

# **CONTRIBUȚII LA STUDIUL EFECTULUI DE CONCENTRARE A TENSIUNILOR CU APLICAȚII ÎN MECANICA RUPERII ȘI OBOSEALA MATERIALELOR**

Teză destinată obținerii  
titlului științific de doctor inginer  
la  
Universitatea "Politehnica" din Timișoara  
în domeniul "Inginerie Mecanică"  
de către

**ing. Radu-Marcel NEGRU**

Conducător științific: prof.univ.dr.ing. Liviu Marșavina

Referenți științifici: prof.univ.dr. ing. Augustin Crețu  
prof.univ.dr.ing. Dan-Mihai Constantinescu  
prof.univ.dr.ing. Nicolae Faur

Ziua susținerii tezei: 11.12.2009

## CUPRINS

<b>1. Aspecte generale privind fenomenul de concentrare a tensiunilor</b> .....	4
1.1. Concentrarea tensiunilor în domeniul elastic. Coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor .....	5
1.2. Gradientul tensiunilor de la baza concentratorului.....	12
1.3. Concentrarea tensiunilor în domeniul elasto-plastic. Coeficientul de concentrare a tensiunilor și a deformațiilor .....	15
1.3.1. Regula lui Neuber .....	17
1.3.2. Regula lui Glinka .....	19
1.3.3. Studiu comparativ între regulile lui Neuber și Glinka .....	21
1.4. Factorul de intensitate a tensiunii .....	23
1.4.1. Soluția Williams pentru concentratori în formă de V cu raza de racordare la vârf egală cu zero (singulari).....	25
1.4.2. Soluția factorului de intensitate a tensiunii pentru concentratori rotunjiți la vârf.....	27
<b>2. Determinarea distribuției tensiunilor din zona concentratorilor</b> .....	30
2.1. Metode analitice și numerice.....	30
2.1.1. Metode analitice de rezolvare a problemelor elasticității plane .....	30
2.1.2. Metode numerice .....	32
2.1.3. Soluții analitice pentru determinarea tensiunilor din zona concentratorilor laterali de formă V .....	34
2.2. Determinarea experimentală a tensiunilor și deformațiilor specifice din zona concentratorilor .....	40
2.2.1. Tensometria electrică rezistivă .....	40
2.2.2. Metoda fotoelasticității .....	41
2.2.3. Metoda termoelasticității .....	43
2.2.4. Metoda corelării de imagini digitale ( <i>Digital Image Correlation</i> ) .....	44
2.2.4.1. Scurtă descriere a metodei .....	44
2.2.4.2. Studiu comparativ de evaluare a deformațiilor specifice în zona concentratorilor de tensiune prin metoda corelării de imagini digitale și metoda elementelor finite.....	46
2.3. Evaluarea factorului de intensitate a tensiunii pentru concentratori ( <i>Notch Stress Intensity Factor – NSIF</i> ).....	52
<b>3. Aplicații ale concentratorilor de tensiune în mecanica ruperii</b> .....	56
3.1. Efectul concentratorilor de tensiune la ruperea fragilă a componentelor structurale .....	56
3.2. Cercetări privind ruperea fragilă a componentelor structurale cu concentratori de tensiune nesingulari.....	58
3.2.1. Rezultate experimentale.....	58
3.2.2. Criterii de rupere pentru aprecierea rezistenței componentelor cu concentratori de tensiune .....	62
3.2.2.1. Criteriul forței de extensie a fisurii (Griffith) .....	63
3.2.2.2. Criteriul Leguillon [2002] .....	64

3.2.2.3. Criteriul Zhang [2008].....	65
3.3. Aplicarea <i>Metodei Distanțelor Critice (Theory of Critical Distances)</i> la ruperea fragilă a componentelor cu concentratori de tensiune .....	70
3.3.1. Scurtă prezentare a metodei distanțelor critice.....	70
3.3.2. Determinarea constantelor de material $L$ și $\sigma_0$ pentru Necuron 1020 .....	73
3.3.3. Evaluarea ruperii fragile prin metoda distanțelor critice a componentelor cu concentratori de tensiune .....	77
3.4. Aplicarea metodei punctului la ruperea unui bloc de conectare și testare cablaje auto.....	80
3.4.1. Rezultate experimentale.....	80
3.4.2. Adaptarea metodei distanțelor critice pentru solicitări în moduri-mixte .....	83
3.4.3. Evaluarea ruperii blocului de conectare prin metoda punctului.....	84
<b>4. Aplicații ale concentratorilor de tensiune în oboseala materialelor .....</b>	<b>89</b>
4.1. Noțiuni introductive .....	89
4.2. Determinarea experimentală a rezistenței la oboseală pe epruvete cu concentratori de tensiune .....	91
4.3. Calculul la solicitări variabile pe baza tensiunilor (abordarea $\sigma-N$ ).....	93
4.3.1. Coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile $K_f$ ....	93
4.3.2. Determinarea rezistenței la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune pe baza diagramelor ciclurilor limită .....	97
4.4. Calculul componentelor cu concentratori de tensiune la solicitări variabile pe baza propagării fisurilor .....	100
4.5. Evaluarea durabilității unui arbore de turbină.....	104
4.5.1. Stabilirea regimului de exploatare și considerații asupra proprietăților mecanice ale oțelului din care este realizat arborele turbinei .....	104
4.5.2. Analiza cu elemente finite a stării de tensiune .....	106
4.5.3. Studiul fisurării arborilor re tehnologizați la solicitări variabile .....	109
<b>5. Concluzii. Contribuții personale .....</b>	<b>115</b>
<b>Bibliografie .....</b>	<b>119</b>

# 1. ASPECTE GENERALE PRIVIND FENOMENUL DE CONCENTRARE A TENSIUNILOR

Aproape inevitabil, în oricare componentă din structurile inginerești, tensiunile variază de la un punct la altul, cedările producându-se în zonele unde tensiunile sunt relativ mari. Condițiile care pot determina o creștere a nivelului tensiunii într-un punct sunt foarte variate, Boresi [1993]:

- 1). modificările bruște de secțiune, de exemplu cele produse în secțiunea unei bare de prezența unei găuri sau în secțiunea unui arbore de prezența unui canal de pană;
- 2). tensiunile de contact în punctele de aplicare a forțelor exterioare, de exemplu la contactul dintre dinții a două roți dințate aflate în angrenare, la contactul roată-șină sau la contactul dintre bilele de rulment și căile de rulare;
- 3). defectele de material, de exemplu incluziunile nemetalice dintr-un oțel, sau variațiile de rezistență și rigiditate ale constituenților structurali;
- 4). tensiunile reziduale dintr-o piesă, rezultatul unor prelucrări mecanice (extrudare, laminare, forjare, turnare), al tratamentelor termice aplicate piesei sau al operațiilor tehnologice de sudare;
- 5). fisurile existente într-o structură, din diverse cauze (oboseală, sudare, prelucrare prin așchiere);
- 6). interfața dintre două materiale, de exemplu în cazul îmbinărilor lipite caracteristicile mecanice diferite ale adezivului și aderenților conduc la o concentrare locală a tensiunilor (Marșavina [2007], Negru [2007], Sinescu [2009]).

Toate aceste condiții, care produc valori și distribuții ale tensiunilor și deformațiilor specifice diferite în mod esențial de cele calculate cu formulele simple ale rezistenței materialelor, sunt denumite **concentratori de tensiune** sau **discontinuități**.

În cazul unor încărcări statice, prezența concentratorilor de tensiune conduce la o deformare plastică la baza acestora și la o reducere a tensiunii locale, pentru componentele structurale realizate din materiale cu un comportament ductil. Astfel, tensiunea critică  $\sigma_U$  de rupere, definită ca tensiune nominală globală, va fi mai mare pentru o componentă cu un concentrator de tensiune, decât pentru o componentă netedă având aceeași secțiune netă, care prezintă o gătuire puternică înainte de rupere. În schimb, pentru materialele cu un comportament fragil, acest fenomen nu se produce, existând o mare sensibilitate la prezența concentratorilor de tensiune. Astel, în general, rezistența unei componente netede va fi mai ridicată.

Prezența concentratorilor de tensiune este importantă și în stabilirea duratei de viață la solicitări variabile, atât în cazul materialelor ductile, cât și a celor fragile. Din datele publicate în literatura tehnică, referitoare la rezistența la oboseală a componentelor netede și respectiv cu concentratori de tensiune pentru diferite niveluri constante ale amplitudinii, rezultă că rezistența la oboseală în prezența concentratorilor reprezintă un procent tot mai mare din rezistența componentelor netede pe măsură ce nivelul tensiunii nominale crește, Stephens [2001].

Actualitatea și importanța problemei cedării componentelor structurale în prezența concentratorilor de tensiune, la solicitări statice sau variabile, este dovedită și prin numărul extrem de mare al lucrărilor științifice publicate și indexate în bazele de date ale editurilor de prestigiu: ScienceDirect – Elsevier peste 500.000, respectiv

SpringerLink 124.000 articole. Acestea li se adaugă monografiile dedicate exclusiv acestei probleme, doar în ultimul deceniu:

- "Notch Effect in Fatigue and Fracture" (NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, vol. 11), Kluwer Academic Publishers, editată de Guy Pluvinage și Marenglen Gjonaj [2001];

- "The Theory of Critical Distances. A New Perspective in Fracture Mechanics", Elsevier [2007], volum în care David Taylor reușește să adune toate cunoștințele și dezvoltările referitoare la evaluarea cedării componentelor structurale cu concentratori de tensiune prin aplicarea metodei distanțelor critice;

- "Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators", Kluwer Academic Publishers [2003], volum în care Guy Pluvinage prezintă numeroase rezultate ale Laboratorului de Fiabilitate Mecanică al Universității din Metz referitoare la problema rezistenței componentelor structurale cu concentratori de tensiune.

De asemenea, conferințele internaționale în domeniul Mecanicii ruperii *International Conference on Fracture - ICF 11 Torino (2005)* și *ICF 12 Ottawa (2009)*, precum și cele europene *European Conference on Fracture - ECF 16 Alexandroupolis (2006)* și *ECF 17 Brno (2008)* au avut toate organizate secțiuni speciale dedicate fenomenului de concentrare a tensiunilor.

Tendențele actuale în studiul concentratorilor de tensiune pot fi sumarizate astfel:

- introducerea unor soluții analitice generale ale câmpului tensiunilor din zona concentratorilor, propuse de grupul de cercetători de la *Universitatea din Padova*, coordonat de profesorii Paolo Lazzarin și Bruno Atzori;

- utilizarea *Metodei Distanțelor Critice* pentru evaluarea tensiunilor de rupere sau de inițiere a fisurilor de oboseală pentru componentele cu concentratori;

- extinderea noțiunilor din Mecanica ruperii la componentele cu concentratori de tensiune și introducerea conceptului de factor de intensitate a tensiunii la vârful concentratorului (*Notch Stress Intensity Factor*);

- utilizarea pe scară largă a metodelor numerice, în particular a *metodei elementelor finite*, pentru determinarea câmpului tensiunilor și evaluarea rezistenței componentelor structurale cu concentratori de tensiune (*metoda volumetrică, metoda modelării fisurii*).

Această lucrare are drept obiectiv studiul concentratorilor de tensiune de tipul neuniformităților geometrice (crestături, găuri de diferite forme, canale de pană, caneluri, racordări) și aplicațiile lor în inițierea și propagarea fisurilor la sollicitări statice și variabile.

## **1.1. Concentrarea tensiunilor în domeniul elastic. Coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor**

Concentratorii de tensiune, de tipul discontinuităților geometrice din componentele mecanice, produc o creștere importantă a tensiunilor și o perturbare a distribuției acestora, mai mult sau mai puțin localizată. Valorile tensiunilor din vecinătatea concentratorului depind atât de dimensiunile și forma concentratorului, cât și de încărcarea exterioară, iar în practica inginerescă valorile tensiunilor depind și de dimensiunile reale ale pieselor.

Fenomenul de concentrare a tensiunilor se exprimă prin *coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor*, coeficient definit prin relația:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (1.1)$$

unde  $\sigma_{max}$  reprezintă tensiunea locală maximă la baza concentratorului, iar  $\sigma_n$  este tensiunea nominală maximă din aceeași secțiune și corespunzătoare aceluiași punct de la baza concentratorului, dar calculată în absența acestuia.

Pentru a înțelege fenomenul de concentrare a tensiunilor și modul în care se stabilește tensiunea nominală se consideră cazul simplu al plăcii din fig. 1.1, sollicitată la întindere, și care prezintă un concentrator de tip gaură circulară; dimensiunile geometrice caracteristice sunt: diametrul găurii circulare  $d = 2a$ , lățimea plăcii  $H$ , lungimea ligamentului  $h = H - 2a$  și grosimea plăcii  $t$ .

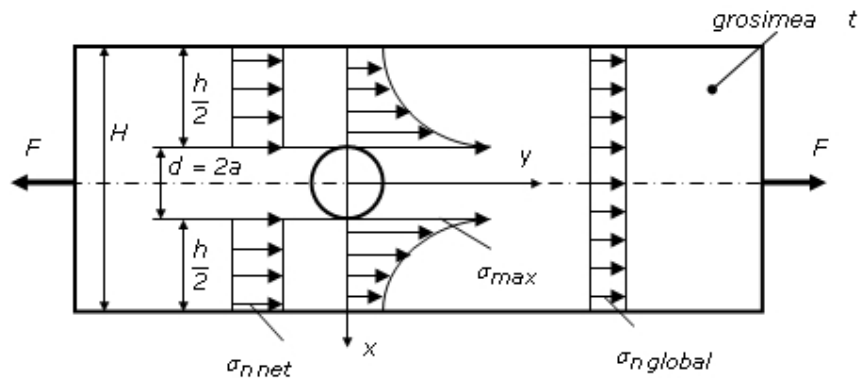


Fig. 1.1. Distribuția tensiunilor într-o placă cu un concentrator tip gaură circulară

Prezența găurii circulare va conduce la o neuniformitate a distribuției tensiunilor, caracterizată printr-un vârf de tensiune  $\sigma_{max}$  și o tensiune nominală netă  $\sigma_{n\ net}$ , calculată prin considerarea ariei nete (aria secțiunii transversale din zona cu concentrator):

$$\sigma_{n\ net} = \frac{F}{(H - 2a)t} \Rightarrow K_{tn} = \frac{\sigma_{max}(H - 2a)t}{F} \quad (1.2)$$

Examinând în continuare fig.1.1, departe de secțiunea critică a concentratorului, se calculează o tensiune nominală globală considerând în calcul aria brută (aria secțiunii transversale din zona fără concentrator):

$$\sigma_{n\ global} = \frac{F}{Ht} \quad (1.3)$$

Astfel, rezultă un coeficient de concentrare teoretic global:

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{n\ global}} = \frac{\sigma_{max}Ht}{F} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{n\ net}} \frac{H}{(H - 2a)} = K_{tn} \frac{H}{(H - 2a)} \quad (1.4)$$

În general, valorile coeficienților  $K_{tn}$  și  $K_{tg}$  sunt diferite; spre exemplificare, se prezintă în fig.1.2 pentru placa slăbită de o gaură circulară, variația celor doi coeficienți în funcție de raportul dintre diametrul găurii și lățimea plăcii, Peterson [1974]. Se observă cu ușurință că valorile celor doi coeficienți sunt

relativ apropiate pentru valori reduse ale raportului  $d/H$ , atunci când nu contează dacă se utilizează în calcule aria netă sau cea brută.

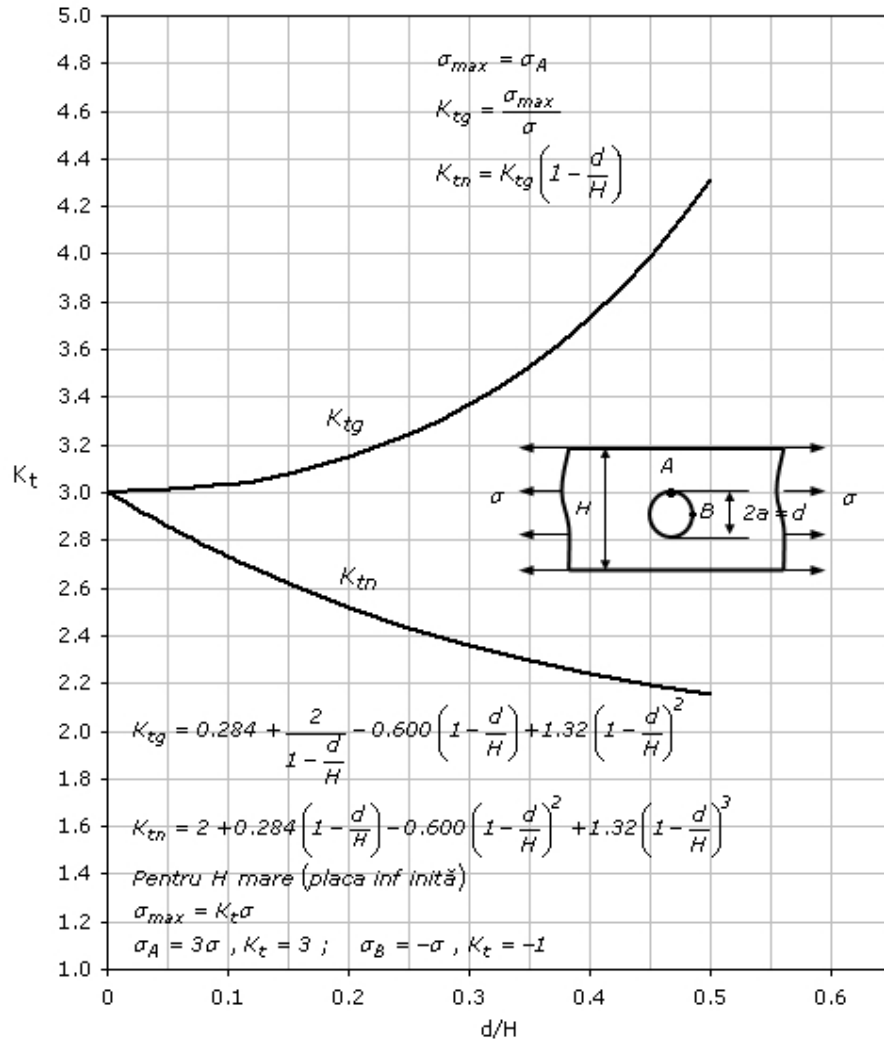


Fig. 1.2. Variația coeficientului de concentrare teoretic net  $K_{tn}$ , respectiv global  $K_{tg}$ , pentru concentratorul tip gaură circulară (Peterson [1974])

La modificarea dimensiunilor relative, pentru valori mari ale raportului  $d/H$ , diferențele dintre valorile celor doi coeficienți de concentrare a tensiunilor  $K_{tn}$  și  $K_{tg}$  devin importante, iar variația fiecăruia dintre ei este sensibil influențată.

În continuare, în lipsa altor precizări suplimentare, se va utiliza pentru coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor notația  $K_t$ , înțelegând că se referă la valoarea netă a acestuia.

Astfel definit, ca un factor de multiplicare a tensiunii nominale,  $K_t$  reprezintă o măsură a severității fenomenului de concentrare a tensiunilor. Este important de subliniat că deformațiile sunt presupuse a fi elastice, coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$  fiind un concept în mod esențial elastic.

În funcție de geometria piesei cu concentrator și de natura sollicitării, valorile coeficientului de concentrare a tensiunilor  $K_t$  se determină prin metode analitice pe baza teoriei liniare a elasticității, prin metode numerice de calcul, cea mai utilizată fiind metoda elementului finit, sau prin metode experimentale, ca de exemplu fotoelasticitate, termoelasticitate sau tensometrie electrică rezistivă. Asemenea date sunt cuprinse în îndrumările de proiectare, de exemplu Young [2002], Pilkey [1997], [2005], și în monografiile de specialitate, cele mai renumite fiind cele ale lui Neuber [1958] și Peterson [1974]. Aceste monografii prezintă relații de calcul pentru valorile coeficientului de concentrare a tensiunilor  $K_t$  pentru o mare diversitate de probleme: probleme biaxiale, probleme axial-simetrice, probleme triaxiale și câteva probleme speciale.

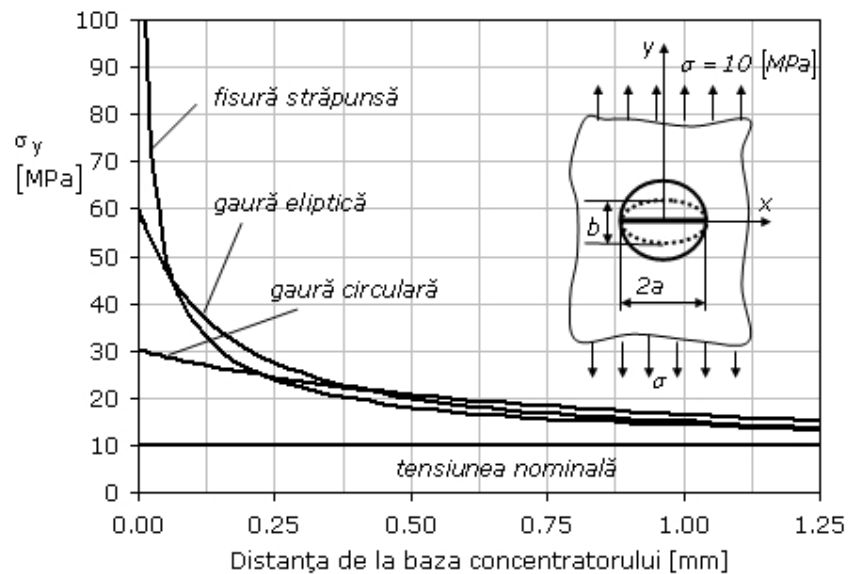


Fig. 1.3. Distribuția tensiunii normale  $\sigma_y$  în funcție de distanța de la baza concentratorului pentru trei forme diferite ale concentratorului (gaură circulară, gaură eliptică, fisură străpunsă)

Distribuția tensiunilor în vecinătatea concentratorului și valorile coeficientului de concentrare depind, așa cum s-a precizat, de forma concentratorului. În fig.1.3 este ilustrat acest efect la o placă infinită sollicitată la întindere uniaxială uniformă cu o tensiune  $\sigma_y = 10$  [MPa], pentru trei forme ale concentratorului: gaură circulară cu



diametrul  $d = 2a = 5 [mm]$  (Timoshenko [1970]), gaură eliptică cu raportul semiaxelor  $a/b = 2.5$  (Schijve [2001]) și fisură străpunsă de lungime  $2a$  (Westergaard [1939]).

Distribuțiile din fig. 1.3 indică modul în care tensiunile descresc cu distanța, pornind de la baza concentratorului, de-a lungul axei  $x$ . Pentru concentratorul de tip gaură circulară, se observă că tensiunea locală maximă  $\sigma_{max}$  atinge valoarea de  $30 [MPa]$ , careia îi corespunde un coeficient de teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 3$ . Dacă se înlocuiește gaura circulară cu una de formă eliptică, axa mare a acesteia fiind orientată perpendicular pe direcția de solicitare, tensiunea locală maximă  $\sigma_{max}$  rămâne finită, dar conduce la un coeficient de concentrare mai mare  $K_t = 6$ . De fapt, gaura circulară reprezintă un caz particular, și anume, elipsa cu semiaxele egale  $a = b$ . Se verifică cu ușurință acest lucru plecând de la expresia coeficientului de concentrare a tensiunilor  $K_t$  dată de Schijve [2001] pentru concentratorul eliptic (raza la vârful elipsei este  $\rho = b^2/a$ ):

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad . \quad (1.5)$$

În cazul fisurii străpunse, având raza la vârf  $\rho = 0$ , tensiunea locală maximă este teoretic infinită, câmpului de tensiune fiind singular la vârful fisurii. Cu toate acestea, la o distanță semnificativă de la baza concentratorului tensiunile produse de gaura circulară, respectiv eliptică, devin mai mari, indicând o descreștere mai lentă cu distanța. Asupra semnificației acestei observații se va reveni în subcapitolul 1.2. În plus, pentru toate cele trei cazuri, tensiunile tind asimptotic spre valoarea tensiunii nominale.

Valorile coeficientul de concentrare a tensiunilor  $K_t$  depind și de tipul solicitării, după cum se poate observa din fig. 1.4, în cazul simplu al unei bare cilindrice prevăzută cu un canal circumferențial (renură), pentru aceleași dimensiuni și formă a concentratorului.

Pentru bara cilindrică din fig. 1.4, de exemplu în cazul solicitării de tracțiune, starea de tensiune este biaxială la suprafața concentratorului, și, devine triaxială, spre interior. Tensiunea normală paralelă cu axa barei este maximă chiar la baza concentratorului, acolo unde și tensiunea circumferențială este maximă, cele două reprezentând chiar tensiunile normale principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  (fig. 1.5), Constantinescu [2003]. Tensiunea normală radială  $\sigma_3$  este nulă, fiind perpendiculară pe suprafața barei. În această situație, devine necesară definirea *coeficienților de concentrare pentru tensiunile principale*:

$$K_{t1} = \frac{(\sigma_{max})_1}{\sigma_n} \quad , \quad K_{t2} = \frac{(\sigma_{max})_2}{\sigma_n} \quad , \quad K_{t3} = \frac{(\sigma_{max})_3}{\sigma_n} \quad . \quad (1.6)$$

Așa cum se poate defini în acest caz o tensiune echivalentă  $\sigma_{ech}$ , de exemplu după teoria energiei potențiale de deviație (criteriul Maxwell-Huber-Hencky-von Mises)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad , \quad (1.7)$$

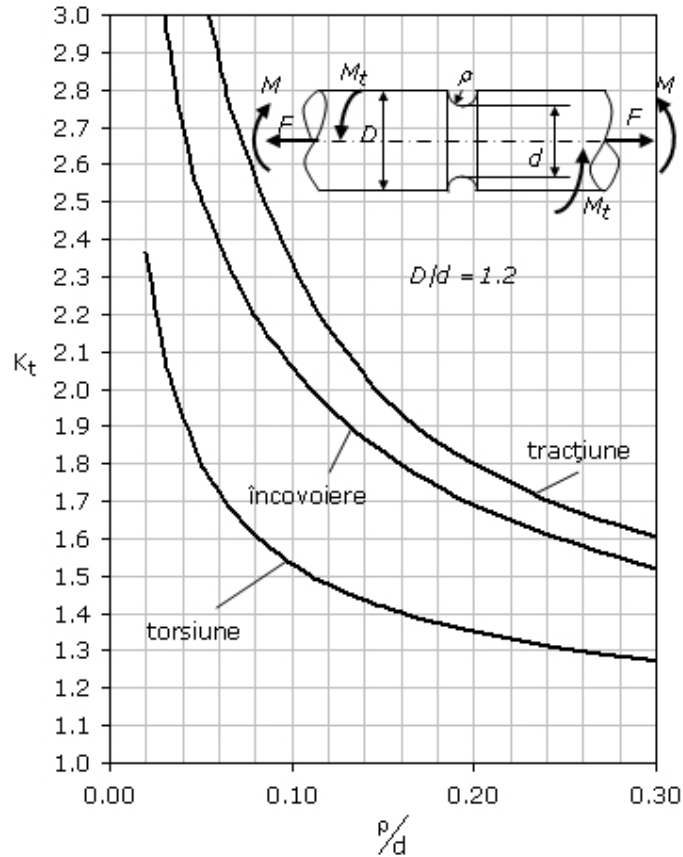


Fig. 1.4. Variația coeficientului de concentrare teoretic net  $K_t$  la o bară cilindrică cu un canal circumferențial pentru diferite sollicitări (tracțiune, încovoiere, torsiune)

se poate defini și un *coeficient de concentrare a tensiunii echivalente* (I.8):

$$K_{t\,ech} = \frac{(\sigma_{max})_{ech}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} = K_t \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad (1.8)$$

Luarea în considerare a stării de tensiune biaxiale (sau triaxiale), prin utilizarea teoriei energiei potențiale de deviație, are ca rezultat acceptarea la baza concentratorului a unui coeficient de concentrare  $K_{t\,ech}$  mai mic decât cel determinat pentru tensiunea maximă  $K_t$ . În general, valoarea lui  $K_{t\,ech}$  reprezintă aproximativ 90-95% din cea a lui  $K_t$ , Neuber [1958].

La materialele ductile, cum această teorie constituie un criteriu de plasticitate, coeficientul de concentrare echivalent  $K_{t\,ech}$  indică apariția deformațiilor plastice (mai ales în cazul sollicitărilor variabile) în zona de la baza concentratorului, care preced inițierea fisurii de oboseală (Rusu [1992]).

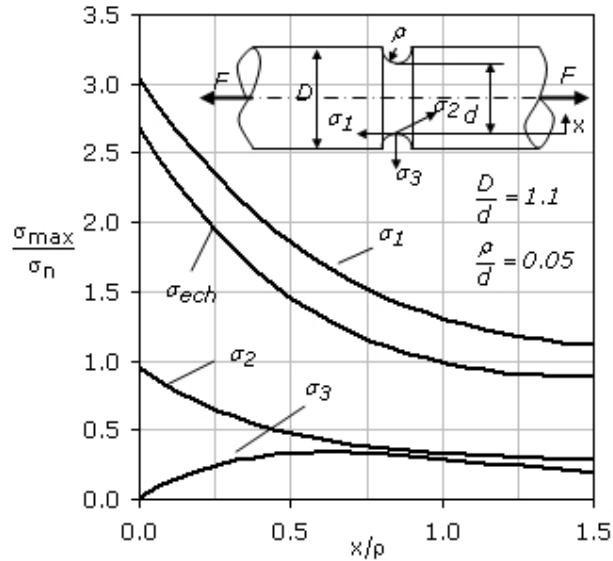


Fig. 1.5. Tensiunea echivalentă  $\sigma_{ech}$  și tensiunile principale  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  pentru bara cilindrică cu un concentrator în formă de canal circumferențial

Coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$  este un concept în mod esențial elastic; depinzând de forma și dimensiunile concentratorului și de modul de aplicare a încărcării, el se aplică mai cu seamă materialelor liniar elastice. În practica inginerescă, care implică materiale reale, rezistența reală a unei piese este diferită de cea care se obține prin utilizarea coeficientului teoretic de concentrare  $K_t$ , mai ales în cazul solicitărilor variabile sau dinamice.

Așadar, devine utilă introducerea conceptului de *coeficient efectiv de concentrare a tensiunilor*:

$$K_{ef} = \frac{\sigma_{max\ ef}}{\sigma_n} \quad (1.9)$$

În mod uzual, pentru un anumit concentrator, coeficientul efectiv de concentrare  $K_{ef}$ , determinat pe cale experimentală, este mai mic decât cel teoretic  $K_t$ :

$$1 \leq K_{ef} \leq K_t \quad (1.10)$$

Relația dintre cei doi coeficienți  $K_t$  și  $K_{ef}$  de concentrare a tensiunilor, se exprimă prin introducerea *coeficientului de sensibilitate la concentrarea tensiunilor*  $q$ , Boreși [1993] (denumit în literatura tehnică și *coeficient de reducere a rezistenței la rupere*, respectiv *coeficient de reducere a rezistenței la oboseală* pentru solicitările ciclice):

$$q = \frac{K_{ef} - 1}{K_t - 1} \quad (1.11)$$

cu ajutorul căruia se poate exprima tensiunea efectivă maximă de rupere:

$$\sigma_{max\ ef} = \sigma_n [q(K_t - 1) + 1] \quad (1.12)$$

Dacă, pentru un material și o anumită geometrie a concentratorului, coeficientul de sensibilitate  $q = 1$ , atunci  $K_{ef} = K_t$ , se spune că piesa și materialul din care aceasta este realizată sunt deplin sensibile la efectul de concentrare a tensiunilor; este cazul materialelor fragile, pentru care liniaritatea dintre tensiuni și deformațiile specifice se păstrează pe măsura creșterii sarcinii aplicate până aproape de rupere. Pentru un coeficient de sensibilitate  $q = 0$ , valoarea lui  $K_{ef} = 1$ , iar materialul și piesa sunt insensibile la efectul de concentrare a tensiunilor. La materialele ductile, după depășirea limitei de curgere, tensiunile maxime la baza concentratorului cresc mult mai lent decât deformațiile specifice, distribuția acestora devenind tot mai uniformă pe măsură ce tensiunea nominală de încărcare crește, valoarea coeficientului efectiv de concentrare  $K_{ef}$  apropiindu-se de unitate.

Valoarea coeficientului de sensibilitate  $q$  depinde de numeroși factori, cei mai importanți fiind: tipul de încărcare aplicată (statică, șoc, variabilă), existența tensiunilor reziduale în piesă, caracterul structurii interne a materialului, gradul de finisare a suprafeței în zona concentratorului, gradientul tensiunilor de la baza concentratorului, temperatura de lucru.

## 1.2. Gradientul tensiunilor de la baza concentratorului

Determinarea tensiunii maxime  $\sigma_{max}$ , respectiv a coeficientului de concentrare  $K_t$ , nu este suficientă pentru cunoașterea câmpului de tensiune de la baza concentratorului. În plus, este necesară stabilirea gradientului tensiunii, adică a modului în care această tensiune descrește cu distanța de la baza concentratorului, mărime extrem de importantă în evaluarea rezistenței la oboseală a componentelor cu concentratori și în determinarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru fisurile inițiate în zonele de concentrare a tensiunilor.

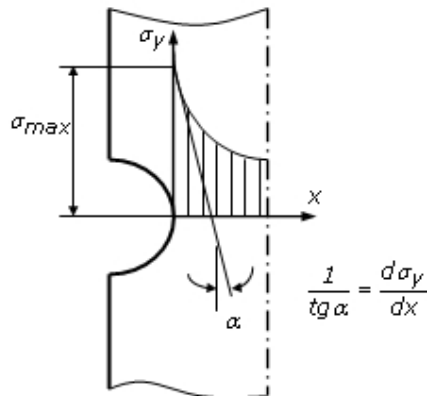


Fig. 1.6. Gradientul tensiunii

După propunerea lui Siebel [1955], *gradientul relativ al tensiunii* este definit prin relația

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{max}} \frac{d\sigma_y}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad (1.13)$$

unde  $x_0$  este coordonata punctului în care se produce tensiunea maximă  $\sigma_y = \sigma_{max}$ . Se observă din fig. 1.6 că gradientul tensiunii este chiar panta curbei de variație a tensiunii normale  $\sigma_y$ .

În timp ce, pentru coeficientul de concentrare  $K_t$  sunt disponibile nomograme, tabele, relații, gradientului relativ al tensiunii  $\chi$  i s-a acordat o mai mică importanță, Constantinescu [2003]. Cele mai cunoscute și citate sunt rezultatele date de Siebel [1955], chiar dacă, deoarece nu țin seama de dimensiunile globale ale pieselor prezentate, expresiile de calcul ale gradientului relativ al tensiunii sunt aproximative. Explicația este motivată de faptul că gradientul este influențat în mod esențial de raza de la baza concentratorului și mai puțin de celelalte dimensiuni.

Soluția exactă pentru distribuția tensiunilor la placa infinită, slăbită de o gaură eliptică sau circulară, solicitată la întindere uniaxială uniformă este binecunoscută (fig. 1.7).

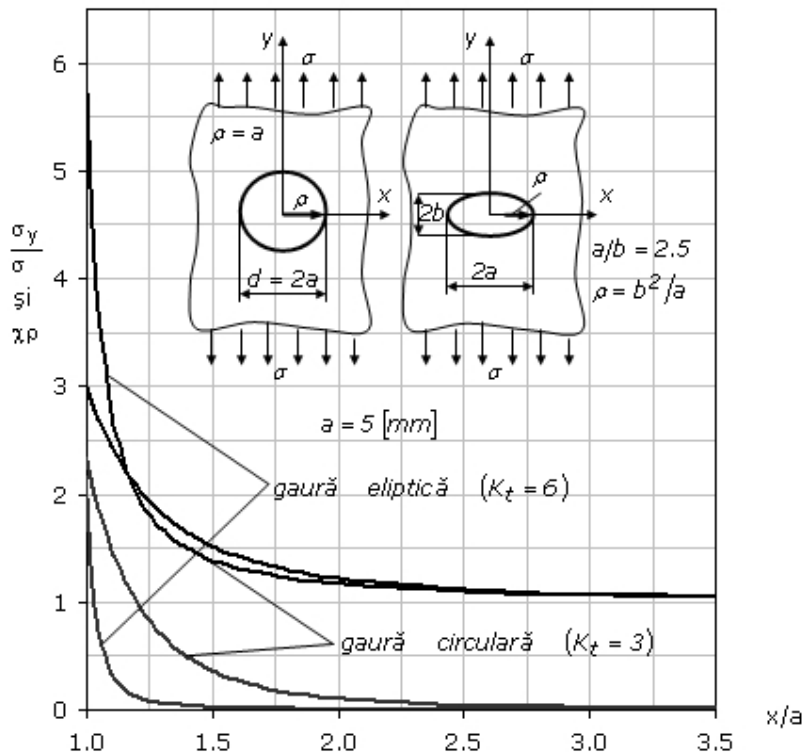


Fig. 1.7. Distribuția tensiunilor normalizate  $\sigma_y/\sigma$  și a gradientului relativ normalizat  $\chi\rho$  în funcție de distanța normalizată  $x/a$  de la baza concentratorului

După Schijve [2001], pentru gaura eliptică relația de calcul a tensiunii  $\sigma_y$  de-a lungul axei  $x$  este:

$$\frac{(\sigma_y)_{y=0}}{\sigma} = 1 + \frac{a(a-2b)\left(x - \sqrt{x^2 - c^2}\right)\left(x^2 - c^2\right) + ab^2(a-b)x}{(a-b)^2\left(x^2 - c^2\right)\sqrt{x^2 - c^2}} \quad , \quad (1.14)$$

unde  $c^2 = a^2 - b^2$ ; pentru  $x = a$  se obține din (1.14) tensiunea maximă și coeficientul de concentrare:

$$\sigma_{max} = \sigma\left(1 + 2\frac{a}{b}\right) = \sigma\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \Rightarrow K_t = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad ; \quad (1.15)$$

pentru  $a = 5$  și  $a/b = 2.5$  rezultă un coeficient de concentrare a tensiunii  $K_t = 6$ . Concentratorul tip gaură circulară reprezintă un caz particular, și anume elipsa cu semiaxele egale  $a = b$ , relația (1.14) se simplifică astfel:

$$\frac{(\sigma_y)_{y=0}}{\sigma} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^4 \quad , \quad (1.16)$$

tensiunea maximă și coeficientul de concentrare devenind:

$$\sigma_{max} = 3\sigma \Rightarrow K_t = 3 \quad . \quad (1.17)$$

În fig. 1.7 sunt reprezentate, pentru  $2a = 5$  [mm], distribuțiile tensiunii  $(\sigma_y)_{y=0}$ , normalizată cu tensiunea nominală de întindere  $\sigma$ , în funcție de distanța de la baza concentratorului  $x$ , normalizată cu semideschiderea acestuia  $a$ , pentru cele două tipuri de concentratori. Pentru gaura eliptică, gradientul tensiunii la baza concentratorului, adică pentru  $x = a$ , se obține din (1.14) prin diferențiere

$$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)\Bigg|_{x=a} = -\left(2 + \frac{1}{K_t}\right)\frac{\sigma_{max}}{\rho} \quad , \quad (1.18)$$

semnul minus având doar o semnificație fizică, respectiv descreșterea pantei tensiunii maxime. Se observă că gradientul negativ este direct proporțional cu tensiunea maximă și invers proporțional cu raza de la baza concentratorului. Coeficientul de concentrare  $K_t$ , prezent prin termenul de proporționalitate  $(2 + 1/K_t)$ , nu are un efect important în valoarea gradientului (Schijve [1980]). Din (1.18), prin rescrierea relației, se obține expresia gradientului relativ al tensiunii de la baza concentratorului:

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{max}}\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)\Bigg|_{x=a} = -\left(2 + \frac{1}{K_t}\right)\frac{1}{\rho} \quad , \quad (1.19)$$

cu valorile  $0.933$  [MPa/mm<sup>-1</sup>] pentru gaura circulară, respectiv  $5.416$  [MPa/mm<sup>-1</sup>] pentru cea eliptică (semnul minus al gradientului a fost omis, el

având doar o semnificație fizică). Se observă cu ușurință și din fig. 1.7 că tensiunile scad mult mai rapid la baza concentratorului eliptic.

Pentru a asigura comparabilitatea diferiților concentratori se utilizează în locul gradientului relativ al tensiunii  $\chi$  produsul  $\chi\rho$ , Filippini [2000]:

$$\chi\rho = -\left(2 + \frac{1}{K_t}\right) , \quad (1.20)$$

reprezentând gradientul relativ al tensiunii pentru o rază  $\rho$  la vârful concentratorului egală cu unitatea. De exemplu, pentru concentratorul eliptic din fig. 1.7 produsul  $\chi\rho|_{x=a} = \frac{13}{6} = 2.167$ , iar pentru gaura circulară devine  $\frac{7}{3} = 2.333$ .

Produsul  $\chi\rho$  depinde puțin de geometria concentratorului și la solicitări de tracțiune se poate accepta aproximarea

$$\chi\rho = 2 , \quad (1.21)$$

iar la încovoiere și torsiune se scrie o relație similară:

$$\chi = 2/\rho + 2/d , \quad (1.22)$$

unde  $d$  este diametrul piesei, Rusu [1992].

Gradientul tensiunii la baza concentratorului, după cum arată Schijve [2001], oferă o indicație asupra volumului de material puternic solicitat. Astfel, considerând că tensiunea normală  $\sigma_y$  scade cu 10%, de la vârful  $\sigma_{max}$  la valoarea  $0.9\sigma_{max}$ , pentru concentratorul tip gaură circulară:

$$\left(\frac{d\sigma_y}{dx}\right)\Big|_{x=a} = -\left(2 + \frac{1}{3}\right) \frac{\sigma_{max}}{2.5} = -\frac{\sigma_{max} - 0.9\sigma_{max}}{x} , \quad (1.23)$$

rezultă o distanță de la baza concentratorului  $x = 107 \mu m$ , distanță care este de același ordin de mărime cu dimensiunea medie a grăunților. Așadar, grăunții de la suprafața concentratorului sunt puternic solicitați, raza de la baza acestuia fiind importantă în inițierea fisurilor la solicitări ciclice.

În cele mai multe cazuri, efectul dimensiunilor finite ale pieselor constă în modificarea valorii gradientului relativ al tensiunii. Pentru plăci de lățime finită Filippini [2000] determină expresiile gradientului relativ al tensiunii pentru câteva tipuri de concentratori: gaură circulară (Howland [1930]) și eliptică (Neuber [1958]), concentratori laterali și centrali rotunjiți (Xu [1995], Glinka [1987], concentratori laterali de formă hiperbolică (Neuber [1958] sau semicirculară (Ling [1947])).

### 1.3. Concentrarea tensiunilor în domeniul elasto-plastic. Coeficientul de concentrare a tensiunilor și a deformațiilor

Cât timp tensiunea maximă  $\sigma_{max}$  la baza concentratorului rămâne în domeniul liniar-elastic, tensiunile și deformațiile specifice sunt proporționale, iar coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$  va descrie atât concentrarea

tensiunilor cât și a deformațiilor specifice; cu alte cuvinte, deformația specifică maximă  $\varepsilon_{max}$  la baza concentratorului se poate determina din relația:

$$\varepsilon_{max} = K_t \varepsilon_n \quad (1.24)$$

unde  $\varepsilon_n$  reprezintă deformația specifică nominală maximă din aceeași secțiune și corespunzătoare aceluiasi punct de la baza concentratorului, dar calculată în absența acestuia ( $\varepsilon_n = \sigma_n/E$ ).

În cazul componentelor reale cu concentratori, chiar și pentru tensiuni nominale relativ reduse, tensiunea locală maximă  $\sigma_{max}$  depășește adeseori valoarea limitei de curgere  $\sigma_c$  la sollicitarea statică. Astfel, apariția deformațiilor plastice în zona de la baza concentratorului determină o tensiune locală maximă mai mică decât valoarea ei calculată cu relația  $K_t \sigma_n$ ; în schimb, deformația specifică maximă  $\varepsilon_{max}$  va depăși valoarea stabilită din considerente elastice.

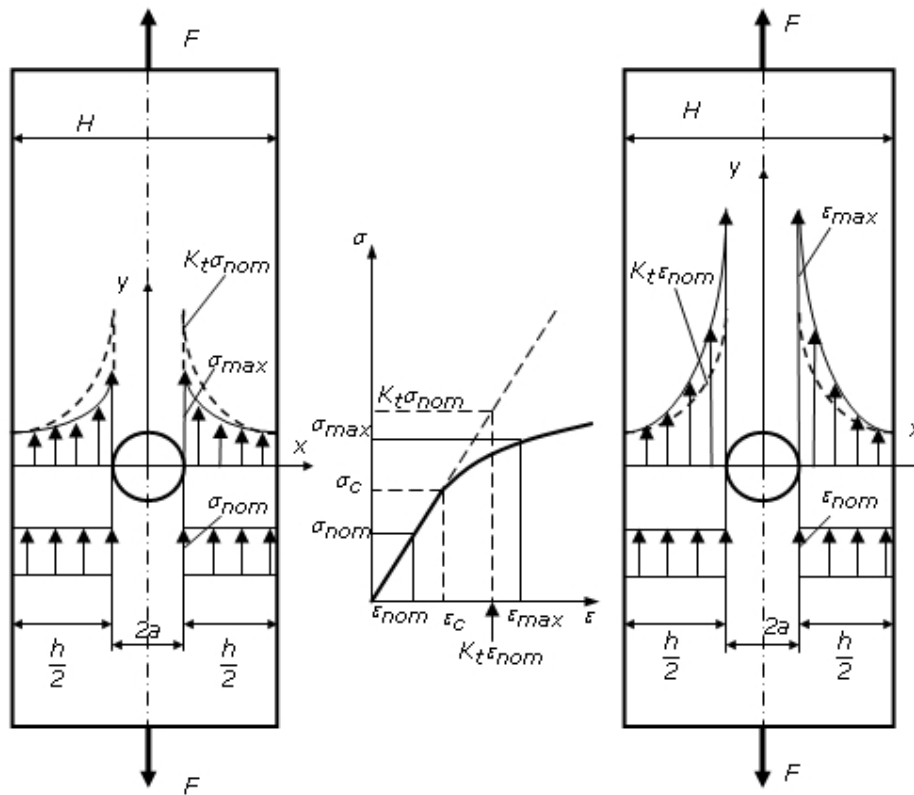


Fig. 1.8. Distribuția tensiunilor și a deformațiilor specifice pentru un material cu o comportare elasto-plastică

În aceste condiții, utilizarea coeficientului teoretic  $K_t$  pentru a descrie fenomenul de concentrare a tensiunilor și deformațiilor specifice la baza



concentratului nu mai este posibilă. Devine necesară definirea unui *coeficient de concentrare a tensiunilor*  $K_\sigma$  și a unui *coeficient de concentrare a deformațiilor specifice*  $K_\varepsilon$  prin relațiile:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad , \quad K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_n} \quad . \quad (1.25)$$

În fig. 1.8 este ilustrat acest fenomen pentru un material cu o comportare elasto-plastică a cărei curbă caracteristică este neliniară. Așadar, dacă valoarea coeficientului teoretic de concentrare  $K_t$  depinde de geometria concentratorului și tipul încărcării, este de așteptat ca valoarea coeficientului efectiv de concentrare să depindă, în plus, și de natura materialului, prin curba lui caracteristică.

