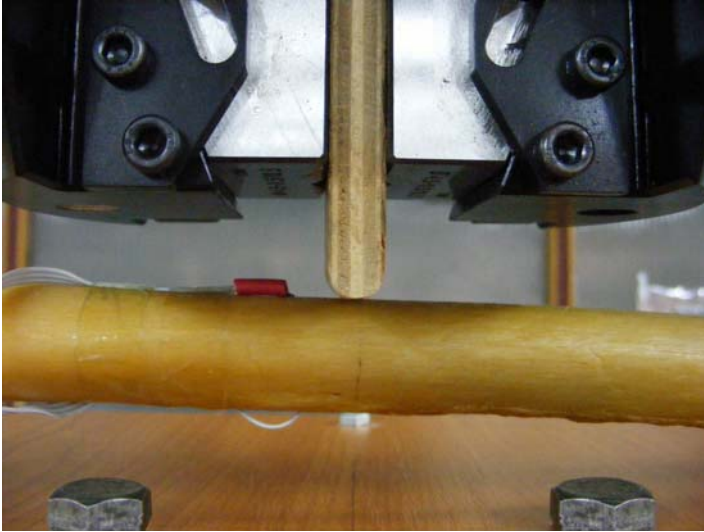


Fig. 8.4.9. Fixarea penei în bacurile superioare ale mașinii de tracțiune-compresiune.



Fig. 8.4.10. Poziționarea femurului pe placa suport.

## 8.5. Adaptarea modelului CAD al femurului pentru aplicarea celui de-al doilea model de calcul.

Datorită faptului că cel de-al doilea model de calcul implică și modelarea CAD a plăcii suport a femurului, iar în cadrul analizei cu MEF se rezolvă problema complexă a contactului femur-placă, s-a apelat la varianta 2007 64 biți a programului SolidWorks, pe aceeași platformă PC dotată de această dată cu sistemul de operare Windows XP 64 biți, pentru a putea fi adresată întreaga memorie RAM (4 GB).

După cum s-a observat în cadrul primului model de calcul, contactul dintre femur și un plan orizontal (în cazul de față - placa suport) se realizează în cele trei puncte:  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_4$  (s-au păstrat notațiile din primul model de calcul). De asemenea, tot în primul model de calcul, s-a construit planul *Plane1* determinat de cele trei puncte de contact. Având stabilită poziția femurului pe placa suport, în raport cu pana prin intermediul căreia se transmite forța  $F$  dezvoltată de mașina de tracțiune-compresiune, s-a trasat segmentul  $I_3I_4$  (figura 8.5.1) care reprezintă intersecția dintre planul vertical de simetrie al penei și planul determinat de cele trei puncte de contact. Astfel punctul  $I_3$  aparține segmentului  $C_1C_3$ , respectiv punctul  $I_4$  aparține segmentului  $C_1C_4$ .

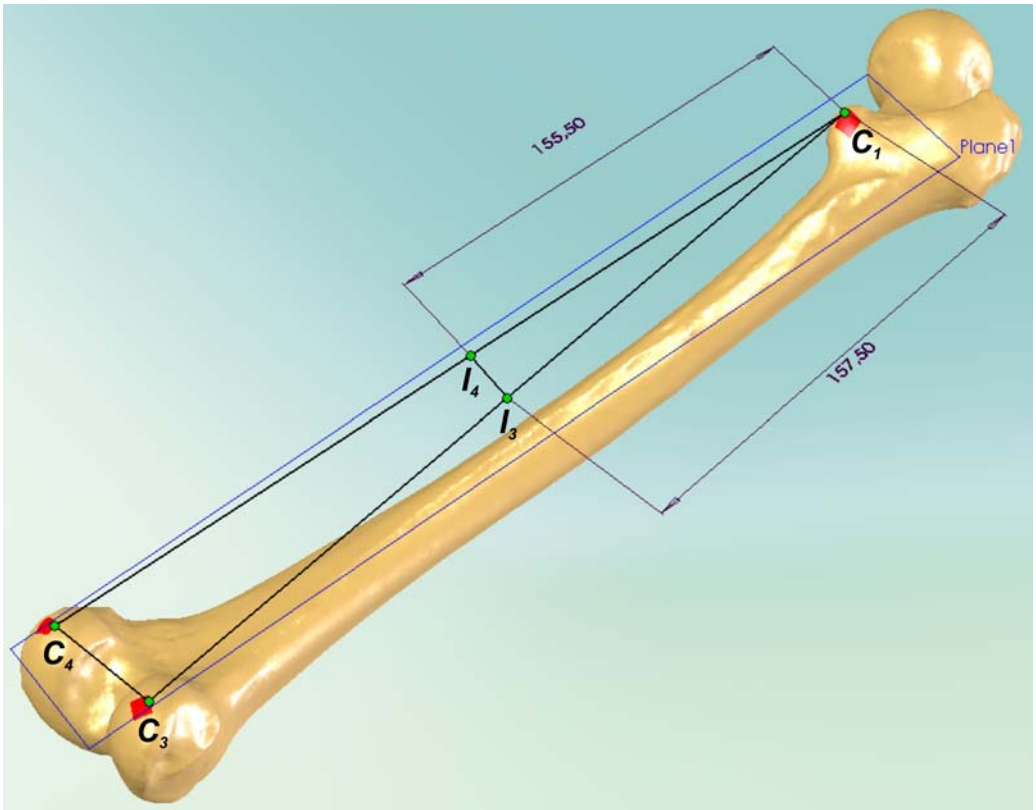


Fig. 8.5.1. Trasarea segmentului  $I_3I_4$ .

Prin segmentul  $I_3I_4$  s-a construit planul *Plane2* (figura 8.5.2), perpendicular pe planul *Plane1*. *Plane2* reprezintă planul de simetrie al penei prin intermediul căreia se aplică forța  $F$ . Punctul  $P_f$  de aplicație al forței  $F$  este conținut în muchia

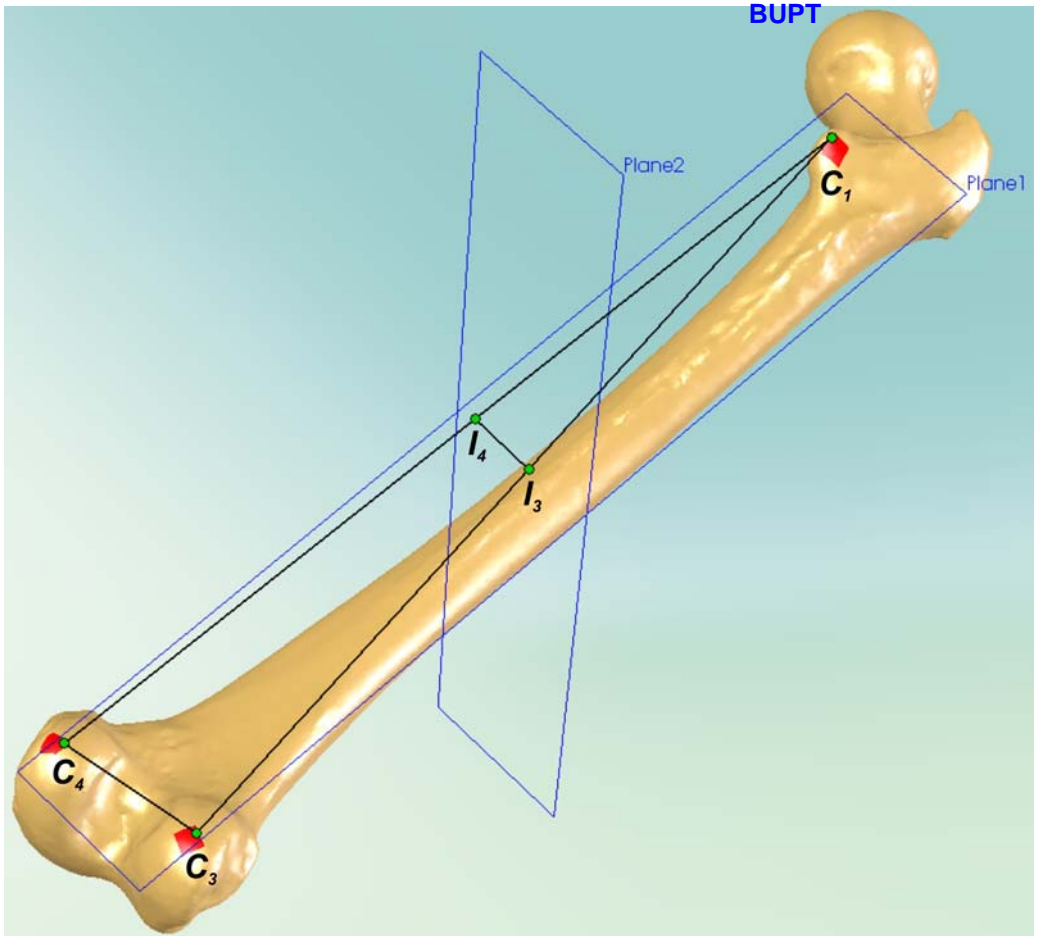


Fig. 8.5.2. Construcția planului *Plane2*.

penei aflată în contact cu femurul. Această muchie este la rândul ei conținută în planul de simetrie al penei (*Plane2*) și este paralelă cu segmentul  $I_3I_4$ . Intersecția dintre planul *Plane2* și suprafața exterioară a femurului reprezintă un contur închis (figura 8.5.3). Muchia penei aflată în contact cu femurul este conținută în planul conturului închis și în același timp este tangentă la acest contur într-un punct care are cea mai mare elevație față de planul punctelor de contact (*Plane1*) al femurului cu placa suport. Acest punct de tangență este chiar punctul căutat  $P_f$  de aplicație al forței  $F$  (figura 8.5.4). În continuare, prin punctul  $P_f$  s-a construit planul *Plane3* perpendicular pe planele *Plane1* și *Plane2* (figura 8.5.5). Planul *Plane3* conține axele de simetrie verticale ale coloanelor mașinii de tracțiune-compresiune. Tot prin punctul  $P_f$  s-a construit planul *Plane4* paralel cu planul *Plane1* (figura 8.5.6).



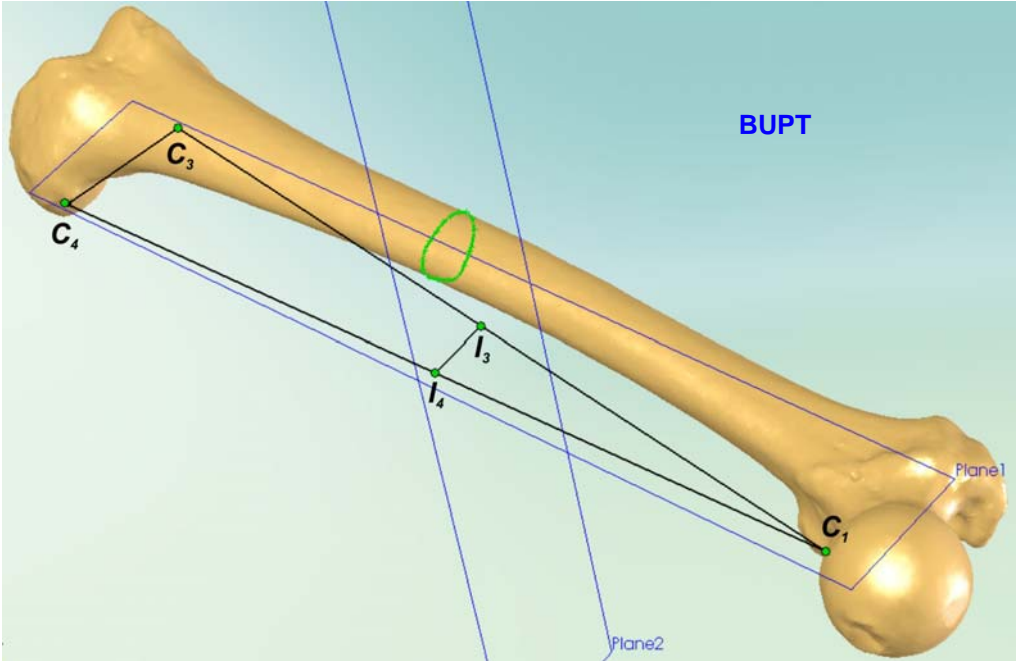


Fig. 8.5.3. Conturul închis determinat de intersecția dintre planul  $Plane2$  și suprafața exterioară a femurului.

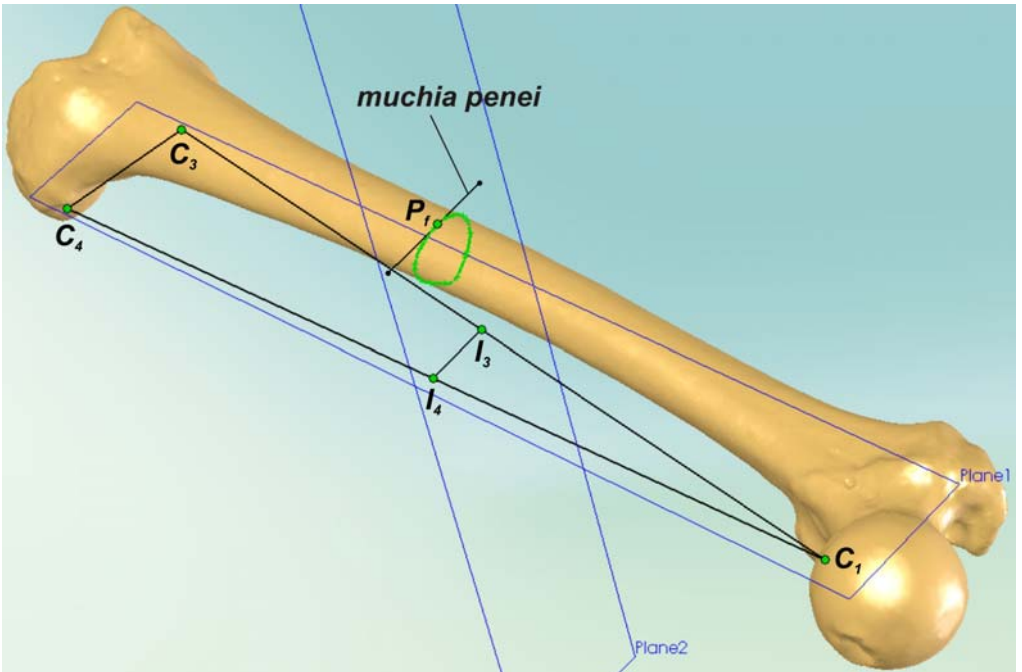


Fig. 8.5.4. Determinarea punctului  $P_f$  de aplicație al forței  $F$ .