Valorile coeficienților  $K_\sigma$  și  $K_\varepsilon$  se determină prin metode experimentale, prin metode numerice sau pe baza unor modele analitice. Unul dintre primele modele analitice propuse este cel al lui Hardrath [1951], care generalizează soluția dată de Stowell [1950]. După acest model analitic, coeficientul de concentrare a tensiunilor  $K_\sigma$ , respectiv coeficientul de concentrare a deformațiilor specifice  $K_\varepsilon$ , sunt dați de relațiile

$$\frac{K_\sigma - 1}{K_t - 1} = \frac{E_s}{E} \quad , \quad K_\varepsilon = \frac{K_t + 1}{K_\sigma - 1} \left( 1 + \frac{E}{E_s} \right) \quad , \quad (1.26)$$

unde  $E_s$  este modulul de elasticitate secant al materialului determinat pentru punctul de tensiune maximă, cu alte cuvinte:

$$E_s = \frac{\sigma_{max}}{\varepsilon_{max}} \quad .$$

Cele mai cunoscute și mai utilizate modele analitice sunt datorate lui Neuber [1961], respectiv Molski [1981] și Glinka [1985], [1985a].

### 1.3.1. Regula lui Neuber

Regula lui Neuber [1961], obținută pentru starea plană de forfecare pură în cazul unor concentratori tip creștătură de formă hiperbolică, exprimă coeficientul de concentrare teoretic  $K_t$  ca media geometrică a coeficienților de concentrare a tensiunii  $K_\sigma$  și a deformației specifice  $K_\varepsilon$ :

$$K_\sigma K_\varepsilon = K_t^2 \quad . \quad (1.27)$$

Înlocuind în (1.27) relațiile (1.25), regula lui Neuber se scrie și în forma următoare:

$$\sigma_{max} \varepsilon_{max} = K_t^2 \sigma_n \varepsilon_n \quad , \quad (1.28)$$

care postulează că produsul  $\sigma_{max} \varepsilon_{max}$  este proporțional cu predicția elastică. Neuber a presupus că relația propusă își păstrează valabilitatea pentru orice tip de concentrator și orice stare de solicitare. Verificările ulterioare au demonstrat că regula lui Neuber furnizează rezultate precise pentru aplicațiile de stare plană de tensiune (de exemplu, la întinderea plăcilor subțiri) și rezultate mai puțin exacte

pentru aplicațiile de stare plană de deformare (întinderea plăcilor groase), lipsa preciziei fiind explicată de multiaxialitatea stării de tensiune.

Pentru a determina tensiunea  $\sigma_{max}$  și deformația  $\varepsilon_{max}$  la baza concentratorului, după regula lui Neuber, se pornește de la valoarea coeficientului teoretic de concentrare  $K_t$  și de la valorile nominale ale acestora,  $\sigma_n$  și  $\varepsilon_n$ . Astfel, termenul din dreapta al relației (1.28) devine o constantă, iar expresia reprezintă ecuația unei hiperbole, denumită *hiperbola lui Neuber*. Acestea i se adaugă ecuația ce exprimă legătura dintre  $\sigma_{max}$  și  $\varepsilon_{max}$  la baza concentratorului prin legea constitutivă a materialului, de exemplu de tip Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} + \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.29)$$

unde  $k$  și  $n$  sunt modulul de ecruisare, respectiv exponentul de ecruisare, la solicitări statice. Sistemul format de cele două ecuații (1.28) și (1.29) se poate rezolva numeric sau grafic (coordonatele punctului de intersecție a celor două curbe reprezintă chiar valorile căutate).

Pentru un comportament nominal liniar-elastic, adică  $\varepsilon_n = \sigma_n/E$ , regula lui Neuber se reduce la relația

$$\sigma_{max} \varepsilon_{max} = \frac{(K_t \sigma_n)^2}{E}, \quad (1.30)$$

unde înlocuind  $\varepsilon_{max}$  din (1.29) se obține ecuația:

$$\frac{\sigma_{max}^2}{E} + \sigma_{max} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(K_t \sigma_n)^2}{E}. \quad (1.31)$$

Această ecuație (1.31) modelează răspunsul materialului prin două legi constitutive diferite: legea lui Hooke pentru răspunsul nominal, respectiv Ramberg-Osgood pentru cel de la baza concentratorului.

Dacă tensiunea nominală  $\sigma_n$  este mai mare decât limita de proporționalitate (aprox.  $0.8\sigma_c$ ), pentru un comportament nominal neliniar, în ecuația (1.31) și tensiunea nominală  $\sigma_n$  se exprimă după relația Ramberg-Osgood:

$$\frac{\sigma_{max}^2}{E} + \sigma_{max} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = K_t^2 \left[ \frac{\sigma_n^2}{E} + \sigma_n \left( \frac{\sigma_n}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (1.32)$$

În fig. 1.9 se prezintă modul în care se determină pe cale grafică valorile  $\sigma_{max}$  și  $\varepsilon_{max}$  pentru tracțiunea uniaxială a unei plăci cu un concentrator având coeficientul teoretic de concentrare  $K_t = 3$ . Materialul plăcii este un aliaj de aluminiu *EN AW 6060 T66* -  $\sigma_r = 220.92 [MPa]$ ,  $\sigma_c = 193.92 [MPa]$ , pentru care curba caracteristică  $\sigma - \varepsilon$  este reprezentată prin relația Ramberg-Osgood, cu parametrii  $E = 67290 [MPa]$ ,  $k = 245.79 [MPa]$  și  $n = 0.0409$  determinați din datele înregistrate pentru încercarea de tracțiune. Pentru valorile nominale

$\sigma_n = 90.50 \text{ [MPa]}$  și  $\varepsilon_n = 1.345 \cdot 10^{-3} \text{ [mm/mm]}$  se obțin valorile maxime  $\sigma_{max} = 193.25 \text{ [MPa]}$  și  $\varepsilon_{max} = 5.6817 \cdot 10^{-3} \text{ [mm/mm]}$ , cărora le corespund coeficienții de concentrare a tensiunii  $K_\sigma = 2.135$  și a deformației specifice  $K_\varepsilon = 4.224$ .

Dacă la baza concentratorului apare o zonă plastică, utilizând soluția grafică prezentată, se poate determina tensiunea reziduală după o descărcare elastică:

$$\sigma_{rez} = \sigma_{max} - K_t \sigma_n = 193.25 - 3 \cdot 90.50 = -78.25 \text{ [MPa]}. \quad (1.33)$$

Pentru componentele de grosime mare la care starea de tensiune la baza concentratorului este multiaxială, predicțiile după regula lui Neuber sunt mai puțin exacte. O prezentare a numeroaselor încercări de a îmbunătăți aceste rezultate, prin modificări aduse regulii lui Neuber, este făcută de Zeng [2001].

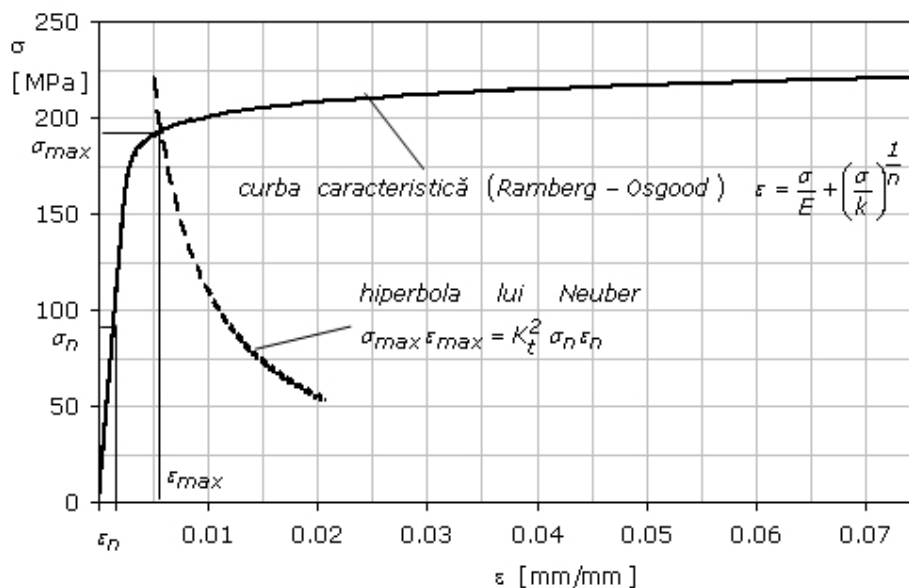


Fig. 1.9. Utilizarea regulii lui Neuber pentru determinarea grafică a valorilor  $\sigma_{max}$  și  $\varepsilon_{max}$  pentru aliajul de aluminiu 6060 – T66

### 1.3.2. Regula lui Glinka

Modelul analitic propus de Molski [1981] și Glinka [1985], denumit și *modelul densității energiei de deformație* sau *regula lui Glinka*, se bazează pe ipoteza că densitatea energiei de deformație la baza concentratorului este aceeași pentru un comportament liniar-elastic  $W_e$  și elasto-plastic  $W_p$ , dacă zona plastică de la baza concentratorului este mică.

Pentru starea de tensiune plană și acceptând un comportament liniar-elastic la baza concentratorului -  $\varepsilon = \sigma/E$  și  $\sigma_{max} = K_t \sigma_n$ , densitatea energiei de deformare  $W_e$  se scrie (fig. 1.10):

$$W_e = \int_0^{K_t \varepsilon_n} \sigma d\varepsilon = \int_0^{K_t \sigma_n} \frac{\sigma}{E} d\sigma = \frac{(K_t \sigma_n)^2}{2E} . \quad (1.34)$$

Dacă la baza concentratorului comportamentul este elasto-plastic (fig. 1.10), pentru un material a cărui curbă caracteristică  $\varepsilon - \sigma$  este de tip Ramberg-Osgood, densitatea energiei de deformare devine:

$$W_p = \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\sigma_{max}} \sigma \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{nk} \left( \frac{\sigma}{k} \right)^{n-1} \right] d\sigma = \frac{\sigma_{max}^2}{2E} + \frac{\sigma_{max}}{n+1} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^n . \quad (1.35)$$

Din egalitatea  $W_e = W_p$ , se deduce regula lui Glinka pentru calculul tensiunii maxime locale  $\sigma_{max}$  la baza concentratorului:

$$\frac{(K_t \sigma_n)^2}{E} = \frac{\sigma_{max}^2}{E} + \frac{2\sigma_{max}}{n+1} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^n , \quad (1.36a)$$

valoarea deformației specifice  $\varepsilon_{max}$  rezultând din (1.29).

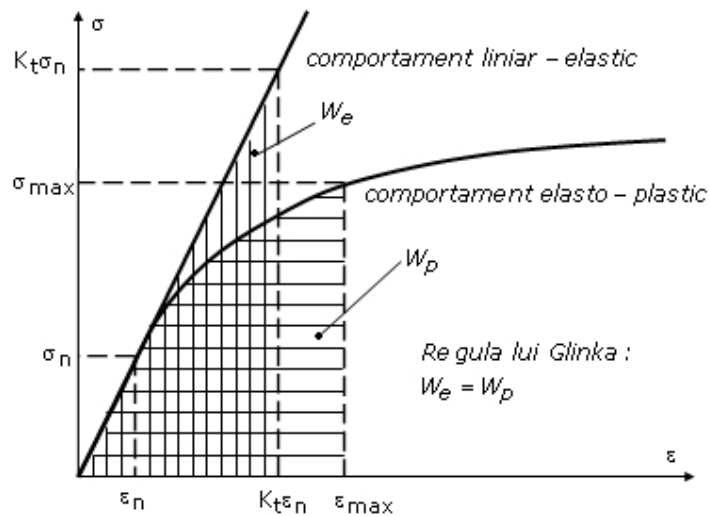


Fig. 1.10. Reprezentarea grafică a regulii lui Glinka [1985]

Comparând relațiile (1.31) și (1.36), se observă că singura diferență față de regula lui Neuber este reprezentată de factorul  $2/(n+1)$ . Întrucât  $n < 1$ , acest factor este supraunitar, rezultând în baza ecuației (1.36) valori calculate mai mici pentru tensiunea de la baza concentratorului, în comparație cu cele determinate după regula lui Neuber.

Pentru valori ale tensiunii nominale peste limita de proporționalitate ecuația (1.36a) ia forma următoare:

$$K_t^2 \left[ \frac{\sigma_n^2}{2E} + \frac{\sigma_n}{n+1} \left( \frac{\sigma_n}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = \frac{\sigma_{max}^2}{E} + \frac{2\sigma_{max}}{n+1} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad (1.36b)$$

Trebuie subliniat că validitatea ecuațiilor (1.36a) și (1.36b) în condiții elasto-plastice este ipotetică, și în consecință trebuie verificată. Ulterior, pentru intervalul  $0.8\sigma_c \leq \sigma_n \leq \sigma_c$ , Glinka [1985a] a introdus un factor de corecție  $C_p$  care să țină cont de creșterea dimensiunii zonei plastice, relația (1.36a) transformându-se după cum urmează:

$$C_p \frac{(K_t \sigma_n)^2}{E} = \frac{\sigma_{max}^2}{E} + \frac{2\sigma_{max}}{n+1} \left( \frac{\sigma_{max}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad . \quad (1.37)$$

Expresii pentru calculul factorului de corecție  $C_p$ , la solicitări de întindere și încovoiere, au fost propuse de către Glinka [1985a], pornind de la expresia câmpului de tensiune din vecinătatea concentratorului dată de Creager [1967].

O relație similară cu (1.37) este propusă și pentru starea plană de deformație, când la baza concentratorului starea de tensiune este biaxială. Pentru a ține cont de efectul componente  $\sigma_z$ , relația uniaxială  $\sigma - \varepsilon$  este translatată într-una biaxială  $\sigma^* - \varepsilon^*$ , în baza relațiilor de transformare propuse de Dowling [1979]. Astfel, în condițiile stării plane de deformație, relațiile prin care se determină valorile locale maxime  $\sigma_{max}^*$  și  $\varepsilon_{max}^*$  devin:

$$\varepsilon_{max}^* = \frac{\sigma_{max}^*}{E^*} + \left( \frac{\sigma_{max}^*}{k^*} \right)^{\frac{1}{n^*}} \quad , \quad (1.38)$$

$$C_p \frac{(K_t \sigma_n)^2}{E^*} = \frac{\sigma_{max}^{*2}}{E^*} + \frac{2\sigma_{max}^*}{n^*+1} \left( \frac{\sigma_{max}^*}{k^*} \right)^{\frac{1}{n^*}} \quad , \quad (1.39)$$

unde  $E^*$ ,  $k^*$ ,  $n^*$  se determină pentru valorile transformate  $\sigma^* - \varepsilon^*$ .

Verificările efectuate la tracțiune și încovoiere de Glinka [1985], [1985a] pentru o serie de materiale și tipuri de concentratori, au demonstrat o foarte bună concordanță între valorile calculate după regula densității energiei de deformație și datele experimentale, diferențele nefiind mai mari de 10%.

La solicitarea de încovoiere, regula lui Glinka furnizează estimări precise și pentru tensiuni nominale ce depășesc limita de curgere, adică pentru  $\sigma_c < \sigma_n$ . Aceste rezultate sunt explicate de faptul că atingerea limitei de curgere la baza concentratorului nu produce o curgere plastică generalizată, în întreaga secțiune.

### 1.3.3. Studiu comparativ între regulile lui Neuber și Glinka

Comparația între rezultatele furnizate de cele două reguli se realizează pentru problema tracțiunii uniaxiale a unei plăci cu un concentrator de tip gaură

circulară având coeficientul teoretic de concentrare  $K_t = 3$ . Materialul plăcii este aliajul de aluminiu *EN AW 6060 T66* (vezi 1.3.1 pentru caracteristicile mecanice), iar starea de tensiune este plană.

Utilizând cele două metode expuse, se trasează variația coeficienților de concentrare a tensiunii și deformației specifice (fig. 1.11). În domeniul liniar-elastic, tensiunile și deformațiile specifice fiind proporționale, coeficientul teoretic de concentrare  $K_t$  descrie atât concentrarea tensiunilor cât și a deformațiilor specifice, adică  $K_t = K_\sigma = K_\varepsilon = 3$ . Pe măsură ce tensiunea de la baza concentratorului crește, începând de la valoarea  $\sigma_{max} = 0.8 \sigma_C$ , coeficientul de concentrare a tensiunilor  $K_\sigma$  scade apropiindu-se de unitate, iar coeficientul de concentrare a deformațiilor specifice  $K_\varepsilon$  crește treptat, datorită creșterii deformațiilor plastice de la baza concentratorului.

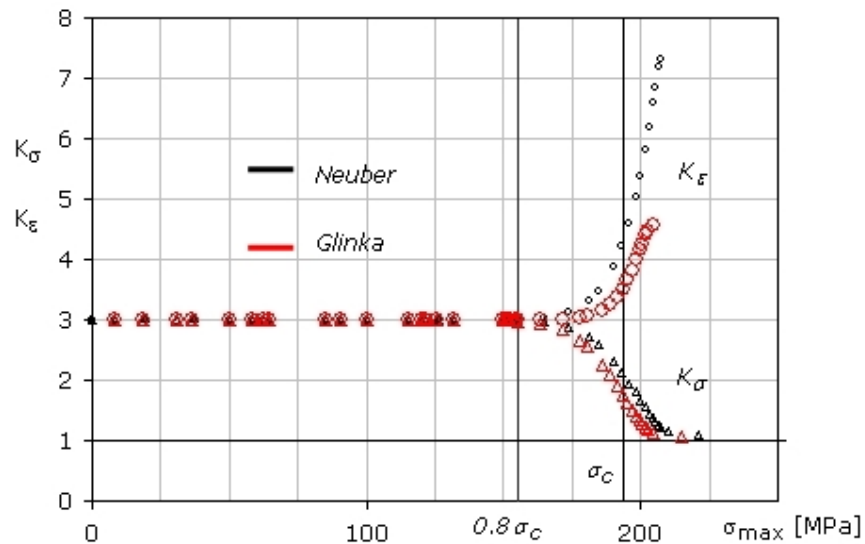


Fig. 1.11. Variația coeficienților de concentrare a tensiunii  $K_\sigma$  și a deformației specifice  $K_\varepsilon$  pentru aliajul de aluminiu *6060 - T66* la tracțiune uniformă uniaxială ( $K_t = 3$ )

Comparând rezultatele obținute prin cele două metode, predicțiile după regula lui Neuber sunt superioare cu până la 5% pentru coeficientul de concentrare a tensiunii  $K_\sigma$ . Diferențe mai mari între estimările date de cele două modele analitice se obțin pentru coeficientul de concentrare a deformației specifice  $K_\varepsilon$ , pentru valori ale tensiunii nominale ce depășesc limita de proporționalitate acestea fiind între 35–40%. Aceste diferențe mari sunt explicate parțial de valoarea mică a exponentului de ecruisare al aliajului de aluminiu *EN AW 6060 T66*. Rezultatele prezentate în literatură dovedesc că regula lui Neuber supraestimează predicțiile cu până la 20%, iar metoda lui Glinka furnizează rezultate destul de exacte pentru  $K_t$  în domeniul 1.97–4.6 dacă deformațiile specifice nu depășesc 1.5–2%, după verificările experimentale efectuate de Ostash [2003].

## 1.4. Factorul de intensitate a tensiunii

Factorul de intensitate a tensiunii  $K$  este un concept fundamental în mecanica rupii liniar-elastice care descrie distribuția tensiunilor din vecinătatea vârfului fisurii. Se consideră o fisură străpunsă într-un corp omogen și izotrop bidimensional infinit, cu o comportare liniar-elastică, sollicitat în modul I (fig. 1.12).

Pentru a caracteriza câmpul tensiunilor în vecinătatea vârfului fisurii ( $r \ll a$ ), într-un punct de coordonate  $(r, \theta)$ , Irwin a propus următoarea exprimare aproximativă a componentelor stării de tensiune:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 & \text{ - pentru starea plană de tensiune ,} \\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 & \text{ - pentru starea plană de deformare ,} \end{aligned} \quad (1.40b)$$

unde

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad [\text{MPa}\sqrt{\text{m}}] \quad , \quad (1.41)$$

este denumit *factorul de intensitate a tensiunii* în modul I, înglobând dimensiunea fisurii prin semilungimea ei  $a$  și intensitatea sollicitării prin tensiunea  $\sigma$  aplicată.

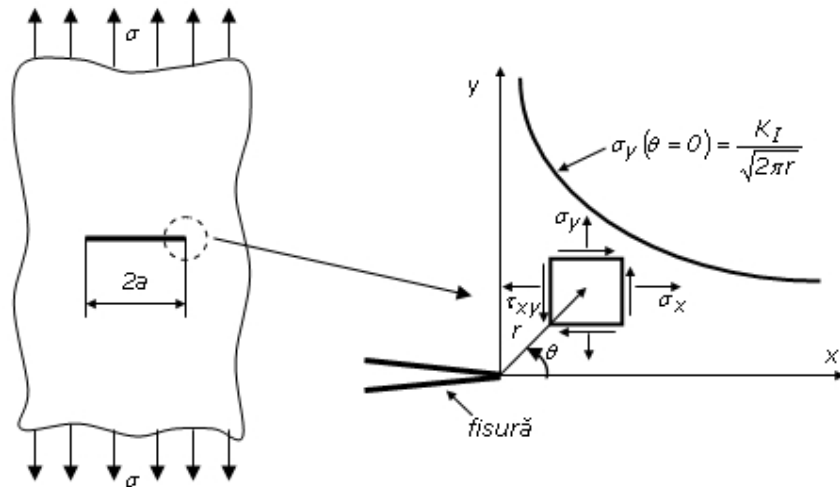


Fig. 1.12. Tensiunile elastice în vecinătatea vârfului fisurii

În plus, starea de tensiune mai este determinată de un termen singular  $1/\sqrt{2\pi r}$  și trei funcții de poziție de unghi  $\theta$ . Într-un punct dat, tensiunile depind doar de

factorul de intensitate  $K_I$ , un parametru important în mecanica ruperii. Similar, pentru celelalte două moduri de propagare a fisurii se poate defini câte un factor de intensitate a tensiunii -  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ .

Expresiile factorilor de intensitate ai tensiunii depind de geometria corpului și de modul de solicitare. Așa cum este definit prin (1.41), factorul de intensitate a tensiunii  $K_I$  corespunde unui corp bidimensional de dimensiuni infinite, solicitat la întindere uniformă perpendicular pe direcția de propagare a fisurii. Efectul geometriei corpului asupra factorului de intensitate se rezumă în această situație doar la semilungimea fisurii. Pentru corpuri finite, expresiile factorilor de intensitate ai tensiunii conțin pe lângă dimensiunea fisurii și alți parametri dimensionali ce caracterizează geometria corpului; în monografiile lui Tada [1985] și Murakami [1987], [1992] sunt prezentate expresiile factorilor de intensitate ai tensiunii pentru o mare diversitate de configurații geometrice și tipuri de încărcări.

Distribuția tensiunii normale  $\sigma_Y$  prezentată în fig. 1.12 pentru  $\theta = 0$  indică o singularitate a tensiunii la  $r = 0$ , adică tensiunea  $\sigma_Y \rightarrow \infty$  atunci când  $r \rightarrow 0$ . Această singularitate este dominantă în imediata apropiere a vârfului fisurii, relațiile (1.40) neglijând în această regiune ceilalți termeni nesingulari. În baza acestei distribuții, Pluvinage [2003] arată că factorul de intensitate a tensiunii pentru fisură se poate scrie și în forma următoare:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_Y(r, \theta = 0) \sqrt{r} \quad . \quad (1.42)$$

În realitate tensiunea nu este infinită la vârful fisurii, materialele reale manifestând efecte de plasticitate datorită concentrării puternice a tensiunilor și deformațiilor. Se formează astfel la vârful fisurii o *zonă deformată plastic* (enclavă plastică) ale cărei formă și dimensiuni depind de starea de tensiune și deformație.

Pe baza soluției elastice (1.40), pentru  $\theta = 0$  și  $\sigma_Y = \sigma_C$ , se poate realiza o aproximare a razei zonei plastice  $r_p$  de la vârful fisurii pentru starea plană tensiune:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_C} \right)^2 \quad . \quad (1.43)$$

Pentru starea plană de deformație, pe baza criteriului de plasticitate von Mises, expresia razei zonei plastice este:

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_C} \right)^2 \quad , \quad (1.44)$$

rezultând o valoare sensibil mai mică decât pentru starea plană de tensiune.

Cu toate acestea, dacă raza zonei plastice de la vârful fisurii este relativ mică în comparație cu celelalte dimensiuni geometrice, factorul de intensitate a tensiunii se poate utiliza în forma dată de mecanica ruperii liniar-elastice în regiunea de la vârful fisurii denumită de *dominantă K*.

Evaluarea factorului de intensitate a tensiunii pentru o problemă dată se poate face prin metode analitice (metoda aproximațiilor asimptotice, metoda colocației, metoda transformărilor conforme, metoda transformărilor integrale), prin metode numerice sau prin metode experimentale (fotoelasticitate, tensometrie electrică rezistivă, interferometrie).



### 1.4.1. Soluția Williams pentru concentratori în formă de V cu raza de racordare la vârf egală cu zero (singulari)

Williams [1952] a demonstrat primul existența unui câmp de tensiune singular pentru concentratorii ascuțiți a căror rază la vârf  $\rho = 0$ , în ipoteza stării plane de tensiune. În cazul limită  $2\varphi = 2\pi$  concentratorul ascuțit devine o fisură, iar situația  $2\varphi = \pi$  corespunde unui corp necreat, fără concentrator. Pentru cazurile intermediare,  $\pi < 2\varphi < 2\pi$ , rezultă un concentrator lateral ascuțit (fig. 1.13).

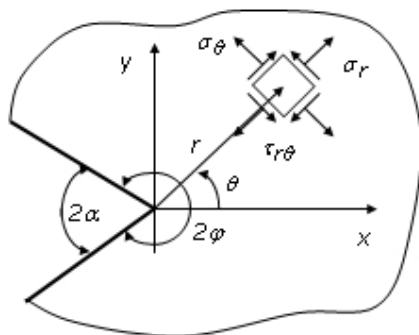


Fig. 1.13. Concentrator lateral în formă de V cu raza de racordare nulă

Prezentarea în detaliu a soluției propusă de Williams se găsește în lucrările lui Barber [2002] și Constantinescu [2003].

Într-o analiză liniar-elastică, Williams a considerat o funcție de tensiune biarmonică  $\phi(r, \theta)$  de forma:

$$\phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta, \lambda) \quad (1.45)$$

unde  $\lambda$  parametru pozitiv nedeterminat; continuitatea deplasărilor necesită o valoare pozitivă a acestui parametru,  $\lambda > 0$ . Pentru funcția  $F(\theta, \lambda)$ , Williams a admis o formă care satisface ecuația biarmonică, și anume:

$$F(\theta, \lambda) = A \cos(\lambda - 1)\theta + B \cos(\lambda + 1)\theta + C \sin(\lambda - 1)\theta + D \sin(\lambda + 1)\theta, \quad (1.46)$$

unde  $A, B, C, D$  sunt constante nedeterminate. Cu funcția de tensiune astfel definită, se pot scrie expresiile tensiunilor în coordonate polare:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = r^{\lambda-1} [F''(\theta, \lambda) + (\lambda + 1)F(\theta, \lambda)] , \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r^2} = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)F(\theta, \lambda)] , \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = r^{\lambda-1} [-\lambda F'(\theta, \lambda)] , \end{cases} \quad (1.47)$$

unde derivatele funcției  $F(\theta, \lambda)$  sunt în raport cu variabila  $\theta$ .

Condițiile la limită în tensiuni pe cele două muchii radiale libere nesolicitate, adică pentru  $\theta = \pm \varphi$ , sunt:

$$\begin{cases} \sigma_\theta(r, \varphi) = \sigma_\theta(r, -\varphi) = 0 & , \\ \tau_{r\theta}(r, \varphi) = \tau_{r\theta}(r, -\varphi) = 0 & , \end{cases} \quad (1.48)$$

de unde rezultă:

$$F(\varphi, \lambda) = F(-\varphi, \lambda) = F'(\varphi, \lambda) = F'(-\varphi, \lambda) = 0 \quad . \quad (1.49)$$

Aceste condiții la limită (1.49) conduc la următorul sistem de ecuații liniare și omogene:

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda - 1)\varphi & \cos(\lambda + 1)\varphi & 0 & 0 \\ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda - 1)\varphi & \sin(\lambda + 1)\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\lambda - 1)\varphi & \sin(\lambda + 1)\varphi \\ 0 & 0 & \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cos(\lambda - 1)\varphi & \cos(\lambda + 1)\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad . \quad (1.50)$$

Primele două ecuații corespund modului simetric de solicitare (modul I), iar ultimele două modului anti-simetric (modul II), constantele A și B fiind independente de constantele C și D. O soluție netrivială a sistemului există dacă și numai dacă determinantul sistemului este egal cu zero, ceea ce conduce la ecuațiile caracteristice:

$$\sin(2\lambda\varphi) \pm \lambda \sin(2\varphi) = 0 \quad , \quad (1.51a)$$

sau

$$\sin(\lambda q\pi) \pm \lambda \sin(q\pi) = 0 \quad , \quad (1.51b)$$

unde s-a notat  $q = (2\pi - 2\alpha)/\pi$ . Semnul + corespunde modului I, iar semnul - corespunde modului II; ecuațiile (1.51) determină valorile proprii  $\lambda$  în funcție de unghiul  $\varphi$  (respectiv  $\alpha$ ).

Câmpul tensiunilor la baza creștăturii, așa cum reiese din ecuațiile (1.47), este singular când  $\lambda - 1 < 0$ , adică  $\varphi > \pi/2$  pentru modul simetric I și  $\varphi > 128.7^\circ$  pentru modul anti-simetric II, Hills [2004]. Înlocuind valorile proprii în ecuațiile (1.50) se obține raportul  $A/B$  pentru modul I, respectiv  $C/D$  pentru modul II, și în final expresiile tensiunilor funcție de unghiul  $\theta$ , ca o combinație liniară a soluțiilor particulare.

Pentru modul I, dacă se reține doar termenul singular, cel obținut pentru cea mai mică valoare proprie  $\lambda$ , expresiile tensiunilor în regiunea de la vârful concentratorului ascuțit (Seweryn [1996]) sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left( \frac{3-\lambda}{1+\lambda} \cos(1+\lambda)\varphi \cos(1-\lambda)\theta + \cos(1-\lambda)\varphi \cos(1+\lambda)\theta \right), \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} (\cos(1+\lambda)\varphi \cos(1-\lambda)\theta - \cos(1-\lambda)\varphi \cos(1+\lambda)\theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cos(1+\lambda)\varphi \sin(1-\lambda)\theta - \cos(1-\lambda)\varphi \sin(1+\lambda)\theta \right), \end{aligned} \quad (1.52)$$

unde  $C_I = \cos(1 + \lambda)\varphi - \cos(1 - \lambda)\varphi$ , iar  $K_I^V$  este factorul de intensitate a tensiunii pentru concentratorul ascuțit:

$$K_I^V = (2\pi)^{1-\lambda} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_\theta(r, \theta = 0) \quad (1.53)$$

Termenul  $(\lambda - 1)$  este denumit ordinul singularității și se determină complet pentru o deschidere dată  $2\alpha$  a concentratorului, împreună cu funcția de unghi  $F_I(\theta, \lambda)$ , prin analiză asimptotică. Factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^V$  depinde de geometria globală și de modul de încărcare, determinându-se practic prin ajustarea soluției asimptotice la starea de tensiune locală, determinată în mod normal printr-o analiză cu elemente finite.

Într-un mod similar, Gross [1972] a definit factorul de intensitate a tensiunii pentru concentratorul ascuțit solicitat în modul I astfel:

$$K_I^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_\theta(r, \theta = 0) \quad (1.54)$$

termenul  $(2\pi)^{1-\lambda}$  fiind înlocuit de  $\sqrt{2\pi}$ ; cele două relații coincid doar pentru cazul fisurii ( $\varphi = \pi$ ).

#### 1.4.2. Soluția factorului de intensitate a tensiunii pentru concentratori nesingulari (rotunjiți la vârf)

Creager [1967] a arătat că pentru un concentrator adânc și ascuțit, a cărei rază la vârf  $\rho$  este mică, se poate descrie câmpul elastic al tensiunilor prin considerarea factorului de intensitate a tensiunii  $K$  într-o formă echivalentă celei utilizate pentru fisuri. Astfel, într-un sistem de coordonate polar  $(r, \theta)$  a cărei origine se află la distanța  $\rho/2$  în spatele vârfului concentratorului (fig. 1.14), pentru modul I relațiile care exprimă componentele tensiunilor sunt:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 & \text{ - pentru starea plană de tensiune } , \\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 & \text{ - pentru starea plană de deformatie. } \end{aligned} \quad (1.55b)$$

Cu alte cuvinte, câmpul tensiunilor la baza concentratorului este similar cu cel al unei fisuri, al cărei vârf este situat în punctul  $O$  unde factorul de intensitate a tensiunii este  $K$ . Diferența față de relațiile (1.40), care descriu câmpul tensiunilor elastice la vârfurile fisurii, este reprezentată de un singur termen adițional ce depinde doar de raza de racordare  $\rho$  la vârfurile concentratorului, neglijabil când raportul  $\rho/r$

este mic în comparație cu unitatea. Pentru punctele situate pe bisectoarea concentratorului, adică pentru  $\theta = 0$ , relațiile (1.55) devin:

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right) \quad , \quad \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right) \quad . \quad (1.56)$$

Astfel, din (1.56) se poate determina tensiunea  $\sigma_y$  maximă la baza concentratorului, prin înlocuirea  $r = \rho/2$  (fig. 1.14):

$$\sigma_{y \max} = \sigma_y(r = \rho/2) = \frac{2K}{\sqrt{\pi\rho}} \quad . \quad (1.57)$$

Glinka [1985a] a arătat că se poate scrie coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$  utilizând (1.57):

$$K_t = \frac{\sigma_{y \max}}{\sigma_n} = \frac{2K}{\sigma_n \sqrt{\pi\rho}} \quad . \quad (1.58)$$

de unde factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^\rho$  pentru concentratorii ascuțiți cu raza de racordare la vârful  $\rho$  mică, pentru modul I, se determină prin relația:

$$K = K_I^\rho = \frac{K_t \sigma_n \sqrt{\pi\rho}}{2} \quad . \quad (1.59)$$

Se observă că singularitatea câmpului tensiunilor dispăre în acest caz, iar la baza concentratorului tensiunea maximă este finită, chiar dacă la mică distanță de baza concentratorului câmpul tensiunilor este similar cu al unei fisuri.

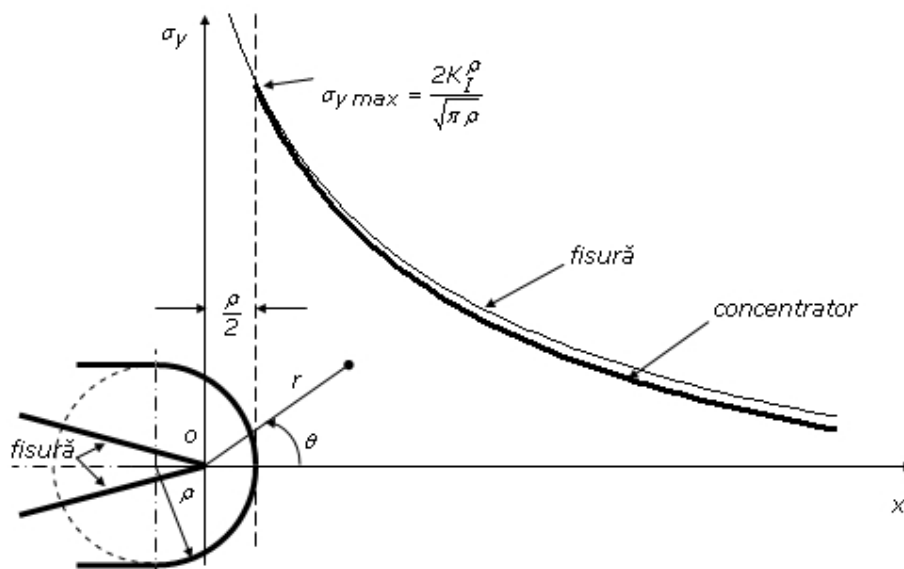


Fig. 1.14. Variația tensiunii normale  $\sigma_y$  la baza concentratorului după Creager

Se vorbește în acest caz despre o pseudo-singularitate în această regiune de la baza concentratorului, determinată de  $K_I^\rho$  și cu o dependență  $1/\sqrt{r}$ , Pluvinage [2003].

Înlocuind rezultatul (1.59) în expresiile tensiunilor (1.56), Glinka [1985a] a obținut relațiile

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left( \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right) , \\ \sigma_y = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left( \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right) . \end{cases} \quad (1.60)$$

sau cu  $r = x + \rho/2$ :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left( \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) , \\ \sigma_y = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left( \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) . \end{cases} \quad (1.60a)$$

Chiar dacă Creager a propus relațiile (1.55) pentru concentratorii adânci și ascuțiți (cu raza de racordare la vârf mică), cu o determinare exactă a coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$ , relațiile (1.60) se pot utiliza cu o bună aproximație și pentru concentratorii rotunjiți (creștături laterale semicirculare sau în formă de U, concentratori de tip gaură circulară).

În urma unor transformări simple, relațiile (1.60) permit exprimarea factorului de intensitate  $K_I^\rho$  în modul I la o distanță caracteristică  $X_C$ :

$$K_I^\rho = \sigma_y(X_C) \sqrt{\pi X_C} \frac{\left( 2 + \frac{\rho}{X_C} \right)^{\frac{3}{2}}}{2 \left( 1 + \frac{\rho}{X_C} \right)} . \quad (1.61)$$

unde  $X_C$  reprezintă o distanță caracteristică, al cărei ordin de mărime este dimensiunea grăunților, Boukharouba [1995].

Soluții pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii la concentratori sunt date în numeroase alte lucrări: Hasebe [1978], Nui [1994], Boukharouba [1995], Pluvinage [1998], Lazzarin [2006].

Chiar dacă tendința actuală este aceea de a descrie câmpul tensiunilor de la baza concentratorilor nesingulari prin factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^\rho$ , metodologia de determinare a acestuia diferă de la un autor la altul.

## 2. DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI TENSIUNILOR DIN ZONA CONCENTRATORILOR

### 2.1. Metode analitice și numerice

Soluția în tensiuni a problemei plane a teoriei elasticității se obține, în absența forțelor masice, prin integrarea sistemului format din ecuațiile diferențiale de echilibru și ecuația de compatibilitate:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

căruia i se adaugă condițiile pe graniță, Dobre [1980]. În anul 1862 astronomul englez G.B. Airy a arătat că problema poate fi simplificată dacă în locul celor trei funcții  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  se determină una singură  $U(x,y)$ , denumită *funcție de tensiune* (*funcție de tensiune de tip Airy*), cu ajutorul căreia se pot calcula prin diferențiere tensiunile:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

Introducând expresiile (2.2) în ecuația de compatibilitate se obține:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (2.3)$$

Astfel, soluția în tensiuni a problemei plane, în absența forțelor masice, se reduce la aflarea soluției ecuației biarmonice (2.3) care să satisfacă și condițiile pe graniță.

#### 2.1.1. Metode analitice de rezolvare a problemelor elasticității plane

Metodele analitice utilizate mai frecvent în rezolvarea problemelor de stare plană sunt: metoda seriilor de puteri, metoda transformărilor integrale, metoda funcțiilor de variabilă complexă, metoda Galerkin etc.

**Metoda seriilor de puteri.** Pentru problemele de stare plană ale teoriei elasticității, formularea în tensiuni utilizează deseori funcția de tensiune a lui Airy  $U(x,y)$ . Astfel, sistemul de ecuații diferențiale care descrie câmpul tensiunilor se

reduce la ecuația diferențială biarmonică (2.3). Soluția acestei ecuații se consideră de forma unei serii de puteri în variabilele  $x$  și  $y$

$$U(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j \quad , \quad (2.4)$$

ai cărei coeficienți  $a_{ij}$  se determină aplicând condițiile la limită, Sadd [2004].

**Metoda transformărilor integrale.** În elasticitatea liniară pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale se utilizează frecvent un procedeu matematic numit metoda transformărilor integrale. Aplicând sistemului de ecuații diferențiale o transformare integrală liniară, se obțin forme simplificate pentru ecuațiile diferențiale. Soluția acestor ecuații prin aplicarea transformatei integrale inverse conduce la aflarea funcțiilor necunoscute originale, ceea ce reprezintă soluția problemei date. Cele mai cunoscute transformări integrale sunt Laplace, Fourier, Hankel, Hilbert.

**Metoda funcțiilor de variabilă complexă.** În literatură se arată că teoria funcțiilor armonice este strâns legată de teoria funcțiilor analitice de variabilă complexă. Trecerea din domeniul real în domeniul complex are marele avantaj că poate să soluționeze problemele cu singularități (fisuri, concentratori de tensiune singulari). Problema a fost începută de Goursat în 1893, a primit o soluție interesantă în 1903 dată de Faylon, dezvoltată de Kolosov [1909] și în sfârșit adusă sub forma unei teorii complete de către Muskhelishvili [1953]. De aceea, în literatură se vorbește despre metoda Kolosov-Muskhelishvili.

Metoda utilizează expresia generală în complex a funcției biarmonice  $U(x,y)$

$$2U(x,y) = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}) \quad (2.5)$$

unde  $\varphi(z)$  și  $\psi(z)$  sunt două funcții analitice de variabilă complexă,  $\bar{\varphi}(\bar{z})$  și  $\bar{\psi}(\bar{z})$  conjugatele lor, iar  $z = x + iy$  este variabila complexă și  $\bar{z} = x - iy$  conjugata. Deci, rezolvarea în tensiuni a problemei plane necesită cunoașterea funcției Airy, definită prin funcțiile de variabilă complexă  $\varphi(z)$  și  $\psi(z)$ , regulate în domeniul  $D$  cupat de corpul elastic, evident satisfăcând condițiile la limită pe granița domeniului. Tensiunile și deplasările se exprimă prin  $\varphi(z)$  și  $\psi(z)$  cu formulele lui Kolosov-Muskhelishvili

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2 \left[ \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} \left[ \varphi'(z) \right] \\ \sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2 \left[ z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}''(\bar{z}) \right] \quad , \end{cases} \quad (2.6)$$

și

$$2G(u + iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) \quad , \quad (2.7)$$

cu  $G$  modulul de elasticitate transversal,  $\nu$  coeficientul lui Poisson.

Dificultățile întâmpinate în obținerea unei soluții analitice exacte au condus la dezvoltarea unor metode aproximative de calcul.

**Metoda Galerkin.** Metoda Galerkin este o metodă aproximativă de tip proiectiv, una dintre cele mai răspândite metode de rezolvare a ecuațiilor diferențiale din teoria elasticității. Ea presupune alegerea unei soluții de forma

$$U(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x,y), \text{ unde } \varphi_i(x,y) \text{ sunt funcții de un anumit tip}$$

convenabil alese, iar funcția  $\varphi_0(x,y)$  satisface condiția  $B(U(x,y)) = 0$  pe frontiera domeniului  $D$  ( $B$  este un operator diferențial). Se impun condițiile ca soluția să verifice ecuația de tipul  $L(x,y) = \Delta \Delta U(x,y)$  în domeniul  $D$  și  $\langle L(U(x,y)), \varphi_i(x,y) \rangle = 0$ , pentru  $i = \overline{1, n}$  ( $L$  este un operator diferențial, iar  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  este operatorul produs scalar). Astfel, se obține un sistem algebric de  $n$  ecuații în necunoscutele  $a_i$ , a cărui rezolvare permite determinarea soluției  $U(x,y)$ .

Mai pot fi amintite și alte metode analitice de soluționare a problemei plane a teoriei elasticității: metoda seriilor Fourier, metoda funcției lui Green, metoda colocației, metoda homotopiei, metoda Rayleigh-Ritz, metoda iterației.

### 2.1.2. Metode numerice

Cea mai mare parte din problemele formulate de teoria elasticității nu se pot rezolva pe cale analitică. De aceea problemele de interes practic, formulate în general pe domenii cu o geometrie complicată, pe componente structurale cu concentratori de tensiune se pot rezolva doar aproximativ cu ajutorul metodelor numerice. Formidabila dezvoltare a calculatoarelor, a vitezei și posibilităților lor de calcul a făcut ca opinia defavorabilă unei soluții numerice aproximative să se schimbe deoarece, pe de o parte, erorile pot fi reduse până la valori ne semnificative, iar pe de altă parte, pachetele software profesionale fac abordabilă orice problemă practică. Metodele numerice cele mai utilizate sunt: metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite (MEF) și metoda elementelor de frontieră (fig. 2.1).

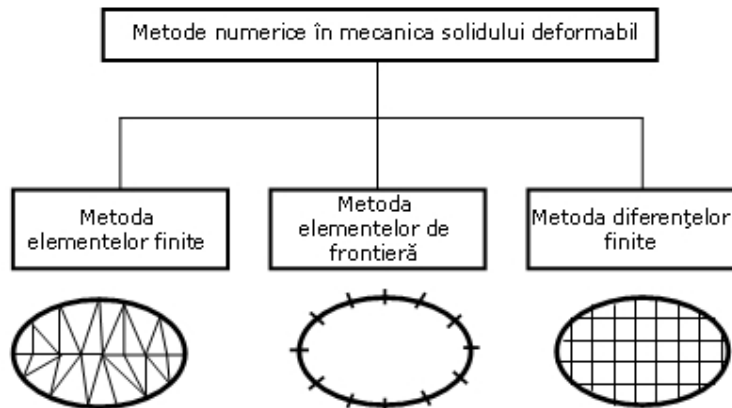


Fig. 2.1. Metode numerice utilizate în mecanica solidului deformabil (Becker [2004])

**Metoda diferențelor finite**, denumită și *metoda rețelelor*, bazată pe ideea înlocuirii derivatelor prin diferențe finite (ceea ce înseamnă de fapt utilizarea unor serii Taylor trunchiate) este cea mai simplă și cea mai veche metodă de rezolvare numerică aproximativă a ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale. Precizia de aproximare a soluției, reprezentată prin valorile sale în nodurile unei rețele de



discretizare a domeniului, depinde de forma și pasul rețelei, de expresia de discretizare a derivatelor parțiale prin diferențe finite, de modul de aproximare a condițiilor la limită și de procedeele de calcul utilizate. Detalii despre această metodă se găsesc în lucrările lui Gordunov [1977], Boleanțu [1978], Faur [1998].

**Metoda elementelor finite** este în esență un procedeu de rezolvare aproximativă a problemelor de câmp, adică de determinare într-un domeniu dat a uneia sau mai multor funcții necunoscute caracteristice naturii fizice a câmpului cercetat (de exemplu, câmpul tensiunilor, deformațiilor și deplasărilor în teoria elasticității) atunci când nu se pot rezolva analitic ecuațiile diferențiale și/sau integro-diferențiale care descriu fenomenul. Cele mai celebre monografii dedicate metodei elementelor finite sunt cele ale lui Zienkiewicz [1977], Bathe [1976] și Rao [2005], dar există și excelente monografii în literatura științifică românească, Pascariu [1985], Blumenfeld [1995], Faur [2002].

Formularea metodei elementelor finite pentru rezolvarea unei probleme plane presupune parcurgerea următoarelor etape, Faur [2002]:

1. Definirea elementului finit și a funcțiilor de formă, cu alegerea funcțiilor de interpolare (liniare, pătratice sau de grad superior) pentru deplasări;
2. Satisfacerea legilor de material (a ecuațiilor constitutive). Este necesară în această etapă exprimarea derivatelor funcțiilor de deplasare pentru a obține deformațiile specifice și apoi utilizarea relațiilor tensiuni-deformații specifice.
3. Exprimarea matricei de rigiditate a elementului finit. Ecuația elementală se obține utilizând fie metoda directă și o abordare energetică:

$$[k]_{element} [u]_{element} = [F]_{ext} \quad (2.8)$$

4. Asamblarea matricei de rigiditate globală. Matricea de rigiditate globală se obține prin asamblarea tuturor ecuațiilor elementale, rezultând ecuațiile finale:

$$[K]_{global} [u]_{global} = [F]_{global} \quad (2.9)$$

5. Aplicarea condițiilor pe contur în deplasări și sarcini. Această etapă se constituie în aplicarea corectă a condițiilor prescrise în deplasări și sarcini pe conturul structurii.
6. Soluționarea sistemului de ecuații algebrice liniare și obținerea deplasărilor nodale (soluțiile primare);
7. Postprocesare. Necunoscutele secundare se exprimă din deplasările calculate pentru fiecare element finit (deformațiile specifice) și din ecuațiile constitutive (tensiunile).

Rezolvarea cu acuratețe a problemelor legate de prezența concentratorilor de tensiune în componentele structurale prin utilizarea MEF, impune respectarea unui set de reguli practice:

- o discretizare progresivă care să respecte forma elementelor (apropiată de cea triunghiulară, pătratică sau cubică) și să evite modificările bruște de dimensiune a elementelor adiacente;
- utilizarea unor elemente finite pătratice sau de ordin superior pentru simularea unui contur curbiliniu;
- împiedicarea mișcărilor de solid rigid și utilizarea condițiilor de simetrie pentru a reduce dimensiunea problemei;
- utilizarea unor elemente finite compatibile în zonele de interfață și conexiunea corectă între nodurile situate la extremități.

**Metoda elementelor de frontieră** deși istoric a apărut înaintea metodei elementelor finite, bazele matematice fiind formulate încă de la apariția teoriei ecuațiilor integrale Voltera (1896) și Fredholm (1902), dezvoltarea și mai ales

aplicarea metodei elementelor de frontieră este de dată mult mai recentă, începând cu anul 1970.

În esență și aceasta este o metodă de rezolvare aproximativă a problemelor de limită care se bazează pe transformarea ecuației diferențiale de domeniu într-o ecuație integrală pe frontiera domeniului, utilizând ca *funcție pondere* o soluție a ecuației omogene asociate sau o soluție fundamentală a ecuației date. Aceasta este o dificultate intrinsecă a metodei care restrânge sfera de aplicabilitate la operatori diferențiali cu coeficienți constanți. Ecuația integrală de frontieră astfel obținută se rezolvă de obicei numeric, ceea ce necesită discretizarea doar a frontierei domeniului, reducând în felul acesta cu o unitate dimensiunea problemei și micșorând numărul ecuațiilor sistemului algebric rezultat, numărul datelor de intrare și de ieșire. Cea mai cunoscută tratare a metodei elementelor de frontieră se găsește în lucrările lui Brebbia [1980], [1989].

### 2.1.3. Soluții analitice pentru determinarea tensiunilor din zona concentratorilor laterali de formă V

Pentru evaluarea influenței geometriei concentratorilor de tensiune asupra rezistenței componentelor structurale, este utilă cunoașterea distribuției tensiunilor din zona concentratorilor, nu doar a valorilor maxime ale acestora.

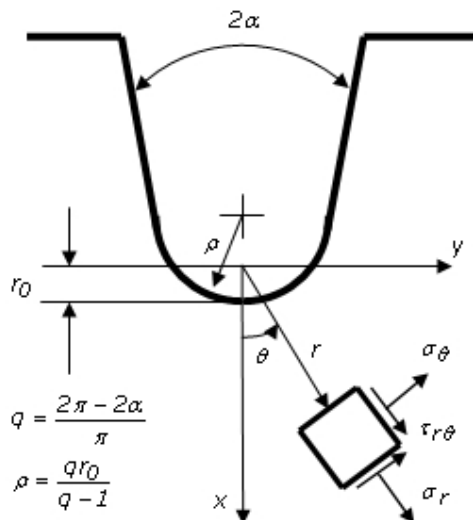


Fig. 2.2. Geometria concentratorului de tensiune în abordarea lui Filippi [2002]

Adoptând metoda funcțiilor de variabilă complexă (Kolossovo-Muskhelishvili) pentru determinarea distribuției tensiunilor în zona unui concentrator de tip creștătură (fig. 2.2), Filippi [2002] propune două funcții analitice de forma:

$$\varphi(z) = az^\lambda + dz^\mu, \quad \psi(z) = bz^\lambda + cz^\mu \quad (2.10)$$

unde coeficienții  $a, b, c, d$  sunt complecși, exponenții  $\lambda, \mu$  sunt reali,  $\lambda > 0$  și  $\lambda > \mu$ . Pentru impunerea condițiilor la limită, Filippi utilizează un sistem auxiliar de coordonate curbilinii  $u$  și  $v$  (fig. 2.3), cu relația de transformare a coordonatelor:

$$x + iy = re^{i\theta} = z = w^q = (u + iv)^q \quad (2.11)$$

unde coeficientul real  $q$  primește valori între 1 (muchie netedă, fără concentrator) și 2 (fisură). Curba definită prin condiția  $u = 0$  în sistemul de coordonate curbilini descrie în  $(x, y)$  un unghi ascuțit la vârf egal cu  $2\alpha$

$$2\alpha = \pi(2 - q) \quad , \quad (2.12)$$

iar curba  $u = u_0$ , corespunzătoare flancurilor libere ale concentratorului, prezintă la vârf o rază de curbură  $\rho$  (la nivelul intersecției cu axa  $x$ , unde  $r_0 = u_0^q$ ):

$$\rho = \frac{qu_0^q}{q-1} = \frac{qr_0}{q-1} \quad . \quad (2.13)$$

Deoarece flancurile creștăturii sunt libere de sarcini, condițiile la limită impuse sunt:

$$(\sigma_u)_{u=u_0} = 0, \quad (\tau_{uv})_{u=u_0} = 0 \quad . \quad (2.14)$$

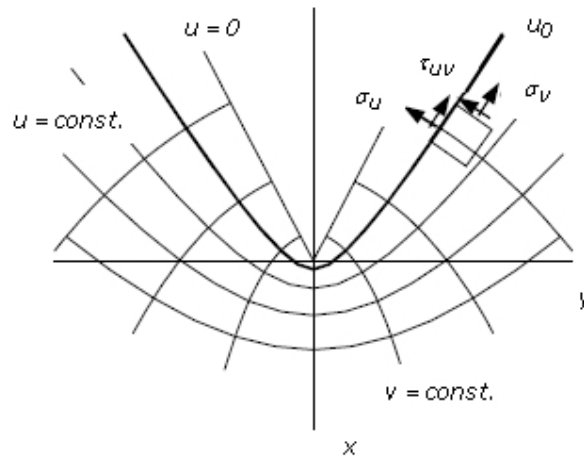


Fig. 2.3. Sistemul auxiliar de coordonate curbilini pentru impunerea condițiilor la limită

Din cauza numărului redus de parametri ai funcțiilor de tensiune alese, aceste condiții nu pot fi satisfăcute în întregime de-a lungul flancurilor libere ale creștăturii. Astfel, Filippi le simplifică considerând că (2.14) trebuie satisfăcute suficient de departe de zona de la baza concentratorului unde termenii de exponent  $\mu$  sunt lipsiți de sens, și în plus câmpul tensiunilor trebuie să fie descris cu exactitate în apropierea concentratorului (iar de aici, primii doi termeni ai dezvoltării în serie de-a lungul flancurilor, asociați tensiunilor  $\sigma_u$  și  $\tau_{uv}$ , trebuie să fie egali cu zero). De asemenea, Filippi a impus ca tensiunile de întindere să fie nule la distanță de vârf creștăturii, pentru componentele de exponent  $\mu$ , rezultând în final:

$$\begin{aligned}
(\sigma_u)_{u=u_0} = (\sigma_r)_{r=r_0} = 0, \quad (\tau_{uv})_{u=u_0} = (\tau_{r\theta})_{r=r_0} = 0, \\
\left(\frac{\partial \sigma_u}{\partial v}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - \frac{2}{q} \tau_{r\theta}\right)_{r=r_0} = 0, \\
\left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{q} \sigma_\theta\right)_{r=r_0} = 0, \\
(\sigma_u)_{u=u_0} + (\sigma_u)_{u=u_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta) + \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta) = 0, \\
(\tau_{uv})_{u=u_0} - (\tau_{uv})_{u=u_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Rezolvarea în detaliu a problemei se găsește în lucrarea lui Filippi [2002], pentru modul I de solicitare, tensiunile în zona concentratorului fiind date de relațiile:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \lambda r^{\lambda-1} a \begin{Bmatrix} (1+\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (3-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (1-\lambda)\sin(1-\lambda)\theta \end{Bmatrix} + \chi_b(1-\lambda) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda)\theta \\ -\cos(1+\lambda)\theta \\ \sin(1+\lambda)\theta \end{Bmatrix} \\
+ \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-\lambda} \left[ \chi_d \begin{Bmatrix} (1+\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (3-\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (1-\mu)\sin(1-\mu)\theta \end{Bmatrix} + \chi_c \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu)\theta \\ -\cos(1+\mu)\theta \\ \sin(1+\mu)\theta \end{Bmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

unde  $\lambda$  este prima valoare proprie (dominantă pentru starea de tensiune din zona concentratorului) a ecuației:

$$\sin(\lambda q\pi) + \lambda \sin(q\pi) = 0. \tag{2.17}$$

Cealți coeficienți din relațiile (2.16) se determină după cum urmează

$$\begin{aligned}
\chi_b = -\frac{\sin[(1-\lambda)q\pi/2]}{\sin[(1+\lambda)q\pi/2]}, \quad \chi_d = \left[\frac{1-q(1+\mu)}{q}\right][3-\lambda-\chi_b(1-\lambda)]-\varepsilon, \\
\chi_c = \left[(1-\mu)^2 - \frac{1}{q}(1+\mu)\right][(3-\lambda)-\chi_b(1-\lambda)]-(3-\mu)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

unde  $\varepsilon$  este dat de relația

$$\varepsilon = (1-\lambda)^2 + \chi_b(1-\lambda^2) - \frac{1}{q}(1+\lambda) - \frac{1}{q}\chi_b(1-\lambda), \tag{2.19}$$

iar exponentul  $\mu$  este soluția ecuației:

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[\frac{1-q(1+\mu)}{q}\right][3-\lambda-\chi_b(1-\lambda)]-\varepsilon \right\} (1+\mu) \cos\left[(1-\mu)q\frac{\pi}{2}\right] + \\
\left\{ \left[(1-\mu)^2 - \frac{1+\mu}{q}\right][3-\lambda-\chi_b(1-\lambda)]-(3-\mu)\varepsilon \right\} \cos\left[(1+\mu)q\frac{\pi}{2}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Din relațiile (2.16) se observă că tensiunile din zona concentratorului sunt determinate cu excepția constantei  $a$ , care pentru modul I de solicitare care poate fi exprimată în funcție de tensiunea maximă de la baza concentratorului:

$$a = \frac{\sigma_{max}}{\lambda r_0^{\lambda-1} \left\{ 1 + \lambda + \chi_b(1-\lambda) + \left[ (1+\mu) \chi_d + \chi_c \right] \left[ \frac{q}{4(q-1)} \right] \right\}} \quad (2.21)$$

După cum demonstrează Filippi [2002], soluția (2.16) este de mare generalitate. Pentru un concentrator de tensiune singular  $\rho = 0$  aceasta este în concordanță cu soluția lui Williams [1952]. Dacă deschiderea unghiulară a concentratorului  $2\alpha = 0$ , atunci soluția (2.16) se dovedește a fi exact soluția dată de Creager [1967]. În cazul  $\rho = 0$  și  $2\alpha = 0$  câmpul tensiunilor în zona din vecinătatea concentratorului este practic identic cu soluția lui Irwin [1957].

În continuarea, se verifică acuratețea soluției lui Filippi [2002] prin comparație cu rezultatele unei analize cu elemente finite și cu o altă soluție frecvent citată în literatură, Glinka [1985a] (în fapt o reformulare a soluției stabilită de Creager [1967]). Analiza cu elemente finite s-a rulat cu pachetul software *CosmosM 2.9*, cu  $E = 73000 [MPa]$  și  $\nu = 0.33$  (pentru aliajul de aluminiu 2024-T3). Se consideră în acest scop geometria din fig. 2.4 a concentratorului de tip creștătură laterală simetrică în V cu deschiderea unghiulară  $2\alpha = 90^\circ$ , adâncimea  $a = 3 [mm]$  și două valori ale razei de racordare la vârful  $\rho = 0.2 ; 0.5 [mm]$  (lățimea plăcii  $H = 20 [mm]$  și grosimea  $t = 3.17 [mm]$ ).

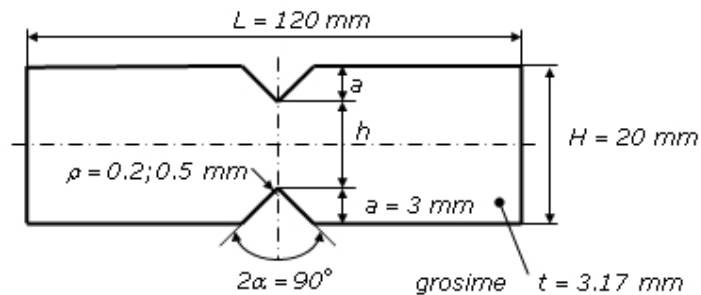


Fig. 2.4. Concentrator de tip creștătură laterală simetrică în V

Valorile coeficienților ce intervin în expresiile (2.16), în modul I de solicitare, determinați pentru această geometrie sunt date în tab.2.1.

Tabel 2.1

$2\alpha$	$\rho$	$\lambda$	$\mu$	$\chi_b$	$\chi_c$	$\chi_d$	$a$
$\pi/2$	0.2	0.54448	-0.345	1.84136	2.506	0.105	0.124
$\pi/2$	0.5	0.54448	-0.345	1.84136	2.506	0.105	0.188

Distribuția tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  cu distanța de la vârful concentratorului (de-a lungul ligamentului,  $\theta = 0$ ) este ilustrată în fig. 2.5 în axe dublu-logaritmice, pentru cele două valori ale razei  $\rho$  de la vârful concentratorului. Se observă o bună concordanță între rezultatele analizei cu elemente finite și soluția

lui Filippi până la nivelul intersecției distribuției tensiunilor circumferențiale  $\sigma_\theta$  cu linia tensiunii nominale nete  $\sigma_{net}$ , nivel la care eroarea relativă este de 3% pentru  $\rho = 0.5 [mm]$  și respectiv 7% pentru  $\rho = 0.2 [mm]$ . Cu cât este mai mare diferența dintre tensiunea maximă  $\sigma_{max}$  și cea netă  $\sigma_{net}$ , cu atât este și domeniul de valabilitate al soluției lui Filippi [2002] mai larg:  $(r - r_0) = 2.6\rho$  pentru  $\rho = 0.5 [mm]$ , respectiv  $(r - r_0) = 5.9\rho$  pentru  $\rho = 0.2 [mm]$ . De asemenea, o foarte bună concordanță se remarcă și între cele două soluții, Filippi [2002] și Glinka [1985a].

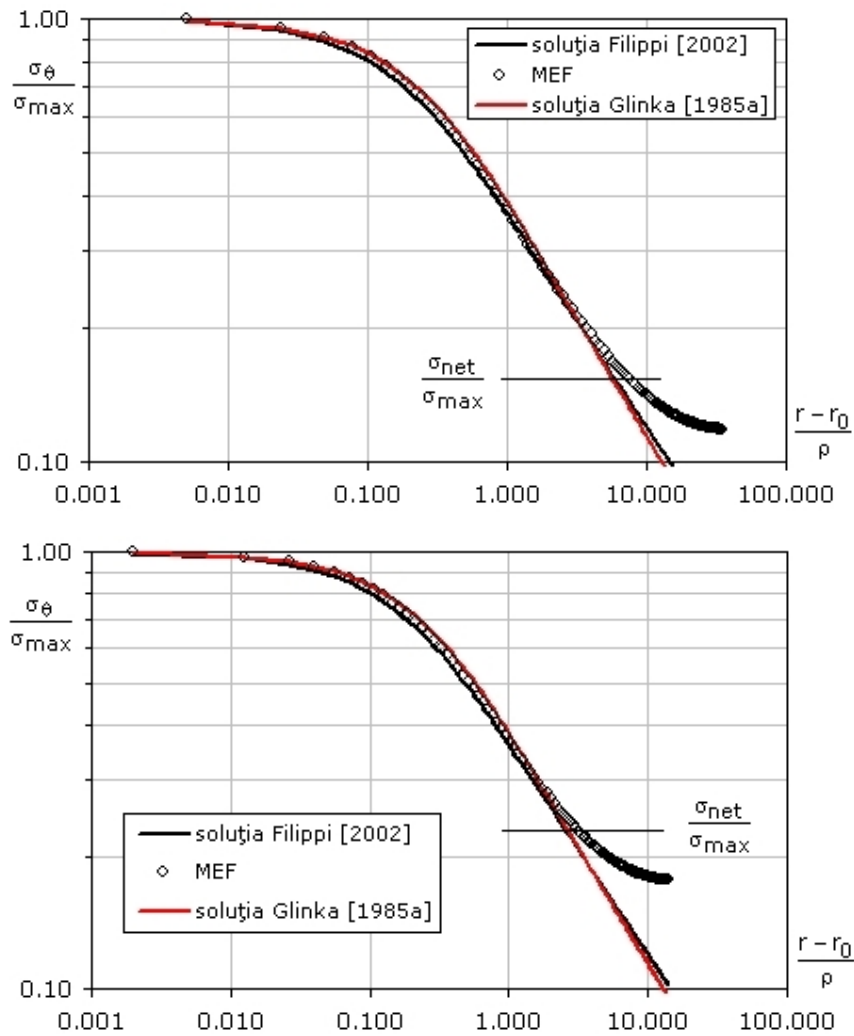


Fig. 2.5. Distribuția tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  de-a lungul ligamentului pentru  $\rho = 0.2 [mm]$  (sus) și  $\rho = 0.5 [mm]$  (jos);

Acuratețea soluției lui Filippi [2002] este evaluată și în afara axei de simetrie pentru raza la vârf  $\rho = 0.5[mm]$  și  $r = 0.665\rho; 1.33\rho$ , (fig. 2.6).

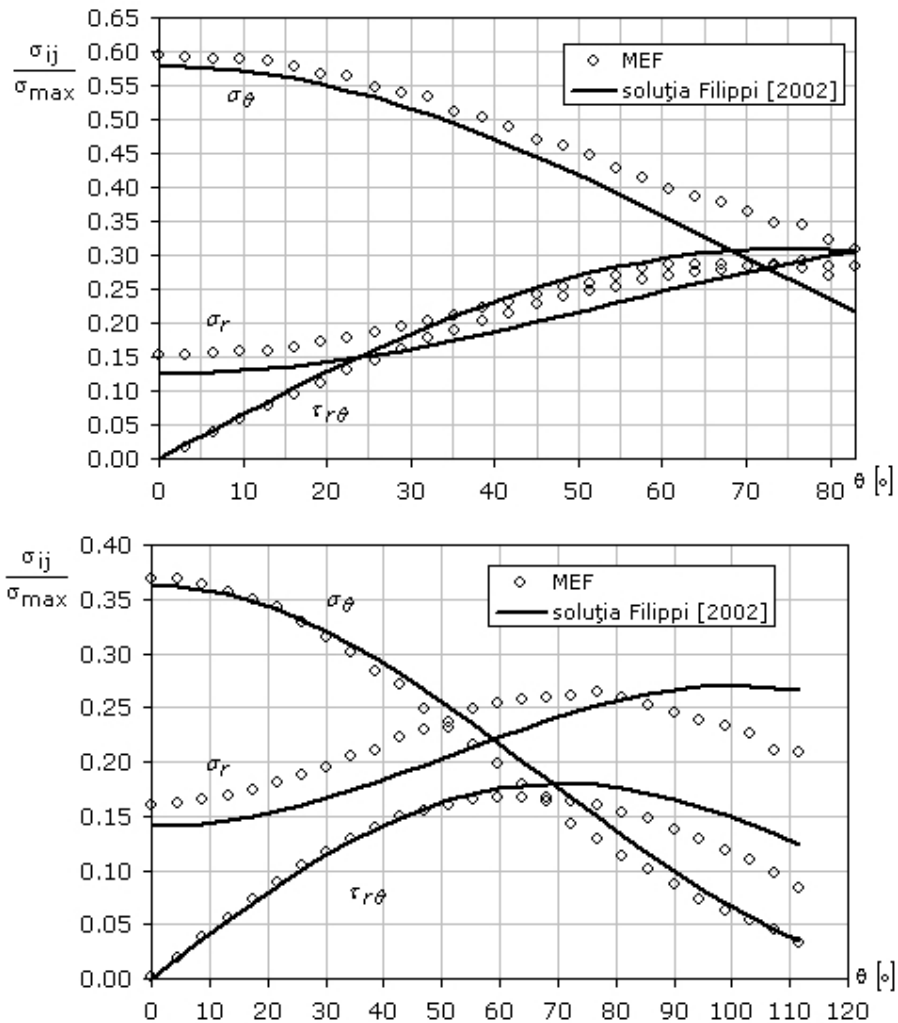


Fig. 2.6. Distribuția tensiunilor  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  și  $\tau_{r\theta}$  pentru  $2\alpha = \pi/2$ ,  $\rho = 2[mm]$  și la distanța  $r = 0.665\rho$  (sus), respectiv  $r = 1.33\rho$  (jos)

Acuratețea soluției este bună pentru aproape întreaga zonă de interes, cel puțin pentru  $\sigma_\theta$ ; ea scade însă la apropierea de flancurile concentratorului, cu creșterea unghiului  $\theta$ .

La aprecierea acestor rezultate însă, trebuie avută în vedere lățimea  $H$  finită a plăcii ( $h/2a = 2.33$ ); este de așteptat ca precizia rezultatelor să se îmbunătățească cu creșterea raportului  $h/2a$ .

Un alt parametru important, de luat în considerare la evaluarea soluției propuse de Filippi, este deschiderea unghiulară a concentratorului  $2\alpha$ , cunoscută fiind variabilitatea lui  $\lambda$  cu acest parametru. Verificările făcute de Filippi [2002] au demonstrat că precizia rezultatelor scade la descreșterea deschiderii unghiulare  $2\alpha$ .

## 2.2. Determinarea experimentală a tensiunilor și deformațiilor specifice din zona concentratorilor

Metodele experimentale își dovedesc utilitatea mai ales la rezolvarea problemelor pentru care nu este disponibilă o soluție analitică pentru câmpul tensiunilor din zona concentratorilor. În practica actuală, se utilizează frecvent următoarele metode experimentale: tensometria electrică rezistivă, fotoelasticimetria, termoelasticimetria, corelarea de imagini digitale.

### 2.2.1. Tensometria electrică rezistivă

Tensometria electrică rezistivă este o metodă de măsurare pe cale electrică a mărimilor neelectrice, prin intermediul unor elemente numite traductori electrici rezistivi (sau mărci tensometrice). Metoda se bazează în principiu pe determinarea variației deformației specifice  $\varepsilon$  prin măsurarea variației rezistenței electrice  $\Delta R$  a elementului sensibil al traductorului:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \varepsilon \quad (2.22)$$

unde  $k$  este constanta traductorului (*coeficient de tensosensibilitate*). Măsurarea acestei variații a rezistenței electrice impune utilizarea unui sistem alcătuit din mai multe blocuri, a cărui schemă este prezentată în fig. 2.7, Tripa [1994].

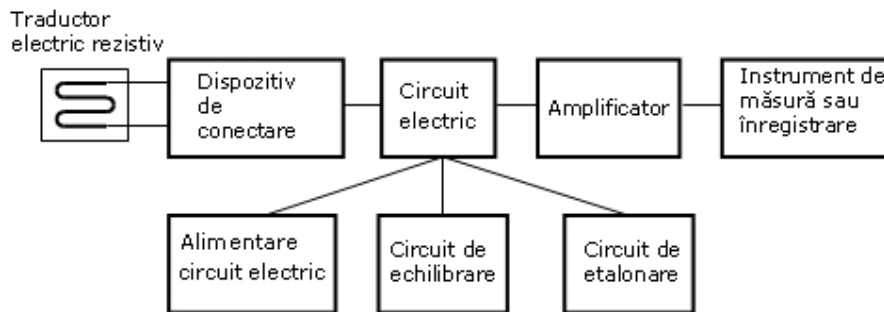


Fig. 2.7. Schema de principiu pentru măsurătorile tensometrice, Tripa [1994]

Traductorul electric tensometric se conectează într-un circuit electric, cel mai frecvent o punte Wheatstone sau un circuit potențiometric. Semnalul dat de circuitul electric este amplificat și în final înregistrat.

Exemplele de utilizare a tensometriei electrice rezistive la rezolvarea diferitelor probleme legate de fenomenul de concentrare a tensiunilor sunt



numeroase. Se amintesc aici doar câteva dintre acestea: determinarea experimentală a coeficienților de concentrare a tensiunilor  $K_t$  și  $K_\sigma$  pentru concentratori de tipul racordare și creștătură laterală, Hardrath [1951]; determinarea experimentală pentru modul mixt I/II a factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  la concentratori de tip creștătură laterală, Kondo [2001], sau fisură, Dally [1986]; determinarea răspunsului unei mezo-structuri dentare, Antonie [2009].

### 2.2.2. Metoda fotoelasticimetricii

Metoda fotoelastică se bazează pe observația fundamentală că starea de tensiune în cazul unei probleme plane de solicitare nu depinde de constantele elastice de material (vezi ecuațiile (2.1)). Pornind de la această observație, s-a imaginat o metodă experimentală pentru studiul stării de tensiune bazată pe proprietatea unor materiale transparente și izotrope, numite *optic active*, de a deveni birefringente când sunt solicitate mecanic; aceste materiale fac parte din clasa rășinilor epoxidice: araldit, dinox, rompoxid, plexiglas etc.

Studiul se realizează asupra unui model din material transparent care reproduce la scară, atât ca geometrie, cât și ca solicitare, componenta structurală analizată. Schema de principiu a unui *polariscop* prin transmisie este ilustrată în fig. 2.8; planele de polarizare a luminii, ale polarizorului și analizorului, perpendiculare unul pe altul, formează *secțiunile principale ale polariscopului*. Pentru analiză se utilizează atât lumina albă, cât și cea monocromatică.

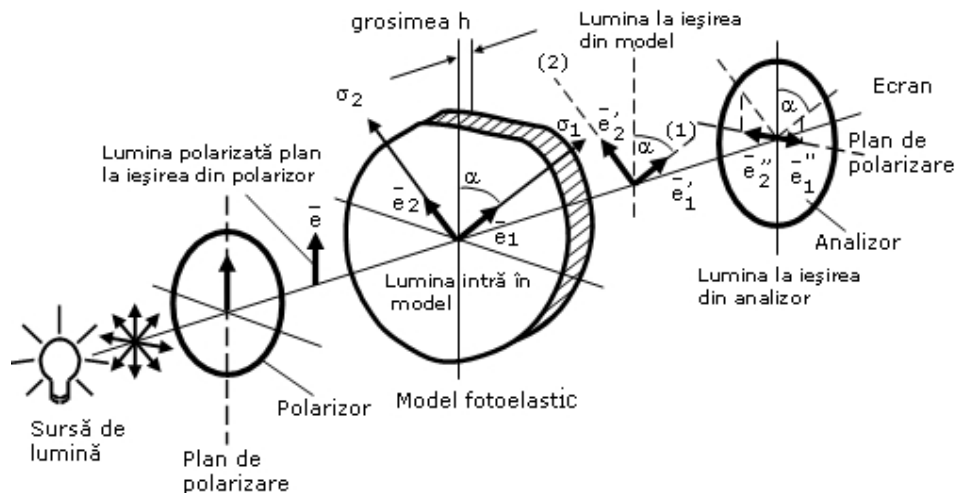


Fig. 2.8. Schema de principiu pentru măsurătorile fotoelastice

Presupunând o componentă structurală de tip placă solicitată în planul său (fig. 2.8), în fiecare punct direcțiile tensiunilor principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  sunt în acel punct și axe de birefringență (legea calitativă a fotoelastității), indicii de refracție  $n_1$  și  $n_2$  fiind diferiți pe aceste direcții. O rază de lumină polarizată într-un plan cu ajutorul unui polarizor, la trecerea printr-un punct al plăcii se descompune în două raze ale

căror plane de vibrație cuprind direcțiile principale 1 și 2. Vitezele celor două raze la parcurgerea plăcii sunt diferite și proporționale cu tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ . Cum drumurile optice sunt diferite pentru cele două raze, diferența de drum  $\delta$  este (Rusu [1970]):

$$\delta = C_\lambda (\sigma_1 - \sigma_2) h = (n_1 - n_2) h \quad (2.23)$$

unde  $C_\lambda$  este o constantă a cărei valoare depinde de proprietățile optice ale materialului și de lungimea de undă a luminii utilizate. După cum se observă din relația (2.23), diferența indicilor de refracție pe direcțiile principale este proporțională cu diferența tensiunilor normale principale (legea cantitativă a fotoelasticității). La trecerea celor două raze de lumină prin analizor, vibrația lor este readusă în același plan, dar diferența de drum optic după parcurgerea plăcii solicitate face ca cele două raze să se găsească în diferență de fază, acest fapt având ca efect apariția fenomenului de interferență. Pentru punctele plăcii solicitate ale căror direcții principale (1) și (2) sunt cuprinse în secțiunile principale ale polariscopului, pe ecran se formează o familie de franje întunecate denumite linii *izocline* (izoclinele reprezintă așadar locul geometric al punctelor având aceleași direcții principale). Rotind simultan polarizorul și analizorul astfel încât planele lor de polarizare să rămână perpendiculare, se obțin izocline cu diferiți parametri unghiulari, cu care se determină direcțiile tensiunilor perpendiculare în orice punct de pe suprafața plăcii. În lumină monocromatică, alături de liniile izocline, se obțin o altă familie de benzi întunecate numite *izocromate*, care reprezintă locul geometric al punctelor în care diferența tensiunilor principale ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) este constantă. Folosind această familie de franje se determină valorile tensiunilor principale, din (2.23):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n f_\sigma}{h} \quad , \quad (2.24)$$

unde  $n$  este ordinul izocromatei,  $f_\sigma$  constanta fotoelastică a materialului (valoric egală cu diferența tensiunilor principale pentru izocromata de ordinul 1 pentru o placă de grosime unitară), iar  $h$  grosimea plăcii. Se observă că în cazul polariscopului cu lumină polarizată plan, cele două familii de franje se suprapun. Uneori acestea sunt greu de identificat, și în asemenea cazuri, în locul luminii monocromatice se folosește lumina albă, care face ca izocromatele să apară colorate.

Pentru stabilirea cât mai exactă a traseului izocromatelor în scopul determinării diferențelor ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ), franjele izocline sunt eliminate prin introducerea în plus a două componente optice numite *lame sfert de undă*, realizate din folii subțiri transparente dintr-un material cu birefrință permanentă, ale căror axe optice sunt înclinate după bisectoarele secțiunilor principale ale polariscopului. Efectul de birefrință permanentă se obține printr-o pretensionare controlată astfel încât să rezulte o diferență de drum de  $\lambda/4$ .

Aplicațiile fotoelasticității la rezolvarea problemelor legate de prezența concentratorilor de tensiune în componentele structurale sunt variate: determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor pentru plăci cu găuri circulare multiple, Peterson [1974], Dobre [2003]; determinarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri care pornește dintr-un orificiu circular, Dumitru [2001] și a factorilor de intensitate a tensiunilor pentru modul mixt de solicitare, Gdoutos [1978].

### 2.2.3. Metoda termoelasticimetriei

Metoda termoelasticimetriei se bazează pe efectul termoelastic: în condiții adiabatică și reversibile o structură supusă unei solicitări variabile prezintă o variație de temperatură, care este proporțională cu variația sumei tensiunilor principale, Thomson [1853]. Relația dintre variația de temperatură  $\Delta T$  și variația sumei tensiunilor principale  $\Delta\sigma$  este liniară și independentă de frecvența de solicitare:

$$\Delta T = -\frac{\alpha T}{\rho C} \Delta\sigma \quad (2.25)$$

unde  $\alpha$  reprezintă coeficientul de dilatare termică,  $T$  este temperatura absolută,  $\rho$  este densitatea, iar  $C$  căldura specifică. Aceste variații de temperatură, uzual de ordinul  $0.05^\circ C$ , pot fi măsurate cu ajutorul unui detector infra-roșu. Semnalul  $S$  înregistrat de detector este proporțional cu variația sumei tensiunilor principale:

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = AS \quad (2.26)$$

unde  $A$  reprezintă o constantă de calibrare.

Analiza termoelastică a tensiunilor s-a dezvoltat în ultimele două decenii ca metodă de determinare a câmpului de tensiuni din vecinătatea fisurilor și a concentratorilor de tensiune din componente solicitate variabil în timp.

Schema bloc a unui sistem pentru realizarea măsurătorilor termoelastice este prezentată în fig. 2.9. Variațiile de temperatură de pe suprafața epruvetei produse de solicitarea variabilă sunt înregistrate cu ajutorul detectorului de infra-roșu și transformate în semnal electric.

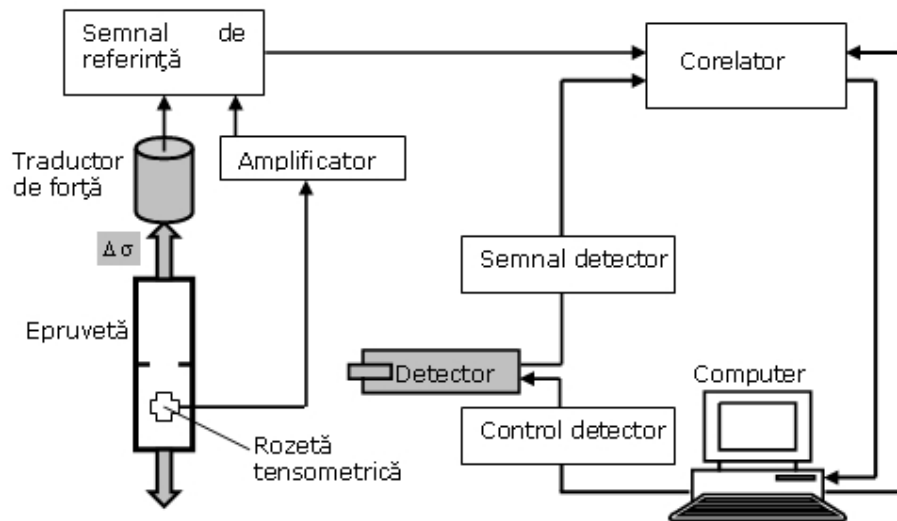


Fig. 2.9. Schema bloc pentru măsurătorile termoelastice

Deoarece acest semnal este însoțit de un nivel ridicat de zgomot, el se corelează cu un semnal de referință, preluat de la generatorul de semnal care comandă mașina, de la traductorul de forță sau de la timbrele tensometrice lipite pe suprafața epruvetei. Corelatorul aplică o transformare Fourier celor două semnale rezultând modulul și faza semnalului termoelastic care sunt înregistrate de calculator.

Un set de date experimentale obținute la solicitarea biaxială a unei epruvete cruciforme cu o creștătură centrală înclinată la  $45^\circ$  este prezentat în fig. 2.10, Marșavina [2004]. Pentru acest tip de epruvetă se pot realiza solicitări în modul I, II și mixt I/II, doar prin modificarea solicitărilor pe cele două axe.

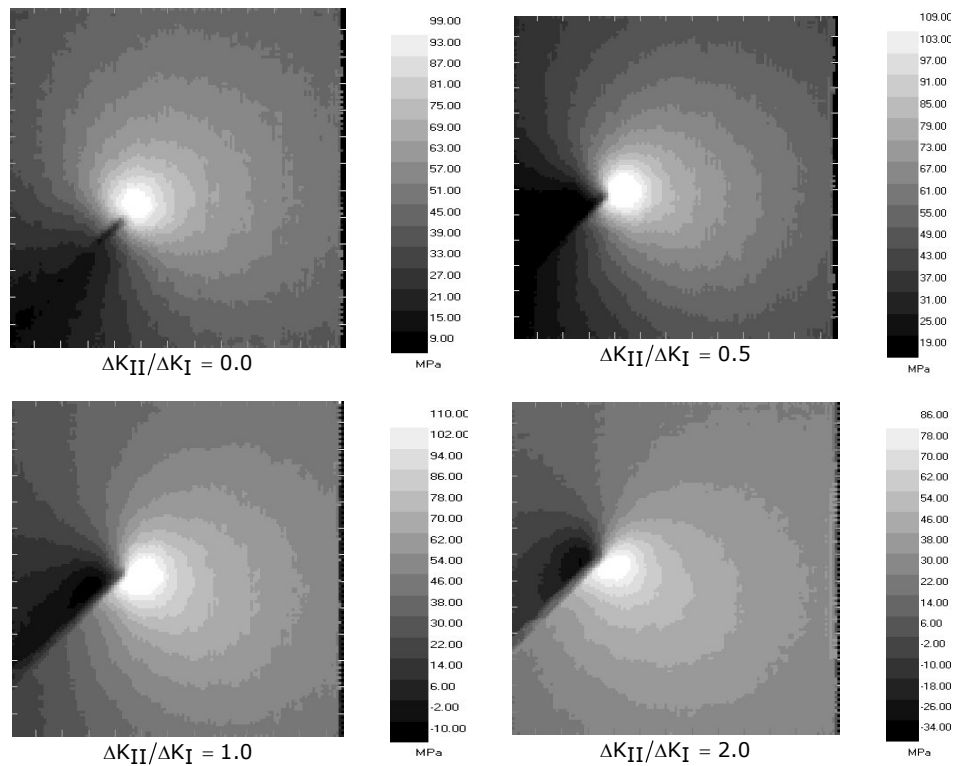


Fig. 2.10. Distribuția variației sumei tensiunilor principale în zona vârfului unei creștături pentru diferite moduri de solicitare (imagini preluate după Marșavina [2004])

## 2.2.4. Metoda corelării de imagini digitale (*Digital Image Correlation*)

### 2.2.4.1. Scurtă descriere a metodei

Metoda corelării de imagini digitale constă în achiziția de imagini, stocarea acestora într-o formă digitală și prelucrarea lor pentru a obține informații despre

forma și câmpul deformațiilor pentru obiectul studiat. Conceptul metodei, formulat probabil pentru prima dată de Peters [1981], a fost dezvoltat și integrat în algoritmi de prelucrare numerică pentru a extrage deformațiile obiectului dintr-o secvență de imagini, Sutton [1983], [1988], Chu [1985].

Convertirea imaginilor în măsurători experimentale ale formei, deplasărilor și deformațiilor unui obiect, implică două ipoteze de bază, Sutton [2008]:

- existența unei corespondențe directe între deplasările punctelor din imagine și deplasările punctelor de pe obiectul studiat, astfel încât deplasările punctelor de pe obiect să se poată cuantifica pe baza celor din imagine;
- fiecare subregiune a obiectului studiat are un contrast corespunzător (un anumit nivel de gri, definit prin intensitatea luminoasă), pe baza căruia se realizează o corelare exactă pentru a descrie deplasările locale din imagine. Variația contrastului se realizează fie prin aplicarea unui șablon (format din linii, grile, puncte sau șiruri aleatoare) pe suprafața obiectului (prin vopsire, lipire sau prelucrare mecanică), fie se datorează caracteristicilor naturale ale suprafeței.

Metoda este astăzi utilizată în diverse aplicații, Sutton [2008]:

- măsurători 3-D ale formei și deformațiilor unei suprafețe pentru o gamă largă de materiale și dimensiuni de la zeci de metri până la nivel micrometric;
- măsurători 2-D ale deformațiilor unei suprafețe la scară nanometrică utilizând microscopia electronică;
- măsurători ale deformațiilor interne ale materialelor biologice și poroase prin intermediul imagisticii spațiale (de exemplu, tomografia computerizată);
- comportamentul la solicitări dinamice/impact al materialelor utilizând sisteme video de mare viteză.

După Sutton [2008], cerințele unui sistem modern pentru aplicații 2-D sunt:

- cameră digitală cu aria suprafeței senzorului de  $12.7 [mm^2]$ , rezoluția senzorului de  $1280 \times 1024$  pixeli și adâncimea de culoare 8 – 10 biți pentru fiecare pixel;
- sistem computerizat de achiziție digitală a imaginilor;
- lentile de înaltă calitate cu distanța focală în domeniul 17 – 200 [mm];
- sursă de lumină.