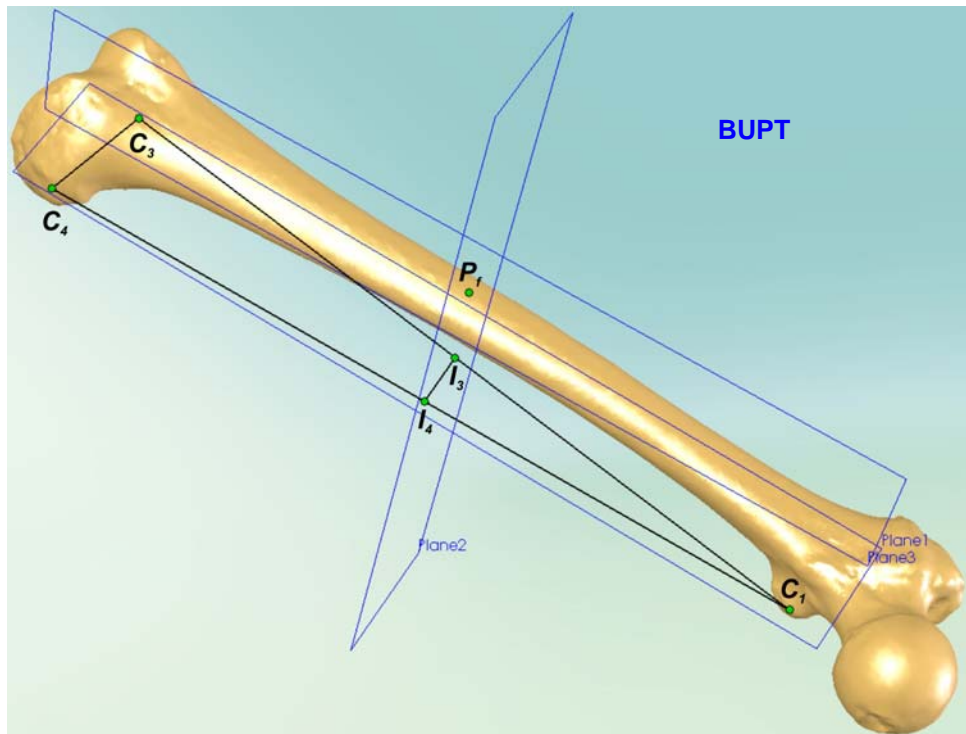


Fig. 8.5.5. Construcția planului *Plane3*.

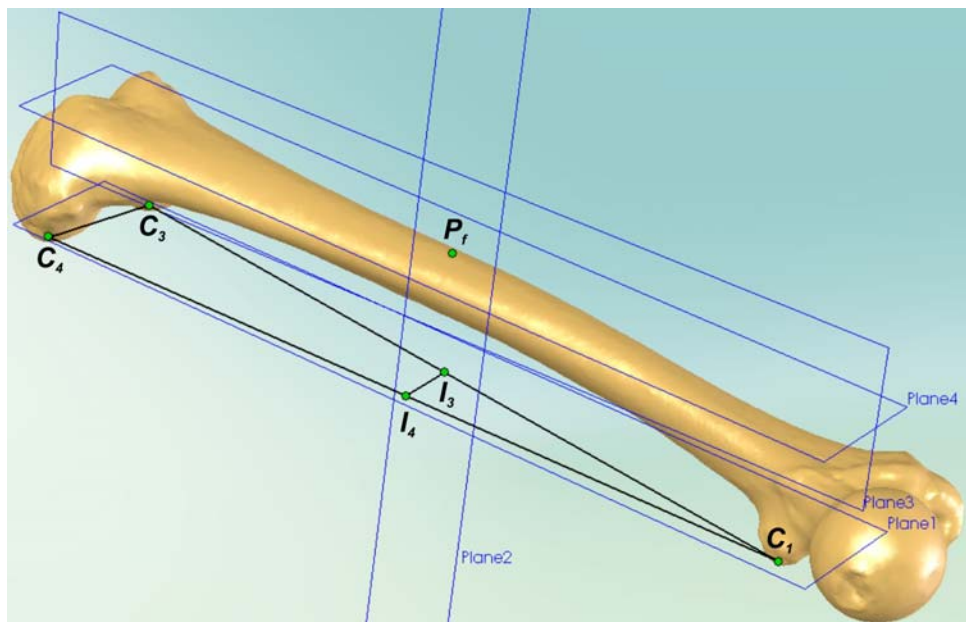


Fig. 8.5.6. Construcția planului *Plane4*.

Din motive menționate la primul model de calcul, forța concentrată  $F$  se echivalează cu o presiune  $p$  aplicată pe o suprafață circulară  $S$  al cărei centru să constituie proiecția punctului  $P_f$  în raport cu planul  $Plane4$ . În planul  $Plane4$  s-a construit un cerc cu centrul în punctul  $P_f$  (figura 8.5.7). Acest cerc a fost extrudat pe o distanță de 1 mm după o direcție perpendiculară pe planul  $Plane4$ , rezultând o formă cilindrică solidară cu femurul (figura 8.5.8). Ca și în cazul primului model de calcul, în zona intersecției dintre femur și forma cilindrică s-a aplicat o racordare cu raza de 0,6 mm (figura 8.5.9). Pentru o mai bună vizibilitate a entităților geometrice ilustrate în figurile 8.5.7, 8.5.8 și 8.5.9, s-au reprezentat contururile suprafețelor Bézier ale modelului CAD al femurului.

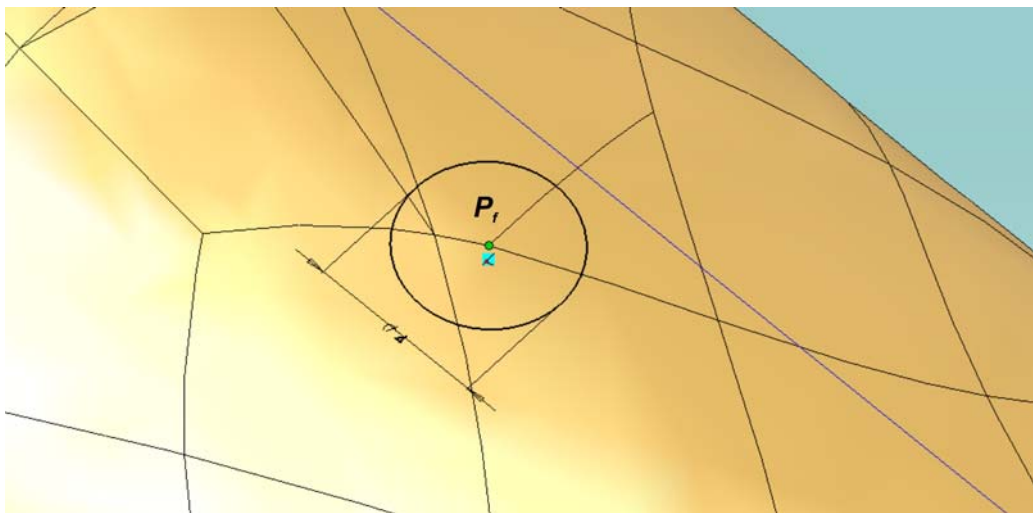


Fig. 8.5.7. Construcția cercului cu centrul în punctul  $P_f$ .

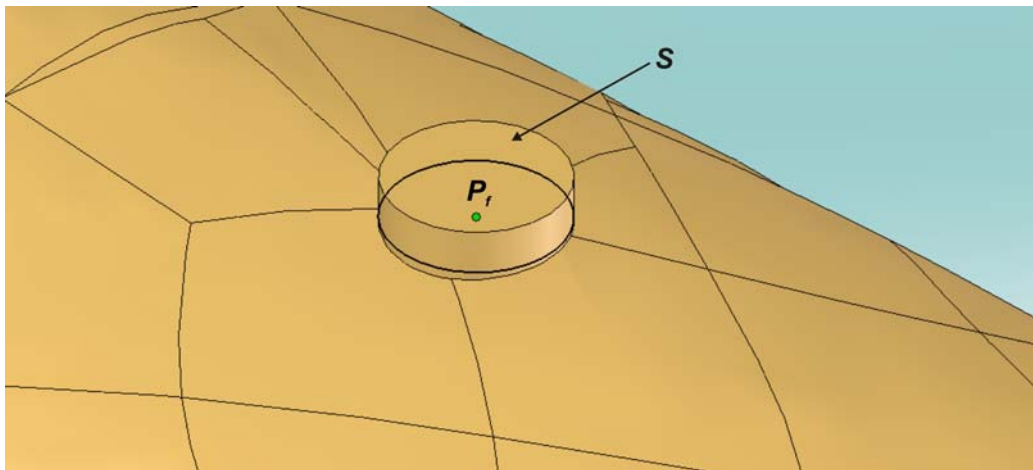


Fig. 8.5.8. Suprafața  $S$  rezultată în urma construcției formei cilindrice.

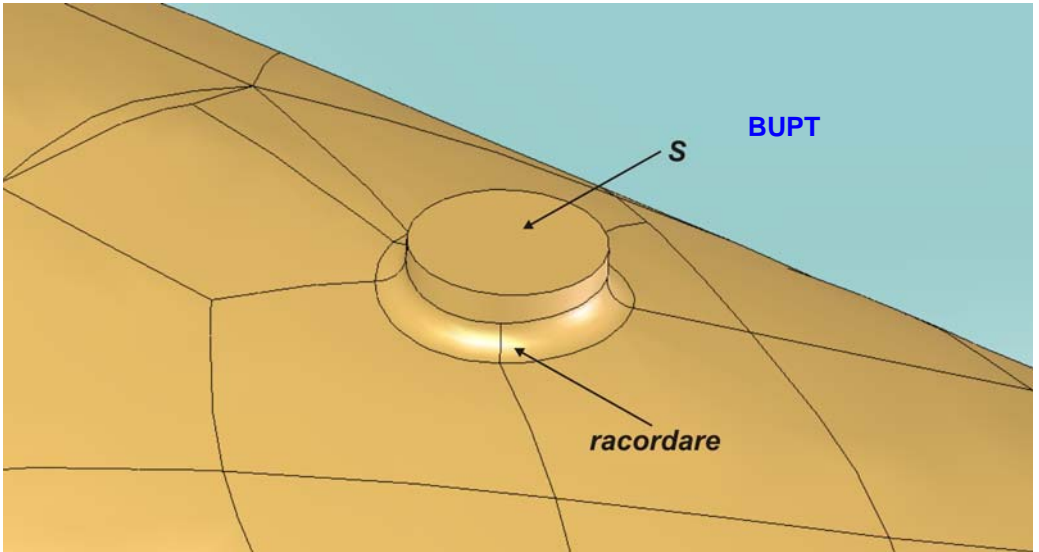


Fig. 8.5.9. Aplicarea racordării în zona intersecție dintre femur și forma cilindrică.

În pasul următor s-a realizat modelul CAD al plăcii suport. Se menționează faptul că modelul CAD al plăcii s-a realizat cu dimensiuni mai mici (400x50x10) pentru a nu pune în dificultate rezolvarea ulterioară a analizei cu MEF prin creșterea numărului de elemente finite. Dimensiunile modelului plăcii au fost alese astfel încât suprafața superioară a modelului plăcii să cuprindă cele trei puncte de contact dintre femur și placă. Modelul plăcii (figura 8.5.10) a fost realizat astfel încât suprafața superioară pe care se așează femurul să fie conținută în planul fundamental *Top Plane*, iar celelalte două plane fundamentale *Front Plane*, respectiv *Right Plane* să constituie plane de simetrie ale plăcii.

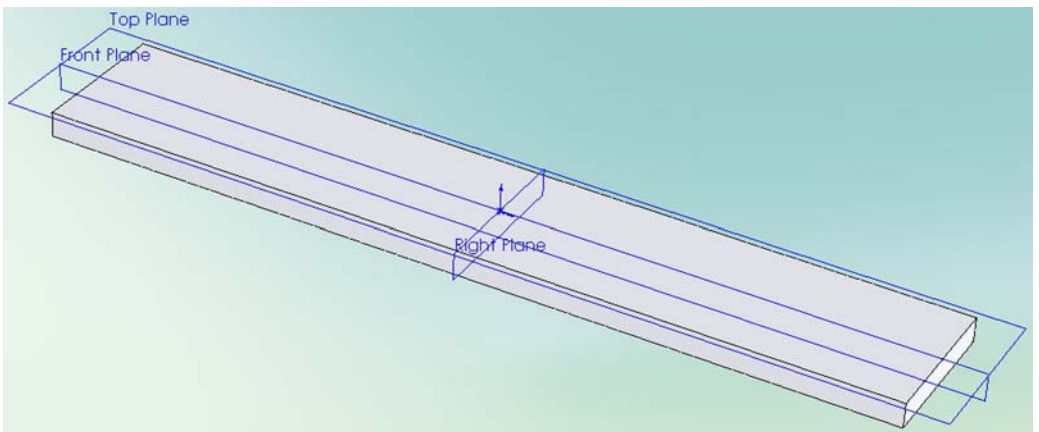


Fig. 8.5.10. Modelul CAD al plăcii suport.

Asamblarea modelelor CAD ale femurului și plăcii suport constituie ultima etapă. Aceasta se realizează în modulul *Assembly* al programului SolidWorks 2007 x64. Coordonatele mediului de asamblare sunt determinate de cele trei plane fundamentale: *Top Plane*, *Front Plane* și *Right Plane*. În raport cu aceste plane se poziționează modelul CAD al femurului, respectiv al plăcii suport. Într-un prim pas s-a poziționat modelul CAD al plăcii prin suprapunerea în corespondență a celor trei plane fundamentale ale modelului plăcii cu cele trei plane fundamentale ale mediului de asamblare. În cel de-al doilea pas s-a poziționat modelul femurului, astfel încât au rezultat următoarele relații geometrice:

- planul *Plane1* este coincident cu planul fundamental *Top Plane*;
- planul *Plane2* este coincident cu planul fundamental *Right Plane*;
- planul *Plane3* este coincident cu planul fundamental *Front Plane*.

Figura 8.5.11 ilustrează asamblarea modelului CAD al femurului cu cel al plăcii suport adoptată în continuare în cadrul analizei cu MEF.

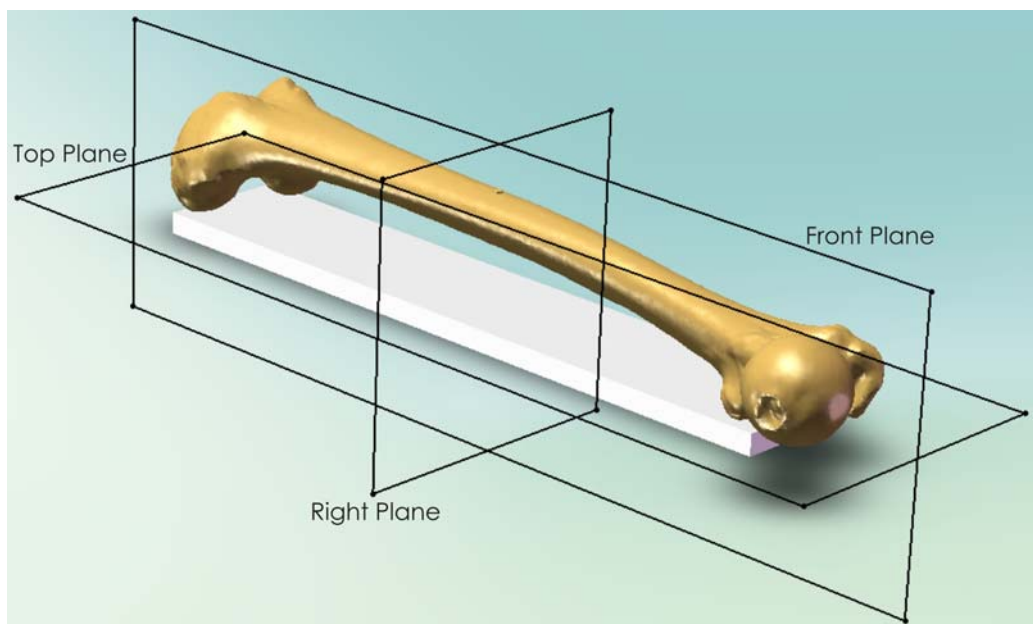


Fig. 8.5.11. Ansamblul femur - placă suport.

## 8.6. Rezolvarea celui de-al doilea model de calcul cu ajutorul MEF.

Rezolvarea celui de-al doilea model de calcul cu ajutorul MEF s-a realizat în cadrul modulului COSMOSWorks 2007 x64 care este integrat în programul SolidWorks 2007 x64.

Ca și în cazul primului model de calcul, s-a ales tipul analizei "*Static Analysis*" și aceleași caracteristici de material pentru modelul femurului ( $E_X = 11.000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  [39]). Materialul modelului CAD al plăcii suport s-a considerat a fi oțel cu  $E_X = 210.000 \text{ MPa}$  și  $\nu = 0,3$ , dorindu-se obținerea unei rigidități mult mai mari a plăcii suport în comparație cu cea a femurului.

De asemenea, în cazul analizei modelului CAD al ansamblului femur-placă suport s-au folosit elemente finite de tipul tetraedric cu patru noduri per element *TETRA4* și s-a adoptat o precizie ridicată de discretizare, dimensiunea medie a elementelor finite fiind de 2 mm. În zona forme cilindrice și a racordării acestuia din cadrul modelului femurului s-a redus treptat dimensiunea medie a elementelor finite până la valoarea de 0,2 mm.

În urma discretizării modelului ansamblului femur-placă suport s-au obținut 565.089 elemente finite totalizând 110.586 noduri. Figura 8.6.1 redă o vedere de

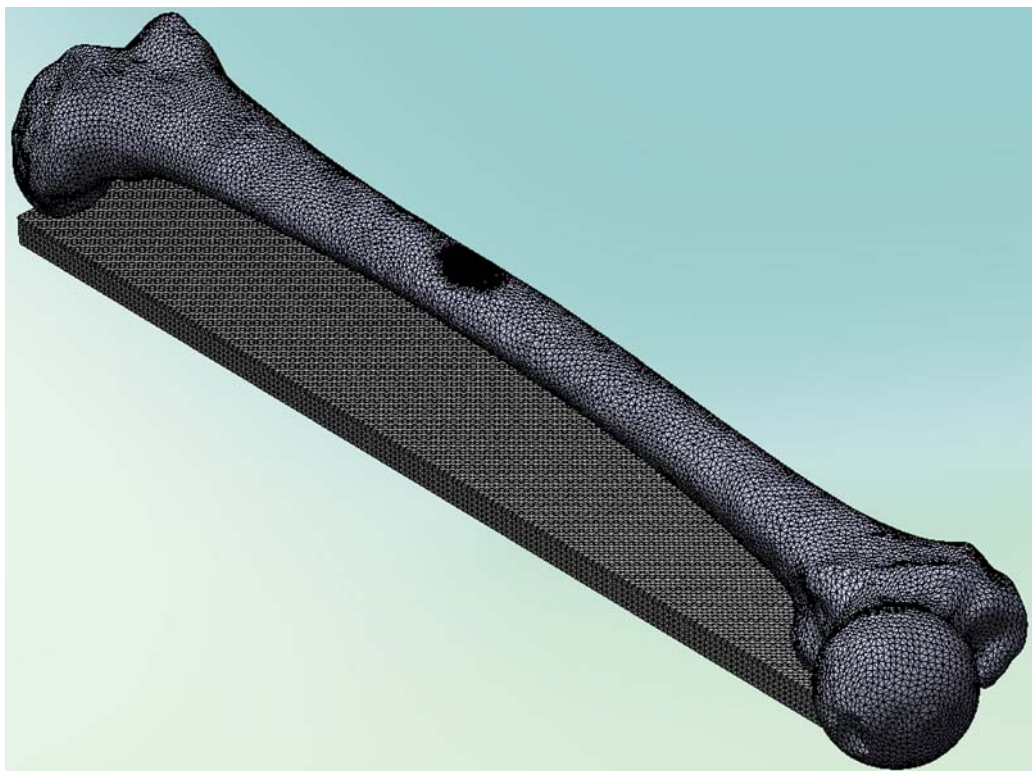


Fig. 8.6.1. Discretizarea în elemente finite a modelului CAD al ansamblului femur-placă suport.

ansamblu a discretizării în elemente finite a modelului CAD al ansamblului femur-placă suport, iar figura 8.6.2 ilustrează detalii ale discretizării în zona forme cilindrice și a racordării acestuia din cadrul modelului femurului.

Conform cu primul model de calcul, s-a adoptat o valoare a forței  $F$  de 300 N. Pentru valoarea adoptată a forței  $F$  și pentru diametrul de 4 mm al suprafeței circulare  $S$  rezultă valoarea presiunii  $p = 23,8732 \text{ N/mm}^2$ . Figura 8.6.3 ilustrează aplicarea presiunii  $p$  pe suprafața  $S$ .

Cele trei puncte de contact dintre femur și placa suport sunt conținute fiecare în parte în câte o suprafață Bézier a modelului CAD al femurului. Astfel, pentru fiecare din cele trei suprafețe s-a precizat o condiție de contact fără penetrare cu suprafața superioară a plăcii suport pe care s-a așezat femurul (figura 8.6.4).

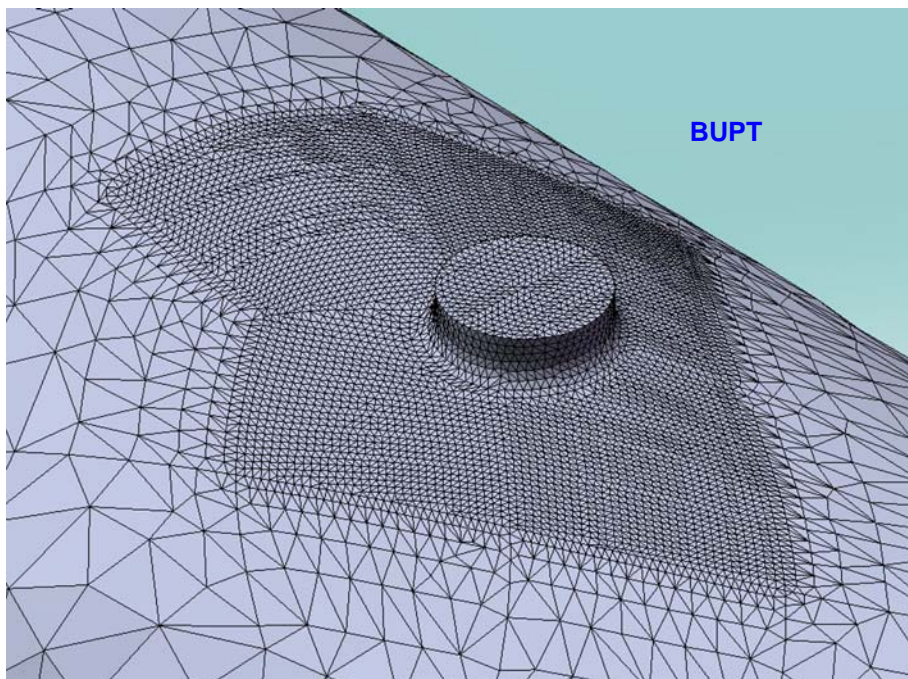


Fig. 8.6.2. Detalii ale discretizării în zona formei cilindrice și a racordării sale.

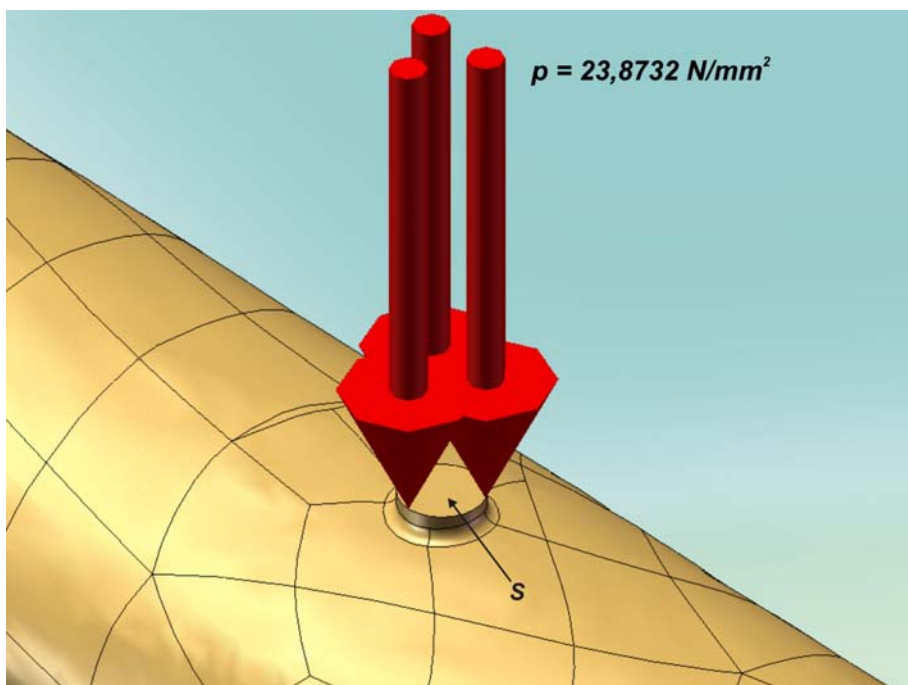


Fig. 8.6.3. Aplicarea presiunii  $p$  pe suprafața  $S$ .

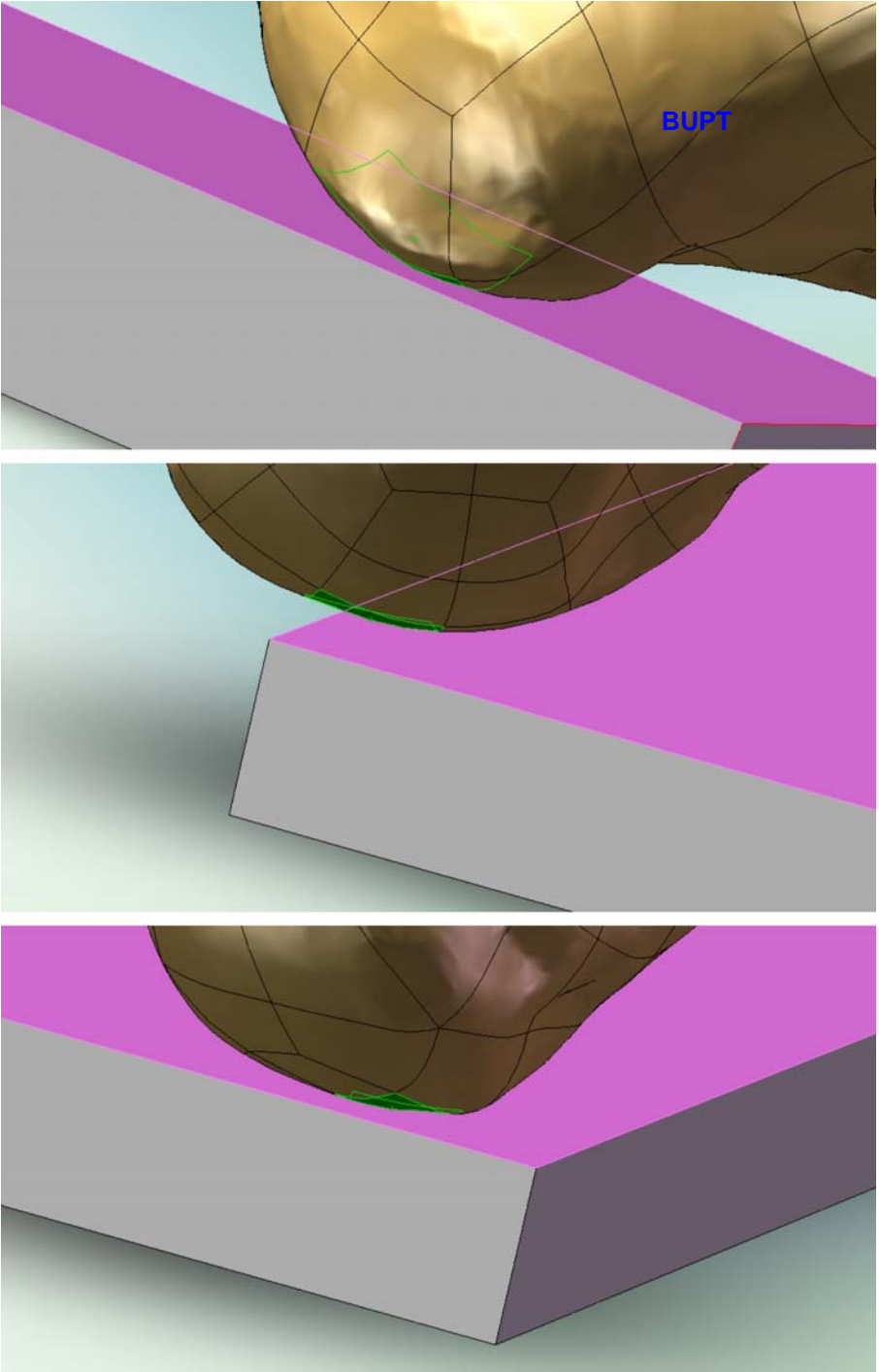


Fig. 8.6.4. Condițiile de contact fără penetrare dintre cele trei suprafețe Bézier ale modelului femurului și suprafața superioară a plăcii suport.