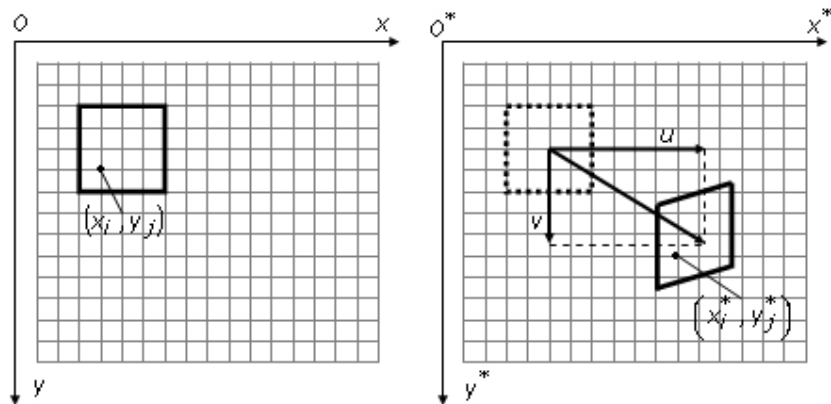


Fig. 2.11. Subregiune în imaginea de referință și în imaginea deformată

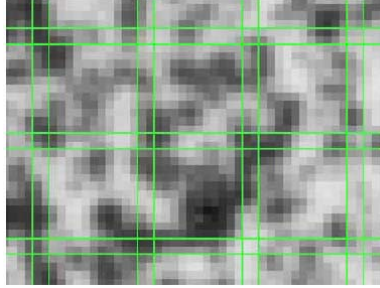


Fig. 2.12. Exemplu de subregiuni de  $15 \times 15$  pixeli cu o distanță de 2 pixeli între ele

Corelarea imaginilor este realizată comparând subregiuni ale șablonului digitizat din imaginea de referință, achiziționată înainte de deformarea obiectului, cu subregiunile corespunzătoare din fiecare imagine deformată, preluate în timpul încercării. Fiecare subregiune este formată dintr-un anumit număr de pixeli, iar imaginea obiectului este descrisă de o funcție discretă reprezentând contrastul (nivelul de gri) fiecărui pixel. Astfel, imaginea de referință este o funcție discretă  $f(x_i, y_j)$  și este transformată într-o altă funcție discretă  $g(x_i^*, y_j^*)$  după deplasarea sau deformarea obiectului (fig. 2.11). Relația dintre  $(x_i, y_j)$  și  $(x_i^*, y_j^*)$  se poate aproxima printr-o transformare afină de forma:

$$\begin{aligned} x^* &= x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ y^* &= y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{aligned} \quad (2.27)$$

unde  $u$  și  $v$  reprezintă deplasările centrului subregiunii, iar  $\Delta x$  și  $\Delta y$  sunt distanțele de la punctul de coordonate  $(x, y)$  la centrul subregiunii, în direcțiile celor două axe. O abordare iterativă este aplicată pentru a minimiza coeficientul de corelație  $c_{ij}$ , utilizând tehnici neliniare de optimizare:

$$c_{ij} = 1 - \frac{\sum_i \sum_j [f(x_i, y_j) - \bar{f}][g(x_i^*, y_j^*) - \bar{g}]}{\sqrt{\sum_i \sum_j [f(x_i, y_j) - \bar{f}]^2 [g(x_i^*, y_j^*) - \bar{g}]^2}}, \quad (2.28)$$

unde  $\bar{f}$  și  $\bar{g}$  reprezintă sunt valorile medii ale funcțiilor peste subregiunea studiată.

#### 2.2.4.2. Sudiu comparativ de evaluare a deformațiilor specifice în zona concentratorilor de tensiune prin metoda corelării de imagini digitale și metoda elementelor finite

Pentru un concentrator de tip creștătură laterală simetrică în  $V$  (fig. 2.4), cu raza la vârf  $\rho = 0.5 [mm]$  și deschiderea unghiulară  $2\alpha = 90^\circ$ , realizată din aliajul

de aluminiu 2024-T3, s-a determinat distribuția deformațiilor specifice  $\varepsilon_y$  de-a lungul ligamentului pentru modul I de solicitare (tracțiune uniformă uniaxială), unde  $y$  este direcția de solicitare. Determinările experimentale s-au realizat în Laboratorul de Rezistența Materialelor al Universității Politehnica București, utilizând sistemul optic ARAMIS 2M, un produs al GOM – Optical Measuring Techniques (fig. 2.13), cu următoarele performanțe:

- rezoluția camerei 2MP;
- viteza de achiziție a imaginilor – până la 15 Hz;
- domeniul deformațiilor măsurate 0.01% ÷ 100%;
- precizia de măsurare a deformațiilor – până la 0.01%.

Testele s-au efectuat pe o mașină Walter + bai de 60 kN în regim de deplasare controlată, cu o viteză de încărcare de 0.3 [mm/min], conectată la sistemul ARAMIS. Viteza de achiziție a imaginilor a fost de 1 imagine/2 sec unde, iar zona de calcul de 7 × 7 subregiuni, o subregiune reprezentând 20 × 20 pixeli cu distanța de 4 pixeli. Rezultatele testelor sunt prezentate în fig. 2.14 pentru trei niveluri ale încărcării: primul în domeniul elastic, cel de-al doilea în domeniul elasto-plastic și ultimul înainte de rupere.

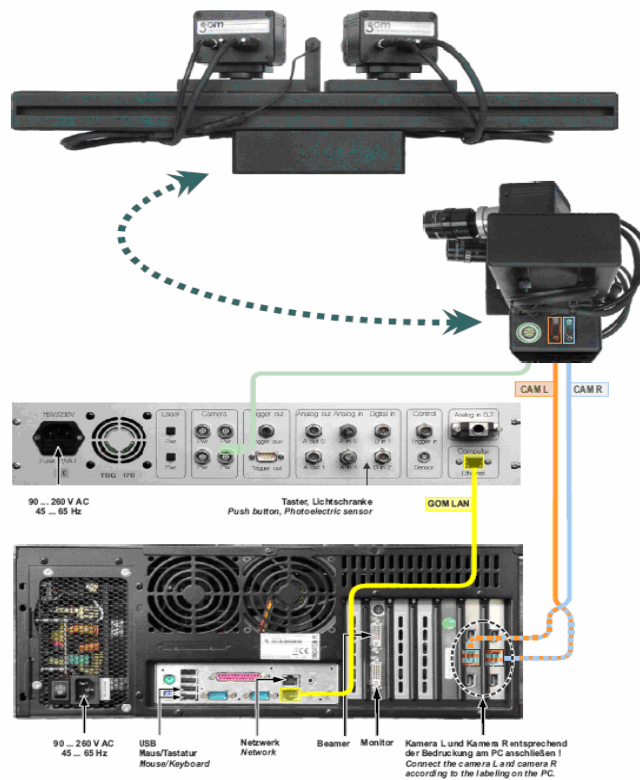


Fig. 2.13. Sistemul ARAMIS 2M

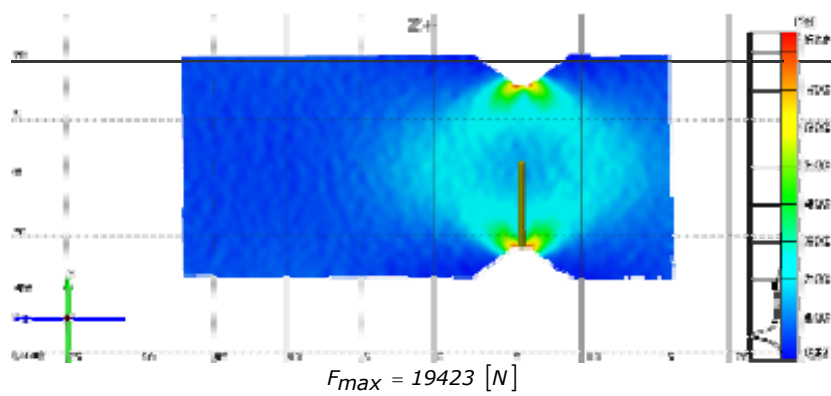
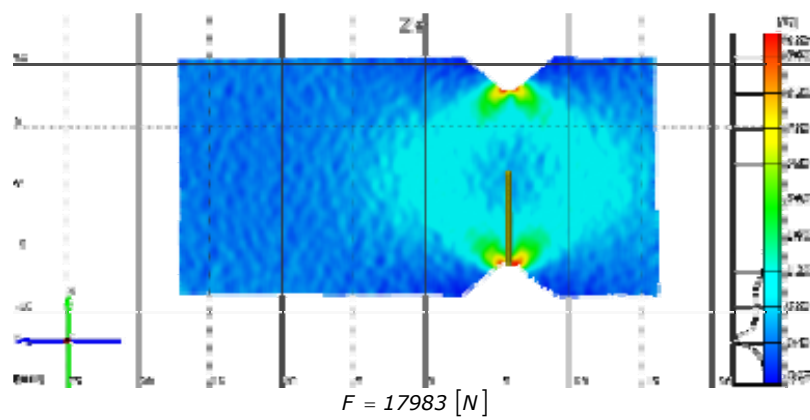
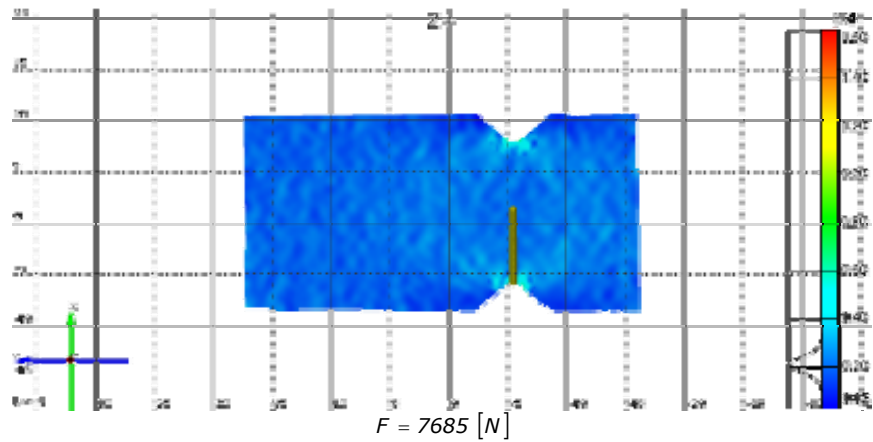


Fig. 2.14. Distribuția deformațiilor specifice  $\varepsilon_y$  pentru diferite niveluri ale încărcării



Aplicarea acestei metode pentru determinarea deformațiilor specifice în zona de la baza concentratorilor de tensiune „scapă” analizei un număr de pixeli de margine (aprox. 15-20 pixeli), după cum se remarcă și din fig. 2.15.

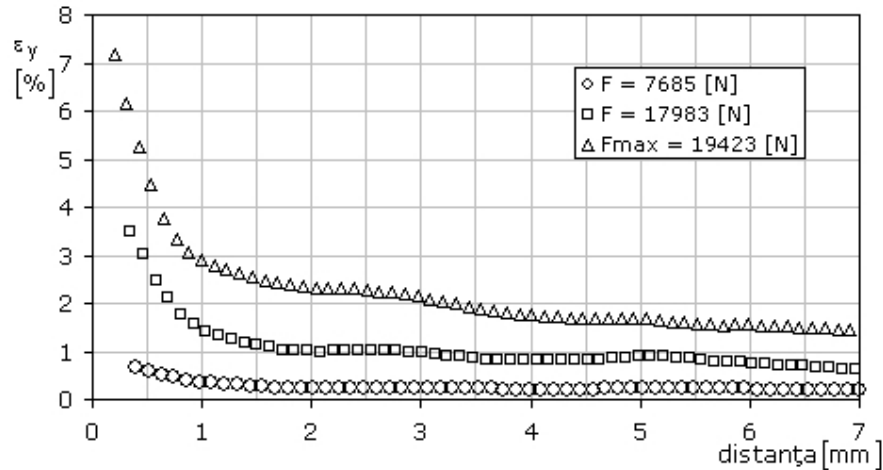


Fig. 2.15. Distribuțiile deformațiilor specifice  $\varepsilon_y$  de-a lungul ligamentului pentru diferite niveluri ale încărcării

Aceste rezultate, și altele prezentate în literatură – Sutton [1991], Han [1993], Constantinescu [2008], dovedesc aplicabilitatea metodei corelării de imagini digitale în mecanica ruperii și problemele legate de prezența concentratorilor de tensiune în componentele structurale.

În paralel s-a efectuat și o analiză neliniară cu elemente finite, utilizând pachetul software *CosmosM 2.9*. Pentru discretizare s-au utilizat elemente finite izoparametrice *PLANE2D* cu 8 noduri, în condiții de stare plană de tensiune. Geometria s-a realizat din entități geometrice de tip suprafață, care permit o discretizare parametrizată cu obținerea densității dorite pentru rețeaua de elemente finite în zona de concentrare a tensiunilor, rezultând un număr total de 9760 elemente finite și 29713 noduri.

În baza simetriei geometrice și mecanice, analiza cu elemente finite s-a realizat doar pentru un sfert din componentă, punând condițiile la limită în deplasări corespunzătoare de-a lungul celor două axe de simetrie. Solicitarea de întindere uniformă uniaxială s-a realizat prin aplicarea unei presiuni distribuite uniform, egală cu tensiunea nominală din secțiunea globală (fig. 2.16). Procedura numerică aleasă pentru soluționare este „controlul lungimii arcului” (*arc-length control*, manualul pachetului software *CosmosM 2.9* [2004]).

Modelarea neliniarității materialului s-a realizat pe baza curbei caracteristice reale (fig. 2.17)  $\tilde{\sigma} - \tilde{\varepsilon}$ , cu relațiile de transformare:

$$\tilde{\sigma} = \sigma(1 + \varepsilon), \quad \tilde{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.29)$$

unde  $\tilde{\sigma}$  și  $\tilde{\varepsilon}$  reprezintă tensiunea reală, respectiv deformația specifică reală, Dumitru [2003].

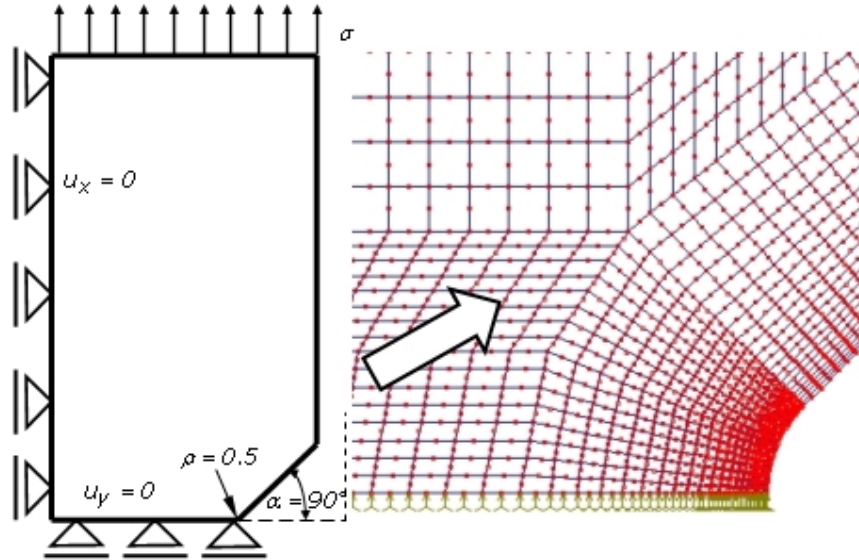


Fig. 2.16. Condițiile la limită și detaliu al rețelei de elemente finite în zona concentratorului

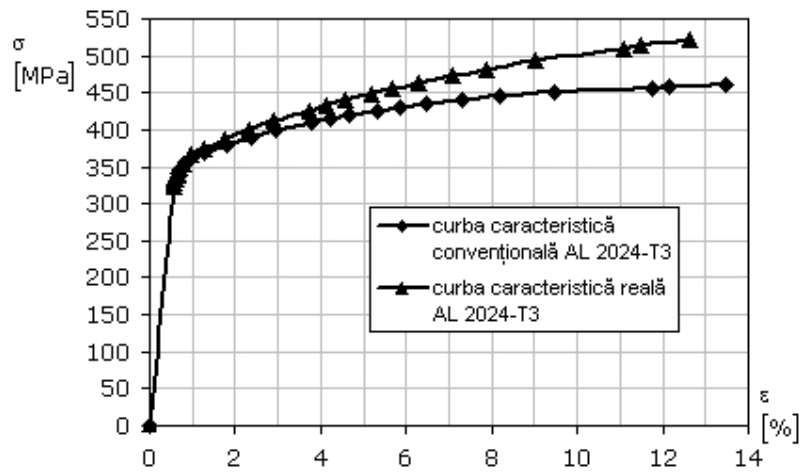


Fig. 2.17. Curba caracteristică pentru aliajul de aluminiu 2024 – T3

Pe baza rezultatelor obținute prin cele două metode în fig. 2.18 s-au reprezentat diagramele de variație ale deformației specifice  $\epsilon_y$  de-a lungul ligamentului, pentru cele trei niveluri ale forței.

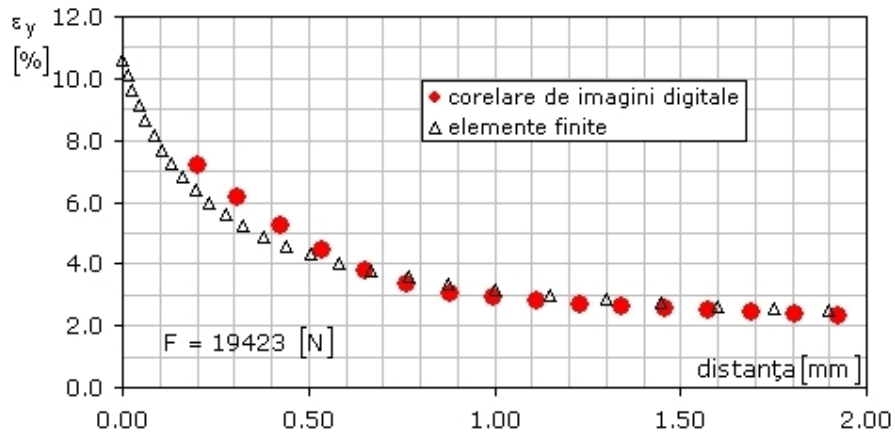
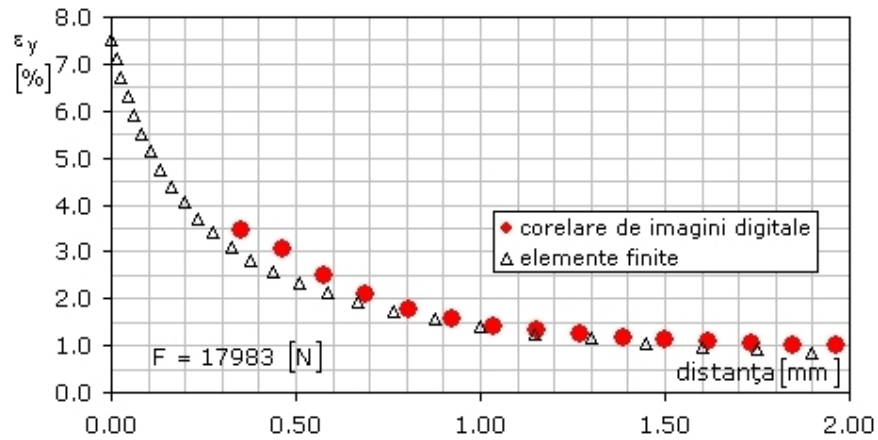
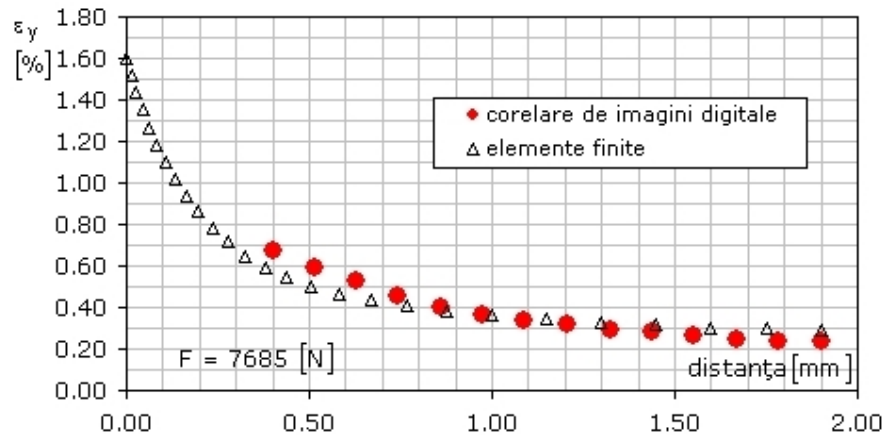


Fig. 2.18. Distribuția deformațiilor specifice  $\varepsilon_y$  de-a lungul ligamentului

Concordanța între cele două seturi de rezultate (experimentale și numerice) este relativ bună în imediata apropiere a concentratorului ( $0.2 - 1 [mm]$ ), unde erorile relative nu depășesc  $\pm 15\%$ . Pentru distanța de  $1 - 2 [mm]$  de la baza concentratorului de tensiune se remarcă o excelentă concordanță a rezultatelor experimentale și numerice, acestea practic suprapunându-se (fig. 2.18).

În baza acestor rezultate, se poate afirma că metoda corelării de imagini digitale se poate aplica cu succes la determinarea câmpului deformațiilor specifice în zona concentratorilor de tensiune, atât în domeniul elastic, cât și în domeniul elasto-plastic.

### 2.3. Evaluarea factorului de intensitate a tensiunii pentru concentratori (*Notch Stress Intensity Factor – NSIF*)

În cazul concentratorilor de tip creștătură laterală în  $V$  singulari (pentru care raza la vârf  $\rho = 0$ ), factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^V$  se evaluează pe baza distribuției tensiunilor de-a lungul bisectoarei unghiului de deschidere  $2\alpha$  (fig. 1.13, pentru  $\theta = 0$ ). Cele mai cunoscute expresii sunt cele propuse de Gross [1972], pe baza soluției exacte a lui Williams [1952].

Cu referire la modul I de sollicitare, se reamintește expresia (1.54) propusă de Gross [1972]:

$$K_I^{V,\rho} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_\theta(r, \theta = 0) \quad . \quad (2.30)$$

unde  $K_I^{V,\rho}$  reprezintă factorul de intensitate a tensiunii pentru concentratorii de tip  $V$  rotunjiți la vârf  $\rho \neq 0$  (nesingulari).

Utilizarea acestei expresii în cazul concentratorilor de tip creștătură laterală în  $V$ , dar rotunjiți la vârf  $\rho \neq 0$  (fig. 2.2), merită a fi evaluată. Se observă din (2.30), că pentru  $r \rightarrow 0$  și factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^V \rightarrow 0$ , în condițiile în care  $\sigma_\theta(r, \theta = 0)$  este o valoare finită. Pentru a depăși această problemă, în mod normal,  $K_I^{V,\rho}$  se determină la o anumită distanță de la baza concentratorului, unde influența razei  $\rho$  este neglijabilă, iar panta distribuției tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  este cea dată de soluția lui Williams [1952]. Pentru concentratorii prezentați în fig. 2.4 (pentru  $2\alpha = 90^\circ$  și  $\rho = 0.2 [mm]$ , respectiv  $\rho = 0.5 [mm]$ ), acest comportament este remarcat și în fig. 2.19, unde este reprezentată în coordonate dublu logaritmice variația tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta(r, \theta = 0)$  în funcție de distanța  $r$  de la baza concentratorului, ambele mărimi fiind normalizate (variația este obținută din analiza liniar elastică cu elemente finite). Distribuțiile din fig. 2.19, reprezentate pentru concentratorii rotunjiți la vârf, prezintă la o anumită distanță de la vârful concentratorului, care depinde de raza  $\rho$ , o pantă constantă în coordonate dublu logaritmice. În această zonă, câmpul tensiunilor se poate exprima în funcție de factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$ .

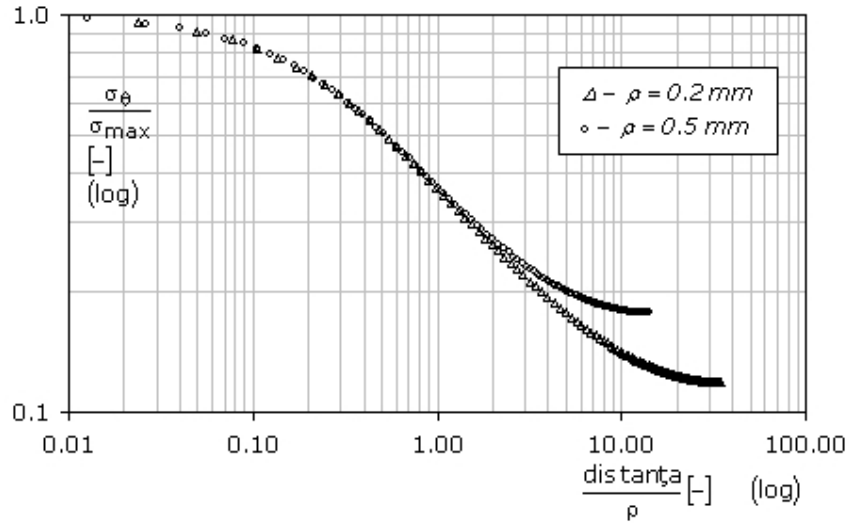


Fig. 2.19. Evidențierea zonei de pantă constantă, în funcție de raza la vârful concentratorului  $\rho$

Pe de altă parte, așa cum rezultă din fig. 2.20, mărimea zonei pentru care factorul de intensitate a tensiunii este aproximativ constant, depinde de geometria concentratorului. Cu cât raza la vârf  $\rho$  este mai mare, cu atât această zonă este mai redusă.

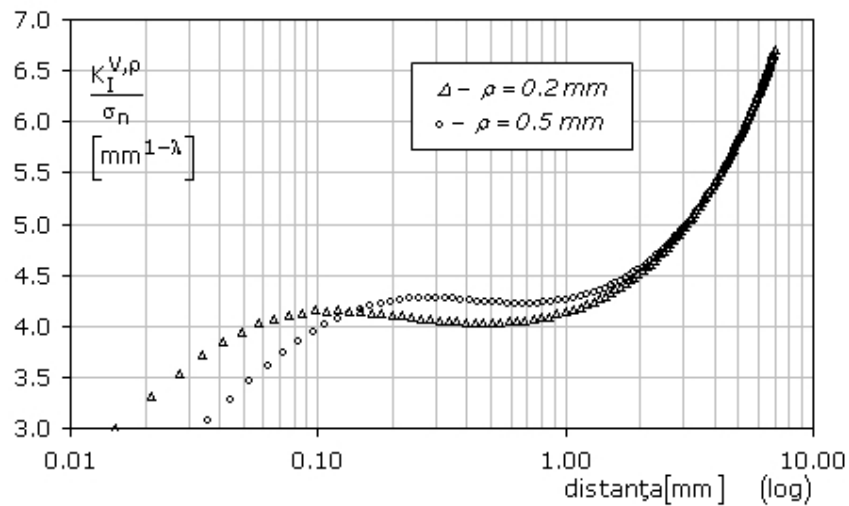


Fig. 2.20. Zona de valabilitate a factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$  în funcție de geometria concentratorului (raza la vârf  $\rho$ )

Revenind la expresiile (2.16) propuse de Filippi [2002] pentru descrierea câmpului tensiunilor din zona creștăturilor în  $V$  rotunjite la vârf, prezentate în subcapitolul 2.1.3 (aici date pentru modul I de solicitare),

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \lambda r^{\lambda-1} a \begin{Bmatrix} (1+\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (3-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (1-\lambda)\sin(1-\lambda)\theta \end{Bmatrix} + \chi_b(1-\lambda) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda)\theta \\ -\cos(1+\lambda)\theta \\ \sin(1+\lambda)\theta \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-\lambda} \left( \chi_d \begin{Bmatrix} (1+\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (3-\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (1-\mu)\sin(1-\mu)\theta \end{Bmatrix} + \chi_c \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu)\theta \\ -\cos(1+\mu)\theta \\ \sin(1+\mu)\theta \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

se reamintește faptul că toți parametrii au soluții exacte, cu excepția constantei  $a$ , care se evaluează pe baza distribuției locale a tensiunilor:

$$a = \frac{\sigma_{max}}{\lambda r_0^{\lambda-1} \left\{ 1 + \lambda + \chi_b(1-\lambda) + \left[ (1+\mu) \chi_d + \chi_c \right] \left[ q/4(q-1) \right] \right\}} \quad (2.32)$$

Din (2.32), Filippi [2002] demonstrează că factorul de intensitate a tensiunii pentru concentratori  $K_I^{V,\rho}$  se exprimă în funcție de tensiunea maximă  $\sigma_{max}$  prin relația:

$$K_I^{V,\rho} = \sigma_{max} \frac{\sqrt{2\pi}}{1+\omega} \left( \frac{q-1}{q} \rho \right)^{1-\lambda} \quad (2.33)$$

unde

$$\omega = \frac{q}{4(q-1)} \left[ \frac{\chi_d(1+\mu) + \chi_c}{1 + \lambda + \chi_b(1-\lambda)} \right] \quad (2.34)$$

pentru modul I de solicitare. Valoarea lui  $\omega$  este aproximativ constantă pentru deschiderea unghiulară  $2\alpha \leq 60^\circ$  și descrește pe măsură ce  $2\alpha$  crește peste această limită. Astfel, soluția pentru concentratorii nesingulari rotunjiți la vârf propusă de Filippi [2002] tinde mai rapid către soluția lui Williams [1952] propusă pentru concentratorii ascuțiți singulari, pe măsură ce deschiderea unghiulară  $2\alpha$  crește peste această limită.

Lazzarin [2006] propune o abordare mai generală pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$ , utilizând tensiunea  $\sigma_\theta$  la o distanță  $r$  măsurată față de originea sistemului de coordonate (fig. 2.2), în locul tensiunii maxime  $\sigma_{max}$  de la vârful concentratorului:

$$K_I^{V,\rho} = \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda} \frac{(\sigma_\theta)_{\theta=0}}{1 + \omega \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-\lambda}} \quad (2.35)$$

Reprezentarea grafică din fig. 2.21 a variației factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$ , normalizat cu tensiunea nominală globală  $\sigma_n$ , indică o mai slabă

variabilitate a acestuia cu distanța de la baza concentratorului în comparație cu cea din fig. 2.20, până la o distanță egală cu  $1 [mm]$ . Pentru a elimina și această variabilitate, Lazzarin [2006] propune medierea peste această distanță.

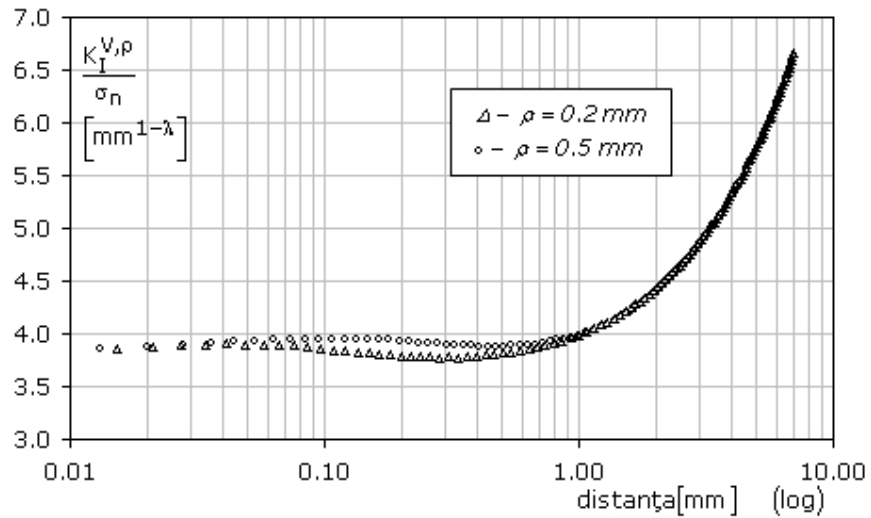


Fig. 2.21. Variația factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$  cu distanța de la baza concentratorului

Această expresie generală pentru factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$  prin compararea cu o valoare critică  $K_{IC}^{V,\rho}$  caracteristică fiecărui material, geometrie a concentratorului și condiții de încercare, constituie baza formulării criteriilor de rupere pentru componentele structurale cu concentratori de această formă. Aplicații ale utilizării factorului de intensitate a tensiunii la concentratori drept criteriu de rupere, se găsesc în lucrările lui Gómez [2003], [2004], pentru materiale ceramice și polimeri (PMMA), și Marșavina [2009], [2010] pentru ruperea unei lamele din cupru.

### 3. APLICAȚII ALE CONCENTRATORILOR DE TENSIUNE ÎN MECANICA RUPERII

#### 3.1. Efectul concentratorilor de tensiune la ruperea fragilă a componentelor structurale

Prezența unui concentrator de tensiune într-o componentă structurală este mult mai dezavantajoasă decât reducerea secțiunii nete sau simpla majorare a sarcinii aplicate. Efectul concentratorilor de tensiune în ruperea componentelor structurale depinde atât de dimensiunile absolute ale concentratorilor (prin lungimea  $2a$ ) cât și de alte caracteristici geometrice ale acestora: raza la vârf  $\rho$  și deschiderea unghiulară  $2\alpha$ . După valorile acestor caracteristici geometrice, Pluvinage [1998] clasifică concentratorii de tensiune astfel:

- fisură ( $\rho = 0$  și  $2\alpha = 0$ , fig. 1.12);
- concentrator de tensiune singular ( $\rho = 0$  și  $2\alpha \neq 0$ , fig. 1.13);
- concentrator de tensiune nesingular ( $\rho \neq 0$  și  $2\alpha \neq 0$ , fig. 1.14).

Efectul concentratorilor de tensiune la ruperea componentelor structurale poate fi reprezentat grafic prin cunoscuta diagramă a lui Feddersen [1970]. Numită și diagrama rezistențelor reziduale, aceasta exprimă variația tensiunilor critice  $\sigma_U$  care conduc la ruperea fragilă a componentelor cu defecte (fisuri sau concentratori de tensiune) în funcție de lungimea acestora.

Considerând o placă de lățime finită  $H$  cu un concentrator central de lungime  $2a$ , pentru care tensiunea netă limită este  $\sigma_c$ , se poate determina tensiunea critică globală  $\sigma_U$  cu relația:

$$\sigma_U = \sigma_c \left( 1 - \frac{2a}{H} \right) \quad , \quad (3.1)$$

ilustrată grafic printr-o dreaptă (fig. 3.1), reprezentând descreșterea tensiunii  $\sigma_U$  la creșterea lungimii defectului  $2a$ .

Dacă defectul este de tipul fisură centrală, atunci se poate scrie expresia factorului de intensitate a tensiunii în forma

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad , \quad (3.2)$$

de unde se obține, pentru starea plană de deformație, expresia tensiunii critice:

$$\sigma_U = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a}} \Rightarrow \sigma_U \sqrt{a} = \text{const.} \quad (3.3)$$

unde  $K_{IC}$  reprezintă valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii, numită și tenacitate la rupere.



Pentru un defect de tipul concentrator nesingular, tensiunea critică  $\sigma_U$  se calculează dintr-o relație de forma, Pluvinage [1998]:

$$\sigma_U a^\beta = \text{const.} \quad (3.4)$$

unde  $\beta$  este o constantă.

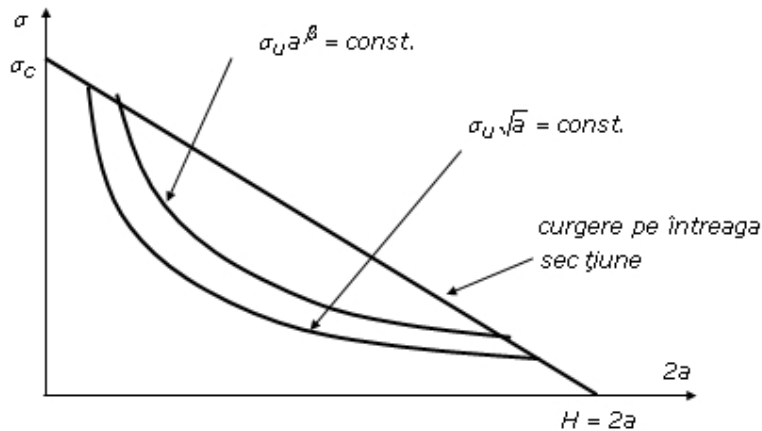


Fig. 3.1. Diagrama rezistențelor reziduale pentru diferite defecte (fisură, concentrator nesingular)

În concluzie, efectul concentratorilor de tensiune în ruperea componentelor structurale este caracterizat prin faptul că tensiunea critică globală  $\sigma_U$  variază după o relație neliniară și indică o valoare mai mică decât cea dată de expresia (3.1), severitatea unui concentrator simplu de tensiune fiind mai redusă decât a unei fisuri.

Din punctul de vedere al aplicabilității în inginerie, este necesară adaptarea unor criterii de rupere pentru componentele structurale cu concentratori de tensiune și introducerea unor metode bazate pe noi parametri.

## 3.2. Cercetări privind ruperea fragilă a componentelor structurale cu concentratori de tensiune nesingulari

După cum rezultă și din paragraful precedent, atunci când un concentrator de tensiune există într-o componentă structurală, rezistența acesteia este diferită de cea determinată pe epruvetele testate la tracțiune uniformă uniaxială. Așadar, prezența concentratorilor de tensiune, indiferent de tipul lor, generează dificultăți în evaluarea rezistenței componentelor sau structurilor. Dacă, printr-o proiectare adecvată, introducerea concentratorilor de tensiune singulari (fisuri sau creștături în formă de V cu raza de racordare la vârf egală cu zero) într-o componentă poate fi evitată, prezența concentratorilor nesingulari (găuri circulare, racordări, concentratori în formă de U sau V rotunjiți la vârf) reprezintă cazuri frecvente în practica curentă.

Numeroase studii sunt dedicate ruperii fragile a componentelor care conțin concentratori de tensiune singulari în formă de V, Carpinteri [1987], Knesl [1991], Seweryn [1994], [2002], Dunn [1997], [1997a], Gomez [2003], Chen [2008], sunt doar câteva dintre acestea. Lucrând cu materiale fragile, pentru care elasticitatea liniară este aplicabilă, câmpul tensiunilor și deformațiilor de la baza concentratorului este caracterizat prin factorul de intensitate  $K^V$ , care este o funcție de unghiul  $2\alpha$  al concentratorului (1.53). Prin analogie cu corpurile cu fisuri, aceste studii stabilesc criterii de rupere bazate pe o valoare critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K^V$ ; cu alte cuvinte, o fisură se inițiază și se propagă de la baza concentratorului atunci când factorul de intensitate a tensiunii atinge o valoare critică  $K_C^V$ . Pentru verificările experimentale sunt utilizate materiale cu un comportament fragil, cel mai frecvent polimetilmetacrilat (PMMA), dar și alți polimeri (polivinilchlorid – PVC, acrilat), duraluminiu și oțel (încercări la temperaturi joase).

În schimb, chiar dacă un concentrator de tensiune nesingular se poate transforma într-unul singular prin inițierea unei fisuri la baza sa, studiile dedicate ruperii componentelor care conțin concentratori de tensiune nesingulari sunt mult mai puțin numeroase. Din marea lor diversitate, sunt investigați concentratori de tensiune în formă de U, Gomez [2006], în formă de V rotunjiți la vârf, Gomez [2004], sau de tipul gaură circulară, Li [2006]. Verificările experimentale sunt realizate pentru ruperi fragile, utilizându-se materiale ceramice și polimerice (cel mai frecvent PMMA).

În acest capitol se prezintă rezultatele experimentale obținute pentru Necuron 1020, un polimer utilizat în aplicațiile industriale pentru realizarea de matrițe de ștanțare a tablelor, modele de turnare, calapoade de verificare, modele de testare aerodinamică și hidrodinamică. În plus, rezistența la rupere a componentelor cu concentratori de tensiune este evaluată utilizând diferite criterii de rupere, rezultatele estimate fiind comparate cu cele experimentale. În final, se evaluează forța de rupere pentru o componentă pe baza teoriei distanțelor critice, rezultatele obținute fiind comparate cu cele experimentale.

### 3.2.1. Rezultate experimentale

În lipsa unor valori pentru proprietățile mecanice ale polimerului Necuron 1020 furnizate de către producător (Necumer-Product GmbH), s-au realizat încercări

de mecanica ruperii în Laboratorul de Rezistența Materialelor al Universității "Politehnica" din Timișoara, după prescripțiile standardului american ASTM D 5045-99, pe o mașină Walter+bai pentru încercări statice și variabile de  $10 [kN]$ .

Încercările de mecanica ruperii s-au realizat pe epruvete de încovoiere în trei puncte (fig. 3.2-  $H = 20 \text{ mm}$  ;  $t = H/2$  ;  $a/H = 0.45$  ), la temperatura ambiantă ( $23^\circ\text{C}$  ) și o viteză de încărcare de  $10 [mm/min]$ .

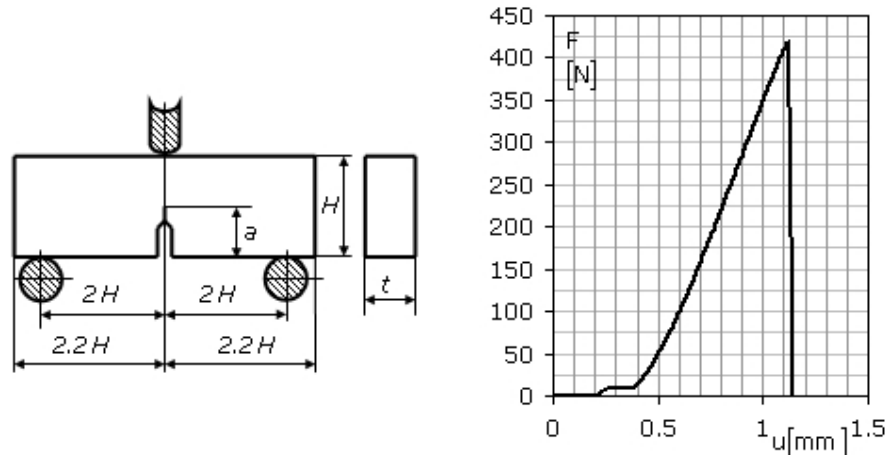


Fig. 3.2. Epruveta de mecanica ruperii și curba forță-deplasare la încercarea de încovoiere în trei puncte

Valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{Ic}$  pentru epruvetele de încovoiere în trei puncte este dată de relația:

$$K_{Ic} = \frac{F_{max}}{t H^{1/2}} f, \quad (3.5)$$

unde  $f = 9.14$  pentru raportul  $a/H = 0.45$ . În condițiile stării plane de deformație, s-a obținut o valoare medie a factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{Ic} = 2.72 [MPa\sqrt{m}]$ . Validarea rezultatelor experimentale, presupune verificarea condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească dimensiunile epruvetei pentru realizarea stării plane de deformație:

$$t = 10 \text{ mm} , a = 9 \text{ mm} , (H - a) = 11 \text{ mm} > 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \cong 8 \text{ mm} . \quad (3.6)$$

Pentru investigarea ruperii fragile a componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari, au fost testate epruvete netede și epruvete cu concentratori centrali de tip gaură circulară, pentru trei dimensiuni ale diametrului  $d = 1, 2, 3 [mm]$  (fig. 3.3); epruvetele au fost testate la întindere uniformă uniaxială cu o viteză de încărcare de  $5 [mm/min]$ . Pentru realizarea stării plane de deformație, în concordanță cu (3.6), s-a stabilit o grosime a epruvetelor de  $t = 10 [mm]$ .

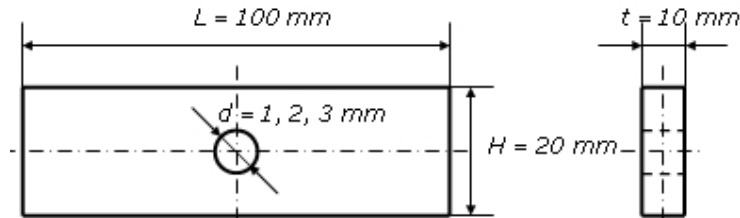


Fig. 3.3. Epruveta cu concentrator de tensiune de tip gaură circulară

Rezultatele testelor sunt prezentate în fig. 3.4, unde sunt reprezentate câteva curbe tensiune-deformație specifică pentru diferitele valori ale diametrului găurii circulare centrale. Rezistența la rupere  $\sigma_U$  a epruvetelor cu concentratori s-a determinat ca raportul dintre forța maximă  $F_{max}$  înregistrată și aria secțiunii brute, iar deformația specifică liniară  $\varepsilon$  pentru baza de măsurare a extensometrului  $l_0 = 25$  [mm]:

$$\sigma_U = \frac{F_{max}}{Ht} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad . \quad (3.7)$$

Cu alte cuvinte, tensiunea  $\sigma_U$  reprezintă tensiunea nominală aplicată în secțiunea brută a secțiunii la ruperea epruvetelor cu concentratori; pentru epruvetele fără concentratori de tensiune (netede) rezistența la rupere este notată prin  $\sigma_r$ . Încercările de tracțiune uniformă uniaxială s-au realizat după prescripțiile standardelor EN ISO 527-1 [1993] și EN ISO 527-2 [1994].

Se observă din fig. 3.4 o neliniaritate ușoară a curbelor tensiune-deformație specifică pentru Necuron 1020; în consecință acceptarea unui comportament liniar elastic este justificată, fără introducerea unor erori semnificative. De asemenea, ruperea este instantanee la atingerea unui nivel critic al încărcării, indicând faptul că ruperea polimerului Necuron 1020 este una fragilă.

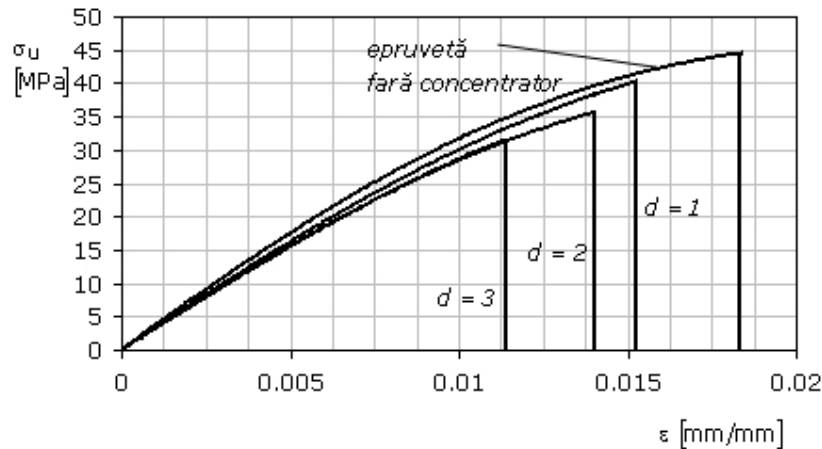


Fig. 3.4. Curbele tensiune-deformație specifică pentru epruvete netede și cu concentratori de tensiune de tip gaură circulară

Rezistențele la rupere ale epruvetelor cu concentratori de tensiune, determinate experimental, sunt date în tab.3.1 și fig. 3.5, în funcție de diametrul găurii circulare.