După cum s-a menționat în schematizarea celui de-al doilea model de calcul, punctul de aplicație  $P_f$  al forței  $F$  dezvoltată de mașina de tracțiune-compresiune se poate deplasa doar în direcția dreptei suport a forței. În consecință, suprafața  $S$  pe care se aplică presiunea  $p$  se poate deplasa pe direcție verticală a axei  $y$ , dar nu se poate deplasa pe direcțiile orizontale ale axelor  $x$  și  $z$ , deci deplasările  $UX$  și  $UZ$  ale suprafeței sunt nule (figura 8.6.5).

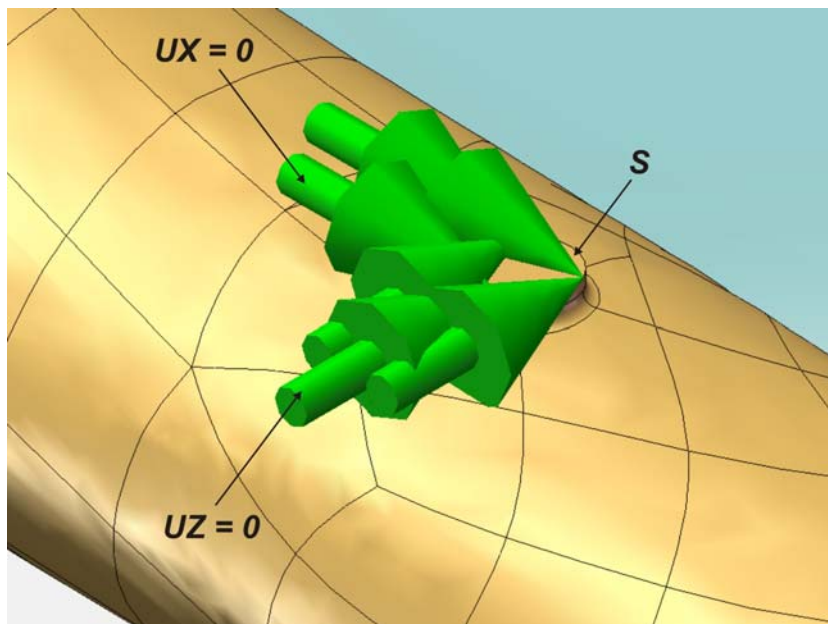


Fig. 8.6.5. Condițiile de deplasare impuse suprafeței  $S$ .

Suprafața inferioară a plăcii suport se consideră fixă (toate deplasările și rotațiile sunt nule) datorită atașării sale de dispozitivul fix al bacurilor inferioare ale mașinii de tracțiune-compresiune (figura 8.6.6).

Impunerea tuturor condițiilor analizei cu metoda elementului finit, a fost urmată de lansarea în execuție a analizei. Rularea analizei a durat aproximativ 46 minute, pe aceeași platformă PC ca în cazul primei analize, dar cu sistem de operare Windows XP 64 biți.

Figurile 8.6.7 și 8.6.8 ilustrează în două vederi distribuția tensiunilor normale pe secțiunile transversale ale modelului CAD al ansamblului femur-placă suport, orientate după axa  $x$ , deci notate  $\sigma_x$  ( $SX$ ). Valoarea maximă a tensiunii  $\sigma_x$  de 20,815 MPa s-a înregistrat în zona femurului opusă suprafeței  $S$  asupra căreia s-a aplicat presiunea  $p$ , zona fiind supusă la întindere. Figura 8.6.9 redă detalii ale acestei zone.

Figurile 8.6.10 și 8.6.11 redau în două vederi distribuția deplasărilor (deformațiilor) verticale, orientate după axa  $y$  ( $UY$ ), deplasarea maximă a punctului de aplicație a forței  $F$  având valoarea de  $-1,280$  mm. Această valoare este calculată ca fiind media deplasărilor  $UY$  pe suprafața  $S$ .

În cadrul figurii 8.6.12 este ilustrată distribuția deplasărilor rezultante, notate cu  $URES$ , valoarea maximă de  $1,288$  mm înregistrându-se la nivelul suprafeței  $S$  unde s-a aplicat presiunea  $p$ .

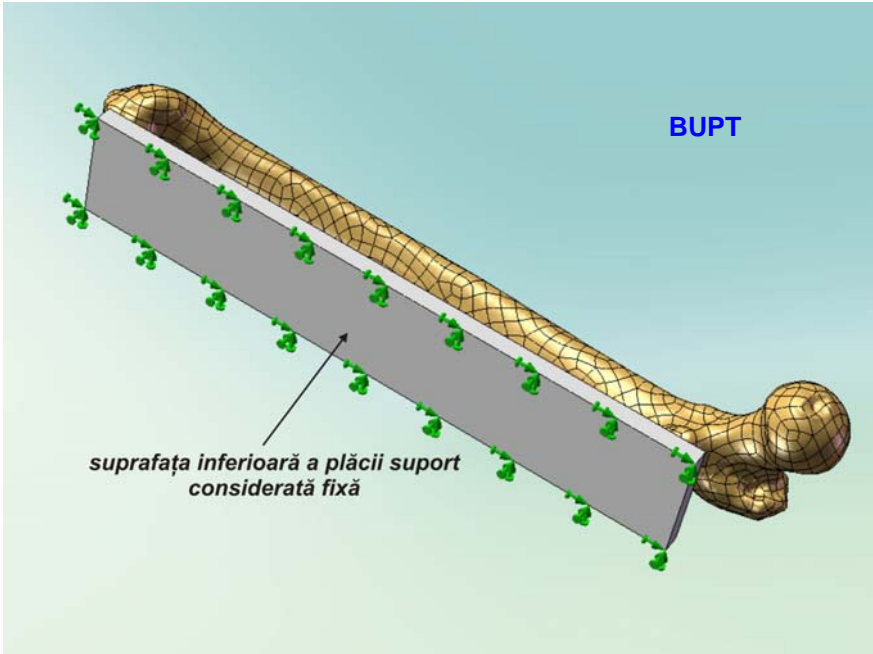


Fig. 8.6.6. Fixarea suprafeței inferioare a plăcii suport.

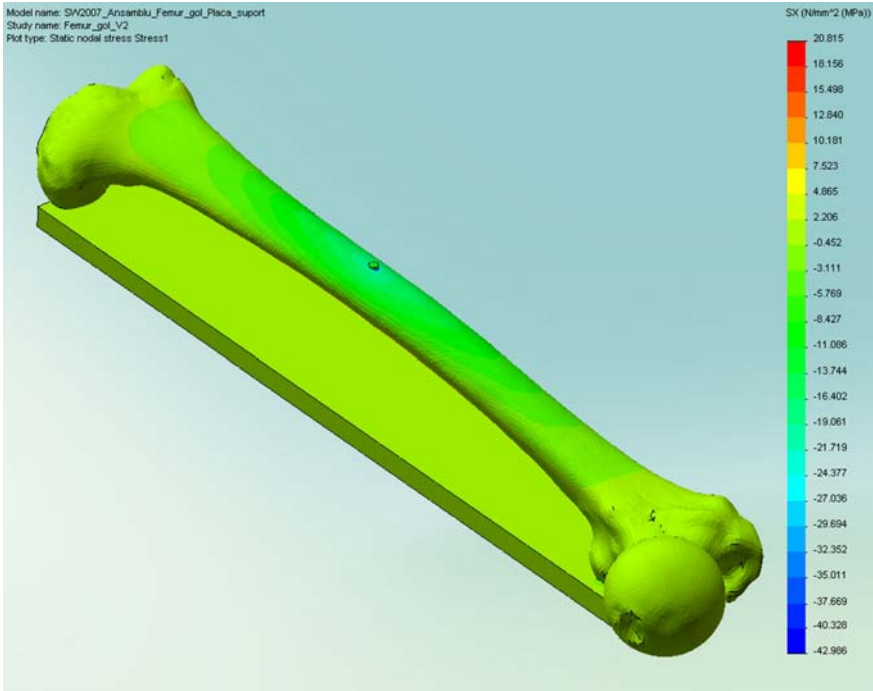


Fig. 8.6.7. Distribuția tensiunilor normale  $\sigma_x$  (SX) - vederea a.

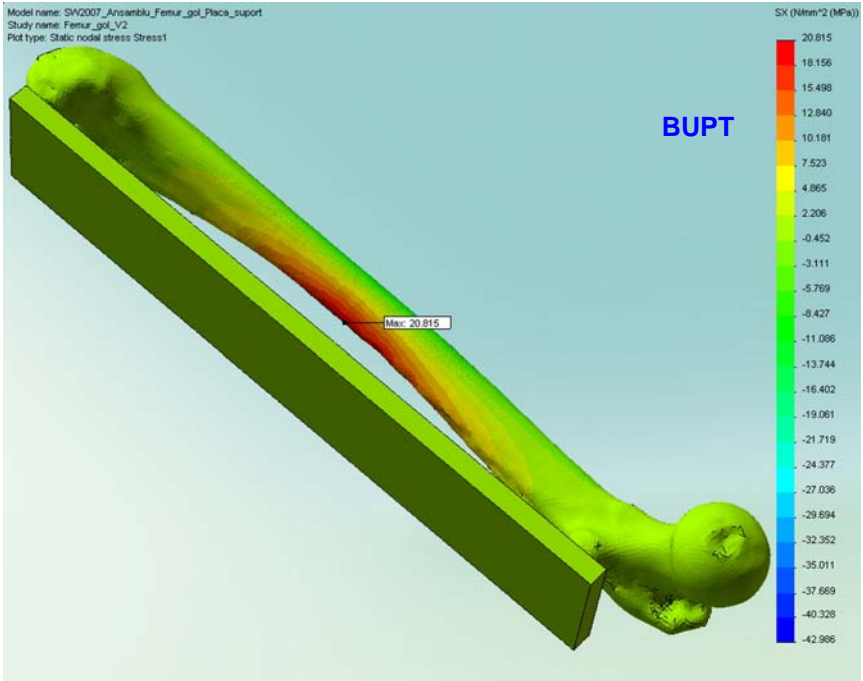


Fig. 8.6.8. Distribuția tensiunilor normale  $\sigma_x$  (SX) - vederea b.

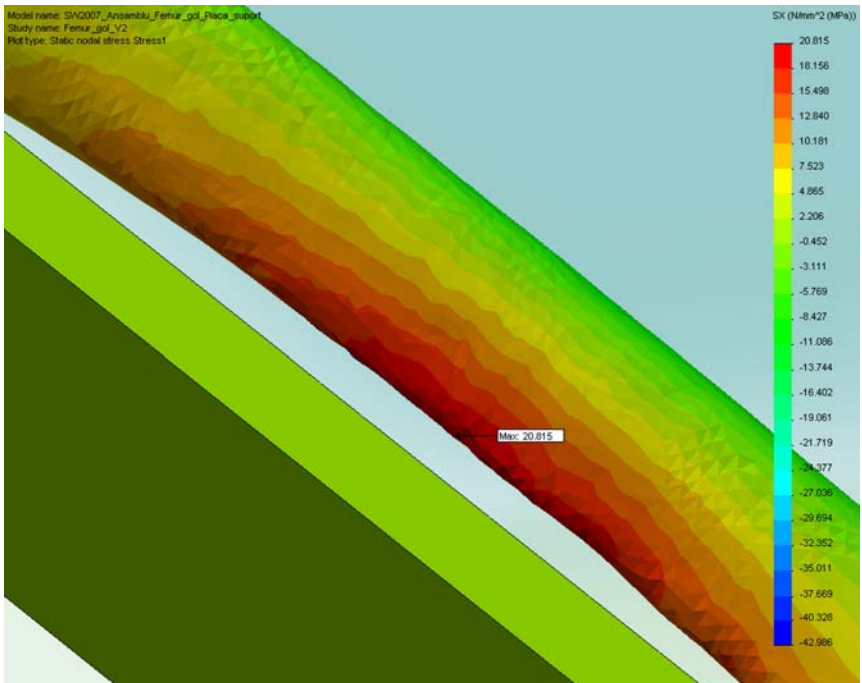


Fig. 8.6.9. Zona tensiunii normale  $\sigma_x$  (SX) maxime.

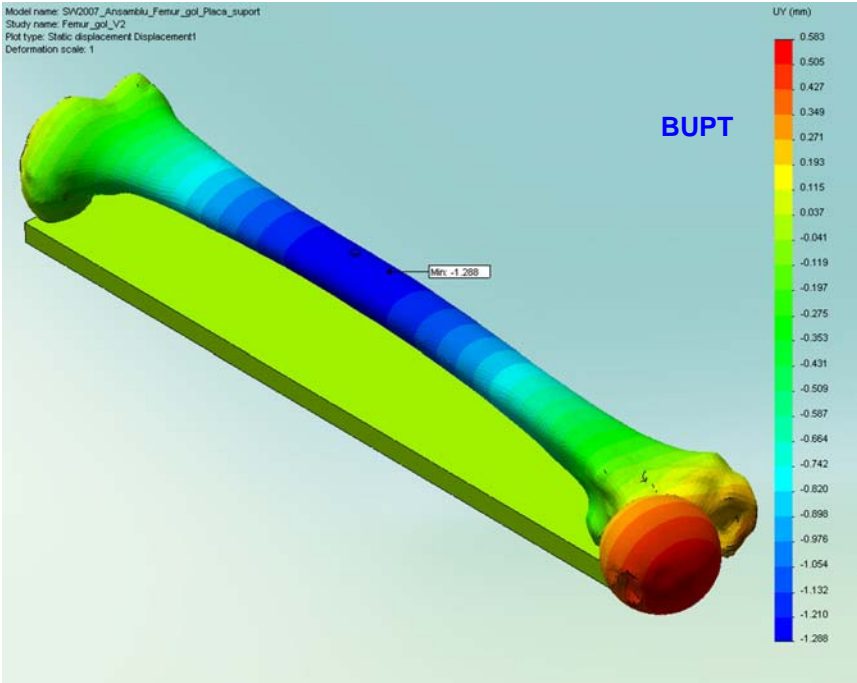


Fig. 8.6.10. Distribuția deplasărilor  $UY$  - vederea *a*.

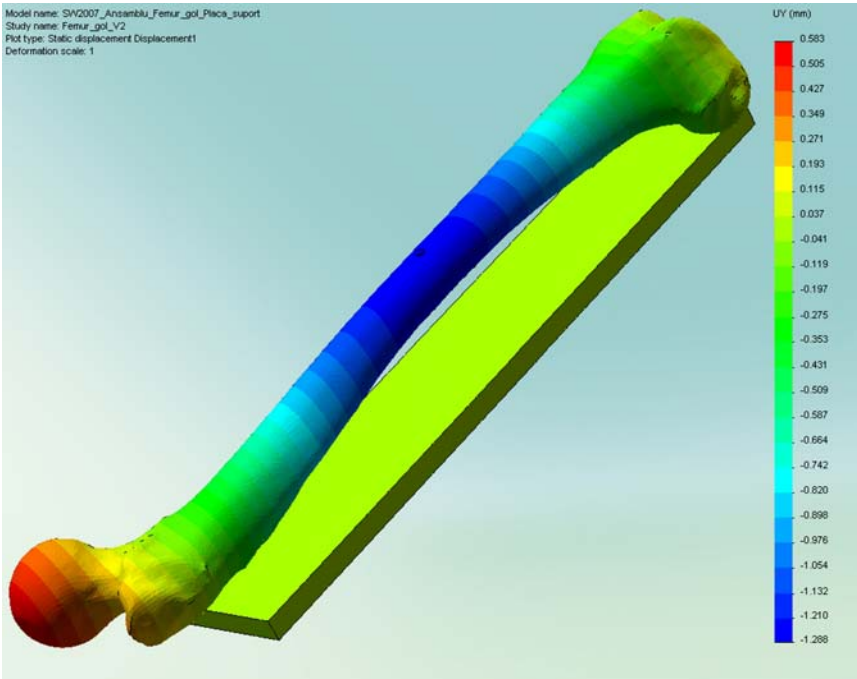


Fig. 8.6.11. Distribuția deplasărilor  $UY$  - vederea *b*.

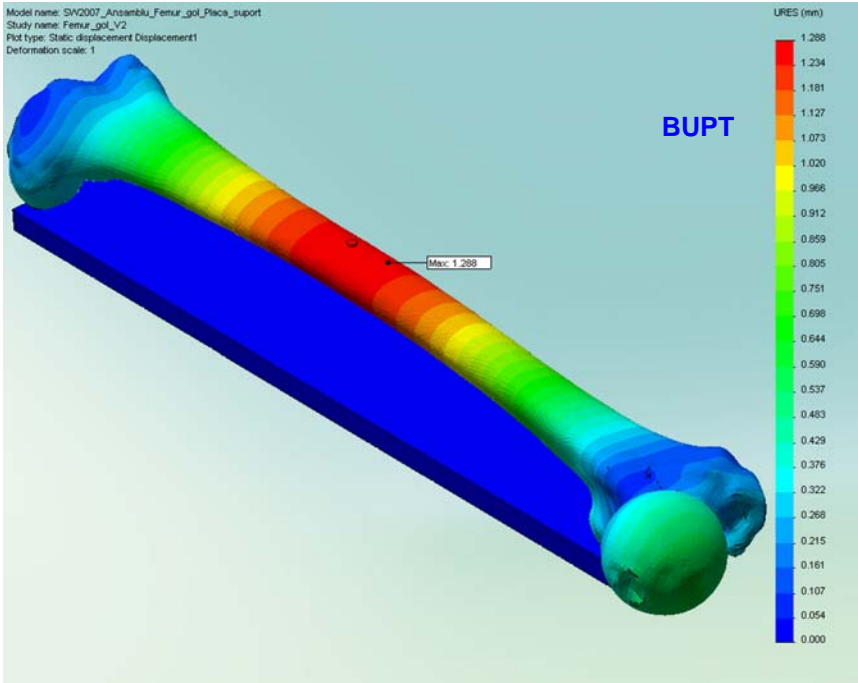


Fig. 8.6.12. Distribuția deplasărilor rezultante *URES*.

## 9. Validarea experimentală a modelelor de calcul la încovoiere ale femurului uman

### 9.1. Configurația tehnică.

După cum s-a menționat la stabilirea celui de-al doilea model de calcul, încercările experimentale ulterioare s-au efectuat pe o mașină de tracțiune-compresiune Walter+Bai LFV 10-HM, a cărei subansamble principale au fost prezentate. În continuare se prezintă câteva caracteristici tehnice ale mașinii:

- forța maximă în regim static: +/- 12 kN ;
- forța maximă în regim dinamic: +/- 10 kN ;
- cursa maximă a pistonului cilindrului hidraulic: 100 mm ;
- distanța dintre bacurile superioare și cele inferioare:  $0 \div 817$  mm ;
- presiunea de lucru: 120 bar ;
- debitul pompei: 6,5 l/min la 120 bar ;
- capacitatea rezervorului: aprox. 26 l ;
- vâscozitatea uleiului: 46 cSt la 40° C ;
- filtrul de ulei: 3  $\mu$ m ;
- indicarea colmatării filtrului de ulei: electronică ;
- indicarea temperaturii maxime a uleiului: electronică ;
- dimensiunile exterioare: 2835 x 1400 x 790 mm ;
- masa proprie: aprox. 550 kg ;
- alimentarea la rețea: 380 V, 16 A .

Figura 9.1.1 ilustrează o vedere generală a mașinii împreună cu placa suport, femurul și pana prin intermediul căreia se transmite forța de încovoiere.

Pentru verificarea comportamentului liniar-elastic al femurului în domeniul de forțe  $F = 0 \div 300$  N, s-au atașat femurului două timbre tensometrice, cu valoarea rezistenței de 120  $\Omega$ , produse de firma HBM (*Hottinger Baldwin Measurements*). Punctele de măsură T1 și T2 ale celor două timbre tensometrice se situează aproximativ în planul vertical *Plane3* care conține axele de simetrie ale celor două coloane ale mașinii (conform cu cel de-al doilea model de calcul). Primul punct de

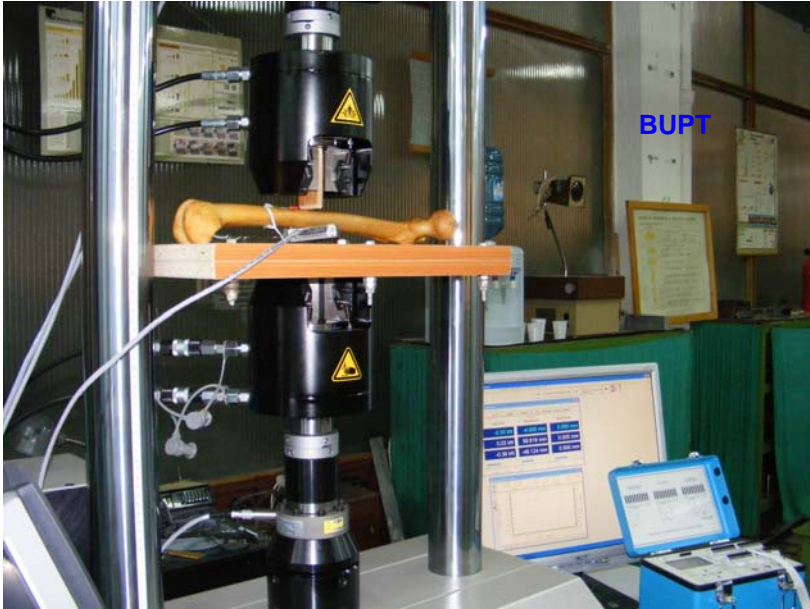


Fig. 9.1.1. Așezarea plăcii suport, a femurului și a penei prin intermediul căreia se transmite forța de încovoiere.

măsură, al timbrului tensometric  $T1$ , este situat în imediata vecinătate a punctului  $P_f$  de aplicație a forței  $F$  (în zona fibrelor extreme comprimate ale femurului) pentru a nu interfera cu prezența penei (figura 9.1.2). Al doilea punct de măsură, al timbrului

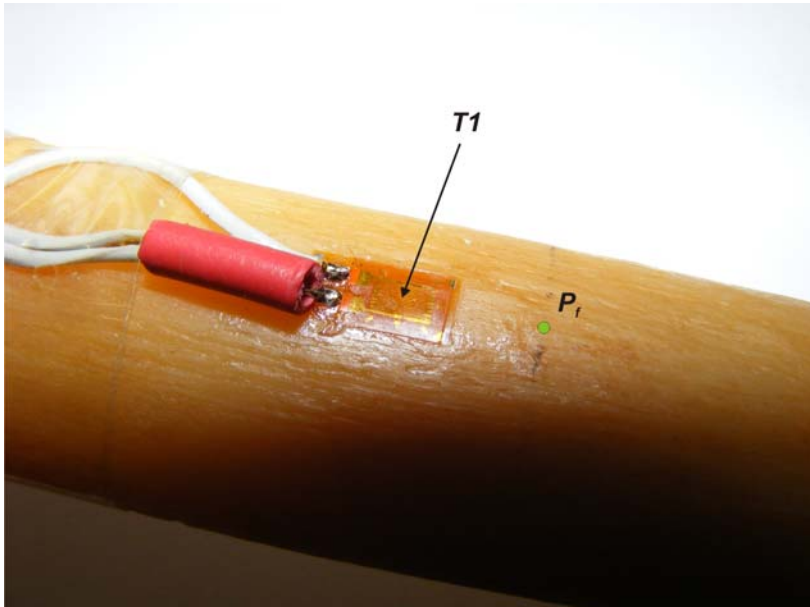


Fig. 9.1.2. Amplasarea timbrului tensometric  $T1$ .

tensometric  $T_2$ , este situat în partea opusă punctului  $P_f$  de aplicație a forței  $F$  (în zona fibrelor extreme întinse ale femurului) (figura 9.1.3). Poziționarea celui de-al doilea timbru a fost dificilă datorită prezenței unor neregularități ale suprafeței femurului în acea zonă. Astfel, față de zona fibrelor extreme întinse ale femurului, timbrul  $T_2$  s-a poziționat lateral acestei zone.

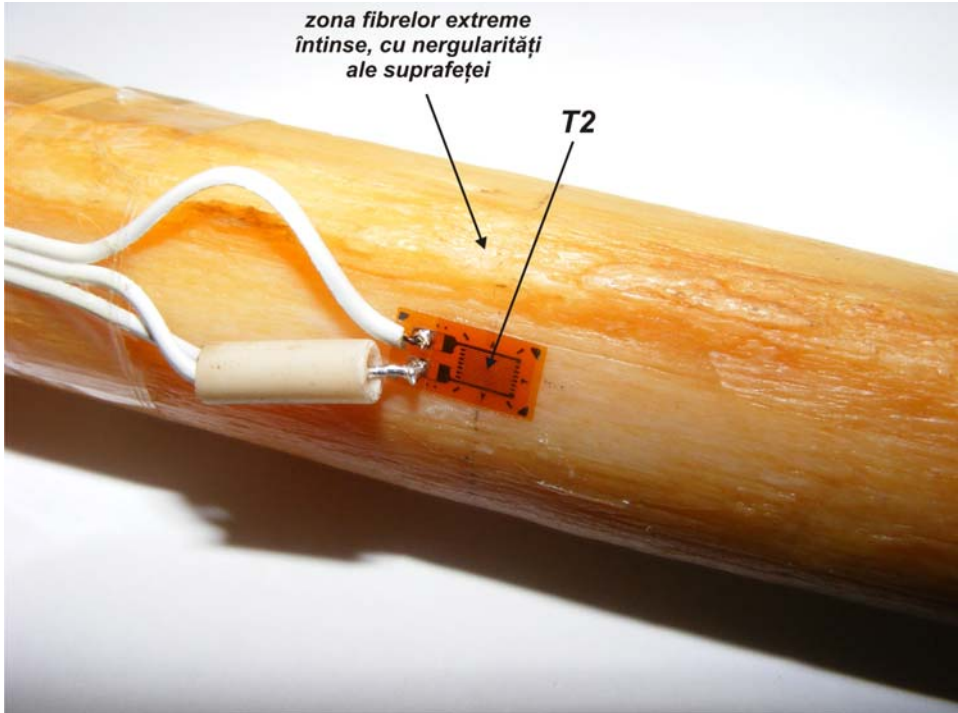


Fig. 9.1.3. Amplasarea timbrului tensometric  $T_2$ .

La terminalele timbrilor tensometrice au fost atașați conductori de tip ribbon și s-a conectat o mufă de tip LPT la capătul conductorilor (figura 9.1.4).



Fig. 9.1.4. Conectica aferentă timbrilor tensometrice.



Cele două timbre au fost conectate la o punte tensometrică digitală P3, cu patru canale de măsură, produsă de firma VISHAY (figura 9.1.5). Puntea este dotată



Fig. 9.1.5. Puntea tensometrică digitală VISHAY P3.

cu un afișaj digital, prezintă o conexiune USB pentru conectarea cu un calculator PC și are posibilitatea de a înregistra date pe un card XD de 16 MB. Conexiunea între mufa LPT a timbrelor tensometrice și punte s-a făcut prin intermediul unui cablu LAN (dotat cu mufe LPT). Figura 9.1.6 ilustrează puntea tensometrică alături de mașina de tracțiune, în configurația tehnică a măsurătorilor experimentale.