Tabel 3.1

Tip epruvetă Test	Epruvetă fără concentrator $\sigma_r$ [MPa]	Epruvetă cu $d = 1$ [mm] $\sigma_U$ [MPa]	Epruvetă cu $d = 2$ [mm] $\sigma_U$ [MPa]	Epruvetă cu $d = 3$ [mm] $\sigma_U$ [MPa]
1	42.32	40.07	35.73	31.37
2	45.14	39.10	35.80	31.54
3	44.23	39.45	35.23	31.95
4	44.05	40.15	36.14	31.30
5	43.04	39.24	35.91	31.09
<b>Valoare medie</b>	<b>43.75</b>	<b>39.60</b>	<b>35.76</b>	<b>31.45</b>

Se observă cu ușurință influența diametrului găurii circulare asupra rezistenței epruvetelor cu concentratori de tensiune:  $\sigma_U$  scade cu creșterea diametrului  $d$ .

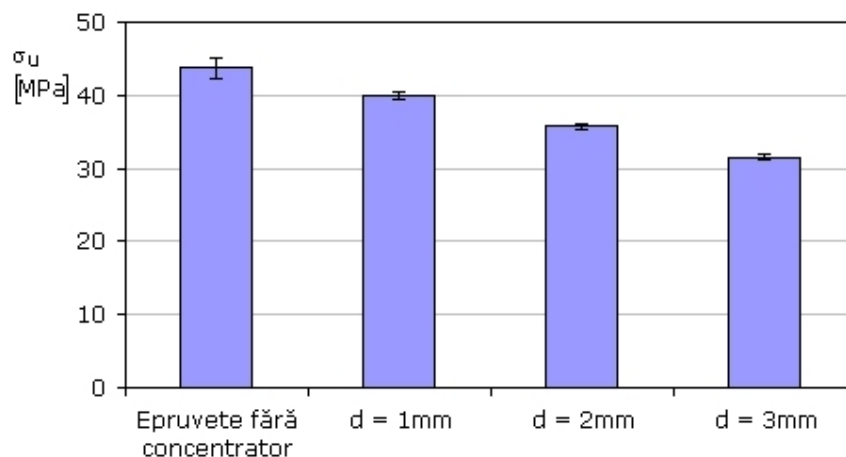


Fig. 3.5. Tensiunea de rupere  $\sigma_U$  în funcție de diametrul găurii circulare

În fig. 3.6 sunt prezentate comparativ rezultatele experimentale alături de două valori ale tensiunilor, utilizate frecvent în aplicațiile ingineresti: tensiunea netă  $\sigma_{net}$  determinată fără a lua în considerare efectul de concentrare a tensiunilor

$$\sigma_{net} = \frac{F_{max}}{(H-d)t} \quad , \quad (3.8)$$

și respectiv tensiunea maximă (determinată pentru un coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 3$ ).

Evaluarea rezistenței la rupere  $\sigma_U$  pe baza tensiunii nete  $\sigma_{net}$  conduce la o supraestimare a acesteia, eroarea majorându-se la creșterea diametrului  $d$  al concentratorului (pentru  $d = 3$  [mm], eroarea relativă maximă este de aprox. 15%).

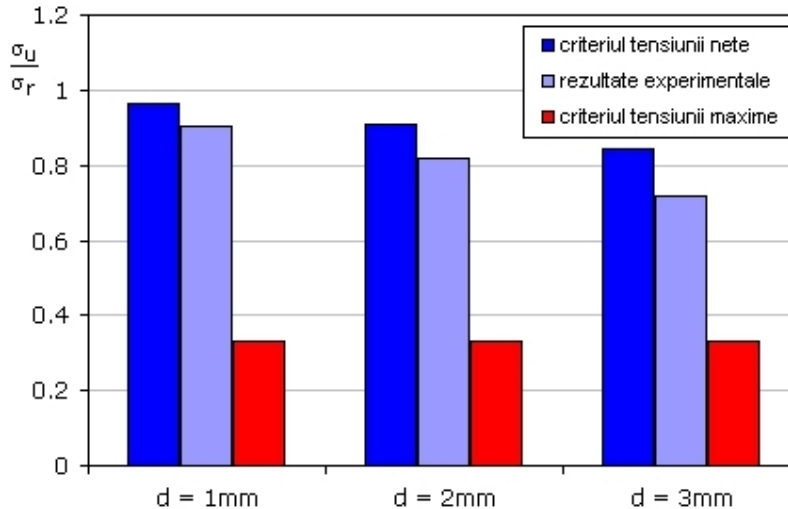


Fig. 3.6. Comparația rezultatelor experimentale cu estimările după criteriul tensiunii nete și maxime

După criteriul tensiunii maxime, ruperea se produce dacă tensiunea maximă atinge rezistența la rupere  $\sigma_r$  determinată pentru epruvete fără concentrator la întindere uniformă uniaxială. Acceptând același coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 3$ , indiferent de diametrul găurii circulare, rezistența la rupere  $\sigma_u$  devine  $\sigma_r/3$ . Estimările subvaluează rezistența epruvetelor cu concentratori, eroarea fiind maximă pentru cea mai mică valoare a diametrului (pentru  $d = 1[mm]$  eroarea relativă maximă este de 63%). Așadar, în ambele cazuri, estimările nu aproximează rezultatele experimentale cu suficientă precizie.

### 3.2.2. Criterii de rupere pentru aprecierea rezistenței componentelor cu concentratori de tensiune

Pentru aprecierea ruperii materialelor fragile, se folosesc în general două criterii de rupere. Primul, un criteriu de rezistență, este exprimat în tensiuni:

$$\sigma = \sigma_r \quad , \quad (3.9)$$

ruperea producându-se dacă, cel puțin într-un punct, tensiunea atinge rezistența la rupere  $\sigma_r$ . Cel de-al doilea, un criteriu energetic

$$G = G_C \quad , \quad (3.10)$$

stabilește că ruperea se produce atunci când forța de extensie a fisurii  $G$  atinge o valoare critică  $G_C$ . Acest criteriu poate fi exprimat într-o formă echivalentă, pe baza factorului de intensitate a tensiunii  $K$  și a valorii critice a acestuia  $K_{IC}$ :

$$K = K_C \quad . \quad (3.11)$$

Aceste două criterii de rupere se aplică cu bune rezultate celor două cazuri extreme: criteriul de rezistență pentru componentele fără fisuri, iar criteriul energetic, bazat pe mecanica ruperii liniar elastice, se aplică componentelor cu fisuri. În continuare, se studiază posibilitatea aplicării acestor criterii în cazul componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari.

### 3.2.2.1. Criteriul forței de extensie a fisurii (Griffith)

Adaptarea criteriului propus de Griffith [1920] la ruperea componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari este posibilă considerând o fisură virtuală de lungime  $l_c$  (fig. 3.7) ce se propagă de-a lungul ligamentului pornind de la baza concentratorului. În fapt, forța de extensie a fisurii  $G$  se poate calcula din factorul de intensitate a tensiunii  $K_I$  (pentru modul I de propagare a fisurii)

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad , \quad (3.12)$$

unde

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad , \quad (3.13)$$

pentru starea plană de deformare, justificată de grosimea  $t = 10 [mm]$ , mare în comparație cu diametrul  $d$  al găurilor circulare. Lungimea fisurii virtuale  $l_c$  se determină în continuare după abordarea propusă de Seweryn [2002]. Astfel, lungimea virtuală a fisurii  $l_c$  reprezintă distanța de la baza concentratorului de tensiune la care cele două criterii (3.9) și (3.11) sunt echivalente, adică:

$$\sigma_{max} = \sigma_r \quad , \quad K_I = K_{Ic} \quad (3.14)$$

unde  $\sigma_{max}$  este tensiunea maximă de la baza concentratorului.

Expresia factorului de intensitate a tensiunii pentru o placă de lățime  $H$  având o fisură centrală de semilungime  $l_c$  după Feddersen [1966] este:

$$K_I = \sigma_{max} \sqrt{\pi l_c} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi l_c}{H}\right)} \quad , \quad (3.15)$$

Din (3.15) se determină lungimea fisurii virtuale prin rezolvare numerică a relației, rezultând:

$$l_c = 1.208 [mm] \quad . \quad (3.16)$$

Expresia factorului de intensitate a tensiunii pentru fisuri radiale egale de lungime  $l_c$  dezvoltate la baza concentratorului de formă circulară este similară cu (3.15) considerând o lungime echivalentă a fisurii egală cu  $a + l_c$  (fig. 3.7):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(a + l_c)} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi(a + l_c)}{H}\right)} \quad , \quad (3.17)$$

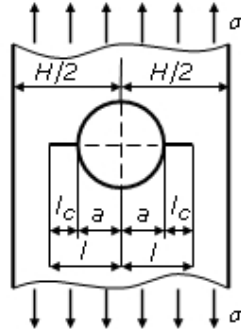


Fig. 3.7. Geometria pentru care se calculează factorul de intensitate a tensiunii

Din (3.17) se determină la limită rezistența la rupere  $\sigma_U$  ca tensiune aplicată în secțiunea brută la ruperea componentelor cu concentratori:

$$\sigma_U = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi(a+l_c)} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi(a+l_c)}{H}\right)}} \quad (3.18)$$

Din rezultatele evaluării rezistenței la rupere  $\sigma_U$  pe baza criteriului forței de extensie a fisurii, prezentate în tab.3.2, rezultă o subestimare ușoară a acesteia pentru întreaga gamă a valorilor diametrului  $d$ , erorile relative fiind însă rezonabile pentru aplicațiile ingineresti.

Tabel 3.2

Tip epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_U$ [MPa]	Criteriul Griffith $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]
$d = 1$ [mm]	39.60	36.46	-7.9
$d = 2$ [mm]	35.76	31.67	-11.4
$d = 3$ [mm]	31.45	28.14	-10.5

### 3.2.2.2. Criteriul Leguillon [2002]

Criteriul propus de Leguillon [2002], pentru concentratori de tensiune singulari în formă de V, stabilește că ruperea se produce dacă tensiunea principală maximă, într-un punct al componentei nefisurate, și forța de extensie a fisurii, pentru o fisură virtuală al cărei vârf sa află în același punct, ating simultan valorile lor critice. Cunoscând distribuția tensiunilor de la baza concentratorului de formă circulară pentru placa infinită, Timoshenko [1970], condiția în tensiuni conduce la relația:

$$\sigma(l_c) = \frac{\sigma_U}{2} \left( 2 + \left( \frac{a}{a+l_c} \right)^2 + 3 \left( \frac{a}{a+l_c} \right)^4 \right) = \sigma_r \quad (3.19)$$



Cea de-a doua condiție se scrie într-o formă echivalentă, utilizând expresia factorului de intensitate a tensiunii (3.17):

$$K_I(l_c) = \sigma_U \sqrt{\pi(a+l_c)} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi(a+l_c)}{H}\right)} = K_{Ic} \quad (3.20)$$

Din (3.19) și (3.20), eliminând tensiunea  $\sigma_U$  rezultă ecuația

$$\frac{2\sigma_r}{\left(2 + \left(\frac{a}{a+l_c}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{a+l_c}\right)^4\right)} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi(a+l_c)} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi(a+l_c)}{H}\right)}} \quad (3.21)$$

prin a cărei soluționare numerică se calculează distanța  $l_c$  și din (3.19) rezistența la rupere  $\sigma_U$ .

Rezultatele prezentate în tab.3.3, indică o îmbunătățire semnificativă a estimărilor pe baza criteriului propus de Leguillon, dovedind o foarte bună eficiență și pentru concentratorii nesingulari de tensiune.

Tabel 3.3

Tip epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_U$ [MPa]	Criteriul Leguillon $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]
$d = 1$ [mm]	39.60	40.29	+1.7
$d = 2$ [mm]	35.76	34.65	-3.1
$d = 3$ [mm]	31.45	30.40	-3.3

### 3.2.2.3. Criteriul Zhang [2008]

Criteriul dezvoltat de Zhang [2008], pentru predicția inițierii fisurilor în materiale fragile și cvasi-fragile, este aplicabil unei game largi de concentratori de tensiune, atât ca forma cât și ca nivel de concentrare (severitate). El se bazează pe abordarea ruperii propusă de Rashid [1968], după care un număr mare de microfisuri se inițiază simultan într-un material fragil atunci când tensiunea nominală atinge un anumit nivel. Distribuția acestor micro-fisuri depinde în principal de concentrarea locală a tensiunilor și de eterogenitatea materialului, Bazant [1976], [1979].

Acest concept este susținut de numeroase cercetări fractografice raportate în literatură, confirmate și pentru polimerul Necuron 1020 prin testele realizate (fig. 3.8) în laborator. Se distinge o rugozitate însemnată pentru suprafața de rupere a epruvetelor fără concentratori de tensiune, testate la întindere uniformă uniaxială. În schimb, suprafața de rupere este aproape netedă pentru epruvetelor cu concentratori în formă de  $U$  și prezintă o rugozitate intermediară pentru concentratorii de formă circulară. Așadar, rugozitatea suprafețelor de rupere depinde în mod sensibil de severitatea concentratorului de tensiune, diminuându-se pentru niveluri înalte ale coeficientului de concentrare  $K_t$ . În general, crearea de suprafețe mai fine necesită un consum mai mic de energie pentru simplul motiv că aria de rupere nou creată este mai redusă. În concluzie, Zhang [2008] apreciază că energia consumată pentru

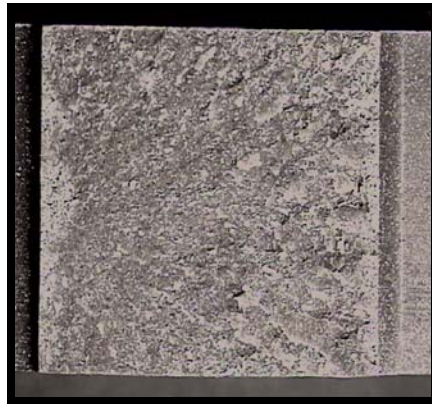
inițierea unei fisuri de la o suprafață fără concentrator de tensiune (netedă) este mai mare decât cea consumată pentru ca o fisură inițiată să se propage.



epruvetă fără concentrator de tensiune



concentrator de formă circulară ( $d = 1 [mm]$ )



concentrator în formă de  $U$

Fig. 3.8. Suprafața de rupere a polimerului Necuron 1020 la încercarea de tracțiune

Zhang [2008] explică dependența energiei consumate la crearea de noi suprafețe de nivelul concentrării tensiunilor prin mecanismul de rupere bazat pe formarea zonei de micro-fisuri și coalescența acestora într-o fisură principală (fig. 3.9). Pentru un nivel înalt al concentrării tensiunilor, de exemplu în cazul unei fisuri, zona de formare a micro-fisurilor este îngustă. În această situație, coalescența lor într-o fisură principală va forma o suprafață de rupere extrem de fină. Dacă nivelul concentrării tensiunilor este mai slab, micro-fisurile se vor forma într-o zonă mai întinsă, iar coalescența lor va produce o suprafață de rupere mai rugoasă.

Astfel, Zhang argumentează introducerea celui de-al treilea parametru de rupere, tenacitatea materialului la întindere uniformă uniaxială  $G_C^U$ .

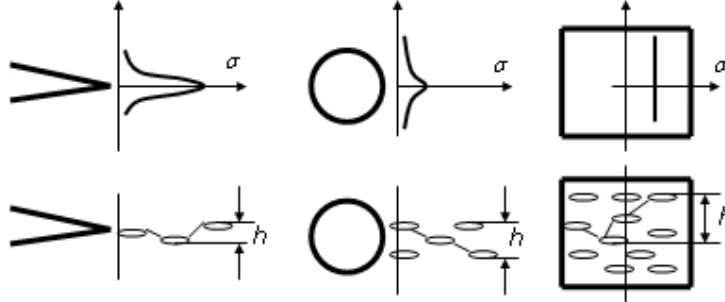


Fig. 3.9. Formarea zonei de micro-fisuri pentru diferiți concentratori, Zhang [2008]

Plecând de la observațiile prezentate, Zhang [2008] a propus un criteriu bazat pe trei parametri: rezistența la rupere  $\sigma_r$ , forța critică de extensie a fisurii  $G_C$  și tenacitatea materialului la întindere uniformă  $G_C^U$ , înțeleasă ca energia eliberată pe unitatea de suprafață când materialul este solicitat la întindere uniaxială. În consecință, forța critică de extensie a fisurii  $G_C^S$  pentru orice nivel de concentrare a tensiunilor se stabilește prin interpolarea:

$$G_C^S(\alpha) = \alpha G_C + (1 - \alpha) G_C^U, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.22)$$

unde  $\alpha$  este un parametru care descrie nivelul concentrării tensiunilor și depinde de lățimea  $h$  a zonei de micro-fisuri, formată înainte de inițierea fisurii principale. Presupunând că micro-fisurile se dezvoltă în interiorul zonei în care tensiunea principală maximă  $\sigma_1$  depășește rezistența la rupere, adică  $\sigma_1 > \sigma_r$ , lățimea  $h$  se poate determina din această condiție în tensiuni, astfel:

$$\alpha = \frac{h_{\text{fisură}}}{h} \quad (3.23)$$

unde  $h_{\text{fisură}}$  este lățimea zonei de la vârful fisurii pentru care  $\sigma_1 > \sigma_r$ , la propagarea fisurii.

Din expresia tensiunii principale maxime la vârful unei fisuri

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.24)$$

se determină raza  $r$  a zonei în care  $\sigma_1 > \sigma_r$

$$r = \frac{K_{Ic}^2}{2\pi\sigma_C^2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 = \frac{G_C E}{2\pi(1-\nu^2)\sigma_C^2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \quad (3.25)$$

pentru starea plană de deformație, lățimea  $h_{\text{fisură}}$  devenind în final:

$$h_{\text{fisură}} = 2r \sin \theta = 2 \max \left\{ \frac{K_{Ic}^2}{2\pi\sigma_C^2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \sin \theta \right\} \quad (3.26)$$

relația (3.26) indicând că lățimea  $h_{\text{fisură}}$  este un parametru de material.

Pe baza abordării lui Leguillon [2002], Zhang [2008] a admis că inițierea fisurii are loc pe direcția pe care tensiunea normală este maximă la îndeplinirea cumulativă a următoarelor două condiții:

- tensiunea principală maximă atinge la distanța caracteristică  $l_c$  rezistența la rupere a materialului  $\sigma_I(l_c) = \sigma_r$ , pentru componenta cu concentrator de tensiune, dar nefisurată;
- forța de extensie a fisurii la vârful unei fisuri virtuale propagată de la baza concentratorului, la aceeași distanță caracteristică, atinge valoarea critică  $G_c^S(\alpha)$  determinată după (3.22).

Ținând cont de grosimea epruvetelor suficientă pentru îndeplinirea condițiilor necesare realizării stării plane de deformație, se poate determina valoarea critică a forței de extensie a fisurii  $G_c$ :

$$G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E/(1-\nu^2)} = 1.9 \left[ \frac{kJ}{m^2} \right] \quad (3.27)$$

cu  $E = 3300 [MPa]$ ,  $\nu = 0.38$  și  $K_{Ic} = 2.72 [MPa(m)^{1/2}]$ . Cel de-al treilea parametru de material  $G_c^U$  se determină admitând că singura sursă de disipare a energiei este crearea unei suprafețe noi prin rupere

$$G_c^U = -\frac{\Pi}{S} \quad , \quad (3.28)$$

unde  $\Pi$  este energia potențială de deformație, iar  $S$  este aria secțiunii de rupere la întindere uniformă uniaxială; pentru polimerul Necuron 1020, din datele experimentale s-a obținut că  $G_c^U = 5.5G_c$ . Pe baza relației (3.26) s-a obținut  $h_{\text{fisură}} = 1.9359 [mm]$ , iar din analiza cu elemente finite s-au determinat  $h_{d1} = 1.9765 [mm]$ ,  $h_{d2} = 2.0349 [mm]$  și  $h_{d3} = 2.0490 [mm]$ .

Îndeplinirea cumulativă a celor două condiții impuse de criteriul lui Zhang [2008], conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \sigma(l_c) &= \frac{\sigma_U}{2} \left( 2 + \left( \frac{a}{a+l_c} \right)^2 + 3 \left( \frac{a}{a+l_c} \right)^4 \right) = \sigma_r \\ G_c^S(l_c) &= \frac{\left[ \sigma_U \sqrt{\pi(a+l_c)} \sqrt{\sec \pi \frac{a+l_c}{H}} \right]^2 (1-\nu^2)}{E} = \alpha G_c + (1-\alpha) G_c^U \quad , \end{aligned} \quad (3.29)$$

prin a cărei soluționare numerică se determină  $l_c$  și  $\sigma_U$ .

Rezultatele obținute sunt prezentate în tab.3.4, alături de cele experimentale, observându-se o foarte bună concordanță între acestea.

Introducerea celui de-al treilea parametru  $G_c^U$  de rupere a condus la o îmbunătățire semnificativă a evaluării rezistenței componentelor cu concentratori de tensiune.

Tabelul 3.4

Tip epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_U$ [MPa]	Criteriul Zhang $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]
$d = 1$ [mm]	39.60	40.58	+2.5
$d = 2$ [mm]	35.76	35.42	-0.9
$d = 3$ [mm]	31.45	31.46	+0.03

Rezultatele obținute pentru evaluarea rezistenței componentelor cu concentratori, pe baza celor trei criterii de rupere prezentate, sunt ilustrate în fig. 3.10.

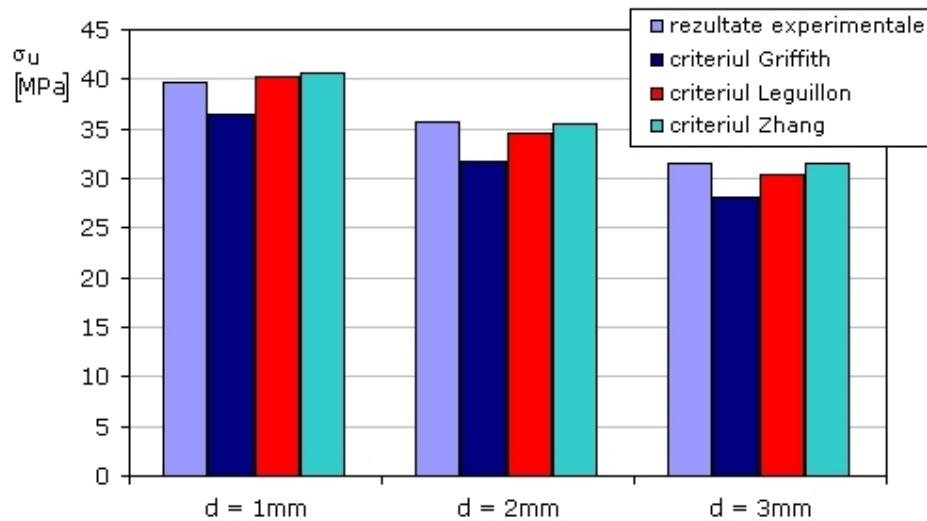


Fig. 3.10. Prezentarea comparativă a rezultatelor determinate cu diferite criterii de rupere

Excelenta concordanță a rezultatelor experimentale cu estimările bazate pe criteriile prezentate demonstrează că este posibilă adaptarea acestora la ruperea fragilă a componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari. Pentru activitatea de proiectare inginerescă însă, aceste criterii de rupere au neajunsul unei aplicări relativ dificile.

Acesta este argumentul pentru care în continuare se propune abordarea ruperii fragile a componentelor cu concentratori pe baza unei metode relativ simple de aplicat și adecvată proiectării în ingineria mecanică, din perspectiva utilizării largi a programelor de analiză cu elemente finite.

### **3.3. Aplicarea *Metodei Distanțelor Critice (Theory of Critical Distances)* la ruperea fragilă a componentelor cu concentratori de tensiune**

#### **3.3.1. Scurtă prezentare a metodei distanțelor critice**

Așa cum este prezentată de Taylor [2006], [2007], *metoda distanțelor critice* reprezintă în fapt un grup de metode care au o abordare comună – în primul rând acestea utilizează o lungime caracteristică drept parametru de material, și anume distanța critică  $L$ , calculată în funcție de proprietățile mecanice ale materialului. Din acest grup de metode, pornind de la cea mai simplu de aplicat, *metoda punctului (Point Method)*, mai fac parte *metoda liniei (Line Method)*, *metoda ariei (Area Method)* și *metoda volumului (Volume Method)*.

Istoria metodei distanțelor critice se constituie într-un exemplu interesant pentru un fenomen care se petrece adesea în știință: descoperirea repetată a aceleiași idei și dezvoltarea sa paralelă în domenii diferite. Astfel, independent unul de celălalt, cercetând cedarea prin oboseală a componentelor metalice cu concentratori, Neuber [1958] în Germania și Peterson [1959] în SUA, au introdus primele formulări pentru metoda liniei, respectiv, metoda punctului. Principalul neajuns al acestor formulări este legat de definirea distanței critice, cei doi recurgând în final la o determinare empirică a valorii distanței critice, prin ajustarea estimărilor cu datele experimentale. Alte formulări ale celor două metode au fost propuse de McClintock [1965] și Novozhilov [1969] pentru studiul ruperii fragile, utilizând drept distanță critică distanța interatomică. Un alt pas important în dezvoltarea metodei distanțelor critice este reprezentat de lucrarea lui Whitney [1974], dedicată ruperii compozitelor laminate care conțin concentratori de tensiune. Lucrarea propune două metode similare cu metoda punctului și metoda liniei, realizând legătura cu mecanica ruperii liniar elastice prin exprimarea distanței critice în funcție de factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_C$ ; în plus, Whitney obține și legătura între distanțele utilizate în cele două metode,  $L/2$  și respectiv  $2L$ . La aproape un deceniu distanță, Tanaka [1983] propune relația teoretică de determinare a distanței critice  $L$  pentru calculul la solicitări variabile în domeniul durabilităților mari, fără să ofere însă date experimentale pentru verificarea acesteia. Ideea a fost redescoperită și validată experimental mai târziu, Lazzarin [1997] și Taylor [1999], [2000], pentru calculul componentelor cu concentratori la solicitări variabile. Metoda distanțelor critice s-a dezvoltat prin aplicarea cu succes la estimarea ruperii fragile a materialelor polimerice, Kinloch [1980], și prin validarea sa experimentală în alte domenii: ruperea fragilă a metalelor și materialelor ceramice, oboseala materialelor polimerice, Taylor [2007].

Utilizarea metodei distanțelor critice la predicția ruperii fragile presupune cunoașterea câmpului tensiunilor elastice din vecinătatea concentratorului, obținut printr-o analiză cu elemente finite (sau o soluție analitică, dacă este disponibilă), și a două constante de material, distanța critică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$  (denumită și rezistența intrinsecă a materialului, Susmel [2008]).

Cu scopul prezentării metodei, se consideră întinderea uniformă uniaxială a unei componente cu un concentrator de tensiune (fig. 3.11), câmpul tensiunilor de la baza concentratorului fiind cunoscut dintr-o analiză liniar elastică; cu alte cuvinte se determină tensiunile și deformațiile elastice presupunând că nu apar fenomene

de curgere plastică sau degradare care să producă deformații remanente sau un comportament neliniar tensiune-deformație.

Cea mai simplă formă a metodei distanțelor critice, **metoda punctului**, utilizează un criteriu de rupere care poate fi enunțat astfel: cedarea se va produce atunci când tensiunea la o distanță  $L/2$  măsurată de la baza concentratorului (pornind din punctul de tensiune maximă) este egală cu tensiunea critică  $\sigma_0$  a materialului, Taylor [2007]. Așadar, dacă se notează cu  $r$  distanța de la baza concentratorului, metoda punctului poate fi exprimată într-o formă matematică prin relația următoare:

$$\sigma(r = L/2) = \sigma_0 \quad (3.30)$$

Pentru exemplul din figura 3.11, în relația (3.30) prin tensiunea normală  $\sigma$  este desemnată tensiunea normală principală maximă, iar direcția pe care se măsoară distanța critică este perpendiculara la suprafața concentratorului în punctul de tensiune maximă (în situația din fig. 3.11, această direcție este perpendiculară implicit și pe direcția tensiunii principale maxime).

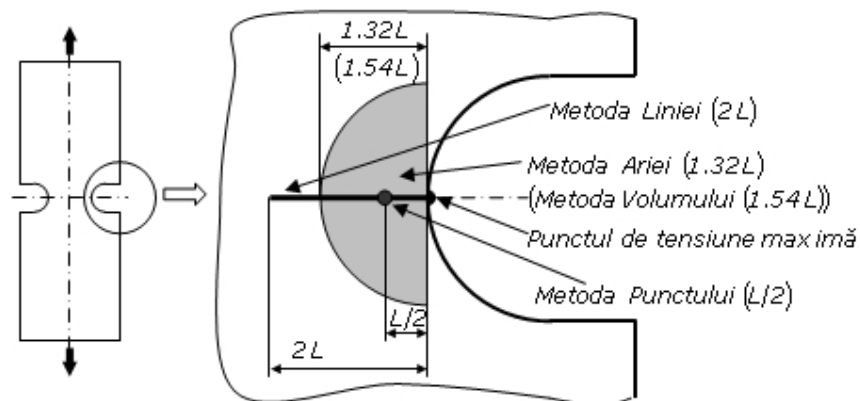


Fig. 3.11. Metoda distanțelor critice

Taylor [1999] a obținut expresia pentru distanța critică  $L$  realizând o legătură teoretică între metoda distanțelor critice și mecanica ruperii liniar elastică. Dacă metoda distanțelor critice este valabilă pentru oricare tip de concentrator de tensiune, atunci ea este aplicabilă și fisurilor ( $\rho = 0$ ), pentru care distribuția tensiunilor elastice la vârful fisurii ( $r \ll a$ ) este dată de expresia (Westergaard [1939]):

$$\sigma(r) = \frac{\sigma}{\left[1 - \left(\frac{a}{a+r}\right)^2\right]^{1/2}} \cong \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (3.31)$$

Ruperea fragilă se va produce atunci când factorul de intensitate a tensiunii  $K$  devine egal cu valoarea critică  $K_c$ , adică:

$$\sigma_r = \frac{K_C}{\sqrt{\pi a}} \quad . \quad (3.32)$$

Taylor a presupus în continuare că între constantele utilizate de metoda distanțelor critice și factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_C$  există o anumită legătură. Pentru o fisură a cărei lungime  $a$  este mult mai mare decât distanța critică  $L$  din (3.30) și (3.31) se obține:

$$\sigma(r = L/2) = \sigma_r \sqrt{\frac{a}{L}} = \sigma_0 \quad , \quad (3.33)$$

iar împreună cu (3.32) rezultă expresia de calcul a distanței critice  $L$  :

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_0} \right)^2 \quad . \quad (3.34)$$

Relațiile (3.31) și (3.32) utilizate de Taylor sunt valabile pentru cazul particular al unei fisuri centrale străpunse dintr-un corp infinit. Pentru alte geometrii trebuie introdus un factor geometric, fără ca acest lucru să afecteze generalitatea relației deduse (3.34).

Pentru celelalte trei metode parametrul utilizat nu este tensiunea într-un anumit punct, ci valoarea medie a acesteia stabilită pentru o anumită regiune a câmpului de tensiune de la baza concentratorului. Astfel, în **metoda liniei** medierea se realizează pentru o distanță  $2L$ , pornind de la baza concentratorului (unde se consideră  $r = 0$ ):

$$\frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma(r) dr = \sigma_0 \quad . \quad (3.35)$$

Estimările date de metoda punctului și metoda liniei sunt identice pentru cazurile extreme: concentratori de tipul fisură lungă și componente fără concentratori (netede). Pentru oricare altă problemă estimările nu vor fi identice, dar diferențele sunt în general mici, stabilirea metodei adecvate unei probleme depinzând de mecanismul de cedare a materialului.

**Metoda ariei și metoda volumului** propun medierea tensiunilor pentru o anumită suprafață din vecinătatea concentratorului, respectiv pentru un anumit volum; în mod evident, rezultatele vor depinde de forma suprafeței, respectiv volumului. Pentru o suprafață de formă semicirculară, cu centrul în punctul de tensiune maximă, și un concentrator ascuțit, Bellet [2005] a demonstrat că raza critică este egală cu  $1.32L$  (fig. 3.11.); similar, pentru un volum de formă semisferică Bellet [2005] a obținut o rază critică de  $1.54L$ . Ultimele două metode sunt relativ dificil de utilizat, necesitând efectuarea unor integrale pe o suprafață sau pe un volum, fără să aducă o creștere semnificativă a preciziei estimărilor.

De reținut că, în relația (3.34), valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_C$  depinde de starea de solicitare (stare plană de deformare sau tensiune, grosimea epruvetei). Pentru starea plană de deformare și modul I de solicitare factorul critic de intensitate a tensiunii este notat uzual cu  $K_{IC}$  (denumit și tenacitate la rupere). În ceea ce privește valoarea tensiunii critice  $\sigma_0$ , alegerea acesteia depinde de tipul materialului; pentru materialele fragile (ceramice) sau



pentru anumite materiale cvasi-fragile (compozite armate cu fibre, beton) tensiunea critică  $\sigma_0$  se alege egală cu rezistența de rupere la tracțiune  $\sigma_0 = \sigma_r$ , mai precis rezistența de rupere a unei epruvete netede fără defecte. Dacă ruperea finală este precedată de o deformare plastică limitată (polimeri, încercări ale metalelor la temperaturi joase), tensiunea critică  $\sigma_0$  primește o valoare care este, în general, mai mare decât rezistența determinată pe componente netede, fără concentratori. În această formă modificată a teoriei distanțelor critice, tensiunea  $\sigma_0$  se determină prin încercarea unor epruvete care conțin concentratori de tensiune diferiți, care dau distribuții diferite ale tensiunilor la baza concentratorului, Taylor [2004], Susmel [2008]. Această modificare a metodei este explicată prin faptul că mecanismul de rupere este diferit pentru o epruvetă netedă (propagarea unui micro-defect preexistent), mecanism care nu se regăsește în prezența unui concentrator de tensiune.

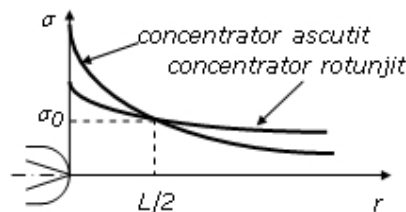


Fig. 3.12. Determinarea mărimilor critice  $L$  și  $\sigma_0$  din distribuția tensiunilor elastice pentru doi concentratori de tensiune diferiți

Această modalitate de determinare a tensiunii critice  $\sigma_0$  este ilustrată în fig. 3.12:  $L$  și  $\sigma_0$  sunt estimate prin coordonatele punctului de intersecție a celor două curbe ce reprezintă distribuția tensiunilor elastice în funcție de distanța de la baza concentratorului, în condițiile de inițiere a ruperii.

### 3.3.2. Determinarea constantelor de material $L$ și $\sigma_0$ pentru Necuron 1020

Plecând de la ipoteza că metoda distanțelor critice este utilă la predicția ruperii în problemele unde câmpul nominal al tensiunilor este liniar-elastic (ruperea materialelor ceramice, solicitări variabile în domeniul durabilităților mari), adică deformările specifice sunt elastice, cu excepția unei zone reduse de la baza concentratorului (zona de proces), Taylor [2004] a cercetat posibilitatea aplicării acestei metode la ruperea polimerilor (PMMA - polimetilmetacrilat). De asemenea, Taylor [2007] a verificat aplicabilitatea metodei distanțelor critice, pe baza rezultatelor publicate în literatură, și pentru alte materiale polimerice: policarbonat, polistiren, polivinilchlorid.

În continuare se verifică, pentru materialul Necuron 1020 – un poliuretan rigid, aplicabilitatea metodei distanțelor critice la estimarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune de formă gaură circulară, caracterizați printr-o valoare medie a coeficientului teoretic de concentrare  $K_t$ . În prima parte, se va utiliza metoda distanțelor critice în forma sa inițială, cu distanța critică  $L$  determinată din

relația (3.34) și tensiunea critică  $\sigma_0$  egală cu rezistența de rupere la tracțiune pentru epruvetele netede fără concentratori  $\sigma_0 = \sigma_r = 43.75 \text{ [MPa]}$ . Factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC} = 2.72 \text{ [MPa(m)}^{1/2}]$  s-a determinat pentru starea plană de deformare, conform ASTM D5045-99. În baza relației (3.34), distanța critică devine:

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2 \cong 1.230 \text{ mm} \quad . \quad (3.36)$$

În forma modificată a metodei distanțelor critice, Taylor [2004] a propus o abordare alternativă pentru determinarea celor doi parametri, tensiunea critică  $\sigma_0$  și lungimea critică  $L$ . Pe baza rezultatelor experimentale înregistrate pentru doi concentratori de tensiune diferiți, se trasează curbele care reprezintă distribuțiile tensiunilor în funcție de distanța de la baza acestora, iar coordonatele punctului de intersecție furnizează chiar noile valori critice, notate în continuare cu  $L^*$  și  $\sigma_0^*$ .

În acest scop, s-au efectuat încercări experimentale pe epruvete cu concentratori de tensiune de tip U și semicirculari laterali simetrici (fig. 3.13), solificate la tracțiune uniformă uniaxială.

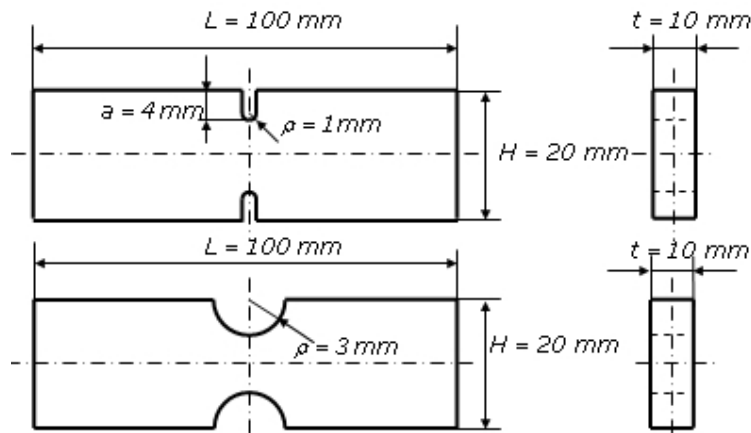


Fig. 3.13. Epruvetele utilizate pentru determinarea valorilor critice  $L^*$  și  $\sigma_0^*$

Valorile medii pentru forța maximă înregistrată la rupere în cele două cazuri sunt:  $F_{max} = 4364 \text{ [N]}$  pentru concentratorul în formă de U și  $F_{max} = 5187 \text{ [N]}$  pentru cel semicircular lateral, rezultând valorile tensiunilor de rupere  $\sigma_U = 21.820 \text{ [MPa]}$  și  $\sigma_U = 25.935 \text{ [MPa]}$ , calculate pentru aria secțiunii brute.

Analiza s-a realizat utilizând elemente finite plane *PLANE2D* cu 8 noduri pentru stare plană de deformare, disponibile în biblioteca pachetului software *CosmosM 2.9*. Geometria s-a realizat din entități geometrice de tip suprafață, care permit o discretizare parametrizată cu obținerea densității dorite pentru rețeaua de elemente finite în zona de concentrare a tensiunilor. În baza simetriei, analiza cu elemente finite s-a realizat doar pentru un sfert din epruvetă, punând condițiile la

limită în deplasări corespunzătoare de-a lungul celor două axe de simetrie (fig. 3.14). Solicitarea de întindere uniformă uniaxială s-a realizat prin aplicarea unei presiuni distribuite uniform, egală cu tensiunea  $\sigma_U$  determinată din forța maximă înregistrată în momentul ruperii. Proprietățile de material utilizate de analiza liniară cu elemente finite sunt: modulul de elasticitate longitudinal  $E = 3300 \text{ [MPa]}$  și coeficientul de contracție transversală  $\nu = 0.38$ .

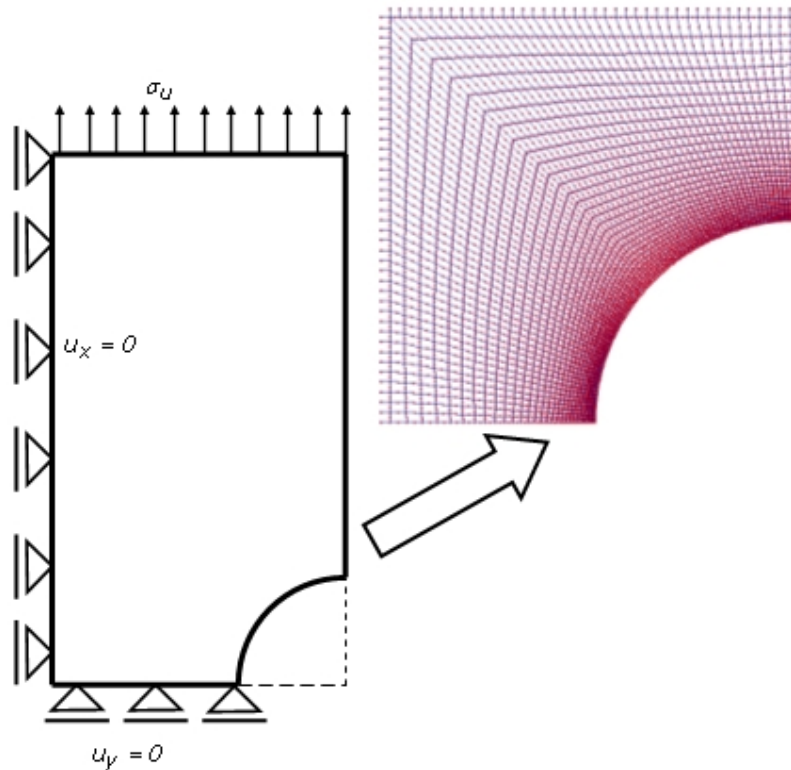


Fig. 3.14. Condițiile la limită pentru analiza cu elemente finite

Câmpul tensiunilor normale  $\sigma_y$ , unde  $y$  este direcția de solicitare, este ilustrat în fig. 3.15 pentru cei doi concentratori de tensiune, rezultând un coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 5.40$  pentru concentratorul în formă de  $U$  și respectiv  $K_t = 3.05$  pentru concentratorul semicircular lateral.

Cu datele acestei analize liniar elastice, în fig. 3.16 s-au trasat distribuțiile tensiunilor normale  $\sigma_y$  în funcție de distanța de la baza concentratorului, rezultând distanța critică  $L^* = 1.180 \text{ [mm]}$  și tensiunea critică  $\sigma_0^* = 55.10 \text{ [MPa]}$ .

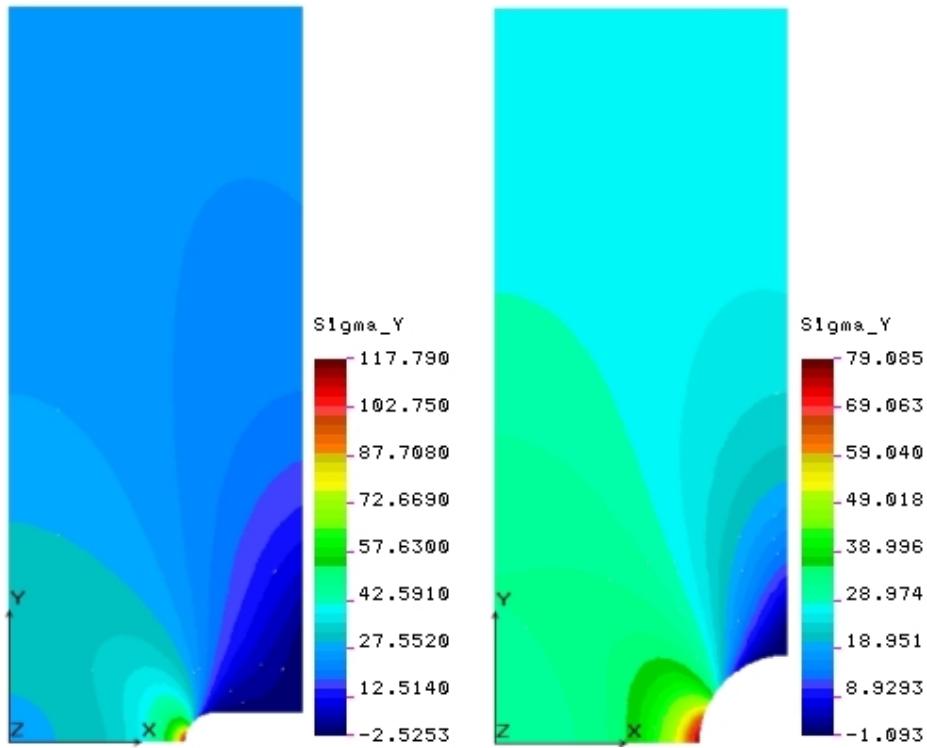


Fig. 3.15. Câmpul tensiunilor  $\sigma_y$  pentru concentratorul tip  $U$  și cel semicircular lateral

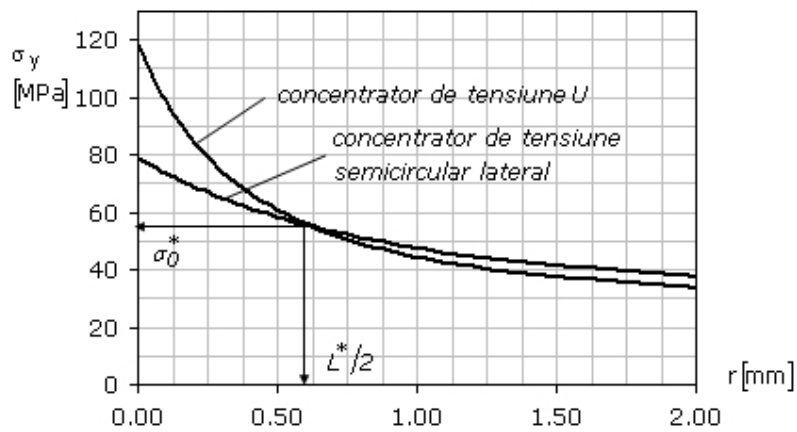


Fig. 3.16. Determinarea din analiza cu elemente finite a valorilor critice  $L^*$  și  $\sigma_0^*$

Se observă că cele două valori obținute pentru distanța critică sunt foarte apropiate, în schimb tensiunea critică  $\sigma_0^*$  determinată din analiza cu elemente finite este cu aprox. 25% mai mare, ceea ce înseamnă că tensiunile în vecinătatea concentratorilor de tensiune ating valori mai mari decât cele așteptate, înainte ca ruperea să se producă.