Fig. 9.1.6. Configurația tehnică a măsurătorilor experimentale.

## 9.2. Efectuarea măsurătorilor.

Încărcarea femurului în intervalul  $0 \div 300$  N s-a realizat în trepte de 30 N, iar pentru fiecare treaptă s-au înregistrat deformațiile specifice  $\epsilon$  [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ] indicate de cele două timbre tensometrice. Fiecare încărcare a femurului a fost repetată de șase ori în vederea verificării repetabilității măsurătorilor. Tabelele 9.2.1 și 9.2.2 reunesc indicațiile timbrului tensometric  $T1$ , respectiv  $T2$ , pentru fiecare din cele șase încărcări (teste) ale femurului la treptele respective de forță. Ultima coloană a celor două tabele reprezintă media aritmetică a indicațiilor timbrului pentru fiecare treaptă de forță. Semnul minus al indicațiilor timbrului  $T1$  indică starea comprimată a fibrelor respective.

Indicațiile timbrului $T1 \rightarrow \epsilon_1$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]							
$F[\text{N}]$	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Media
0	0	0	0	0	0	0	0,0000
30	-93	-95	-97	-96	-95	-97	-95,5000
60	-196	-196	-197	-196	-198	-196	-196,5000
90	-298	-296	-298	-298	-297	-297	-297,3333
120	-403	-400	-401	-400	-400	-403	-401,1667
150	-504	-504	-503	-501	-502	-505	-503,1667
180	-605	-605	-604	-605	-604	-607	-605,0000
210	-702	-706	-705	-706	-706	-708	-705,5000
240	-807	-810	-811	-809	-807	-812	-809,3333
270	-914	-911	-907	-914	-912	-914	-912,0000
300	-1011	-1012	-1014	-1018	-1012	-1018	-1014,1667

Tabelul 9.2.1. Indicațiile  $\epsilon_1$  [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ] ale timbrului  $T1$ .

Indicațiile timbrului $T2 \rightarrow \epsilon_2$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]							
$F[\text{N}]$	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Media
0	0	0	0	0	0	0	0,0000
30	81	86	82	80	80	81	81,6667
60	170	170	166	164	165	165	166,6667
90	260	254	253	251	249	254	253,5000
120	350	341	340	336	338	344	341,5000
150	436	430	428	424	426	431	429,1667
180	526	518	514	514	515	518	517,5000
210	608	607	602	603	603	606	604,8333
240	697	696	694	692	690	695	694,0000
270	789	783	776	783	781	784	782,6667
300	875	872	872	874	866	874	872,1667

Tabelul 9.2.2. Indicațiile  $\epsilon_2$  [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ] ale timbrului  $T2$ .

Pe baza celor două tabele, s-au punctat valorile deformațiilor specifice medii ale celor șase teste pentru cele două timbre în funcție de încărcarea aplicată femurului (figura 9.2.3). Printre punctele graficului s-au trasat cele două drepte care descriu variația  $\varepsilon = \varepsilon(F)$  pentru cele două timbre tensometrice. Ecuatiile acestor drepte sunt:

$$\varepsilon 1(F) = -3,3674F \text{ } [\mu\text{m}/\text{m}] \quad (9.2.1)$$

$$\varepsilon 2(F) = 2,8869F \text{ } [\mu\text{m}/\text{m}] \quad (9.2.2)$$

Punctele graficului sunt foarte apropiate ca poziție de drepte trasate, deci se validează comportamentul liniar-elastic al femurului asumat inițial pentru încărcările din intervalul  $0 \div 300$  N.

În final s-a efectuat o încărcare continuă a femurului de la 0 la 300 N cu o viteză de 10 N/s, în vederea măsurării deplasării punctului de aplicație al forței  $F$  (săgeata  $\rightarrow$  notată  $UY$  în conformitate cu cele două modele de calcul). Deplasarea  $UY$  a punctului de aplicație al forței reprezintă cursa efectuată de pistonul cilindrului hidraulic al mașinii de tracțiune-compresiune. Pentru încărcarea continuă a femurului s-au înregistrat valorile forței ( $F \rightarrow$  Load) indicate de celula de forță a mașinii și cursa efectuată de pistonul cilindrului hidraulic ( $UY \rightarrow$  Stroke), datele fiind stocate într-un fișier text ASCII. Forța înregistrată este exprimată în kN și posedă semnul minus datorită faptului că încărcarea femurului reprezintă pentru celula de forță o solicitare de compresiune. Cursa pistonului cilindrului hidraulic este exprimată în mm și de asemenea posedă semnul minus datorită faptului că în poziția inițială ( $F = 0$ ) cursa pistonului este nulă, muchia penei fiind în contact cu femurul și față de această poziție pistonul se deplasează vertical în jos. Realizarea contactului dintre muchia penei și femur, prin poziționarea aferentă a pistonului cilindrului hidraulic, s-a făcut cu dificultate datorită faptului că la mici variații ale poziției pistonului, celula de forță sesiza solicitarea de compresiune.

În urma prelucrării fișierului text ASCII al datelor înregistrate, s-a trasat graficul  $F = F(UY)$  de variație a forței în funcție de cursa pistonului cilindrului hidraulic (figura 9.2.4). Până la valoarea forței de  $-0,06$  kN se observă un zgomot de fond în cadrul înregistrării datelor, datorită faptului că această valoare luată în mărime absolută reprezintă 0,5 % din forța maximă de 12 kN pe care mașina de tracțiune-compresiune o poate dezvolta în regim static, clasa de precizie a mașinii încadrându-se la valoarea de 1 %. Printre punctele graficului s-a trasat dreapta de variație a forței în funcție de deplasarea pistonului, această dreaptă având ecuația:

$$F(UY) = 0,2322UY + 0,0111 \text{ } [\text{kN}] \quad (9.2.3)$$

Termenul liber, cu valoarea de 0,0111, reprezintă indicația eronată a celulei de forță în poziția inițială a pistonului ( $UY = 0$ ), datorată realizării dificile a contactului dintre pană și femur. Prin eliminarea acestui termen, ecuația corectată a dreptei este:

$$F(UY) = 0,2322UY \text{ } [\text{kN}] \quad (9.2.4)$$

Pentru valoarea maximă a forței de  $-0,3$  kN, valoarea reală a săgeții (cursa pistonului) în dreptul punctului de aplicație al forței este  $UY_{\text{max real}} = -1,292$  mm.

În cadrul celor două analize cu MEF, realizate pe baza celor două modele de calcul, valorile săgeților, în dreptul punctului de aplicație al forței, sunt:

-  $UY_{\text{max MEF}} = -1,366$  mm, pentru primul model de calcul;

-  $UY_{\text{max MEF}} = -1,280$  mm, pentru al doilea model de calcul.

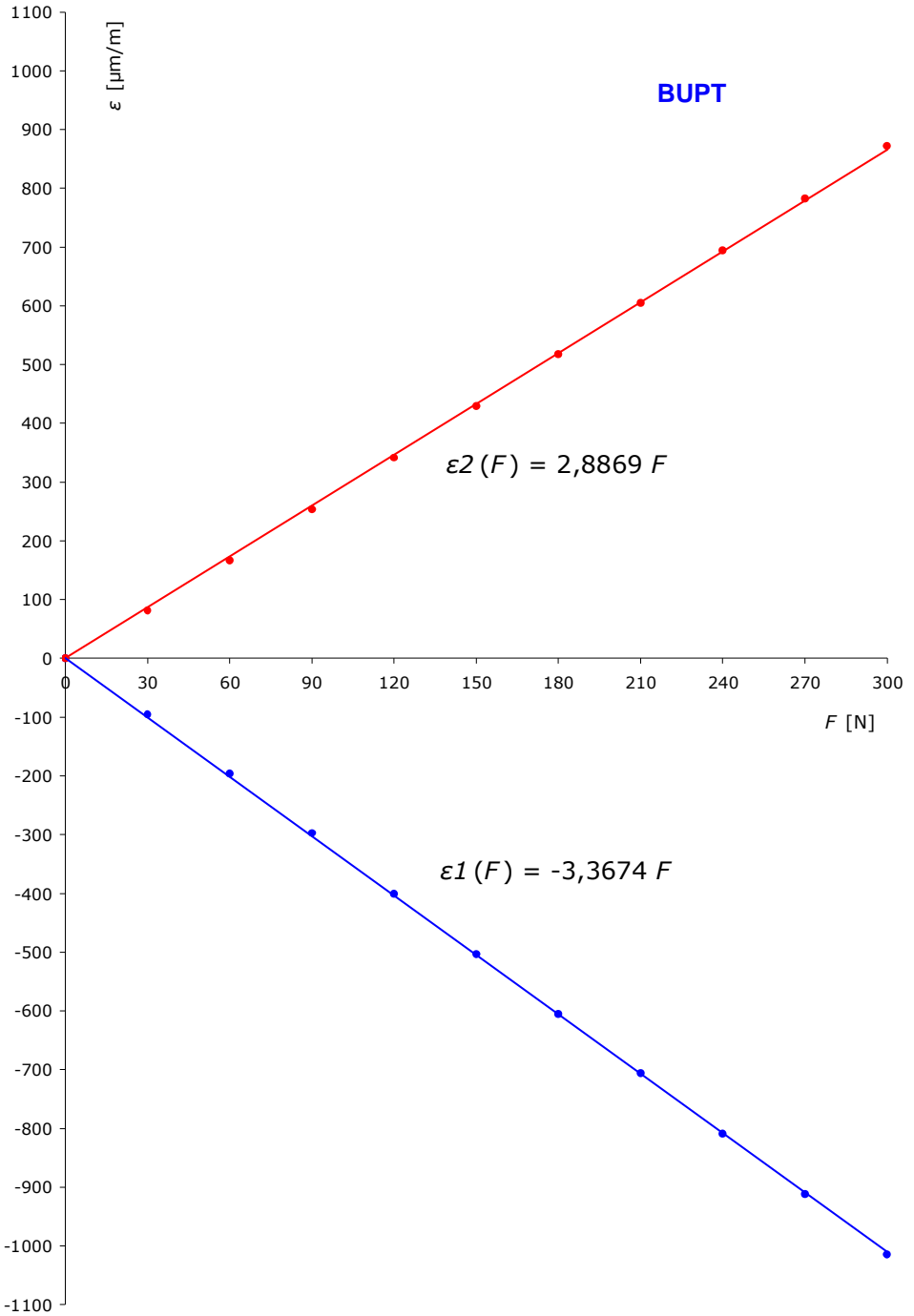


Fig. 9.2.3. Dependența  $\varepsilon = \varepsilon(F)$  pentru cele două timbre tensometrice.

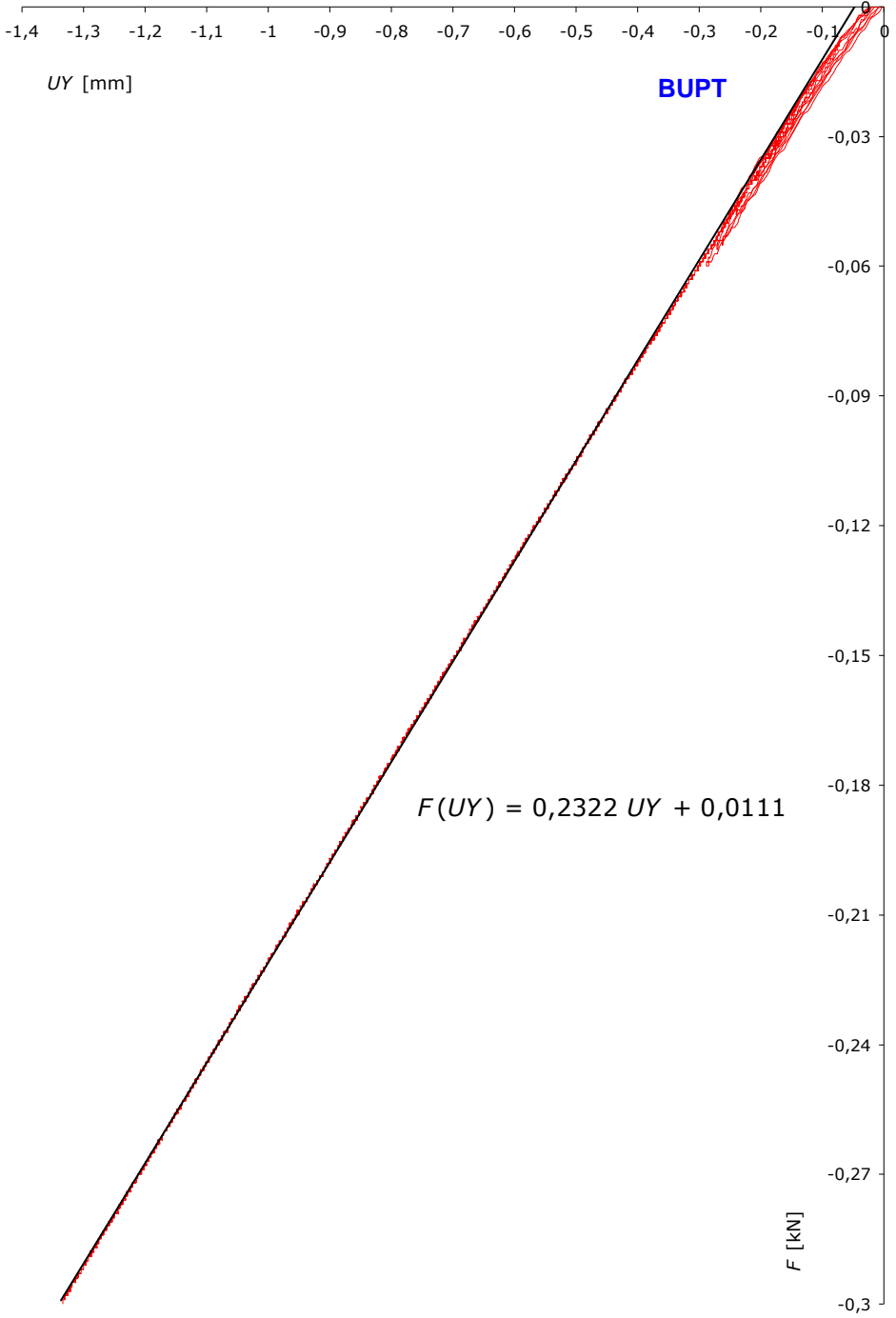


Fig. 9.2.4. Dependența  $F = F(UY)$  la încărcarea continuă a femurului.