### 3.3.3. Evaluarea ruperii fragile prin metoda distanțelor critice a componentelor cu concentratori de tensiune

Cu valorile determinate pentru distanța critică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$  ( $L^*$  și  $\sigma_0^*$  în forma modificată a metodei distanțelor critice), aplicarea **metodei punctului (MP)** nu utilizează decât o analiză liniar elastică a componentelor cu concentratori de tensiune și presupune trasarea curbelor tensiune-distanță. La estimarea tensiunii  $\sigma_U$  pentru care este satisfăcută relația (3.11)

$$\sigma(r = L/2) = \sigma_0 \quad ,$$

se va ține cont de proporționalitatea dintre sarcina aplicată și tensiuni, valabilă pentru o analiză liniar elastică.

Astfel, printr-o analiză cu elemente finite, pentru componentele cu concentratori circulari centrali din fig. 3.3, s-au trasat curbele tensiune-distanță de la baza concentratorului, la aplicarea unei tensiuni nominale de  $10 \text{ [MPa]}$ , fig.3.17.

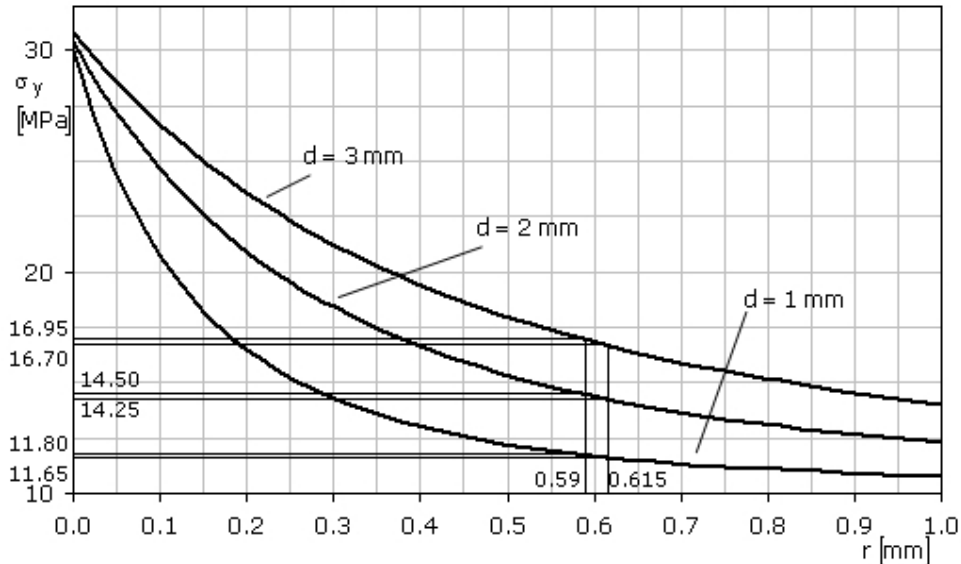


Fig. 3.17. Determinarea tensiunilor normale  $\sigma_y$  la distanțele critice  $L$  și  $L^*$  de la baza concentratorilor circulari, pentru o tensiune nominală aplicată de  $10 \text{ [MPa]}$

Valorile estimate ale tensiunilor de rupere prin metoda punctului (MP), alături de rezultatele experimentale, sunt prezentate în tab.3.5 și ilustrate grafic în fig. 3.18.

Tabelul 3.5

Epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_u$ [MPa]	MP $\sigma_u$ [MPa]	Eroare relativă [%]	MP modificată $\sigma_u$ [MPa]	Eroare relativă [%]
$d = 1$ [mm]	39.60	37.55	-5.2	46.69	+17.9
$d = 2$ [mm]	35.76	30.70	-14.2	38.00	+6.2
$d = 3$ [mm]	31.45	26.19	-16.8	32.51	+3.3

Se observă cu ușurință că estimările realizate cu **metoda punctului modificată** au o mai bună acuratețe, pentru valori ale diametrului concentratorului circular de 2 și 3 [mm]. În schimb, pentru diametrul de 1 [mm] eroarea relativă pentru metoda punctului modificată conduce la erori nerezonabile (aprox. 18%). Explicația este dată de dimensiunea redusă a concentratorului, dimensiune pentru care tensiunile locale descresc rapid, astfel încât la o distanță egală cu cea critică  $L$  acestea vor fi similare tensiunii nominale aplicate.

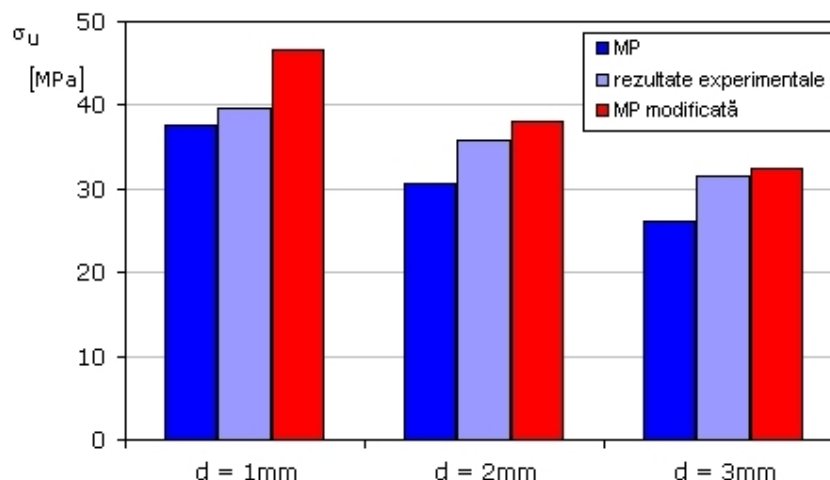


Fig. 3.18. Rezultatele experimentale și estimările prin metoda punctului

Spre deosebire de metoda punctului, **metoda liniei** utilizează valoarea medie a tensiunii stabilită pentru distanța  $2L^*$ , pornind de la baza concentratorului. Acceptând formula dată de Timoshenko [1970] pentru placa infinită, distribuția tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  este dată de expresia:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_n}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_n}{2} \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad , \quad (3.37)$$

unde  $a = d/2$ ,  $\sigma_n$  este tensiunea nominală aplicată și  $(r, \theta)$  sunt coordonatele polare; pentru  $\theta = 0$ , se obține distribuția tensiunii de-a lungul ligamentului:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_n}{2} \left( 2 + a^2/r^2 + 3a^4/r^4 \right) . \quad (3.38)$$

iar relația (3.35), utilizând valorile critice modificate  $(L^*, \sigma_0^*)$ , se scrie în forma:

$$\frac{1}{2L^*} \int_a^{a+2L^*} \frac{\sigma_U}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) dr = \sigma_0^* . \quad (3.39)$$

a cărei evaluare permite determinarea tensiunii de rupere pentru epruvetele cu concentratori de tensiune. Rezultatele prezentate în tab.6, indică o înrăutățire a acurateții estimărilor, explicată de reprezentarea distribuției tensiunilor de la baza concentratorului printr-o formulă valabilă pentru placa infinită.

Tabelul 6

Epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_U$ [MPa]	ML modificată $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]	MP modificată $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]
$d = 1$ [mm]	39.60	46.19	+16.6	46.69	+17.9
$d = 2$ [mm]	35.76	40.66	+13.7	38.00	+6.3
$d = 3$ [mm]	31.45	36.89	+17.3	32.41	+3.1

Cu scopul de a investiga aplicabilitatea metodei distanțelor critice pentru alte valori ale coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$  și alte forme ale concentratorilor de tensiune, s-au realizat încercări de întindere uniformă uniaxială pe epruvete cu creștături laterale în formă de V, cu un coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 6.06$ , și epruvete cu degajări laterale, pentru care  $K_t = 1.54$  (fig. 3.19).

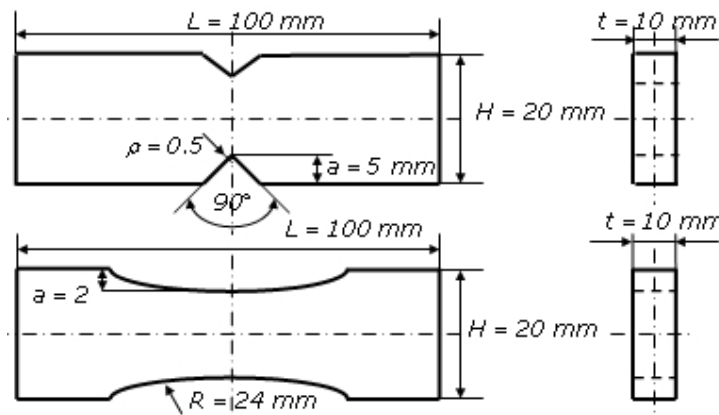


Fig. 3.19. Epruvete cu concentratori de tensiune de formă V rotunjit la vârf și de tipul degajare laterală

Rezultatele obținute prin metoda punctului sunt prezentate în tab.3.7, alături de cele experimentale, indicând o foarte bună acuratețe a metodei punctului

modificată pentru creștătura laterală de forma V. Pentru degajarea laterală caracterizată printr-un coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t = 1.54 < 2$ , metoda distanțelor critice devine inutilă în estimarea rezistenței la rupere a componentelor cu concentratori.

Tabel 3.7

Epruvetă	Rezultate experimentale $\sigma_U$ [MPa]	MP $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]	MP modificată $\sigma_U$ [MPa]	Eroare relativă [%]
Crestătură V	19.20	15.35	-20.0	19.00	-1.0
Degajare laterală	42.30	29.36	-30.5	36.98	-12.6

În concluzie, metoda distanțelor critice, în forma modificată prezentată, este capabilă să evalueze ruperea componentelor cu concentratori de tensiune, iar prin ușurința aplicării poate fi extrem de utilă în aplicațiile practice. Câteva precizări sunt însă necesare:

- pentru îmbunătățirea predicțiilor la ruperea componentelor realizate din materiale polimerice metoda se utilizează în forma sa modificată prezentată;
- aplicabilitatea metodei distanțelor critice la evaluarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune este limitată de dimensiunea absolută a concentratorului și de valoarea lui  $K_t$ . Pentru dimensiuni absolute apropiate de valoarea distanței critice  $L$  și niveluri de concentrare a tensiunilor  $K_t < 2$  estimările pe baza acestei metode sunt afectate de erori nerezonabile.

Rezultatele prezentate indică o caracteristică importantă a polimerului Necuron 1020: chiar dacă ruperea apare ca fiind fragilă, asemănătoare materialelor ceramice, răspunsul la fenomenul de concentrare a tensiunilor este mult mai apropiat de cel al materialelor tenace.

### 3.4. Aplicarea metodei punctului la ruperea unui bloc de conectare și testare cablaje auto

#### 3.4.1. Rezultate experimentale

În acest paragraf se propune aplicarea metodei punctului la evaluarea rezistenței la rupere a unei componente pentru cazul în care aplicarea sistemului de forțe produce o stare de tensiune multiaxială la baza concentratorului de tensiune. Este vorba despre un bloc de conectare realizat din Necuron 1020, ai cărui umeri de fixare cedează deseori în exploatare. Încercările s-au realizat în Laboratorul de Rezistența Materialelor al Universității "Politehnica" din Timișoara, în cadrul contractului de cercetare nr. 2/12.02.2009 pe o mașină Walter+bai pentru încercări statice și variabile de 100 kN, la temperatura ambiantă și cu o viteză de încărcare de 2 mm/min. Dispozitivul realizat pentru efectuarea încercărilor, prezentat în fig. 3.20, reproduce condițiile de fixare și de solicitare din funcționare.

Rezultatele experimentale au indicat o valoare medie pentru forța maximă înregistrată la ruperea umerilor de fixare de 5475 [N].



Din încercările de tracțiune uniformă uniaxială realizate, ale căror rezultate sunt prezentate în subcapitolul 3.3, s-a constatat că polimerul Necuron 1020 are un comportament fragil la ruperea în modul I de sollicitare. S-au determinat deasemenea, pentru aplicarea metodei distanțelor critice, cei doi parametri de material, distanța critică  $L = 1.180 [mm]$  și tensiunea critică  $\sigma_0 = 55.1 [MPa]$ , prin încercări de întindere uniformă uniaxială realizate pe epruvete cu concentratori de tensiune diferiți.

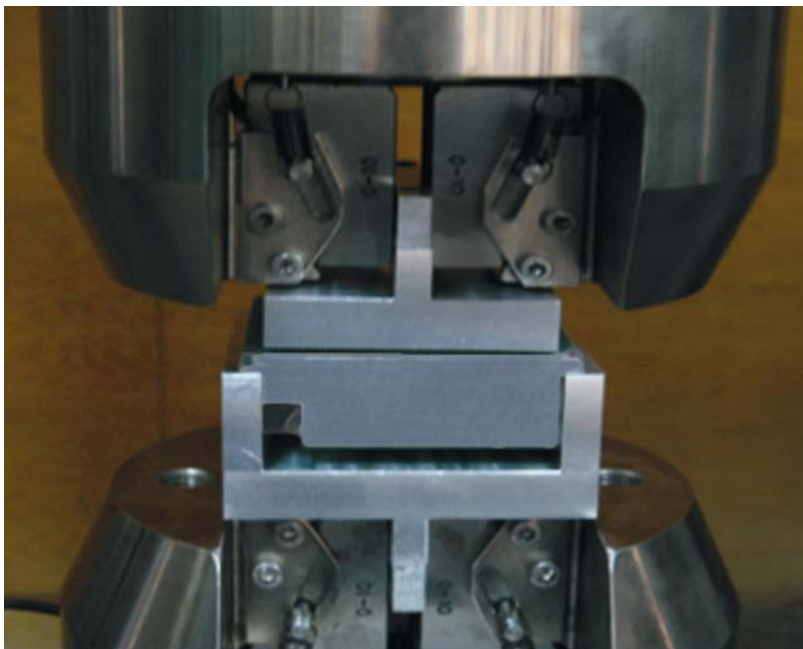


Fig. 3.20. Încercarea blocurilor de conectare

Pe baza studiilor realizate pe PMMA, Susmel [2008a] a reformulat metoda distanțelor critice, plecând de la observația că mecanismul de rupere se schimbă la modificarea gradului de multiaxialitate al câmpului tensiunilor de la baza concentratorilor. În varianta modificată, verificările efectuate au demonstrat aplicabilitatea metodei la evaluarea ruperii fragile a componentelor cu concentratori de tensiune sollicitate în moduri mixte (modul mixt I/II și modul mixt I/III).

Investigarea comportamentului la rupere al polimerului Necuron 1020 și pentru alte moduri de sollicitare, s-a realizat prin încercări de torsiune (modul III) pe epruvete cilindrice cu doi concentratori diferiți de tensiune – canal circumferențial rotund cu raza de  $1.5 [mm]$  și canal circumferențial în formă V cu raza la vârf  $\rho = 0.5 [mm]$  și deschiderea unghiulară de  $60^\circ$  (fig. 3.21). Curba caracteristică sarcină-deplasare prezintă o primă porțiune liniară urmată de una aproape orizontală, ce precede ruperea finală (fig. 3.21). Explicația acestui comportament se regăsește în mecanismul de rupere al polimerului Necuron 1020 la sollicitarea de torsiune. Astfel, ruperea este precedată de inițierea și propagarea unor fisuri mici la baza concentratorului, înclinate la aprox.  $45^\circ$  față de axa epruvetelor, fenomen ce

corespunde porțiunii orizontale a curbei caracteristice (fig. 3.21); ruperea finală se produce prin propagarea acestor fisuri și coalescența lor.

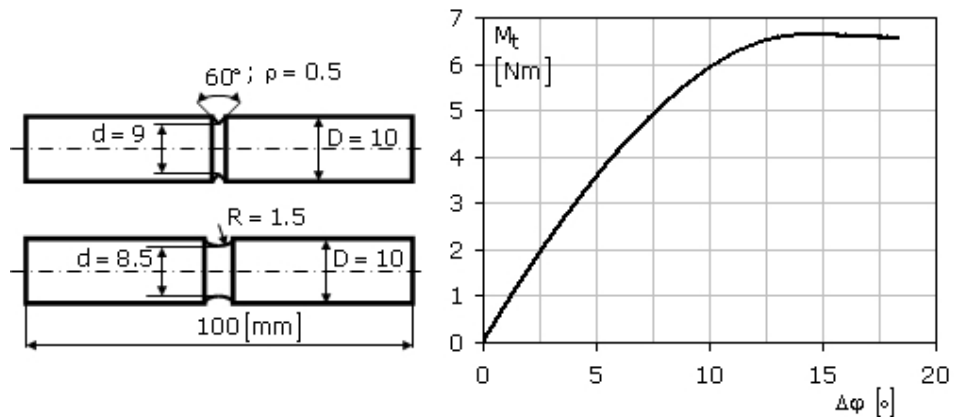


Fig. 3.21. Epruvetele și curba caracteristică sarcină-deplasare pentru torsiune

Valorile medii ale momentelor de torsiune maxime înregistrate pentru cele două tipuri de epruvete sunt:  $M_t = 6.526 [Nm]$  pentru concentratorul de tipul canal circumferențial rotund și respectiv  $M_t = 6.958 [Nm]$  pentru cel în formă de V.

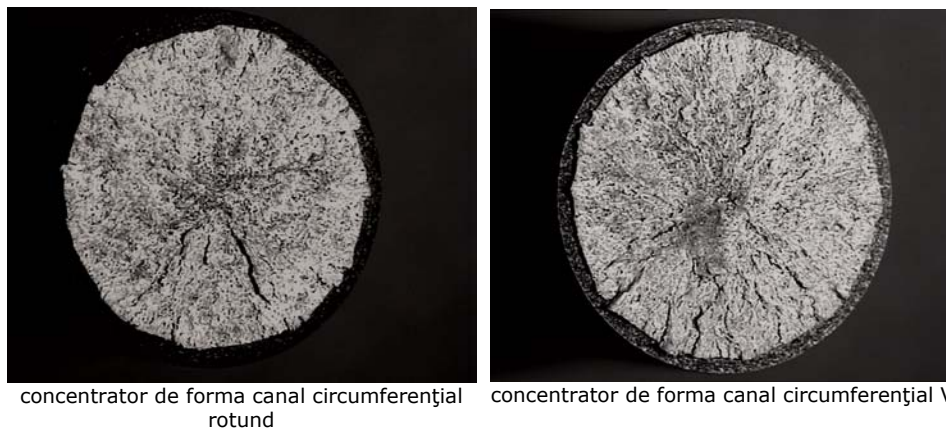


Fig. 3.22. Suprafața de rupere a polimerului Necuron 1020 la torsiune

Din analiza liniară cu elemente finite, pe baza valorilor medii înregistrate pentru momentele de torsiune maxime, s-au determinat mărimile caracteristice pentru modul III de solicitare: distanța critică  $L_t = 0.360 [mm]$  și tensiune critică  $\tau_0 = 58.8 [MPa]$  (fig.3.23). Prin comparație cu modul I de solicitare, dacă tensiunile critice sunt relativ apropiate ca valoare ( $\sigma_0 = 55.1 [MPa]$  și  $\tau_0 = 58.8 [MPa]$ ), între distanțele critice diferența este semnificativă ( $L_0 = 1.180 [mm]$  față de  $L_t = 0.360 [mm]$ ), fiind explicată de modificarea mecanismului de rupere la schimbarea modului de solicitare.

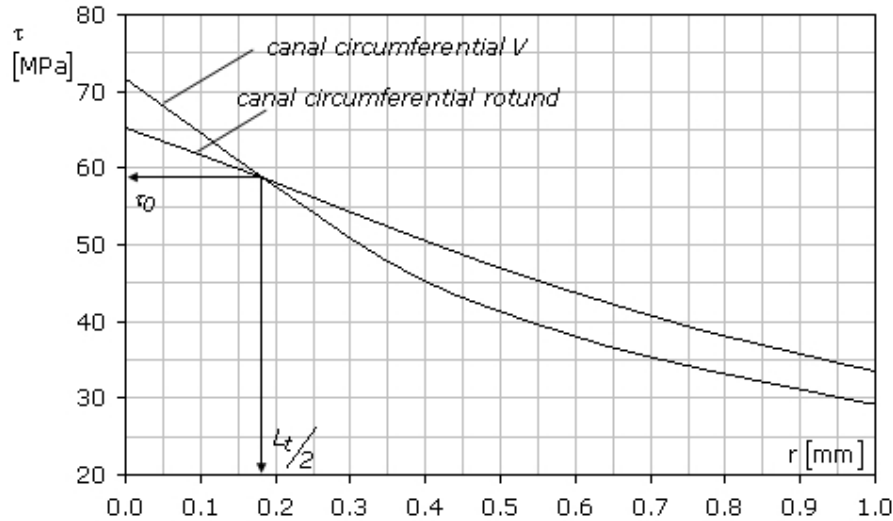


Fig. 3.23. Determinarea din analiza cu elemente finite a mărimilor caracteristice  $L_t$  și  $\tau_0$

### 3.4.2. Adaptarea metodei distanțelor critice pentru solicitări în moduri-mixte

Ipotezele care au constituit pentru Susmel [2008a] punctul de plecare în reformularea metodei distanțelor critice sunt:

- tensiunea critică nu depinde de gradul de multiaxialitate al câmpului tensiunilor de la baza concentratorului, astfel încât, la evaluarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune solificate în moduri mixte, se poate utiliza valoarea tensiunii critice  $\sigma_0$  determinată pentru modul I;
- distanța critică  $L$  se modifică la schimbarea gradului de multiaxialitate al câmpului tensiunilor de la baza concentratorului; pentru o solicitare mixtă I/III Susmel [2008a] introduce raportul tensiunilor principale ca o măsură a gradului de multiaxialitate

$$\beta(\varphi, r) = -\frac{\sigma_3(\varphi, r)}{\sigma_1(\varphi, r)} \quad (3.40)$$

observându-se din această relație că pentru o distanță  $r$ , de la baza concentratorului, valorile lui  $\beta(\varphi, r)$  se modifică cu orientarea  $\varphi$  a planului considerat, iar pentru o anumită orientare  $\varphi$  acesta se modifică cu distanța  $r$ .

- ruperea finală este produsă de propagarea unor fisuri mici, care se inițiază pe direcția planului caracterizat de tensiunile normale maxime  $\sigma_\varphi$  (planul critic).

După determinarea planului critic definit de unghiul  $\varphi^*$ , Susmel formulează cea de-a doua ipoteză admitând că un comportament liniar-elastic al materialului se traduce într-o dependență liniară între distanța critică și gradul de multiaxialitate:

$$L[\beta(\varphi^*, r)] = a\beta(\varphi^*, r) + b \quad (3.41)$$

unde constantele de material  $a$  și  $b$  se determină pentru două cazuri limită, modul I ( $\beta = 0$ ) și modul III de solicitare ( $\beta = 1$ ).

Modalitatea de aplicare practică a metodei punctului este prezentată grafic de Susmel [2008a], fig. 3.24. După localizarea punctului  $A$  de inițiere a fisurii de rupere, printr-o analiză liniar elastică numerică sau analitică se stabilește distribuția tensiunilor de-a lungul liniei drepte care pornește din acest punct și se determină gradul de multiaxialitate  $\beta$  în funcție de distanța  $r$  de la baza concentratorului și unghiul  $\varphi$ . Valoarea distanței critice se determină din relația:

$$\frac{L[\beta(\varphi^*, r)]}{2} - r = 0 \Rightarrow \frac{a\beta(\varphi^*, r) + b}{2} - r = 0 \quad (3.42)$$

unde  $\varphi^*$  este orientarea liniei drepte caracterizată prin tensiunea normală maximă  $\sigma_\varphi$ , la distanța determinată din (3.42).

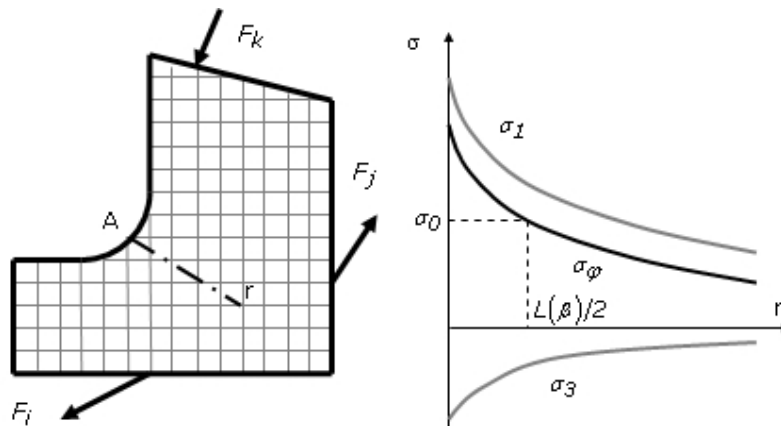


Fig. 3.24. Ilustrarea grafică a modalității de aplicare a metodei punctului (Susmel [2008a]) Astfel, ruperea se produce atunci când tensiunea normală maximă  $\sigma_\varphi$ , la distanța dată de (3.42), devine egală cu tensiunea critică  $\sigma_0$ .

### 3.4.3. Evaluarea ruperii blocului de conectare prin metoda punctului

Analiza cu elemente finite a blocului de conectare s-a realizat utilizând pachetul software CosmosWorks 2007. Discretizarea a urmărit generarea unei rețele fine de elemente finite în zona umerilor de fixare ai blocului și a găurilor străpunse din blocul de conectare. Condițiile la limită introduse în analiză reproduc condițiile reale de funcționare a blocului de conectare (fig. 3.25). Din rezultatele analizei s-a stabilit că punctul de inițiere a fisurii de rupere este localizat de-a lungul muchiei de legătură dintre umeri și corpul blocului (linia de culoare albastră în figura 3.25),

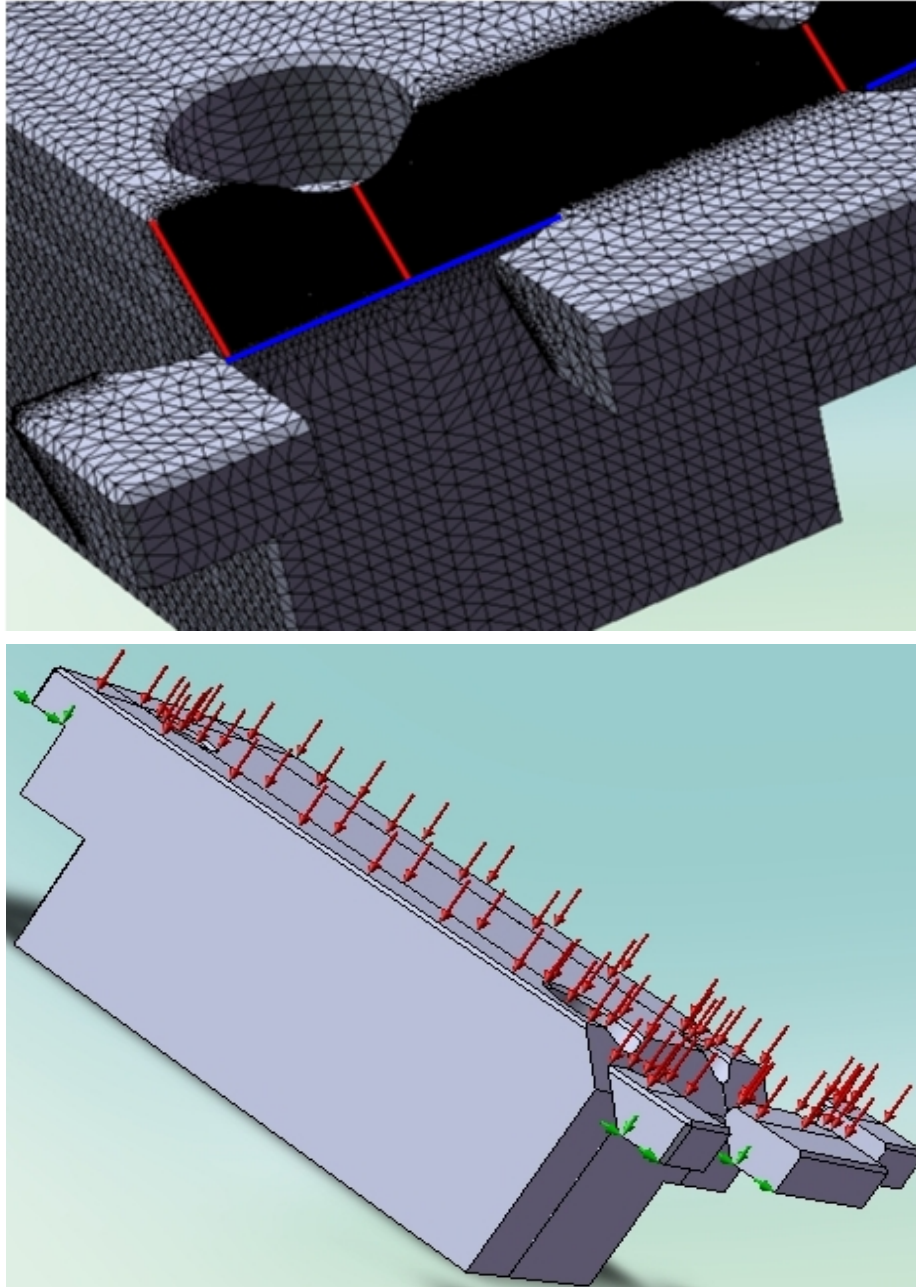


Fig. 3.25. Analiza cu elemente finite a blocului de conectare (discretizare și condiții la limită pentru  $\varphi = 45^\circ$ )

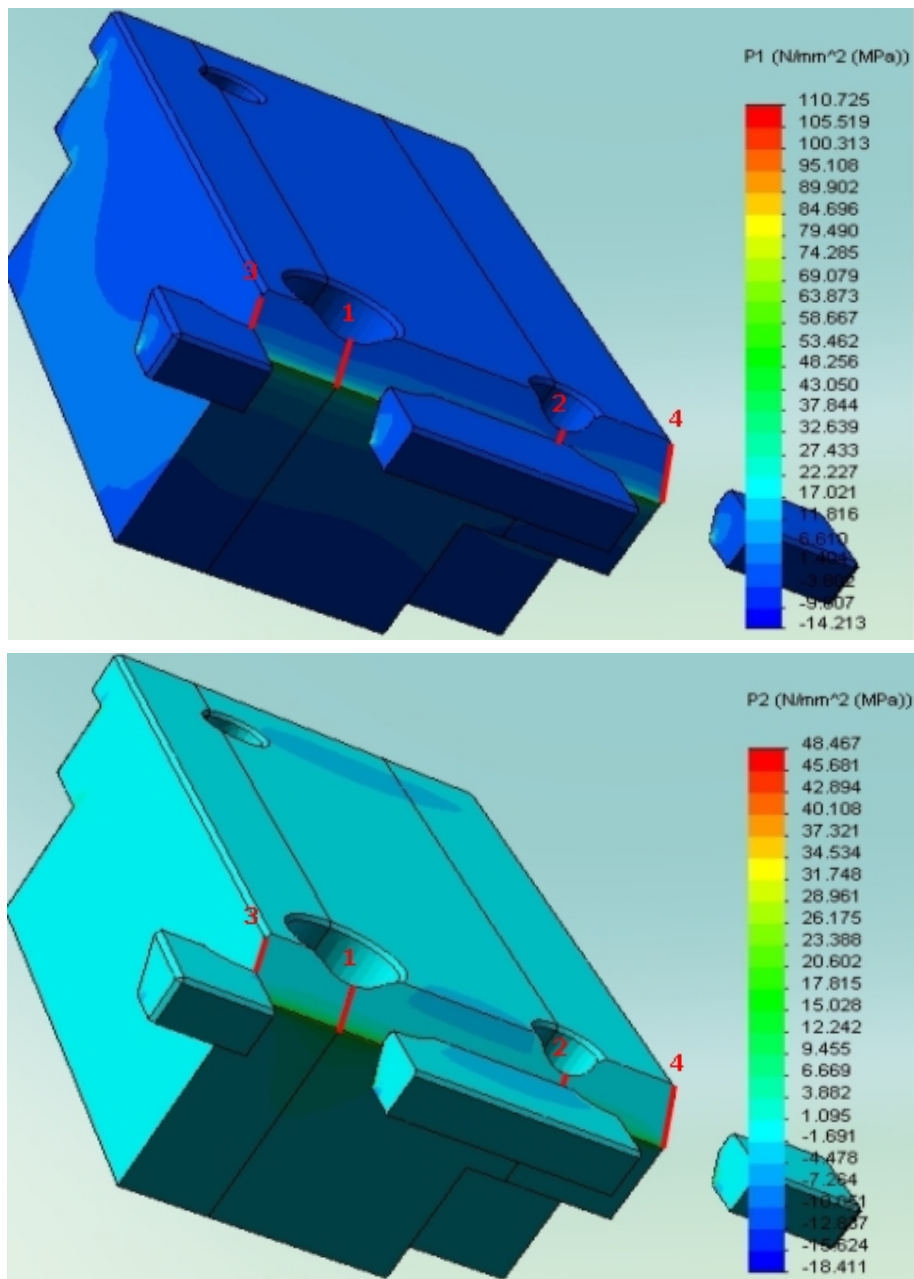


Fig. 3.26. Rezultatele analizei cu elemente finite (tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  pentru  $\varphi = 45^\circ$ )

fără să fie posibilă stabilirea exactă a poziției acestuia. Din acest motiv, s-a cercetat câmpul tensiunilor pentru patru posibile localizări: muchiile laterale și cele două găuri străpunse din blocul de conectare (traseele de culoare roșie din fig. 3.25 și fig.3.26). Analiza s-a realizat pentru următoarele valori ale unghiului de orientare a planului de secționare  $\varphi = 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ .

Prelucrarea rezultatelor s-a realizat admitând ipotezele: solicitarea blocului de conectare este una mixtă I/II; în plus, distanța critică determinată pentru modul III de solicitare se păstrează și pentru modul II. În aceste condiții, s-a definit gradul de multiaxialitate al solicitării prin raportul tensiunilor principale  $\sigma_2$  și  $\sigma_1$ :

$$\beta(\varphi, r) = \frac{\sigma_2(\varphi, r)}{\sigma_1(\varphi, r)} \quad (3.43)$$

Cunoscând distanțele critice  $L^* = 1.180 [mm]$  (pentru modul I, gradul de multiaxialitate  $\beta = 0$ ) și  $L_t = 0.360 [mm]$  (în ipoteza că această distanță este valabilă și pentru modul II,  $\beta = 1$ ) se evaluează coeficienții  $a$  și  $b$  din relația (3.41):

$$L[\beta(\varphi, r)] = -0.820\rho(\varphi, r) + 1.180 \quad (3.44)$$

iar din ecuația (3.42) se determină distanța critică pentru fiecare valoare a unghiului  $\varphi$ .

Tensiunile normale  $\sigma_\varphi$  pentru cele trei direcții de secționare și pentru fiecare din cele patru localizări posibile ale punctului de inițiere a fisurii de rupere se determină din cunoscutele relații ale teoriei elasticității

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi X} = \sigma_X \cos \alpha + \tau_{YX} \cos \beta + \tau_{ZX} \cos \gamma \\ \sigma_{\varphi Y} = \tau_{XY} \cos \alpha + \sigma_Y \cos \beta + \tau_{ZY} \cos \gamma \\ \sigma_{\varphi Z} = \tau_{XZ} \cos \alpha + \tau_{YZ} \cos \beta + \sigma_Z \cos \gamma \end{cases} \quad (3.45)$$

unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile pe care normala la planul de secționare le face cu axele de coordonate, rezultând în final tensiunea normală  $\sigma_\varphi$ :

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\sigma_{\varphi X}^2 + \sigma_{\varphi Y}^2 + \sigma_{\varphi Z}^2} \quad (3.46)$$

Spre exemplificare, în fig. 3.27 sunt prezentate distribuțiile tensiunii normale  $\sigma_\varphi$  pentru poziția 1 (fig. 3.26) a punctului de inițiere a fisurii de rupere, la o presiune normală aplicată  $p = 1 [MPa]$ . După cum se remarcă planul critic este cel definit de unghiul  $\varphi^* = 45^\circ$ , pentru care distanța critică are valoarea minimă  $L(\beta)/2 = 0.385 [MPa]$  iar tensiunea normală maximă este  $\sigma_{\varphi^*} = 22.25 [MPa]$ . În mod similar, sunt conduse calculele și pentru celelalte poziții 2, 3, 4, dar rezultatele sunt lipsite de relevanță pentru evaluarea ruperii, poziția 1 corespunzătoare găurii străpunse de diametru maxim determinând cea mai mică valoare a presiunii aplicate, corespunzătoare cedării blocului de conectare (acesta este și motivul pentru care s-a ales spre reprezentarea grafică poziția 1).



În tab.3.8 sunt prezentate comparativ estimările pentru presiunea aplicată critică  $p_U$  în pozițiile 1 și 2, pentru direcțiile definite de unghiul  $\varphi = 45^\circ; 60^\circ; 70^\circ$ .

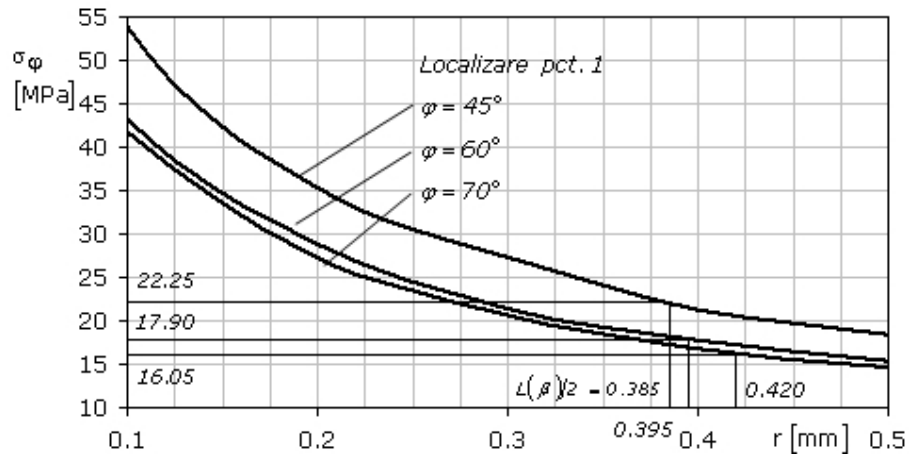


Fig. 3.27. Tensiunea normală  $\sigma_\varphi$  pentru o presiune normală aplicată  $p = 1$  [MPa]

Tabel 3.8

Localizare / Direcție	Poziția 1		Poziția 2	
	$L(\beta)/2$ [mm]	$p_U$ [MPa]	$L(\beta)/2$ [mm]	$p_U$ [MPa]
$\varphi^* = 45^\circ$	0.385	<b>2.47</b>	0.350	2.59
$\varphi = 60^\circ$	0.395	3.07	0.385	3.08
$\varphi = 70^\circ$	0.420	3.43	0.405	3.41

Cunoscând aria suprafeței de aplicare a presiunii normale  $A = 2667$  [mm<sup>2</sup>] se determină forța critică  $F_U = 6587.5$  [N] la cedarea blocului de conectare, rezultând o eroare relativă de +20% față de valoare medie experimentală  $F_{max} = 5475$  [N].

Utilizarea metodei distanțelor critice la evaluarea ruperii fragile a componentelor cu concentratori de tensiune prezintă câteva avantaje incontestabile:

- aplicarea cu ușurință în practica inginerescă, în cazul problemelor complexe când o soluție analitică nu este disponibilă; aplicarea metodei implică o analiză liniar elastică cu elemente finite și cunoașterea unui număr minim de parametri ai materialului, distanța caracteristică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$ ;
- posibilitatea de integrare a metodei în modulele de postprocesare ale pachetelor software de analiză cu elemente finite;
- erorile de estimare  $\pm 20\%$  sunt considerate rezonabile pentru aplicațiile ingineresti.



## 4. APLICAȚII ALE CONCENTRATORILOR DE TENSIUNE ÎN OBOSEALA MATERIALELOR

### 4.1. Noțiuni introductive

Componentele structurale sunt deseori în funcționare solicate cu sarcini care variază periodic în timp, numite sarcini variabile. În secțiunile puternic solicate, de exemplu secțiunile concentratorilor de tensiune, aceste sarcini variabile produc degradări (deteriorări) locale ale materialului la nivel microscopic, a căror acumulare în timp poate conduce la dezvoltarea unor fisuri și în final la ruperea componentei respective. Fenomenul de acumulare a degradărilor ca rezultat al solictărilor variabile, ce produce în final ruperea componentei structurale, se numește *oboseală*.

Cercetarea fenomenului de oboseală a început cu studiile experimentale realizate la mijlocul secolului al XIX-lea de inginerul german A. Wöhler. Investigând ruperea osiilor de vagoane, el a introdus conceptul de *rezistență la oboseală* și a obținut prin încercări la încovoiere rotativă primele *curbe de oboseală* (numite și *curbe de durabilitate la solictări variabile*). Deoarece durata de viață variază în limite largi la variații mici ale tensiunii maxime  $\sigma_{max}$ , curbele de oboseală ale diferitelor metale și aliaje se reprezintă frecvent la scară dublu-logaritmică (fig. 4.1).

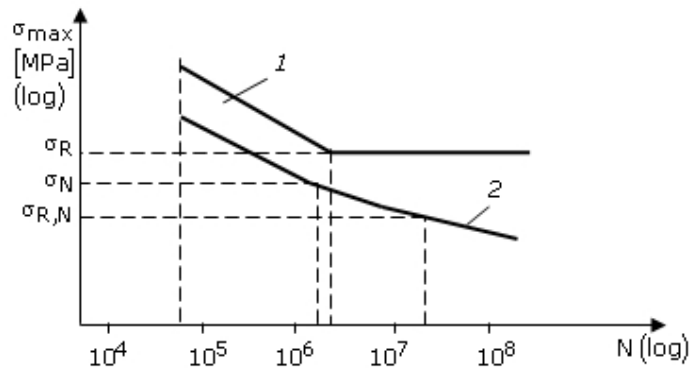


Fig. 4.1. Curbele la oboseală pentru un oțel moale (1) și un aliaj de aluminiu (2), Dumitru [2009]

Pentru axa tensiunilor se poate alege oricare dintre mărimile:  $\sigma_{max}$  - tensiunea maximă,  $\Delta\sigma$  - variația tensiunii sau  $\sigma_a$  - amplitudinea ciclului de solictare. În cazul anumitor materiale încercate în medii necorozive (oțeluri carbon de rezistență scăzută, oțeluri aliate și inoxidabile, aliaje pe bază de molibden și titan, Pană [2000]) curba de oboseală are o limită inferioară  $\sigma_R$  denumită *limită de oboseală*

(curba 1 în fig. 4.1). La oțeluri ea apare la durabilități  $N \geq 2 \cdot 10^6$  cicluri, valoare de la care curba de oboseală prezintă o asimptotă orizontală. La alte materiale (aluminiiu, cupru, magneziu, aliaje de nichel, unele oțeluri inoxidabile, oțeluri carbon și aliaje de mare rezistență, Pană [2000]), curba de oboseală nu are această asimptotă orizontală, ea continuând să scadă și în domeniul durabilităților mari. La curbele de acest tip (curba 2 în fig. 4.1) se acceptă o *limită de oboseală convențională*  $\sigma_{R,N}$ , definită ca valoarea tensiunii maxime corespunzătoare unei anumite durabilități  $N$ , definită uzual în domeniul  $10^7 - 10^8$  cicluri. În general, se folosește noțiunea de *rezistență la oboseală*, pentru a desemna atât limita de oboseală cât și limita de oboseală convențională. Din curba de oboseală se poate determina și o altă mărime, și anume *rezistența la oboseală*  $\sigma_N$  pentru o durabilitate limitată, reprezentând valoarea tensiunii maxime (egală pentru un ciclu alternant simetric cu amplitudinea  $\sigma_a$ ) care poate fi suportată la o anumită durabilitate de  $N$  cicluri.

Studiul fenomenului de oboseală s-a realizat pentru o mare varietate de configurații de epruvete și tehnici de experimentare. Din analiza rezultatelor obținute, s-a observat că rezistența la oboseală depinde de numeroși factori, cei mai importanți fiind: tipul epruvetei (epruvete fără sau cu concentratori de tensiune), modul de solicitare (axială, încovoiere, torsiune), nivelul tensiunii medii  $\sigma_m$  a ciclului de solicitare, domeniul tensiunilor sau deformațiilor ciclice (elastic sau plastic), gradul de finisare al suprafețelor, mediul de lucru.

Majoritatea studiilor dedicate comportării materialelor la solicitări variabile caracterizează procesul de degradare a acestora prin următoarele trei faze: inițierea fisurii, propagarea fisurii și ruperea finală (fig. 4.2, Dumitru [2009]).