Abaterile procentuale ale valorilor săgeților determinate prin analiza cu MEF a celor două modele de calcul, față de valoarea reală a săgeții se calculează cu relația:

$$A = \frac{UY_{max\ MEF} - UY_{max\ real}}{UY_{max\ real}} 100 \quad [\%] \quad (9.2.5) \quad \text{BUPT}$$

Astfel, pentru cele două modele de calcul, abaterile procentuale ale valorilor săgeților sunt:

- $A = +5,72 \%$  pentru primul model de calcul;
- $A = -0,92 \%$  pentru al doilea model de calcul.

Analizând cele două valori ale abaterilor, se poate afirma faptul că cel de-al doilea model de calcul este mai apropiat ca formulare față de situația reală și mai mult, proprietățile de material declarate în cadrul analizelor cu MEF au fost corect adoptate, fiind validate experimental.

## 10. Concluzii și contribuții originale

Teza de față, structurată în zece capitole, tratează, prin abordare teoretică și practică, aplicarea conceptului *ingineriei inverse în modelarea structurilor biomecanice*. Conținutul tezei se concentrează asupra problematicei modelării CAD a acestor structuri, implementării analizei cu MEF și validării experimentale a modelelor de calcul.

Introducerea, care precede conținutul tezei, justifică importanța și actualitatea temei tezei, oferindu-se o viziune globală a *ingineriei inverse*, cu aplicațiile acesteia în domeniul modelării structurilor biomecanice.

### 10.1. Concluzii.

În urma cercetărilor efectuate se pot sintetiza următoarele concluzii:

1. Modelele CAD simplificate ale structurilor biomecanice, utilizate până în momentul actual, prezintă o serie de dezavantaje ca rezultat al aproximațiilor geometrice grosiere, influențând elaborarea modelelor de calcul destinate analizei cu MEF și implicit precizia rezultatelor obținute.

2. Din punct de vedere al programelor CAD, se recomandă utilizarea acestora în concordanță cu itinerariul celor patru etape fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea CAD a structurilor biomecanice, fiecare program în parte prezentând sau nu puncte forte în operațiile specifice etapelor.

3. În contextul celor patru etape fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea CAD a structurilor biomecanice, o deosebită atenție trebuie acordată etapei achiziției datelor, din următoarele motive:

- alegerea metodei de achiziție a datelor (scanare 3D sau tomografică) influențează acuratețea modelelor CAD ale structurilor biomecanice;
- scanarea 3D se pretează modelării CAD a structurilor biomecanice care sunt omogene din punct de vedere al materiei constitutive și al configurației geometrice (nu posedă goluri interioare);
- scanarea tomografică se pretează modelării CAD a structurilor biomecanice care nu sunt omogene din punct de vedere al materiei constitutive (prezintă variații ale densității) și al configurației geometrice (posedă goluri interioare).

4. Tot în contextul celor patru etape fundamentale ale ingineriei inverse în modelarea CAD a structurilor biomecanice, o deosebită atenție trebuie acordată etapei preprocesării datelor și în speță rețelelor de triangulație (mesh-urile), din următoarele motive:

- gradul de uniformitate dimensională a mesh-urilor influențează aspectul suprafețelor modelelor CAD;
- rafinarea excesivă a mesh-urilor conduce la pierderi însemnate ale detaliilor geometrice ale suprafețelor modelelor CAD.

5. Datele primare utilizate în modelarea CAD a structurilor biomecanice (obținute prin scanări 3D și tomografie computerizată) pot prezenta o serie de imperfecțiuni sau discontinuități care trebuie corectate sau eliminate. Pentru realizarea acestor deziderate prin utilizarea programelor CAD, este foarte important ca analistul să cunoască aparatul matematic care stă la baza rutinelor destinate modelării prin curbe și suprafețe libere. Din aceste considerente, în modelarea CAD a structurilor biomecanice, este necesară aprofundarea aspectelor matematice care constituie baza programelor CAD.

6. Modelele CAD ale structurilor biomecanice trebuie să permită modificări ulterioare la nivelul geometriei în vederea elaborării modelelor de calcul destinate analizei cu MEF. Aceste modificări însă, nu trebuie să fie substanțiale, pentru a nu se crea abateri majore la nivel geometric.

7. Este absolut necesară compatibilizarea fișierelor modelelor CAD ale structurilor biomecanice cu aplicațiile CAE de analiză cu MEF.

8. Modele de calcul implementate în analiza cu MEF a modelelor CAD ale structurilor biomecanice trebuie să simuleze cu înaltă fidelitate fenomenele studiate.

9. O deosebită atenție trebuie acordată discretizării în elemente finite a modelelor CAD ale structurilor biomecanice, în sensul că această operație trebuie realizată adaptiv în funcție de complexitatea și dimensiunile detaliilor geometrice.

10. Aplicarea condițiilor pe contur și a încărcărilor, în analiza cu MEF a modelelor CAD ale structurilor biomecanice, trebuie realizată într-o manieră în care se evită apariția efectelor nedorite de concentrare a tensiunilor.

11. Modele de calcul, implementate în analiza cu MEF a modelelor CAD ale structurilor biomecanice, trebuie să permită validarea experimentală.

## **10.2. Contribuții originale.**

Contribuțiile originale cele mai importante, aduse conținutului tezei, constau în:

1. Organizarea, pe baza unui studiu bibliografic, a tehnicilor de modelare geometrică a solidelor în programele CAD;

2. Prezentarea principiilor geometrice care stau la baza tehnicilor de modelare CAD;

3. Prezentarea unitară, pe baza unui studiu bibliografic amplu, a principalelor tipuri de curbe și suprafețe utilizate în modelarea CAD a structurilor biomecanice;

4. Prezentarea sintetică a ecuațiilor fundamentale care stau la baza curbelor spline, a curbelor și suprafețelor de tip Bézier;



5. Sinteza construcțiilor geometrice utilizate în generarea curbelor și suprafețelor de tip Bézier;
6. Inserarea exemplurilor numerice în paragrafele dedicate curbelor spline;
7. Definierea și organizarea itinerariului construcției modelelor CAD pornind de la conceptul ingineriei inverse;
8. Optimizarea organizării metodelor de scanare 3D și a problemelor specifice ridicate de utilizarea diferitelor echipamente;
9. Prezentarea în detaliu a tehnicii modelării prin fațetare implementată în programul MATERIALISE Mimics 10.01;
10. Construcția modelelor CAD cu înaltă acuratețe geometrică ale structurilor biomecanice: proteză dentară totală, craniu și femur uman, utilizând programele: Dr. Picza 3, MATERIALISE Mimics 10.01, Rapidform XOR, Geomagic Studio, SolidWorks 2005 (2007 x64), ceea ce permite elaborarea unor modele de calcul eficiente pentru aceste structuri, implementate în analiza cu MEF;
11. Elaborarea modelului de calcul pentru craniul uman, implementat în analiza cu MEF, prin schematizarea sarcinilor dezvoltate de disjunctorul ortodontic;
12. Validarea rolului funcțional al disjunctorului ortodontic prin rezultatele analizei cu MEF;
13. Elaborarea celor două modele de calcul implementate în analiza cu MEF, pentru solicitarea de încovoiere a femurului uman;
14. Adaptarea modelului CAD al femurului uman în vederea aplicării celor două modele de calcul implementate în analiza cu MEF;
15. Configurația experimentală pentru validarea modelelor de calcul la încovoiere a femurului uman;
16. Măsurătorile tensometrice efectuate asupra unui femur uman real;
17. Validarea experimentală a modelelor de calcul la încovoiere a femurului uman.

## Bibliografie

BUPT

- [1] \*\*\*, *Bézier Curves*,  
[http://www.tsplines.com/resources/class\\_notes/Bezier\\_curves.pdf](http://www.tsplines.com/resources/class_notes/Bezier_curves.pdf).
- [2] \*\*\*, *Constructive Solid Geometry*,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Constructive\\_solid\\_geometry](http://en.wikipedia.org/wiki/Constructive_solid_geometry).
- [3] \*\*\*, *Cubic Spline Interpolation*,  
[http://www.physics.utah.edu/~detar/phys6720/handouts/cubic\\_spline/cubic\\_spline/node1.html](http://www.physics.utah.edu/~detar/phys6720/handouts/cubic_spline/cubic_spline/node1.html).
- [4] \*\*\*, *Polygon Mesh*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Polygon\\_mesh](http://en.wikipedia.org/wiki/Polygon_mesh).
- [5] \*\*\*, *Solid Modeling*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Solid\\_modeling](http://en.wikipedia.org/wiki/Solid_modeling).
- [6] \*\*\*, *SolidWorks 2005*, User Guide.
- [7] Barsom J. M., Rolfe S. T., *Fracture & Fatigue Control in Structures, Second Edition*, Pretince-Hall, (Fondul Prof. Dr. Ing. Mircea Rațiu - REZMAT).
- [8] Bathe K. I., Wilson F. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., Engwood, New Jersey, 1976.
- [9] Berbente C., Zancu S., Mitran S., Pleter O., Țăranu C., *Metode numerice de calcul și aplicații*, București, Ed. I.P.B., 1992.
- [10] Besl P. J., Jain R. C., *Segmentation through Variable-Order Surface Fitting*, IEEE PAMI, Vol. 10, No. 2, 1988, pp. 167-192.
- [11] Besl P. J., Jain R. C., *Three Dimensional Object Recognition*, ACM Computing Surveys, Vol. 17, No. 1, 1985, pp. 75-145.
- [12] Besl P. J., McKay N. D., *A Method for Registration of 3D Shapes*, IEEE PAMI, Vol. 14, No. 2, 1992, pp. 239-256.
- [13] Bia C., Ile V., Soare M. V., *Rezistența materialelor și teoria elasticității*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1983.
- [14] Blumenfeld M., *Introducere în metoda elementelor finite*, București, Ed. Tehnică, 1995.
- [15] Blumenfeld M., Ioniță A., Mareș C., *Metoda elementelor finite. (Aplicații și programe introductive)*, București, Ed. I.P.B., 1992.
- [16] Bolle R. M., Vemuri B. C., *On Three-Dimensional Surface Reconstruction Methods*, IEEE PAMI, Vol. 13, No. 1, 1991, pp. 1-13.
- [17] Brătianu C., *Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor*, Editura Academiei R. S. România, București, 1983.
- [18] Budynas R. G., *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, McGraw-Hill, N.Y, 1977.
- [19] Butler C., *Investigation Into the Performance of Probes on Coordinate Measuring Machines*, Industrial Metrology, Vol. 2, No. 1, 1991, pp. 59-70.
- [20] Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, București, Ed. Academiei, 1986.

- [21] Celniker G., Gossard D., *Deformable Curve and Surface Finite Elements for Free-Form Shape Design*, Computer Graphics (Procs. of SIGGRAPH'91), Vol. 25, No. 4, 1991, pp. 257-266.
- [22] Ciarlet P. G., *The Finite Element Method*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [23] Constantinescu D. M., Sandu M., Volceanov E., Găvan M., Sorohan Ş., *Experimental and Numerical Analysis Of the Behaviour of Ceramic Tiles under Impact*, Key Engineering Materials, Vol. 399, Trans Tech Publications, Switzerland, 2009, pp. 161-168, ISBN 0-87849-351-4.
- [24] Constantinescu I. N., Munteanu M. Gh., Golumbovici D. C., *Calcul de rezistență a structurilor de mașini și utilaje*, București, Ed. Tehnică, 1984.
- [25] Constantinescu I., Dăneț N., *Metode noi pentru calcule de rezistență*, București, Ed. Tehnică, 1989.
- [26] **Culea L.**, Bratu C., *Stress analysis of the human skull due to the insertion of rapid palatal expander with finite element analysis (FEA)*, Key Engineering Materials, Vol. 399, Trans Tech Publications, Switzerland, 2009, pp. 211-218, ISBN 0-87849-351-4, **cotată ISI**.
- [27] Cuteanu E., Marinov A., *Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor*, Timișoara, Ed. Facla, 1980.
- [28] Dally J. W., Riley W. F., *Experimental Stress Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill, 1991, (Fondul Prof. Dr. Ing. Mircea Rațiu- REZMAT).
- [29] Demidov E., *An Interactive Introduction to Splines*, 02-2004.
- [30] Demidovitch B., Maron I., *Elements de calcul numerique*, Moscove, Ed. Mir, 1973.
- [31] Dietz U., *Erzeugung glatter Flächen aus Meßpunkten*, Technical Report 1717, Dept. of Math., Technische Hochschule Darmstadt, 1995.
- [32] Dodgson N. A., *Some Mathematical Elements of Graphics*, 2000, <http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/2000/AGraphHCI/SMEG/node1.html>.
- [33] Eck M., DeRose T., Duchamp T., Hoppe H., Lounsbery M., Stuetzle W., *Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes*, Computer Graphics (SIGGRAPH'95 Proceedings), Vol. 29, (1995), pp. 173-182.
- [34] Eck M., Hoppe H., *Automatic Reconstruction of B-spline Surfaces of Arbitrary Topological Type*, accepted for SIGGRAPH'96, Technical Report MSR-TR-96-01, Microsoft Corporation, 01-1996.
- [35] Farin G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, 2nd Edition*, Academic Press, London, 1990.
- [36] Farin G., Sapidis N., *Curvature and fairness of curves and surfaces*, IEEE CGA, Vol. 9, 1989, pp. 52-57.
- [37] Faugeras O. D., Hebert M., Pauchon E., *Segmentation of Range Data into Planar and Quadric Patches*, Procs. 3rd Comp. Vision and Patt. Recog. Conf., Arlington, VA, 1983, pp. 8-13.
- [38] Faur N., Cernescu A., **Culea L.**, Borțun C., *Reverse engineering techniques and FEA used in studying the stress and deformation fields for dental cast circumferential clasps*, 2nd International Conference on Mechanics of Biomaterials & Tissues, 09-13.12.2007, Hawaii, USA.