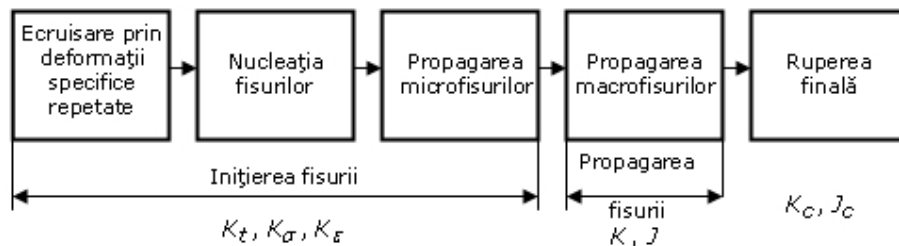


Fig. 4.2. Fazele procesului de deteriorare la solicitări variabile și parametrii care îl caracterizează

În privința metodelor de calcul, există trei abordări clasice:

- metoda bazată pe analiza tensiunilor (*Stress Life Approach*), abordare care are la bază utilizarea *curbei de oboseală* (*curba Wöhler*) trasată în coordonatele  $\sigma - N$  ( $\sigma$  - tensiunea nominală calculată cu relațiile din rezistența materialelor,  $N$  - numărul de cicluri până la rupere);
- metoda bazată pe analiza deformațiilor (*Strain Life Approach*) utilizează curbe de oboseală în coordonate  $\varepsilon - N$  ( $\varepsilon$  - deformația specifică locală,  $N$  - numărul de cicluri până la rupere);
- metoda tolerării defectelor (*Damage Tolerant*) analizează evoluția fisurilor de oboseală pe baza conceptelor mecanicii ruperii.

Alături de aceste metode clasice, sunt de amintit o serie de metode dezvoltate în ultimele două decenii: metoda distanțelor critice (Taylor [1999]),

metoda modelării fisurii (Taylor [1999a], [2000], Wang [2000]), metoda volumetrică (Nui [1994], Qylafku [1999], Pluvinage [2003], Adib [2003]). Amploarea cercetărilor actuale determină o reconsiderare continuă a conceptelor, a metodelor experimentale și de calcul.

## 4.2. Determinarea experimentală a rezistenței la oboseală pe epruvete cu concentratori de tensiune

Încercările la oboseală s-au realizat la solicitarea de tracțiune uniaxială în Laboratorul de Rezistența Materialelor al Universității "Politehnica" din Timișoara, pe o mașină Walter+bai de 100 kN pentru încercări statice și variabile, în regimul de forță controlată. S-au realizat încercări la oboseală cu amplitudine constantă, pentru un coeficient de asimetrie  $R = 0.5$  și frecvența 20 [Hz], pe epruvete netede fără concentrator (tip A) și pe trei tipuri de epruvete cu concentratori de tensiune (tip B, C, D), păstrându-se constantă adâncimea  $a$  concentratorului (fig. 4.3). Secțiunea netă a epruvetelor cu concentratori de tensiune este egală cu cea a epruvetelor netede. Coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor (net  $K_{tN}$  și global  $K_{tG}$ ) s-a determinat pentru fiecare tip de epruvetă prin analiză cu elemente finite (vezi și subcapitolele 2.1.3 și 2.3).

Epruvetele au fost realizate din aliajul de aluminiu 2024-T3, ale cărui proprietăți mecanice s-au determinat prin încercări de tracțiune uniformă uniaxială: rezistența la rupere convențională  $\sigma_r = 456$  [MPa], limita de curgere convențională  $\sigma_c = 322.45$  [MPa], modulul de elasticitate longitudinal  $E = 73000$  [MPa] (valoarea coeficientului de contracție transversală  $\nu = 0.33$  s-a stabilit în baza datelor din literatura tehnică). Valorile determinate experimental sunt în bună concordanță cu datele publicate în literatura tehnică (Fatemi [2005], Mohanty [2009]). Rezultatele încercărilor sunt prezentate în tab.4.1, pentru fiecare tip de epruvetă, prin amplitudinea tensiunii  $\sigma_a$  și numărul de cicluri  $N$  până la rupere.

Tabel 4.1

epruvetă $\sigma_a$ [MPa]	tip A $N$ [cicluri]	tip B $N$ [cicluri]	tip C $N$ [cicluri]	tip D $N$ [cicluri]
78.86	54200	-	-	-
67.60	140700	-	-	-
56.33	344200	53700	-	-
50.70	589500	92300	-	-
45.07	1081400	145700	45300	-
39.43	1349000 <sup>*)</sup>	251800	89250	-
33.80	-	551300	173800	57400
28.17	-	1277800	320300	108400
25.35	-	-	498700	152700
22.53	-	-	821700	250800
19.72	-	-	-	397200
16.90	-	-	-	764500

<sup>\*)</sup> epruvetă neruptă

Pentru epruvetele cu concentratori de tensiune, la câteva trepte de încărcare, s-au efectuat măsurători ale lungimii fisurii de oboseală folosind un sistem optic (factor de multiplicare  $30\times$ ), rezultatele fiind prezentate în subcapitolul 4.4.

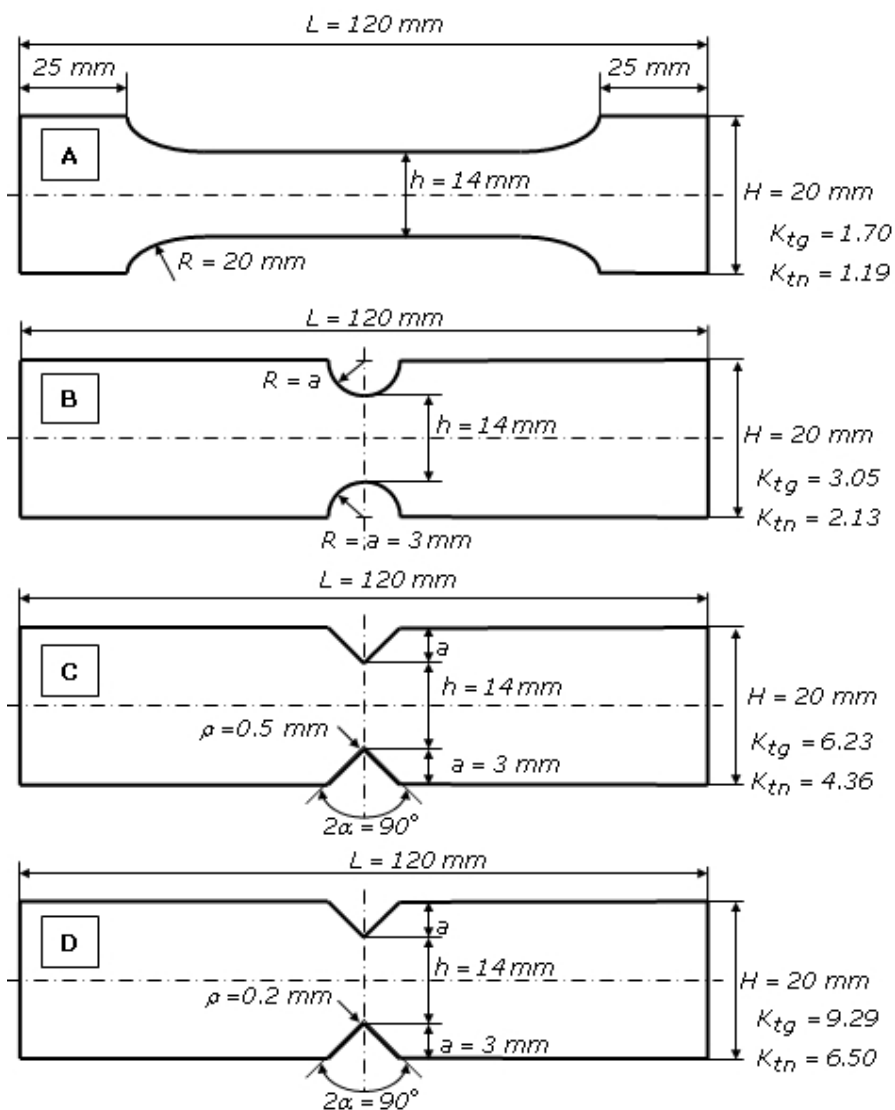


Fig. 4.3. Tipuri de epruvete plate utilizate pentru încercările de oboseală (aliaj de aluminiu 2024-T3, grosime  $t = 3.17\text{ mm}$ )

Curbele de oboseală  $\sigma - N$ , prezentate în coordonate dublu logaritmice (fig. 4.4), sunt descrise pe domeniul de durabilitate  $4 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^6$  cu ajutorul ecuației (4.1), Pană [2000]:

$$\sigma_a = (\sigma_f - \sigma_m)(2N)^b, \quad (4.1)$$

unde  $b$  - exponentul rezistenței la oboseală,  $\sigma_f$  - coeficientul rezistenței la oboseală a materialului, iar  $(2N)$  - numărul de inversiuni până la rupere.

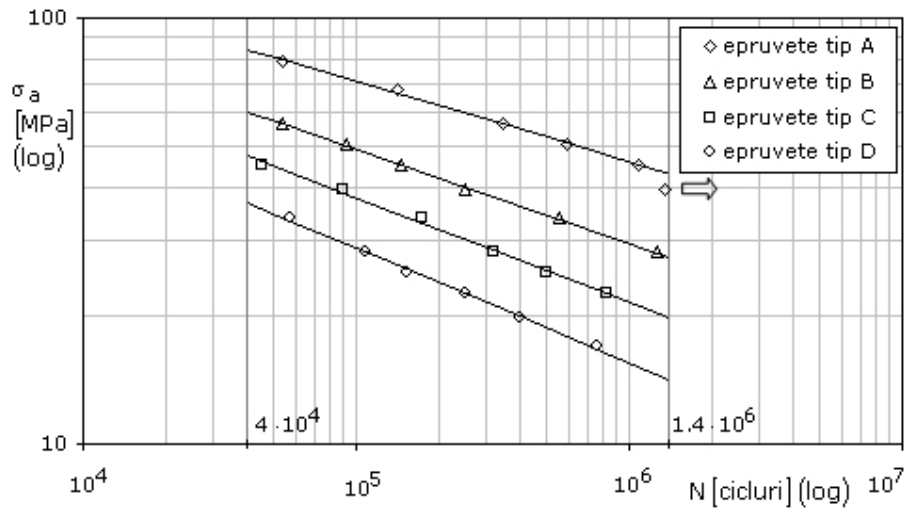


Fig. 4.4. Curbele de oboseală în coordonate dublu logaritmice

Se remarcă o împrăștiere redusă a rezultatelor experimentale pentru toate tipurile de epruvete, valoarea minimă a coeficientului de corelație, obținută pentru epruvetele tip C, fiind  $R^2 = 0.9966$ . Prezența concentratorilor de tensiune conduce la reducerea rezistenței la oboseală  $\sigma_N$  stabilită pentru o durabilitate limitată  $N = 1.4 \cdot 10^6$  cicluri. Efectul este mai important pentru valorile ridicate ale coeficientului teoretic de concentrare  $K_t$ .

### 4.3. Calculul la solicitări variabile pe baza tensiunilor (abordarea $\sigma-N$ )

#### 4.3.1. Coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile $K_f$

Rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune depinde de coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$ , dar și de alți factori, și anume raza la vârful concentratorului  $\rho$ , rezistența la rupere statică a materialului

$\sigma_r$ , nivelul de solicitare prin tensiunea medie  $\sigma_m$  și amplitudinea  $\sigma_a$  (sau, cu alte cuvinte, prin *caracteristica ciclului*  $A = \sigma_a/\sigma_m$ ).

În metoda de calcul bazată pe analiza tensiunilor (*Stress Life Approach*) efectul concentratorilor este luat în considerare la modificarea curbelor de oboseală  $\sigma-N$  obținute pentru epruvete fără concentratori, prin utilizarea *coeficientului efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile*  $K_f$ , Crețu [2004]:

$$K_f = \frac{\sigma_R}{S_R} \quad , \quad (4.2)$$

unde  $\sigma_R$  reprezintă rezistența la oboseală determinată pe epruvetă netedă fără concentrator,  $S_R$  rezistența la oboseală determinată pe epruvetă cu concentrator, care are secțiunea netă în zona concentratorului egală cu secțiunea nominală a epruvetei fără concentrator.

De regulă,  $K_f$  se definește și se determină pentru o solicitare variabilă după un ciclu alternant simetric, pentru care  $R = -1$  și tensiunea medie  $\sigma_m = 0$ , cele prezentate în continuare referindu-se la acest caz.

Coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  nu este în general egal cu coeficientul teoretic de concentrare  $K_t$ , legătura realizându-se prin *coeficientul de sensibilitate la oboseală al concentratorului*  $q$ , după cum a fost definit de Peterson [1974]:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \Rightarrow K_f = 1 + q(K_t + 1), \quad (0 < q < 1), \quad (4.3)$$

unde  $K_t$  este definit pe baza secțiunii nete ( $K_{tn}$  în fapt). Pentru un grad de asimetrie  $R = -1$ , coeficientul  $K_f$  ia valori între 1 și  $K_t$ . Sensibilitatea maximă la oboseală a unui concentrator se obține atunci când  $K_f = K_t$ , și prin urmare  $q = 1$ ; pentru  $K_f = 1$  (deci  $q = 0$ ) efectul de concentrare a tensiunilor nu se manifestă. Coeficientul de sensibilitate  $q$  a fost utilizat de Peterson [1974] pentru a ilustra efectele rezistenței materialului și dimensiunii concentratorului (prin raza la baza concentratorului  $\rho$ ): valorile lui  $q$  sunt mai mari pentru materialele cu rezistență ridicată și pentru concentratori cu raza  $\rho$  mare. Diferența dintre  $K_f$  și  $K_t$  este explicată de Stephens [2001] pe baza gradientului relativ al tensiunii  $\chi$  și a deformațiilor plastice din zona de la baza concentratorului de tensiune.

Pornind de la relația de definiție (4.2), în ultima jumătate de secol au fost propuse numeroase expresii pentru  $K_f$ , ca rezultat al preocupărilor permanente, și încă actuale, de a găsi o expresie acceptabilă pentru diferite condiții.

Peterson [1959] a propus următoarea formulă empirică

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + c\rho/\rho} \Rightarrow q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{1 + c\rho/\rho} \quad (4.4)$$

utilizând, în locul tensiunii maxime de la baza concentratorului, tensiunea într-un punct situat la o anumită distanță. Se observă din relația (4.3) că valoarea lui  $K_f$  se apropie de  $K_t$  pentru o distanță caracteristică  $c\rho$  redusă și o rază  $\rho$  mare. În (4.3)

parametrul de material  $c_p$  reprezintă o distanță caracteristică, ale cărei valori sunt date sub forma unor relații empirice în funcție de rezistența la rupere  $\sigma_r$ . Pentru aliajele de aluminiu Peterson estimează această distanță caracteristică prin  $c_p = 0.635 [mm]$ .

Într-o abordare similară, dar considerând valoarea medie a tensiunii determinată peste o anumită distanță de la baza concentratorului, Neuber [1961] a introdus relația

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{c_N/\rho}} \Rightarrow q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{c_N/\rho}} \quad (4.5)$$

unde lungimea caracteristică  $c_N$  este un parametru de material. Evaluarea relației (4.5) făcută de Kuhn [1952], a demonstrat că soluția propusă de Neuber este pentru diferite oțeluri și aliaje de aluminiu una suficient de exactă; în plus, pentru aliajul de aluminiu 2024-T3, Kuhn [1952] a găsit  $c_N = 0.5 [mm]$ ). Valori pentru lungimea caracteristică  $c_N$ , la aliajele de aluminiu, sunt date și de Grover [1966] în funcție de rezistența la rupere (tab.4.2).

Tabel 4.2

$\sigma_r [MPa]$	150	300	600
$c_N [mm]$	2	0.6	0.4

O altă expresie utilizată la estimarea efectului concentratorilor de tensiune asupra rezistenței la oboseală pentru  $\sigma_m = 0$  este cea propusă de Siebel [1955]:

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \sqrt{c_S \chi}} \quad , \quad (4.6)$$

unde  $c_S$  este o constantă de material, iar  $\chi$  este gradientul relativ al tensiunii, evaluat după expresia (1.18):

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{max}} \left( \frac{d\sigma_y}{dx} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\rho} \left( 2 + \frac{1}{K_t} \right) \cong \frac{2}{\rho} \quad , \quad (4.7)$$

pentru solicitarea de tracțiune, în baza variabilității reduse a expresiei dintre paranteze  $(2 + 1/K_t)$ .

Alte expresii ale coeficientului efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  sunt utilizate în literatura tehnică: Heywood [1962], Buch [1988] a cărei expresie utilizează doi parametri de material, Ye [1996] o derivare din regula lui Neuber (1.27), și anume  $K_f = \sqrt{K_\sigma K_\varepsilon}$ .

Utilizarea coeficientului efectiv  $K_f$  la estimarea rezistenței la oboseală pentru epruvete cu concentratori de tensiune în cazul  $\sigma_m = 0$ , impune câteva observații finale:

- formulele propuse de Peterson (4.4) și Neuber (4.5) pentru estimarea coeficientului efectiv  $K_f$  sunt relații empirice. Comparația variației coeficientului de sensibilitate la oboseală  $q$  în funcție de raza la vârful concentratorului  $\rho$ , pentru un

aliaj de aluminiu de rezistență ridicată cu  $c_N = 0.5$  și  $c_P = 0.635$  (fig. 4.5), indică o sensibilitate ridicată a acestuia, mai ales în prezența concentratorilor rotunjiți (cu raza la vârf  $\rho$  mare);

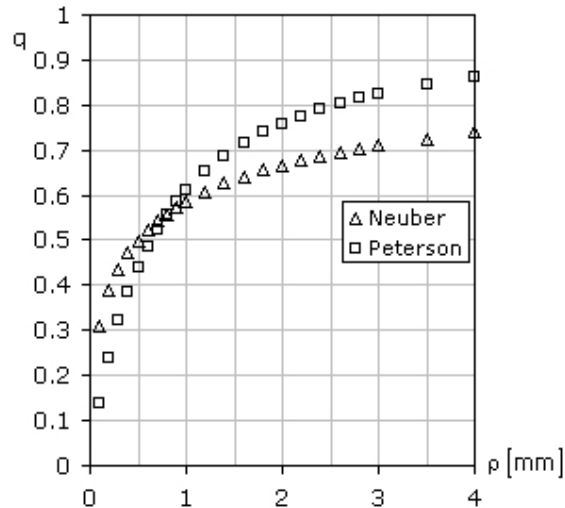


Fig. 4.5. Variația coeficientului de sensibilitate după Neuber și Peterson

- aceste formule și distanțele caracteristice asociate lor exprimă faptul că pentru o rază  $\rho$  mare la baza concentratorului  $K_f$  se apropie de valoarea coeficientului teoretic  $K_t$ , iar pentru un concentrator cu raza la vârf  $\rho$  mică  $K_f \ll K_t$ , în cazul metalelor cu un comportament ductil, dar rămâne relativ mare pentru metalele cu rezistență ridicată;

- pentru cazul concentratorilor ascuțiți (în particular, al unei fisuri) când  $\frac{c_P}{\rho}$  și  $\frac{c_N}{\rho} \gg 1$  cele două formule conduc la estimări contrare. Înlocuind  $K_t$  cu soluția Inglis [1913], pentru un concentrator eliptic cu semiaxa mare  $a$ ,  $K_t = 1 + 2\sqrt{a/\rho}$ , Ciavarella [2004] a demonstrat pentru  $\rho \rightarrow 0$  că

$$K_f \rightarrow 1 + \frac{\rho}{c_P} (K_t - 1) = 1 + 2\sqrt{\frac{a\rho}{c_P}} \rightarrow 1, \forall a \quad (\text{Peterson}) \quad (4.8)$$

și

$$K_f \rightarrow 1 + (K_t - 1)\sqrt{\frac{\rho}{c_N}} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{c_N}} \rightarrow (1 + \infty), \text{ pentru } a \in (0 + \infty). \quad (\text{Neuber}) \quad (4.9)$$

Așadar, formula lui Peterson supraestimează rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentratori ascuțiți sau fisuri. Ciavarella a propus și o îmbunătățire a celor două expresii pe baza conceptelor din mecanica ruperii liniar elastice. În schimb, în cazul



concentratorilor de tensiune rotunjiți ( $\rho$  mare) formula lui Neuber conduce la o valoare a coeficientului efectiv  $K_f \rightarrow K_t$ , când  $\rho \rightarrow \infty$ ;

- definit prin relația (4.1), coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  a fost inițial legat de estimarea limitei de oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune. Ulterior, definiția și-a lărgit sensul și pentru rezistența la oboseală  $\sigma_N$  pentru o durabilitate limitată (Pluvinage [2003]):

$$\Delta\sigma_N = K_f \Delta\sigma_{Nglobal} \quad (4.10)$$

unde  $\Delta\sigma_N$  este rezistența la oboseală pentru o durabilitate limitată ( $N$  cicluri) exprimată aici prin variația tensiunii, iar  $\Delta\sigma_{Nglobal}$  este variația tensiunii globale (calculată pentru secțiunea brută) aplicată epruvetei cu concentrator care conduce la o durabilitate de  $N$  cicluri.

- utilizând coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor  $K_f$  se poate determina rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune pentru solicitări ciclice alternant-simetrice ( $R = -1$ ), pe baza unui număr relativ de redus date.

#### 4.3.2. Determinarea rezistenței la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune pe baza diagramelor ciclurilor limită

Calculul la oboseală pe baza tensiunilor (abordarea  $\sigma - N$ ), pentru cazul acțiunii simultane a celor doi factori, tensiunea medie  $\sigma_m > 0$  și fenomenul de concentrare a tensiunilor, este întemeiat pe construcția diagramelor ciclurilor limită de tip Haigh. Aceste diagrame, construite în coordonate  $\sigma_a - \sigma_m$ , indică combinațiile tensiune medie  $\sigma_m$ , amplitudine  $\sigma_a$  și coeficient efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  ce corespund limitei de oboseală sau rezistenței la oboseală pentru o durabilitate de ordinul  $10^6 \div 10^8$  cicluri. Dintr-o asemenea diagramă se obține un punct al diagramei  $\sigma - N$ , cel ce-al doilea, necesar construcției acesteia în coordonate dublu logaritmice, se obține prin estimarea rezistenței la oboseală pentru o durabilitate limitată de ordinul  $10^3 \div 10^4$  cicluri.

O abordare simplificată pentru evaluarea rezistenței la oboseală care nu necesită construcția diagramei de tip Haigh (dealtfel, dificil de construit întrucât fiecare punct de pe curba ciclurilor limită necesită o încercare la oboseală pentru un ciclu cu gradul de asimetrie  $R$  cuprins între  $0 \div -1$ ) se bazează pe utilizarea ecuației Goodman, care pentru o epruvetă cu concentrator de tensiune se scrie în forma:

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_{-1}/K_f)} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = 1 \quad (4.11)$$

unde  $\sigma_{-1}$  reprezintă rezistența la oboseală pentru o solicitare alternant-simetrică. Schematizarea după ecuația (4.11), cu introducerea criteriului de curgere

$$\frac{\sigma_a}{\sigma'_c} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c} = 1 \quad , \quad (4.12)$$

unde  $\sigma'_c$  este limita de curgere la solicitări variabile, este ilustrată în fig. 4.6. Orice combinație  $\sigma_a - \sigma_m$  situată în exteriorul triunghiului format de  $-\sigma_c, \sigma'_c$  și  $\sigma_c$  corespunde stării de curgere generalizată, iar orice combinație situată deasupra liniei  $A-B$  va conduce pentru epruvetele netede la o durată de viață mai redusă decât  $10^6 \div 10^8$  cicluri.

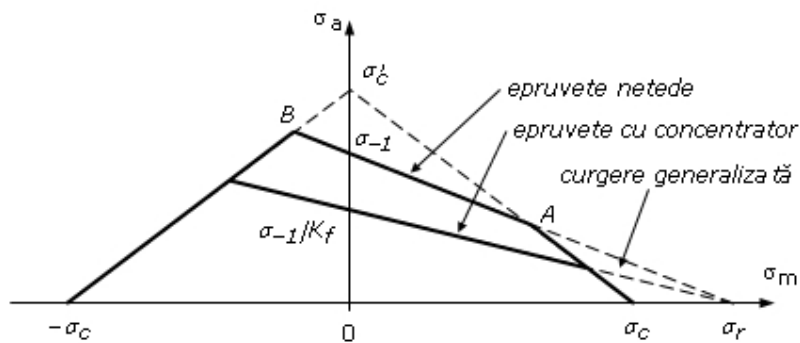


Fig. 4.6. Schematizare după ecuația lui Goodman

Pe baza unei astfel de diagrame se poate estima rezistența la oboseală pentru componentele cu concentratori pentru orice combinație dintre tensiunea medie  $\sigma_m$  și amplitudinea  $\sigma_a$ .

Pentru a estima rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune de tip  $B, C$  și  $D$  (fig. 4.3) din programul experimental, se construiesc diagramele Goodman pe baza caracteristicilor mecanice la solicitări statice și variabile ale aliajului de aluminiu  $2024-T3$ , determinate experimental sau preluate din literatura tehnică (tab.4.3)

Tabel 4.3

Caracteristici mecanice	$\sigma_r$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma'_c$ [MPa]	$\sigma_{-1}$ [MPa]
2024-T3	456	322.45	427 <sup>*)</sup>	114 <sup>**)</sup>

\*) preluare după Fatemi [2005]

\*\*\*) preluare după Fatemi [2005], pentru încovoiere rotativă

În cazul  $\sigma_m \neq 0$ , coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  este în mod clar diferit de valoarea coeficientului teoretic  $K_t$ , dar mai mult el se modifică cu tensiunea medie  $\sigma_m$ ; după cum se observă și din fig. 4.6,  $K_f$  descrește la majorarea tensiunii medii  $\sigma_m$  a ciclului de solicitare. Pentru solicitarea variabilă după un ciclu alternant simetric, coeficientul efectiv  $K_f$  s-a determinat pentru cele trei tipuri de concentratori după relația lui Neuber (4.5),

pentru  $c_N = 0.5$  (Grover [1966]), rezultând valorile următoare:  $K_{fB} = 1.8$ ,  $K_{fC} = 2.6$  și  $K_{fD} = 3.1$ , corespunzătoare coeficienților teoretici de concentrare  $K_{tB} = 2.13$ ,  $K_{tC} = 4.36$  și  $K_{tD} = 6.50$ . Valoarea rezistența la oboseală  $\sigma_{-1}$ , determinată pentru încovoiere rotativă, a fost corectată pentru întindere alternant simetrică prin scădere cu 30%. Diagramele prezentate în fig. 4.7 sunt construite pentru o durabilitate limitată  $N = 10^6$  cicluri.

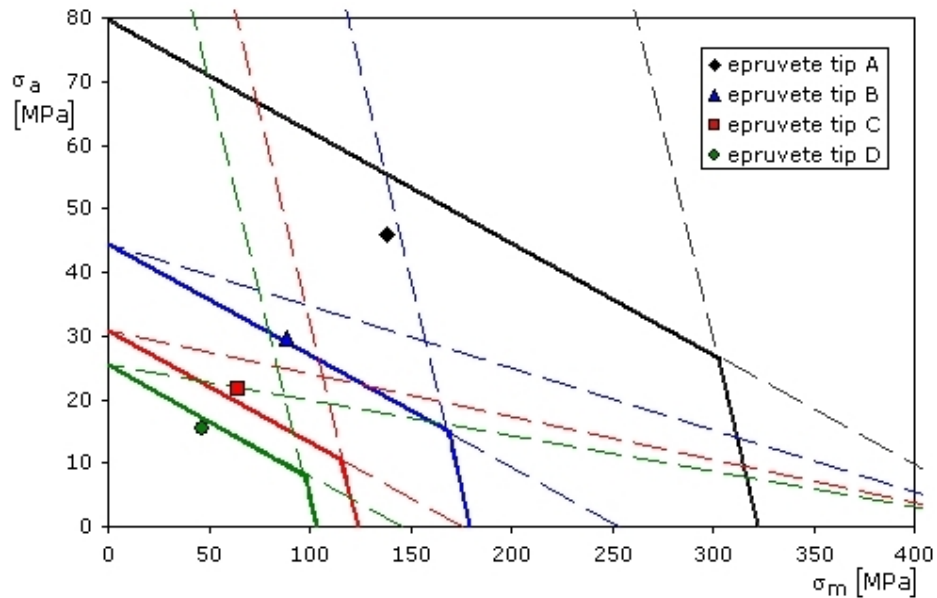


Fig. 4.7. Diagrama Goodman modificată pentru aliajul de aluminiu 2024 – T3

Punctele din fig. 4.7 reprezintă rezultatele experimentale obținute pe epruvete netede și cu concentratori la o durabilitate limitată  $N = 10^6$  cicluri. Se remarcă pentru aliajul de aluminiu 2024 – T3 o foarte bună concordanță a acestora cu estimările după diagrama Goodman modificată, dacă coeficientul de concentrare efectiv  $K_f$  se aplică atât amplitudinii  $\sigma_a$  cât și tensiunii medii  $\sigma_m$ . Acest comportament la oboseală este explicat prin faptul că la nivelul de încărcare corespunzător durabilității de  $10^6$  cicluri, tensiunile maxime la baza concentratorilor  $K_t \sigma_{max}$  nu depășesc limita de curgere  $\sigma_c$  și astfel nu apar fenomene de plasticitate (tensiunile maxime sunt în cele trei cazuri  $K_{tB} \sigma_{max} = 251.76$ ,  $K_{tC} \sigma_{max} = 281.22$ ,  $K_{tD} \sigma_{max} = 302.83$  [MPa]).

Explicația erorii relativ mari obținute în cazul epruvetelor netede este legată de existența unui coeficient efectiv de concentrare  $K_f = 1.166$  și în cazul acestora, neglijat în calcule, știut fiind faptul că obținerea unor epruvete „netede” (cu  $K_t = 1$ ) este practic imposibilă.

- În urma analizei sunt de subliniat câteva concluzii:
- nivelul tensiunii medii influențează în mod semnificativ rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentratori;
  - construcția acestor diagrame necesită un număr relativ redus de caracteristici mecanice ( $\sigma_c, \sigma_c', \sigma_{-1}, \sigma_r, K_f$ ), iar estimările sunt rezonabile;
  - variabilitatea coeficientului efectiv de concentrare  $K_f$  în funcție de tensiunea medie  $\sigma_m$ , poate conduce la creșterea acestuia până la valori apropiate de coeficientul teoretic  $K_t$ , iar acest fapt influențează proiectarea regimului de solicitare pentru componentele cu concentratori.

#### 4.4. Calculul componentelor cu concentratori de tensiune la solicitări variabile pe baza propagării fisurilor

Procesului de degradare la solicitări variabile îi sunt caracteristice trei etape distincte în care se manifestă mecanisme diferite.

Inițierea fisurii se referă la incipiența acesteia la baza concentratorilor de tensiune, în jurul unor defecte de material sau pe baza unor mecanisme care au loc la nivelul rețelei cristaline până când microfisura capătă dimensiunile care permit detectarea ei prin procedeele de control nedistructiv. Cu alte cuvinte, acestei etape îi este caracteristică inițierea microfisurilor și extinderea acestora până la nivelul de macrofisuri (în literatura tehnică este acceptată lungimea de  $\cong 0.1[mm]$ , de la care fisura este considerată inițiată). Cercetările experimentale au evidențiat că extinderea acestei etape poate reprezenta până la 90% din durata de viață a unei componente structurale.

Etapei de propagare a macrofisurii îi sunt dedicate cele mai complete studii, încurajate și de apariția unor metode moderne de măsurare: microscopia electronică, tehnica curenților turbionari, măsurătorile pe baza diferenței de potențial, emisiile acustice etc. În cursul acestei etape microfisura se extinde cu o viteză mai mare sau mai mică în funcție de material și de intensitatea solicitării aplicate, putând atinge lungimi de la câțiva centimetri până la cele de ordinul metrilor în funcție de dimensiunile componentei structurale.

Ruperea finală se produce atunci când lungimea fisurii atinge o valoare la care apare instabilitatea în extensia ei.

Evoluția unei fisuri în cursul propagării se urmărește pe baza diagramei  $a-N$ , unde  $a$  este lungimea fisurii, iar  $N$  numărul de cicluri aplicat. Trasarea diagramei  $a-N$  reprezintă o problemă majoră în mecanica ruperii, deoarece pe baza acesteia se poate aprecia durata de viață a unei componente structurale în care s-a inițiat o fisură detectabilă, adică o fisură având o lungime minimă  $a_d$  care poate fi detectată prin metode nedistructive.

În urma încercărilor de oboseală, pentru epruvetele de tip  $B, C, D$  s-au trasat diagramele de variație a lungimii fisurii  $a$  în funcție de numărul de cicluri  $N$  (fig. 4.8), pentru diferite raze la vârful concentratorului  $\rho$  și valori ale tensiunii maxime  $\sigma_{max}$  (gradul de asimetrie s-a păstrat constant, și anume  $R = 0.5$ ).

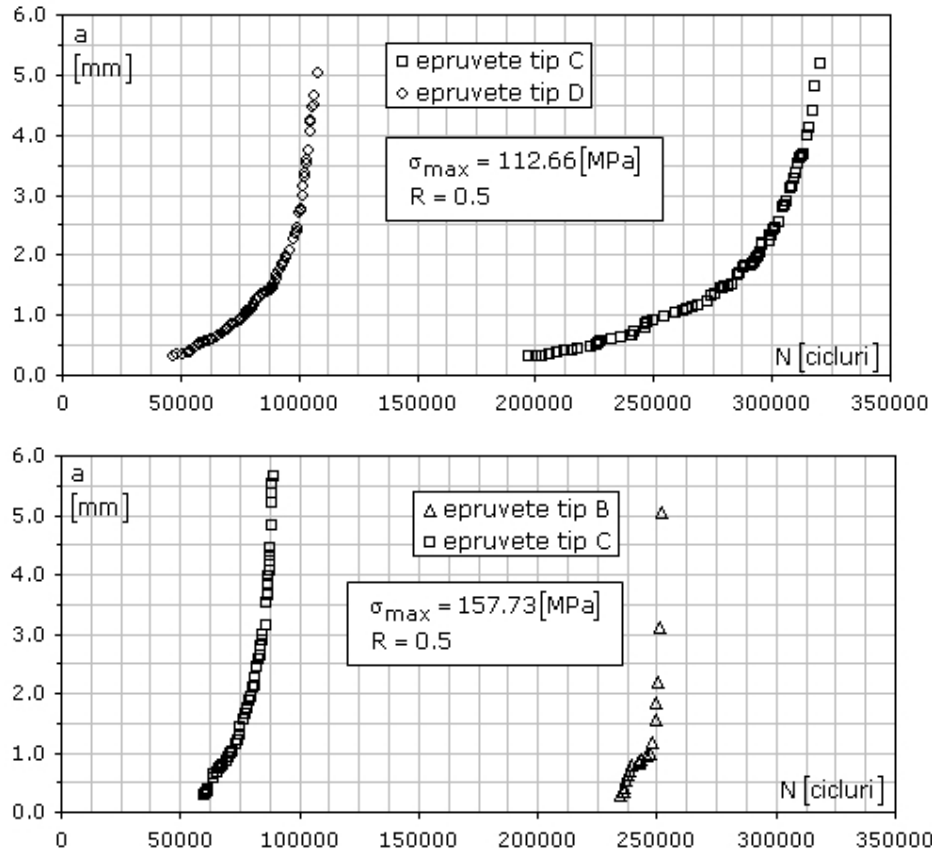


Fig. 4.8. Diagrame  $a-N$  pentru aliajul de aluminiu 2024 - T3

Pentru diagramele din fig. 4.8 datele sunt prezentate în tab.4.4.,

Tabel 4.4

Epruvete tip	$\sigma_{max}$ [MPa]	$a_d$ [mm]	$N_i$ [cicluri]	$a_{cr}$ [mm]	$N_p$ [cicluri]
C ( $\rho = 0.5$ )	112.66	0.3	197200	5.17	123100
D ( $\rho = 0.2$ )	112.66	0.3	46670	5.02	61730
C ( $\rho = 0.5$ )	157.73	0.3	60400	5.65	28850
B ( $\rho = 3.0$ )	157.73	0.3	234500	5.05	17300

unde:  $a_d$  reprezintă lungimea detectată a fisurii la  $N_d$  cicluri, iar  $a_{cr}$  lungimea critică a fisurii la care se produce ruperea finală, numărul de cicluri necesar propagării  $N_p$ , de la detectare până la rupere.

Se remarcă din datele experimentale că durata până la detectarea fisurii  $N_d$  depinde (la  $R=0.5$  constant) în primul rând de raza  $\rho$  de la vârful concentratorului:

- pentru cea mai mare rază la vârf  $\rho = 3.0[mm]$  etapa de inițiere, care depinde de starea de tensiune din zona concentratorului, prevalează reprezentând aprox. 93% din durata de viață;
- pentru raza la vârf  $\rho = 0.5[mm]$ , de valoare intermediară, etapa de inițiere reprezintă între 61.6% – 67.7% din durata de viață, în funcție de nivelul solicitării;
- în schimb, pentru cea mai mică rază la vârf  $\rho = 0.2[mm]$  etapa de propagare a fisurii devine cea mai importantă (60%).

Unul dintre parametrii de bază prin care se apreciază ruperea la oboseală este viteza de propagare a fisurii  $da/dN$ , care reprezintă lungimea cu care se propagă fisura pe un ciclu de solicitare. Pentru diferite lungimi ale fisurii viteza de propagare se obține calculând panta diagramei  $a-N$ . Viteza de propagare a fisurii  $da/dN$  depinde de lungimea inițială și de nivelul sau amplitudinea tensiunii aplicate, mărimi care intervin în expresia factorului de intensitate a tensiunii  $K$ . În principiu, la creșterea lungimii fisurii inițiale, respectiv a nivelului de solicitare, crește și viteza de propagare a fisurii. Astfel, a apărut ideea că viteza de propagare a fisurii de oboseală se poate corela cu variația factorului de intensitate a tensiunii, adică  $da/dN = f(\Delta K = K_{max} - K_{min})$ .

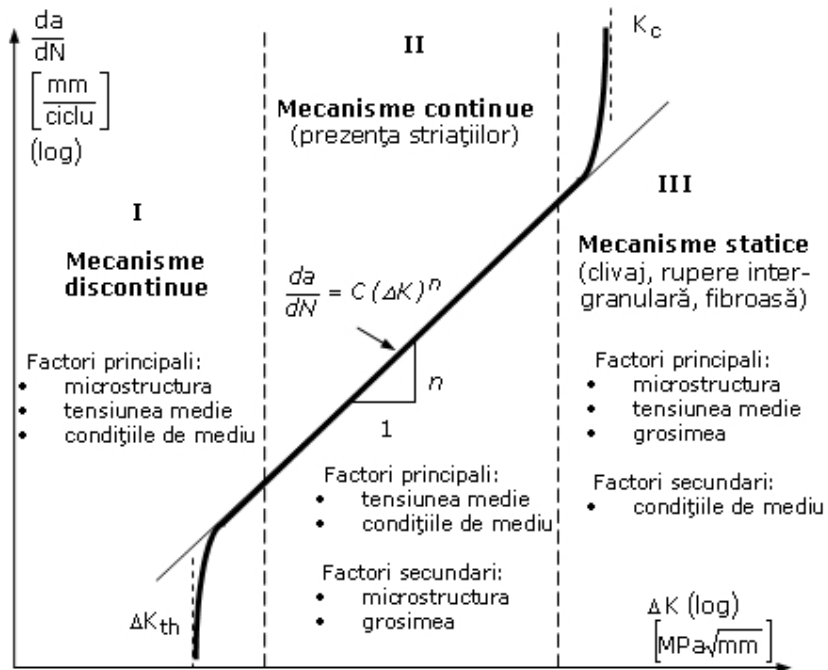


Fig. 4.9. Forma generală a diagramei  $da/dN - \Delta K$  (Dumitru [2001])

Diagramele  $da/dN - \Delta K$  se reprezintă de regulă în coordonate dublu logaritmice, forma generală a dependenței fiind reprezentată în fig. 4.9. Ea are forma unei sigmoide și se împarte în trei domenii distincte:

Domeniul I este caracterizat de existența unei valori de prag a variației factorului de intensitate a tensiunii  $\Delta K_{th}$  sub care o fisură existentă nu se propagă. La o amplitudine a solicitării mai mare decât valoarea de prag,  $da/dN$  crește rapid cu  $\Delta K$ . În acest domeniu, viteza de creștere a fisurii variază de la valori mai mici de  $10^{-8}$  [mm/ciclu], cât este sub pragul de propagare, până la valori de cel mult  $10^{-5}$  [mm/ciclu].

Domeniul II este caracterizat prin dependența liniară între  $\log(da/dN)$  și  $\log(\Delta K)$ , de forma ecuației lui Paris [1963]:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad , \quad (4.13)$$

unde  $C$  și  $n$  sunt constante de material. Pentru a ține cont și de gradul de asimetrie  $R$  al ciclului, Walker [1970] a propus relația de calcul a vitezei de creștere a fisurii:

$$\frac{da}{dN} = C \frac{\Delta K^n}{(1-R)^m} \quad , \quad (4.14)$$

în care  $C, n$  și  $m$  sunt constante de material asemănătoare celor din legea lui Paris.

În domeniul III variația factorului de intensitate a tensiunii  $\Delta K$  este mare și tinde către valoarea sa critică  $K_C$ , astfel încât viteza de propagare a fisurii crește nelimitat conducând la propagarea instabilă a acesteia.

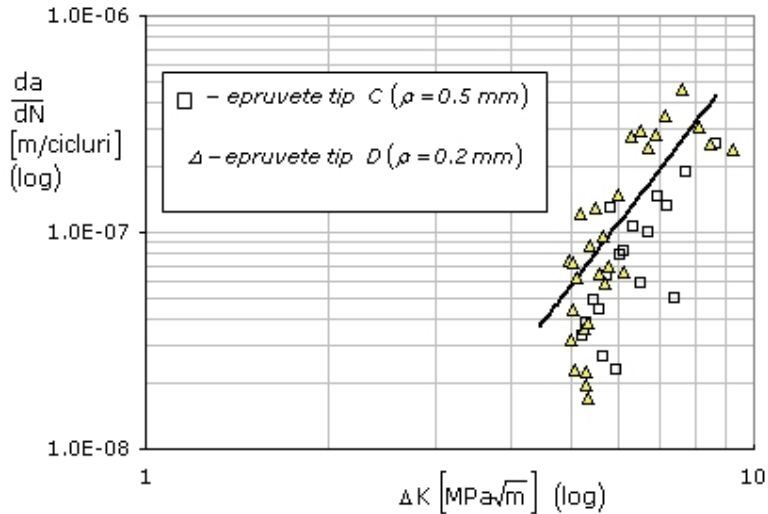


Fig. 4.10. Variația vitezei de propagare a fisurilor în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii pentru aliajul de aluminiu 2024 - T3 ( $R = 0.5$ )

Pe baza rezultatelor experimentale  $a - N$  (fig. 4.8), pentru nivelul maxim  $\sigma_{max} = 112.66$  [MPa] al solicitării variabile, s-a reprezentat în coordonate dublu

logaritmice viteza de propagare a fisurii  $da/dN$  în funcție de  $\Delta K$  la vârful fisurii, utilizând metoda secantei, conform *ASTM E 647 – 00*.

Factorul de intensitate a tensiunii  $K$  la vârful fisurii dezvoltate la baza concentratorului de tensiune s-a calculat după soluția prezentată de Murakami [1987], pentru creștătura laterală în  $V$  cu vârful rotunjit:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi(c+a)}}{\sqrt{1-\eta}} \left( 1.122 - 0.561\eta - 0.362\eta^2 + 0.785\eta^3 - 0.347\eta^4 \right), \quad (4.15)$$

unde termenul  $(c+a)$  reprezintă suma dintre adâncimea concentratorului și lungimea fisurii, iar  $\eta = 2(c+a)/H$ .

Admițând o variație de forma ecuației lui Paris (4.13), prin interpolare s-au determinat constantele  $C = 1.47 \cdot 10^{-10} \left[ \frac{m}{\text{ciclu} (MPa\sqrt{m})^n} \right]$  și  $n = 3.7$  pentru aliajul de aluminiu *2024-T3* (fig. 4.10), rezultatele obținute fiind în concordanță cu cele publicate în literatura tehnică (Harter [2008]). Cunoscând aceste constante, se determină durata de viață a unei componente, exprimată prin numărul de cicluri necesar pentru ca o fisură să se extindă, dintr-o relație de forma (4.13) sau (4.14), prin rezolvare în funcție de  $dN$  și integrare.

## 4.5. Evaluarea durabilității unui arbore de turbină

### 4.5.1. Stabilirea regimului de exploatare și considerații asupra proprietăților mecanice ale oțelului din care este realizat arborele turbinei

Arborele de turbină analizat reprezintă varianta re tehnologizată monobloc, realizată prin forjare, urmată de o strunjire de degroșare ( $R_a = 20 [\mu m]$ ) la cotele finale. În cadrul contractului de cercetare (*BC 146 / 13.10.2008*), beneficiarul a furnizat următoarele informații pentru materialul din care este realizat arborele turbinei:

- marca de oțel *20GS*, de proveniență rusească;
- compoziția chimică  $C(0.16 - 0.22\%)$ ,  $Mn(1.00 - 1.30\%)$ ,  $Si(0.60 - 0.80\%)$ ,  $Cr$ ,  $Ni$ ,  $Cu < 0.30\%$ ,  $S, P < 0.03\%$ ;
- caracteristici de material  $\sigma_c = 255.05 [MPa]$ ,  $\sigma_r = 470.88 [MPa]$ .

Așa cum rezultă din compoziția chimică a oțelului *20GS* se poate considera că este vorba despre un oțel slab aliat și calmat cu  $Si, Cr, Ni$ , un oțel cu o ductilitate relativ scăzută, Nădășan [2003].

Lipsa caracteristicilor mecanice de tenacitate, ductilitate și oboseală pentru oțelul *20GS* a impus alegerea unui oțel echivalent, cu o compoziție chimică și caracteristici mecanice similare. Astfel, în tab.4.5 sunt prezentate comparativ oțelul rusesc *20GS* și alte două mărci, și anume, *20Mn5* și *AISI 1020*. Se menționează faptul că oțelul *AISI 1020* este inferior din punctul de vedere al ductilității în



comparație cu 20GS, fiind necalmat și cu mai puține elemente de aliere. Totuși se consideră că acest oțel se află la limita inferioară a caracteristicilor mecanice pentru oțelurile slab aliate cu Mn și în consecință se poate utiliza în continuare pentru studiile de inițiere și propagare a fisurii, calculul fiind conservativ.