- [39] Faur N., **Culea L.**, Cernescu A., Berceanu-Văduva M., *Study upon the stress and deformation fields of human femur-tibia ensemble using FEA for evaluation of the fracture risk factor*, 2nd International Conference on Mechanics of Biomaterials & Tissues, 09-13.12.2007, Hawaii, USA.
- [40] Faur N., Dumitru I., *Diferențe finite și elemente finite*, Timișoara, Ed. Mirton, 1997.
- [41] Faur N., Dumitru I., *Metode numerice în rezistența materialelor*, Lito. Univ. Politehnica Timișoara, 1997.
- [42] Faur N., *Elemente Finite. Fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara, 2002.
- [43] Faur N., Goia I., **Culea L.**, Cernescu A., Negru R., *Stress-strain analysis for the wheel-railtrack assembly at urban passenger transport*, A 5-a conferință internațională de integritate structurală a construcțiilor sudate, 20-21.11.2007, Timișoara, 2007, pp. 120-126.
- [44] Faur N., Marșavina L., **Culea L.**, *The determination of stiffness characteristics for the coiled torsion springs*, The 4th DAAAM International Conference on Advanced Technologies for Developing Countries, Proceedings, 21-24.09.2005, Slavonski Brod, Croatia, pp. 257-260, ISBN 953-6048-29-9.
- [45] Filip S., Marșavina L., **Culea L.**, Babeu T. D., *Impact study of a s-rail*, A VI-a conferință națională multidisciplinară - cu participare internațională "Profesorul Dorin PAVEL - fondatorul hidroenergeticii românești", Sebeș, 2006, Ed. AGIR, 2006, pp. 537-542, ISBN(10)973-8130-82-4.
- [46] Fisher R. B., *Best-First and Ten Other Variations of the Interpretation-Tree Model Matching Algorithm*, Dept. of AI, University of Edinburgh, Research Paper 717, 1994.
- [47] Fitzgibbon A. W., Bispo E., Fisher R. B., Trucco E., *Automatic Acquisition of CAD Models from Multiple Range Views*, 10th National Conf. on Manufacturing Research, Loughborough, 1994.
- [48] Fitzgibbon A.W., Eggert D., Fisher R.B., *High-level CAD Model Acquisition from Range Images*, this special issue, Computer-Aided Design, Vol. 28, 1996.
- [49] Greiner G., *Variational Design and Fairing of Spline Surfaces*, Computer Graphics Forum, Vol. 13, No. 4, 1994, pp. 143-154.
- [50] Grimstead I. J., Martin R.R., *Creating Solid Models from Single 2D Sketches*, Proc. 3rd Symposium on Solid Modeling and Applications, Eds. C. Hoffmann and J. Rossignac, ACM Press, 1995, pp. 323-327, ISBN 0897916727.
- [51] Guo B., *Surface reconstruction: from points to splines*, this special issue, Computer-Aided Design, Vol. 28, 1996.
- [52] H. Edelsbrunner, E. Mucke, *Three-dimensional alpha shapes*, ACM TOG, Vol. 13, No. 1, 1994, pp. 43-72.
- [53] Hermann T., Kovacs Z., Varady T., *Special applications in surface fitting*, Geometric Modelling Studies, GMS 1996/3, Computer and Automation Research Institute, Budapest, 1996.
- [54] Higashi M., Torihara F., Takeuchi N., Sata T., Saitoh T., Hosaka M., *Face-based Data Structure and its Application to Robust Geometric Modeling*, Procs. 3rd Symposium on Solid Modeling and Applications, Eds. C. Hoffmann and J. Rossignac, ACM Press, 1995, pp. 235-246, ISBN 0897916727.

- [55] Hoffmann C. M., Juan R., *Erep, an editable, high-level representation for geometric design and analysis*, Geometric and Product Modelling, Eds. P. Wilson, M. Wozny and M.J. Pratt, North Holland, 1993, pp. 129-164.
- [56] Hoffmann C.M., *Geometric and Solid Modelling, An Introduction*, Morgan Kaufman, San Mateo, CA, 1989. BUPT
- [57] Hoover A., Goldgof D., Bowyer K.W., *Extracting a valid boundary representation from a segmented range image*, IEEE PAMI, Vol. 17, No. 9, 1995, pp. 920-924.
- [58] Hoppe H., DeRose T., Duchamp T., McDonald J., Stuetzle W., *Mesh optimization*, Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings), Vol. 27, 1993, pp. 19-26.
- [59] Hoschek J., Lasser D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A.K. Peters, 1993.
- [60] Jarvis R. A., *A Laser Time-of-Flight Range Scanner for Robotic Vision*, IEEE PAMI, Vol. 5, No. 5, 1983, pp. 505-512.
- [61] Jarvis R. A., *A Perspective on Range Finding Techniques for Computer Vision*, IEEE PAMI, Vol. 5, No. 2, 1983, pp. 122-139.
- [62] Koivunen V., Bajcsy R., *Rapid Prototyping Using Three-Dimensional Computer Vision*, Technical Report, MS-CIS-92-70, University of Pennsylvania, 1992.
- [63] Koivunen V., *Robust Signal Restoration and Local Estimation of Image Structure*, Technical Report, MS-CIS-92-92, University of Pennsylvania, 1992.
- [64] LaCourse D., *Handbook of Solid Modeling*, McGraw Hill, 1995, pp. 2,5, ISBN 0-07-035788-9.
- [65] Leonardis A., Gupta A., Bajcsy R., *Segmentation of Range Images as the Search for Geometric Parametric Models*, Int. J. Computer Vision, Vol. 14, 1995, pp. 253-277.
- [66] Ma W., Kruth J. P., *Parametrization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces*, Computer-Aided Design, Vol. 27, No. 9, 1995, pp. 663-675.
- [67] Machover C., *The CAD/CAM Handbook (1st ed.)*, McGraw-Hill, 1996, pp. 69, ISBN 0-07-039375-3.
- [68] Mantyla M., *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, Rockville, Maryland, 1988.
- [69] Marshall A. D., Martin R. R., *Computer Vision, Models, and Inspection*, World Scientific Publishing, Singapore, 1992.
- [70] Marşavina L., Faur N., **Culea L.**, Negru R., *Studiul inişierii fisurilor în lamelele de cupru ale unui colector*, Lucrările celui de-al XII-lea simpozion naţional de Mecanica Ruperii, 3-4.11.2006, Târgovişte, 2006, pp. 33-40, ISBN (10) 973-7616-48-0.
- [71] Milroy M. J., Bradley C., Vickers G. W., *Segmentation of a Wrap-around Model Using an Active Contour*, this special issue, Computer-Aided Design, Vol. 28, 1996.
- [72] Modjarrad A., *Non-Contact Measurement Using a Laser Scanning Probe*, SPIE, Vol. 1012, In-Process Optical Measurements, 1988, pp. 229-239.
- [73] Moreton H. P., Sequin C., *Functional optimization for fair surface design*, ACM Computer Graphics (Procs of SIGGRAPH'92), Vol. 26, 1992, pp. 167-176.

- [74] Moring I., Heikkinen T., Myllyla R., *Acquisition of Three-Dimensional Image Data by a Scanning Laser Range Finder*, Journal of Optical Engineering, Vol. 28, No. 8, 1989, pp. 897-902.
- [75] Moss J. P., Linney A. D., Grindrod S. R., Mosse C. A., *A Laser Scanning System for the Measurement of Facial Surface Morphology*, Journal of Optics and Lasers in Engineering, Vol. 10, 1989, pp. 179-190.
- [76] Motavalli S., Bidanda B., *A Part Image Reconstruction System for Reverse Engineering of Design Modifications*, Journal of Manufacturing Systems, Vol. 10, No. 5, 1991, pp. 383-395.
- [77] Negruțiu M. L., Sinescu C., Cozarov D., **Culea L.**, Romînu M., Pop D. M., *Repairing method of fixed partial prostheses in dentistry: laser welding*, Lasers in Dentistry XIV, Proceedings of SPIE, Vol. 6843, 20 January 2008, San Jose, CA, USA, 2008, **cotată ISI**.
- [78] Nishihara H. K., *Practical Real-Time Imaging Stereo Matcher*, Journal of Optical Engineering, Vol. 23, No. 5, 1984, pp. 536-545.
- [79] Pietikainen M., Rosenfeld A., Walter I., *Split-and-Link Algorithms for Image Segmentation*, Pattern Recognition, Vol. 15, 1982.
- [80] Posdamer J. L., Altschuler M. D., *Surface Measurement by Space-encoded Projected Beam Systems*, Journal of Computer Graphics and Image Processing, Vol. 18, 1982, pp. 1-17.
- [81] Rioux M., *Laser Range Finder Based on Synchronized Scanners*, Journal of Applied Optics, Vol. 23, No. 21, 1984, pp. 3837-3844.
- [82] Rockwood A., Winget J., *Three-Dimensional Object Reconstruction from Two-Dimensional Images*, this special issue, Computer-Aided Design, Vol. 28, 1996.
- [83] Rossignac J., Borrel P., *Multi-resolution 3D approximations for rendering complex scenes*, Modeling in Computer Graphics, Springer Verlag, 1993, pp. 455-466.
- [84] Sahoo K. C., Menq C. H., *Localization of 3D Objects Having Complex Sculptured Surfaces Using Tactile Sensing and Surface Description*, Journal of Engineering for Industry, Vol. 113, 1991, pp. 85-92.
- [85] Salter A., *Spline Curves and Surfaces*, 2008, <http://www.doc.ic.ac.uk/~dfg/AndysSplineTutorial/index.html>.
- [86] Sapidis N. S., Besl P. J., *Direct Construction of Polynomial Surfaces from Dense Range Images through Region Growing*, ACM Trans. on Graphics, Vol. 14, No. 2, 1995, pp. 171-200.
- [87] Schroeder W. J., Zarge J., Lorensen W.E., *Decimation of triangle meshes*, Computer Graphics (SIGGRAPH'92 Proceedings), Vol. 26, 1992, pp. 65-70.
- [88] Shene C. K., *Introduction to Computing with Geometry Notes*, 2008, <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>.
- [89] Shirai Y., *Three-Dimensional Computer Vision*, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [90] Skifstad K., *Rising Above the Data Clouds*, Computer Graphics World, Vol. 18, No. 2, 1995, pp. S4-S12.
- [91] Smith D. R., Kanade T., *Autonomous Scene Description with Range Imagery*, CVGIP, Vol. 31, No. 3, 1985, pp. 322-334.

- [92] Solina F., Bajcsy R., *Recovery of parametric models from range images: The case for superquadrics with global deformations*, IEEE PAMI, Vol. 12, No. 2, 1990, pp. 131-147.
- [93] Stoia D. I., Faur N., Toth-Tașcău M., **Culea L.**, *In vitro experimental testing of a cervical implanted unit*, Key Engineering Materials, Vol. 399, Trans Tech Publications, Switzerland, 2009, pp. 205-210, ISBN 0-87849-351-4, **cotată ISI**.
- [94] Stroud I.A., *Boundary modeling with special representations*, Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 7, 1994, pp. 543-550.
- [95] Tripa P., Faur N., *Metode teoretice și experimentale pentru determinarea stării de tensiune și deformație*, Timișoara, Lito U.T.T., 1994.
- [96] Tsujimura T., Yabuta T., Morimitsu T., *Shape-Reconstruction System for Three-Dimensional Objects Using an Ultrasonic Distance Sensor Mounted on a Manipulator*, Transactions of ASME, Vol. 111, 1989, pp. 180-186.
- [97] Varady T., Martin R.R., Cox J., *Reverse Engineering of Geometric Models - An Introduction*, Computer-Aided Design, 29 (4), 1997.
- [98] Varady T., Rockwood A. P., *Vertex blending based on the setback split*, Mathematical methods for curves and surfaces, Eds. M. Daehlen, T. Lyche and L.L. Schumaker, Vanderbilt University Press, 1995, pp. 527-542.
- [99] Veron P., Leon J.C., *Static polyhedron simplification using error measurements*, this special issue, Computer-Aided Design, Vol. 28, 1996.
- [100] Verplancken P., *Bézier curves and Bézier surfaces*, 12-1998, <http://home.scarlet.be/piet.verplancken3/bezier/bezier.html>.
- [101] Vida J., Martin R.R., Varady T., *A survey of blending methods that use parametric surfaces*, Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 5, 1994, pp. 341-365.
- [102] Wang Y. F., Aggarwal J. K., *3D Object Description From Stripe Coding and Multiple Views*, Proceedings of the 5th Scandinavian Conference on Image Analysis, Vol. 60, No. 6, 1987, pp. 669-680.
- [103] Watanabe S., Yoneyama M., *An Ultrasonic Visual Sensor for Three-Dimensional Object Recognition Using Neural Networks*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 8, No. 2, 1992, pp. 240-249.
- [104] Weisberg D., *The Engineering Design Revolution*, 2008-09 [http://www.cadhistory.net/chapters/16\\_Parametric\\_Technology.pdf](http://www.cadhistory.net/chapters/16_Parametric_Technology.pdf).
- [105] Will P. W., Pennington K. S., *Grid Coding: A Novel Technique for Image Processing*, Proceedings of the IEEE, Vol. 60, No. 6, 1972, pp. 669-680.
- [106] Wohler T., *3D Digitizing for Engineering*, Computer Graphics World, Vol. 18, No 2, 1995, pp. S1-S3.
- [107] Woodham R. J., *Photometric Stereo: A Reflectance Map Technique for Determining Surface Orientation from a Single View*, Image Understanding Systems and Industrial Applications, Procs. SPIE 22nd Annual Technical Symposium, San Diego, California, Vol. 155, 1978, pp. 136-143.
- [108] Xiong Y. L., *Computer Aided Measurement of Profile Error of Complex Surfaces and Curves: Theory and Algorithm*, International Journal of Machine Tools and Manufacturing, Vol. 30, No. 3, 1990, pp. 339-357.

- [109] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *La méthode des éléments finis*, AFNOR, Paris, 1991.
- [110] Zorin D., *Bézier Curves and B-splines, Blossoming (Lecture Notes)*, New York University, 09-2002, <http://mrl.nyu.edu/~dzorin/geom04/lectures/lect02.pdf>.