Tabel 4.5

	C [%]	Mn [%]	Si [%]	Cr [%]	Ni [%]	Cu [%]	S [%]	P [%]
20GS	0.16-0.22	1.0-1.3	0.6-0.8	≤ 0.3	≤ 0.3	≤ 0.3	≤ 0.03	≤ 0.03
20Mn5	0.17-0.23	1.0-1.5	≤ 0.4	≤ 0.4	≤ 0.4	≤ 0.1	≤ 0.035	≤ 0.035
AISI 1020	0.17-0.23	0.7-1.0					≤ 0.05	≤ 0.04

Caracteristici	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma_r$ [MPa]	E [MPa]	$\nu$ [-]
20GS	255.05	470.88	-	-
20Mn5	250	490	-	-
AISI 1020	262	440	207000	0.3

Solicitările la care este supus arborele sunt produse, conform schiței de calcul din fig. 4.11, de următoarele sarcini:

- greutatea turbinei bulb și a uleiului din butuc

$$G_t = g(m_{rotor} + \rho_{ulei} V_{ulei}) = 9.8(99.6 \cdot 10^6 + 4.5 \cdot 900) = 1015770 [N], \quad (4.16)$$

care produce un moment încovoiător  $M_i = G_t L$ , unde  $L = 1650 + 375 = 2025 \text{ mm}$  este distanța de la centrul de greutate al rotorului până la zona de racordare dintre flanșa de fixare a rotorului și arbore;

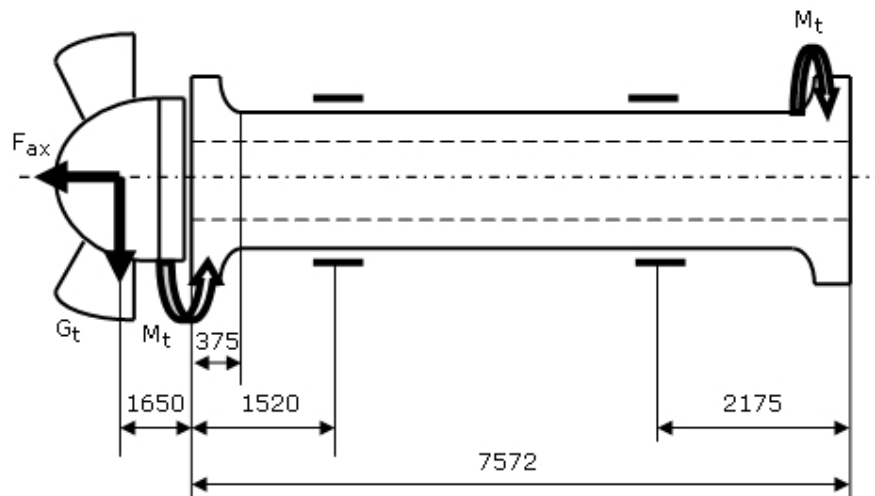


Fig. 4.11. Schița încărcării ansamblului arbore-turbină

- forța axială maximă la debitul maxim

$$F_{ax,max} = 5650 [kN]; \quad (4.17)$$

- momentul de torsiune calculat pe baza puterii  $P = 32.5 [MW]$  și a turației arborelui  $n = 62.5 [rot/min]$

$$M_t = 9.55 \frac{P}{n} \cdot 10^6 = 4.966 \cdot 10^9 [Nmm]. \quad (4.18)$$

Pentru calculul coeficientului teoretic de concentrare a tensiunii echivalente în zona racordării

$$K_t = \frac{\sigma_{ech,max}}{\sigma_{ech,nom}}, \quad (4.19)$$

s-a procedat la o analiză cu elemente finite pentru a determina  $\sigma_{ech,max}$ .

#### 4.5.2. Analiza cu elemente finite a stării de tensiune

Modelarea 3D a geometriei arborelui s-a realizat cu ajutorul programului *Inventor*, conform desenelor de subansamblu și execuție primite de la beneficiar. Dimensiunile de gabarit ale arborelui sunt lungimea  $L_t = 7572 [mm]$ , diametrul maxim  $D_{max} = 2300 [mm]$ , iar între cele două flanșe arborele are o secțiune inelară cu diametrul exterior  $D_e = 1200 [mm]$  și interior  $D_i = 600 [mm]$ ,  $\eta = D_i/D_e = 0.5$ . Din modelul 3D (fig. 4.12) au fost eliminate geometriile de fixare de pe flanșe, cu scopul de a reduce dimensiunile modelului de calcul (Bordeașu [2009]).

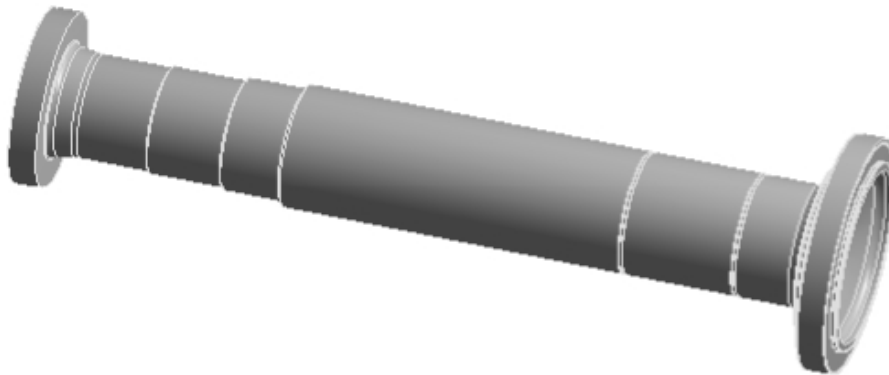


Fig. 4.12. Modelul 3D al arborelui de turbină

Geometria 3D a arborelui, importată în *ANSYS v.11*, s-a discretizat utilizând elemente finite tetraedrice, cu o mărire a densității elementelor în zona racordării dintre flanșa de fixare a rotorului turbinei și arbore (modelul discretizat conține 177344 elemente finite și 290848 noduri), o imagine de detaliu fiind prezentată în fig. 4.13.

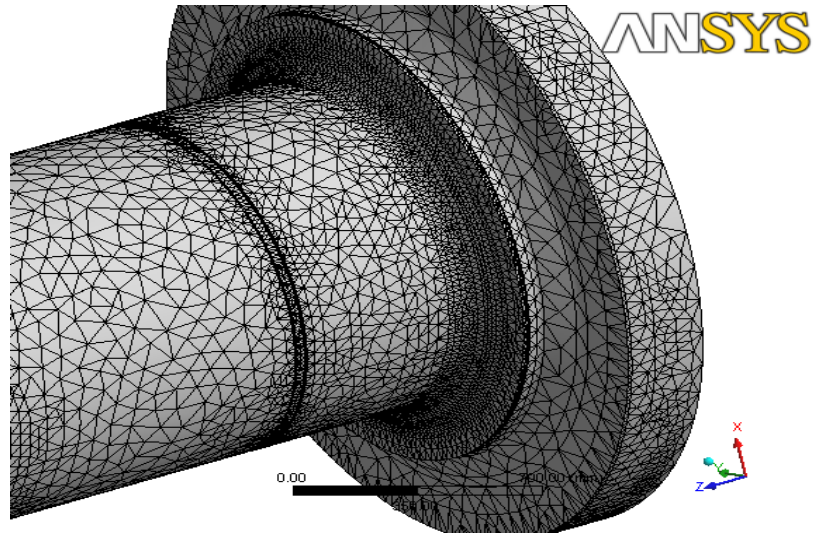


Fig. 4.13. Discretizarea – imagine de detaliu din zona concentratorului de tensiune

**Static Structural 2**  
 Time: 1. s  
 15/01/2009 11:08



- A** Cylindrical Support: 0. mm
- B** Cylindrical Support 2: 0. mm
- C** Remote Force: 5.65e+006 N
- D** Remote Force 2: 1.0158e+006 N
- E** Moment: 4.9664e+009 N-mm
- F** Moment 2: 4.966e+009 N-mm

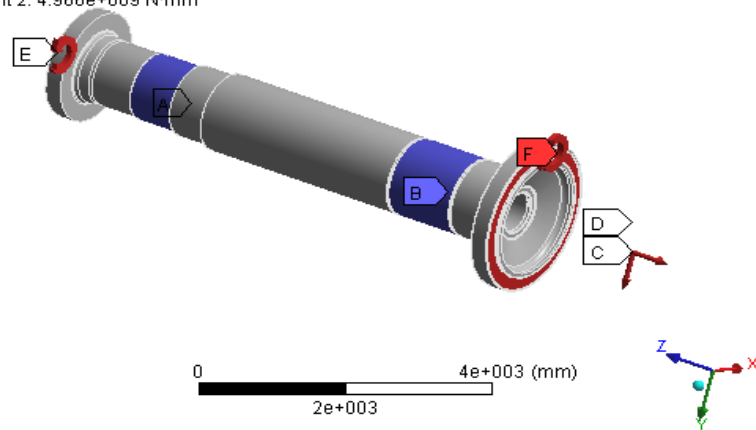


Fig. 4.14. Condițiile pe contur impuse arborelui de turbină

Condițiile pe contur au fost impuse conform solicitărilor stabilite anterior (axială, încovoiere și torsiune). Rezemările arborelui s-au definit ca suporturi cilindrici în zonele de lăgăruire: în primul suport cilindric sunt blocate toate deplasările (radial, axial, tangențial) pentru preluarea tuturor solicitărilor, iar cel de-al doilea suport cilindric fixează doar deplasările radiale (fig. 4.14).

În urma analizei cu elemente finite s-au urmărit starea de deformație (deformația totală, deformațiile pe direcțiile  $x, y$  și  $z$ ) și starea de tensiune (tensiunile normale  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , tensiune tangențială maximă  $\tau_{max}$  și tensiunea echivalentă  $\sigma_{ech}$  von Mises). Rezultatele obținute indică prezența fenomenului de concentrare a tensiunilor la racordarea dintre flanșă și arbore (fig. 4.15). Valoarea maximă a tensiunii echivalente este de  $105.98 [MPa]$  fiind mai mică decât tensiunea admisibilă  $\sigma_a = 150 [MPa]$ , stabilită în raport cu limita de curgere a materialului  $\sigma_c = 260 [MPa]$  și pentru un coeficient de siguranță  $c = 1.733$ .

Coeficientul de concentrare a tensiunilor în zona racordării flanșă-arbore determinat pentru tensiunea echivalentă devine după relația (4.19)

$$K_t = \frac{\sigma_{ech\ max}}{\sigma_{ech\ nom}} = \frac{105.98}{33.38} = 3.17 \quad , \quad (4.20)$$

unde  $\sigma_{ech\ nom}$  s-a stabilit prin calcule clasice de rezistență.

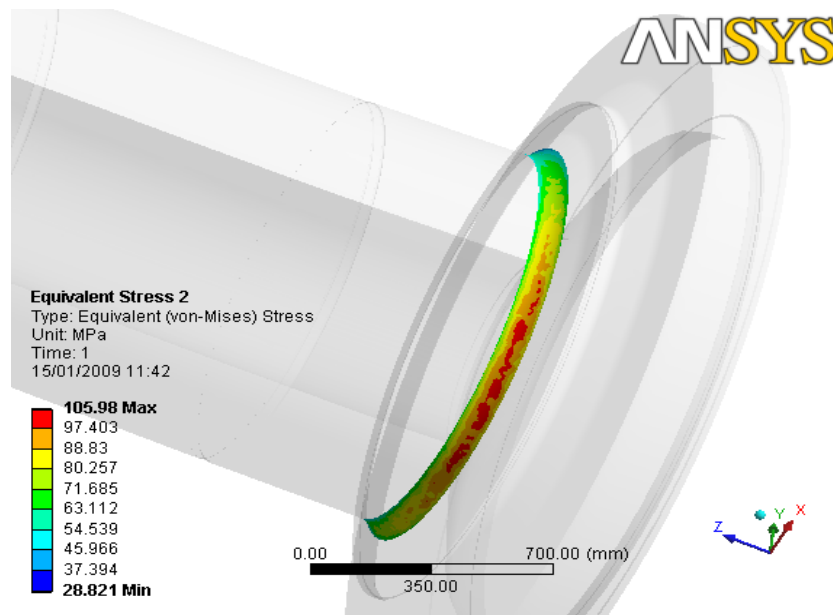


Fig. 4.15. Detaliu din zona concentratorului de tensiune ( $\sigma_{ech}$ )

#### 4.5.3. Studiul fisurării arborilor re tehnologizați la solicitări variabile

Rezultatele controlului nedistructiv efectuat de beneficiar au indicat prezența unor fisuri de dimensiuni considerabile, prezentate în tab.4.6 pentru patru hidroagregate, împreună cu durata de funcționare la care acestea au fost măsurate.

Tabel 4.6

	HA1	HA2	HA6	HA9
Durată de funcționare [ore]	167105	168626	148396	101199
Adâncime fisură, $a$ [mm]	16.8	5	7	12
Lungime fisură, $2c$ [mm]	80	20	10-60	60
$c/a$ [-]	2.38	2.00	0.71-4.28	2.50

Se remarcă prezența fisurilor cu adâncimi între  $5 - 16.8$  [mm] la toți arborii verificați, cu durate de funcționare între  $100000 - 170000$  [ore]. Raportul dintre adâncimea și semilungimea fisurilor  $c/a$ , se situează între  $2 - 2.5$  pentru trei dintre arborii verificați. De asemenea, se constată diferențe mari între adâncimea și lungimea fisurilor, la același timp de funcționare, pentru hidroagregate diferite. Probabil, cauzele sunt legate de regimurile diferite de exploatare și variabilitatea caracteristicilor de material.

Date fiind dimensiunile mari ale fisurilor detectate se consideră că durata de funcționare include atât durata de inițiere  $N_i$ , cât și pe cea de propagare  $N_p$  a fisurilor. Pentru calculul duratei de inițiere  $N_i$ , s-a adoptat metoda bazată pe analiza deformațiilor specifice, care utilizează curbele de oboseală  $\varepsilon - N$  (Rusu [1992]). Această abordare descompune deformația totală într-o componentă elastică  $\Delta\varepsilon_e$  și una plastică  $\Delta\varepsilon_p$ , pe baza buclei de histererezis. Variația fiecărei componente la scară dublu logaritmică poate fi reprezentată printr-o dreaptă. Relația  $\varepsilon - N$ , cunoscută și drept ecuația Coffin-Mason, se exprimă astfel:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f}{E(2N)^b} + \varepsilon_f'(2N)^c, \quad (4.21)$$

unde  $\sigma_f$  - coeficientul rezistenței la oboseală, care este rezistența reală la rupere prin oboseală pentru  $2N = 1$ ,  $b$  - exponentul rezistenței la oboseală,  $\varepsilon_f'$  - coeficientul ductilității la oboseală, care reprezintă deformația specifică reală la rupere la o singură inversiune  $2N = 1$ ,  $c$  - exponentul ductilității la oboseală. Mărimile  $\sigma_f, \varepsilon_f', b, c$  sunt constante de material și sunt determinate prin încercări la oboseală. Pentru calculul la oboseală al arborelui turbinei aceste mărimi au fost alese pentru oțelul echivalent *AISI 1020* (tab.4.7).

Tabel 4.7

Material	$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma_r$ [MPa]	$\sigma'_f$ [MPa]	$\epsilon'_f$ [-]	$b$ [-]	$c$ [-]
AISI 1020	206843	0.3	262	440	1384	0.337	-0.156	-0.485

Rezistența la oboseală este influențată de mai mulți factori printre care: gradul de prelucrare al suprafeței, dimensiunile arborelui, concentrarea tensiunilor, condițiile de mediu etc. Pentru cazul concret al arborelui analizat, prelucrat prin strunjire, factorul de prelucrare al suprafeței se calculează după Shigley [1989] cu relația:

$$K_a = \alpha(\sigma_r)^\beta = 4.51 \cdot 440^{-0.265} = 0.9 \quad , \quad (4.22)$$

La diametrul exterior  $D_e = 1200 [mm]$  se consideră un factor dimensional  $K_b = 0.85$ , rezultând un coeficient de reducere a rezistenței la oboseală:

$$K_f = K_a K_b = 0.9 \cdot 0.85 = 0.765 \quad . \quad (4.23)$$

Coeficientul de concentrare a tensiunii  $K_t$  nu s-a introdus în expresia de calcul a lui  $K_f$ , deoarece programul ANSYS lucrează cu tensiunile efective din zona de racordare flanșă-arbore.

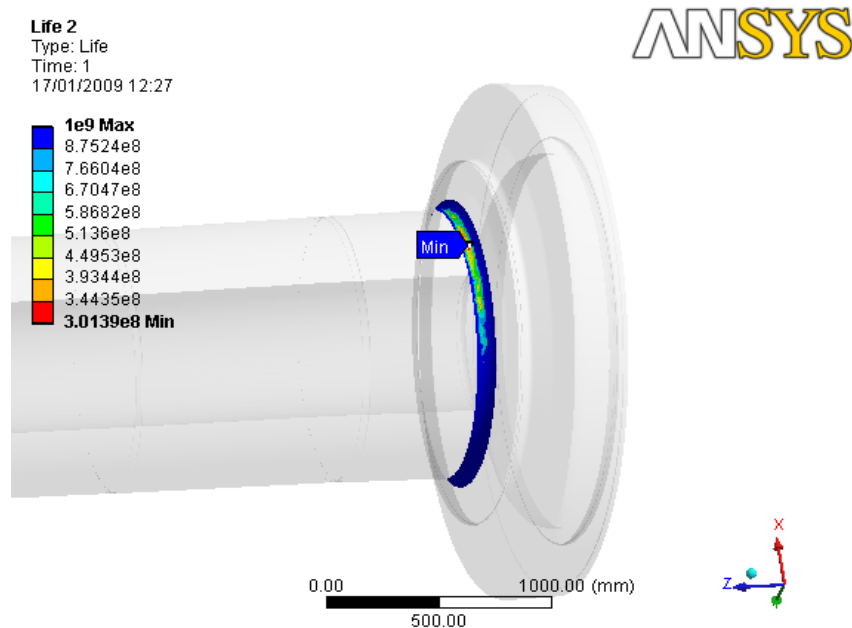


Fig. 4.16. Numărul de cicluri până la inițierea fisurii

Calculul la oboseală s-a realizat pentru tensiunea  $\sigma_z$ , produsă de suprapunerea solicitărilor de încovoiere și întindere. Caracteristicile ciclului de solicitare în zona racordării sunt  $\sigma_{max} = 88.86 [MPa]$ ,  $\sigma_{min} = -6.52 [MPa]$  și  $R = -0.07$ . În urma analizei cu modulul de oboseală al programului ANSYS v.11 s-a obținut o durată minimă până la inițierea fisurilor de oboseală în zona de racordare,  $N_i = 3.0139 \cdot 10^8$  cicluri, adică  $N_i = 80370$  ore de funcționare, fig. 4.16.

Cunoscând, din subcapitolul precedent 4.4, faptul că viteza de propagare a fisurii pentru un anumit material este o funcție de  $\Delta K$  și  $R$  cu forma generală

$$da/dN = f(\Delta K, R) \quad , \quad (4.24)$$

durata de viață, exprimată prin numărul de cicluri necesar pentru ca o fisură să se extindă, se determină rezolvând ecuația (4.24) în raport cu  $dN$  și integrând:

$$\int_{N_d}^{N_f} dN = N_f - N_d = N_r = \int_{a_d}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, R)} \quad . \quad (4.25)$$

Astfel, pe baza ecuației (4.25) se calculează numărul de cicluri  $N_r$  necesar pentru ca o fisură să se extindă de la lungimea detectată  $a_d$  careia îi corespunde  $N_d$  cicluri, la lungimea critică  $a_{cr}$ , la care se ajunge după  $N_f$  cicluri. Rezolvarea analitică a ecuației (4.25) s-a efectuat în programul AFGROW, dezvoltat de Harter [2008] la Wright-Patterson Air Force Base pentru estimarea durabilității componentelor avioanelor militare.

Pentru estimarea vitezei de propagare a fisurii s-a considerat o secțiune inelară cu o fisură eliptică dispusă circumferențial (fig. 4.17), pentru care soluția factorului de intensitate a tensiunii a fost propusă de Raju [1984]:

$$K_I = (\sigma_t + H\sigma_j) \sqrt{\pi \frac{a}{Q}} F(a, c, D_i, D_e, \phi) \quad , \quad (4.26)$$

unde  $\sigma_t$  reprezintă tensiunea de tracțiune,  $\sigma_j$  tensiunea de încovoiere,  $H, F$  sunt funcții de geometria fisurii (adâncimea și lungimii fisurii), grosimea peretelui și poziția pe frontul fisurii, iar  $Q = 1 + 1.464(a/c)^{1.65}$  pentru  $a/c \leq 1$ .

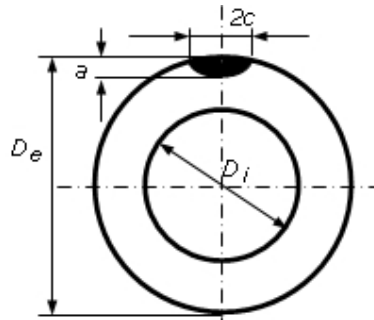


Fig. 4.17. Modelul geometric pentru propagarea fisurii

Introducerea dimensiunilor geometrice pentru fisură și secțiunea arborelui este ilustrată prin fereastra de program din fig. 4.18.

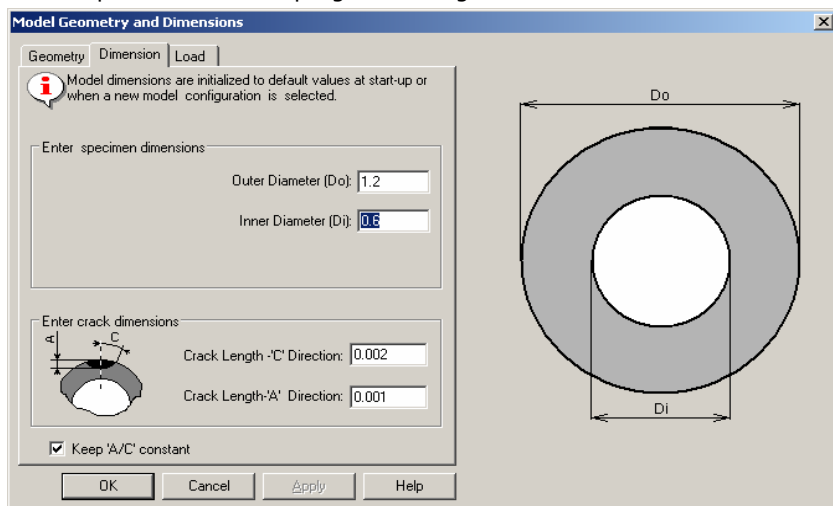


Fig. 4.18. Introducerea geometriei

Conform solicitărilor la care este supus arborele turbinei, pentru studiul propagării fisurii s-au considerat două situații ipotetice:

- solicitarea de încovoiere după un ciclu simetric  $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = 42 [MPa]$  (conform analizei cu elemente finite) de amplitudine constantă;
- solicitarea compusă de încovoiere cu întindere, considerând că solicitarea statică de tracțiune se suprapune peste cea de încovoiere, rezultând un ciclu cu  $\sigma_{max} = 88.9 [MPa]$ ,  $\sigma_{min} = -6.5 [MPa]$  și  $R = -0.07$  (fig. 4.19).

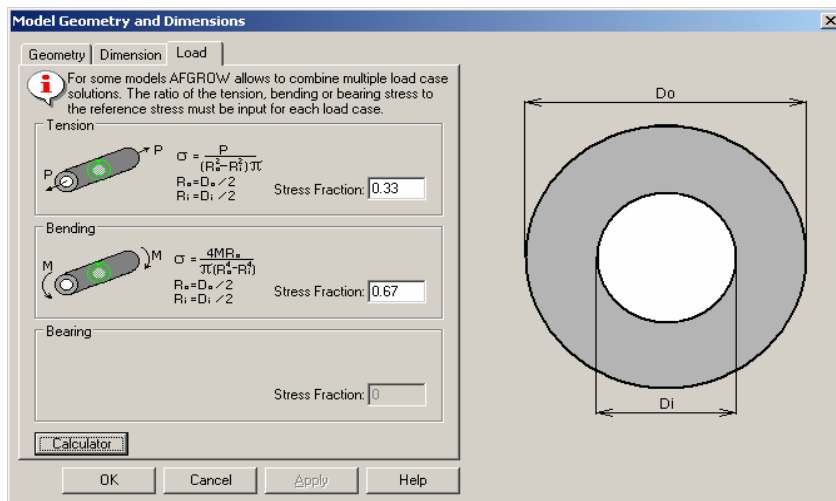


Fig. 4.19. Compunerea solicitărilor de tracțiune și încovoiere



Caracteristicile de mecanica ruperii ale oțelului *AISI 1020* sunt preluate din baza de date a programului *AFGROW* :  $\Delta K_{th} = 1.5 [MPa\sqrt{m}]$  ,  $K_{IC} = 77 [MPa\sqrt{m}]$  ,  $K_C = 110 [MPa\sqrt{m}]$  , și constantele din relația lui Walker (4.14)  $C = 1.447 \cdot 10^{-12}$  ,  $n = 3.6$  și  $m = 1$ .

Pentru simulare se pornește de la dimensiunile inițiale ale fisurii  $a = 1 [mm]$  și  $c = 2 [mm]$ , dimensiuni la care se ajunge după 80370 de ore conform studiului de inițiere; ulterior, numărul de ore pentru propagarea fisurii se adaugă numărului de ore pentru inițierea acesteia. În fig. 4.20. sunt prezentate curbele de creștere a adâncimii fisurii în funcție de numărul orelor de funcționare și rezultatele controlului nedistructiv.

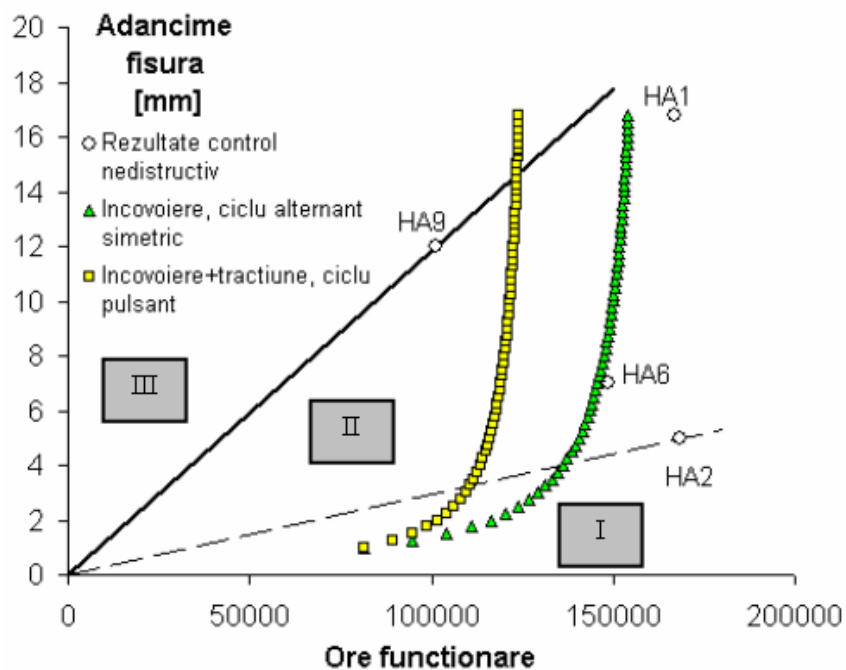


Fig. 4.20. Adâncimea fisurii în funcție de numărul orelor de funcționare și rezultatele controlului nedistructiv

Din această figură se observă că rezultatele simulării creșterii fisurii sunt în concordanță cu măsurătorile experimentale efectuate prin control nedistructiv. Se poate stabili o limită superioară a vitezei de propagare a fisurii de aprox.  $1.185 \cdot 10^{-4} [mm/oră]$ . Astfel, pentru o turație a arborelui de  $62.5 [rot/min]$  rezultă o viteză de propagare a fisurii de  $3.16 \cdot 10^{-8} [mm/ciclu]$ . Această viteză este corespunzătoare propagării fisurilor de oboseală sub acțiunea unor solicitări de intensitate medie.

În fig. 4.20 se identifică următoarele trei zone:

- zona I (situată sub linia întreruptă) de inițiere a fisurii;

- zona II (cuprinsă între linia întreruptă și cea continuă) în care fisura se propagă stabil și în care s-au plasat rezultatele măsurătorilor nedistructive. Pentru arborii cu fisuri detectate în această zonă se recomandă recondiționarea lor și înlăturarea fisurilor.

- zona III (peste linia continuă) în care fisura se extinde rapid. În această zonă trebuie evitată funcționarea arborilor fisurați, deoarece se poate produce ruperea instabilă, cu afectarea integrității structurale și a altor componente ale hidro-agregatului.

Rezultatele analizei recomandă următoarele măsuri:

- pentru arborii controlați nedistructiv *HA1*, *HA2*, *HA6* și *HA9* îndepărtarea fisurilor prin recondiționare;

- controlul nedistructiv al arborilor de la *HA7* și *HA8* pentru evaluarea fisurilor și măsurarea lor;

- pentru arborii re tehnologizați *HA3*, *HA4* și *HA5* efectuarea unui control nedistructiv pentru detectarea inițierii fisurilor. Acest control se va efectua după un număr de ore de funcționare (Fawaz [2008]):

$$N = \frac{N_i}{2} = \frac{80370}{2} = 40175 \text{ [ore]} \quad , \quad (4.27)$$

și monitorizarea periodică a fisurilor detectate.

## 5. CONTRIBUȚII PERSONALE ȘI CONCLUZII. DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE

Teza nu epuizează vasta problematică a fenomenului de concentrare a tensiunilor în mecanica ruperii și oboseala materialelor. Ea se dorește a fi însă, un mic pas înainte în studiul acestor probleme.

Principalele contribuții personale și concluziile care rezultă din acestea, în ordinea prezentării lor pe parcursul lucrării, sunt:

- Sinteză bibliografică originală cu privire la cercetările și tendințele actuale în domeniul efectului de concentrare a tensiunilor în mecanica ruperii și oboseala materialelor.

- Comparație între regulile lui Neuber și Glinka pentru determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor  $K_\sigma$  și deformațiilor specifice  $K_\varepsilon$  în cazul aliajului de aluminiu 6060-T66 a cărui curbă caracteristică este modelată după ecuația Ramberg-Osgood și în ipoteza unui concentrator de tensiune de tip gaură circulară ( $K_t = 3$ ). Rezultatele obținute confirmă concluziile exprimate și în alte lucrări științifice, conform cărora estimările după regula lui Neuber sunt superioare cu aprox. 5–10% celor obținute din aplicarea regulii lui Glinka. Dacă tensiunea nominală depășește limita de proporționalitate, diferențele între estimările coeficientului de concentrare a deformației specifice  $K_\varepsilon$ , după cele două reguli, cresc la aprox. 35–40% din cauza plasticității ridicate a acestui aliaj de aluminiu.

- Comparație a expresiilor pentru factorul de intensitate a tensiunii la concentratori singulari (fisură, creștătură  $V$  cu raza la vârf  $\rho = 0$ ) și respectiv nesingulari (a căror rază la vârf  $\rho \neq 0$ ).

- Sinteza metodelor analitice, numerice și experimentale pentru determinarea distribuției tensiunilor și deformațiilor specifice în zona concentratorilor de tensiune.

- Aplicarea unei metode experimentale relativ recentă în studiul fenomenului de concentrare a tensiunilor și deformațiilor specifice, și anume metoda corelării de imagini digitale. Utilizând sistemul *ARAMIS 2M*, pentru un concentrator de tensiune de tipul creștătură laterală cu raza la vârf  $\rho = 0.5[mm]$  și deschiderea unghiulară  $2\alpha = 90^\circ$  s-a determinat distribuția deformațiilor specifice  $\varepsilon_y$  pentru trei niveluri de solicitare: în domeniul elastic, elasto-plastic și în apropierea ruperii finale. Rezultatele experimentale obținute au fost comparate cu cele numerice obținute dintr-o analiză neliniară cu elemente finite. Din compararea rezultatelor s-a stabilit că metoda corelării de imagini digitale este capabilă să surprindă fenomenul de concentrare a deformațiilor specifice, iar concordanța rezultatelor numerice și experimentale este foarte bună, erorile relative nedepășind  $\pm 15\%$ .

- Prezentarea unei formule recente obținută de Filippi, Lazzarin și Tovo [2002] pentru concentratorii laterali de tip creștătură  $V$ , formulă extrem de generală, ale cărei particularizări conduc la soluțiile cunoscute (Williams [1952], Creager [1967]). Rezultatele obținute prin aplicarea acestei formule pentru distribuția tensiunilor, în cazul a doi concentratori laterali de tip  $V$  cu deschiderea unghiulară  $2\alpha = 90^\circ$  și

razele la vârf  $\rho = 0.2$  și  $0.5$  [mm], au fost comparate cu rezultatele obținute prin aplicarea soluției propuse de Glinka [1985a] și cu cele numerice dintr-o analiză cu elemente finite. Concordanța rezultatelor este foarte bună până la nivelul intersecției distribuției tensiunilor circumferențiale  $\sigma_\theta$  cu linia tensiunii nominale nete  $\sigma_{net}$ .

- Prezentarea a două metode de calcul a factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^{V,\rho}$  pentru concentratorii de tip creștătură laterală în V rotunjiți la vârf, propuse în literatura tehnică de Filippi [2002] și Lazzarin [2006]. Pentru două cazuri concrete a fost studiată influența geometriei concentratorului, prin raza la vârf, asupra mărimii domeniului de valabilitate a soluției exprimată prin factorul de intensitate a tensiunii.

- Determinări experimentale ale caracteristicilor mecanice (rezistența la rupere  $\sigma_r$ , modulul de elasticitate longitudinal  $E$ ) și de mecanica rupei (tenacitatea la rupere  $K_{IC}$ ) pentru polimerul Necuron 1020.

- Determinarea experimentală a rezistenței la rupere  $\sigma_u$ , definită ca tensiunea nominală aplicată în secțiunea brută, pe epruvete cu concentratori de tensiune de tip gaură circulară pentru diferite valori ale diametrului  $d = 1, 2, 3$  [mm]. Rezultatele experimentale au fost comparate cu estimările obținute prin aplicarea a trei criterii diferite de rupere, cu doi (Griffith, Leguillon) sau trei parametri de material (Zhang). Excelenta concordanță a rezultatelor demonstrează că este posibilă adaptarea acestor criterii de rupere, dezvoltate pentru concentratorii singulari de tensiune (raza la vârf  $\rho = 0$ ), la ruperea componentelor structurale cu concentratori de tensiune nesingulari.

- Prezentarea metodei distanțelor critice și determinarea pentru polimerul Necuron 1020 a parametrilor de material, distanță caracteristică  $L$  (respectiv  $L_t$ ) și tensiune critică  $\sigma_0$  (respectiv  $\tau_0$ ), pentru solicitarea de tracțiune uniformă uniaxială (și respectiv de torsiune).

- Evaluarea rezistenței la rupere pe cale experimentală și prin aplicarea metodei punctului, pentru epruvete cu concentratori de tensiune diferiți ca dimensiune, formă și coeficient teoretic de concentrare a tensiunilor. Compararea rezultatelor a demonstrat că există o limitare a aplicabilității acestei metode, atât la nivelul dimensiunii absolute a concentratorului cât și a coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor  $K_t$ . Astfel, metoda furnizează rezultate rezonabile până la o dimensiune absolută a concentratorului comparabilă ca ordin de mărime cu distanța caracteristică  $L$  și până la valori ale coeficientului teoretic de concentrare  $K_t < 2$ .

- Adaptarea metodei distanțelor critice la ruperea unui bloc de conectare și testare a cablajelor auto solicitat în modul mixt I/II, după formularea propusă de Susmel [2008]. Estimarea forței care produce ruperea blocului de conectare pe baza acestei metode s-a realizat pe baza unei ample analize cu elemente finite pentru mai multe direcții posibile de rupere și localizări ale punctului de inițiere a rupei. În dreptul unui concentrator de tensiune de tip gaură circulară străpunsă și pentru direcția critică  $\varphi^* = 45^\circ$ , s-a obținut valoarea minimă a forței de rupere, eroarea relativă față de forța determinată experimental fiind de +20%, considerată rezonabilă pentru aplicațiile ingineresti. În concluzie, metoda distanțelor critice se

poate aplica cu succes la evaluarea rezistenței componentelor structurale complexe solicitate în moduri mixte.

- Încercări experimentale de oboseală cu amplitudine constantă și coeficient de asimetrie  $R = 0.5$  pe epruvete netede și cu concentratori de tensiune realizate din aliajul de aluminiu 2024-T3.

- Trasarea curbelor de oboseală  $\sigma - N$  și determinarea rezistenței la oboseală pentru durabilitate limitată  $N = 10^6$  cicluri.

- Prezentarea unei analize critice asupra coeficientului efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$ .

- Trasarea diagramelor ciclurilor limită după schematizarea Goodman și evaluarea rezultatelor experimentale obținute. Pentru aliajul de aluminiu 2024-T3 s-a obținut o bună concordanță a rezultatelor, dacă coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile  $K_f$  se aplică atât amplitudinii  $\sigma_a$  cât și tensiunii medii  $\sigma_m$ . Acest comportament la oboseală este explicat prin faptul că la nivelul de solicitare corespunzător durabilității limitate  $N = 10^6$  cicluri, tensiunile maxime la baza concentratorilor nu depășesc limita de curgere  $\sigma_C$ .

- Trasarea diagramelor de variație a lungimii fisurii în funcție de numărul de cicluri  $a - N$ , pentru valori diferite ale razei la vârful concentratorului ( $\rho = 0.2, 0.5, 3$  [mm]) și două niveluri ale solicitării. S-a demonstrat că etapa de inițiere a fisurii de oboseală depinde de raza la vârful concentratorului și reprezintă o pondere tot mai mare din durata de viață pe măsură ce raza la vârf se majorează.

- Determinarea pentru aliajul de aluminiu 2024-T3 a constantelor de material  $C$  și  $n$  din relația lui Paris [1963], prin trasarea curbelor  $da/dN - \Delta K$ . Rezultatele obținute sunt în bună concordanță cu cele publicate în literatura tehnică (Harter [1963]).

- Evaluarea durabilității unui arbore de turbină cu un concentrator de tip racordare dublă, pe baza unui calcul de inițiere și propagare a fisurii. Calculul de inițiere a fisurii de oboseală s-a realizat prin analiză cu elemente finite utilizând programul ANSYS v.11. În continuare, pe baza rezultatelor obținute pentru inițiere s-a realizat o analiză de propagare a fisurii cu programul AFGROW și o estimare a perioadei de propagare, cu întocmirea unui set de măsuri recomandate pentru monitorizarea și recondiționarea arborilor de turbină.

Pe parcursul elaborării acestei lucrări autorul a găsit necesară pentru viitor focalizarea atenției asupra câtorva noi direcții de cercetare în vasta problematică a concentratorilor de tensiune. Amintim aici doar câteva dintre acestea:

- analiza fenomenului de concentrare a tensiunilor în jurul cavitațiilor (micro-defecte) de formă supra-eliptică și sub-eliptică în plăci solicitate la întindere uniformă uniaxială și biaxială în planul lor.

- utilizarea unor metode analitice noi, respectiv metoda homotopiei și metoda iterației variaționale, la determinarea câmpului tensiunilor și deformațiilor specifice din zona concentratorilor de tensiune.

- extinderea utilizării metodei distanțelor critice la ruperea componentelor structurale realizate din materiale compozite, pentru valorificarea rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul proiectului CEEX nr.202/2006 din a cărui echipă de cercetare autorul a făcut parte.

- aplicarea metodei distanțelor critice la ruperea îmbinărilor lipite, cu scopul de a valorifica rezultatele cercetărilor din cadrul proiectului *CEEX nr.262/2006* din a cărui echipă de cercetare autorul a făcut parte și pe care l-a condus în perioada ianuarie-septembrie 2008 .
- evaluarea rezistenței la oboseală a epruvetelor cu concentratori de tensiune prin alte metode noi propuse în literatura tehnică (*metoda distanțelor critice, metoda volumetrică, metoda modelării fisurii*) și compararea estimărilor cu rezultatele experimentale obținute și prezentate în cadrul acestei lucrări.

## BIBLIOGRAFIE

Adib H., Pluvinage G. (2003) Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life prediction in notched components, *International Journal of Fatigue* 25, 67-76.

Antonie S., Sinescu C., Negruțiu M., Sticlaru C., **Negru R.**, Laissue P.L., Romînu M., Podoleanu A.G. (2009) Investigation of implant bone interface with non-invasive methods: numerical simulation, strain gauges and optical coherence tomography, *Key Engineering Materials, Advances in Strength of Materials* 399, 193-198.

Barber J.R. (2002) *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bathe K.J., Wilson E.L. (1976) *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood, New Jersey.

Bazant Z.P. (1976) Instability, ductility and size effect in strain softening concrete, *Journal of Engineering Mechanics* 102, 331-344.

Bazant Z.P., Cedolin L. (1979) Blunt crack band propagation in finite element analysis, *Journal of Engineering Mechanics* 105, 297-315.

Becker A.A. (2004) *An Introductory Guide to Finite Element Analysis*, Professional Engineering Publishing Limited, London and Bury St. Edmunds, UK.

Bellet D., Taylor D., Marco S., Mazzeo E., Guillois J., Pircher T. (2005) The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations, *International Journal of Fatigue* 27, 207-221.

Blumenfeld Maty (1995) *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, București.

Boleanțu L., Dobre I. (1978) *Aplicații ale Mecanicii Solidului Deformabil în Construcția de Mașini*, Editura Facla, Timișoara.

Bordeașu I., Popoviciu M.O., Marșavina L., Vodă M., **Negru R.**, Pîrvulescu L.D. (2009) Numerical simulation of fatigue cracks initiation and propagation for horizontal axial turbines shafts, *Annals of DAAM for 2009 & Proceedings of the 20th International DAAAM Symposium*, Vol. 20, No. 1, Vienna, Austria.

Boresi A.P., Schmidt R.J., Sidebottom O.M. (1993) *Advanced Mechanics of Materials* 5<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, New York.

Boukharouba T., Tamine T., Niu L., Chehimi C., Pluvinage G. (1995) The use of notch stress intensity factor as a crack initiation parameter, *Engineering Fracture Mechanics* 52, 503-512.

Brebbia C.A. (1980) *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press Ltd. 2<sup>nd</sup> edition.

Brebbia C.A., Dominguez J. (1989) *Boundary Elements: An Introductory Course*, McGraw-Hill, New York.

Buch A. (1988) *Fatigue Strength Calculation*, Trans Tech Publications, Switzerland.

Carpinteri A. (1987) Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners, *Engineering Fracture Mechanics* 26, 143-155.

Chu T.C., Ranson W.F., Sutton M.A., Peters W.H. (1985) Applications of digital correlation techniques to experimental mechanics, *Experimental Mechanics* 25, 232-245.

Ciavarella M., Meneghetti G. (2004) On fatigue limit in the presence of notches: classical vs. recent unified formulations, *International Journal of Fatigue* 26, 289-298.

Chen D.H., Ozaki S. (2008) Investigation of failure criteria for a sharp notch, *International Journal of Fracture* 152, 63-74.

Constantinescu D.M. (2003) *Dezvoltări și Aplicații în Mecanica Ruperii și Oboseală*, Editura Academiei Române, București.

Constantinescu D.M., Sandu M., Marșavina L., **Negru R.**, Miron M., Apostol D. (2008) Evaluation of interlaminar damage and crack propagation through digital image correlation method, *Key Engineering Materials, Advances in Strength of Materials* 399, 105-112.

Creager M., Paris P.C. (1967) Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *International Journal of Fracture Mechanics* 3, 247-252.

Crețu A., Duma C., Botean A. (2004) Câteva considerații asupra fenomenului concentrării tensiunilor, *A IV-a Conferință Națională – cu participare internațională – "Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești*, Sebeș, Editura Agir, 143-150.

Dally J.W., Berger J.R. (1986) A strain gage method for determining  $K_I$  and  $K_{II}$  in a mixed mode stress field, *Proceedings of the 1986 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, New Orleans, June 9-13, 603-612.

Dobre I. (1980) *Curs de Rezistența Materialelor. Bazele Mecanicii Solidului Deformabil. Vol.2*, Institutul Politehnic "Traian Vuia", Timișoara.

Dobre I., Muntean C., Faur N., **Negru R.** (2003) Comparative analysis of the stress concentration phenomenon in a rectangular plate with two unequal circular holes. Second part: Photoelastic studies and numerical analysis, *Proceedings of the 6th International Conference on Boundary and Finite Element*, 16-19 October, Timișoara.

Dowling N.E., Brose W.R., Wilson W.K. (1979) Notched member fatigue life predictions by the local strain approach, *Advances in Engineering* 6, 55-84, SAE Warrendale, Pasadena.

Dumitru I., Marșavina L. (2001) *Introducere în Mecanica Ruperii*, Monografie RezMat 27, Editura Mirton, Timișoara.

Dumitru I., Neguș N. (2003) *Elemente de Elasticitate, Plasticitate și Rezistența Materialelor vol.I*, Editura Politehnica, Timișoara.

Dumitru I. (2009) *Bazele Calculului la Oboseală*, Editura Eurostampa, Timișoara.

Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S. (1997) Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities, *International Journal of Solids and Structures* 34, 3873-3883.

Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S., May C.W. (1997a) Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading, *International Journal of Fracture* 84, 367-381.

Fatemi A., Plaseied A., Khosrovaneh A.K., Tanner D. (2005) Application of bi-linear log-log S-N model to strain-controlled fatigue data of aluminum alloys and its effect on life predictions, *International Journal of Fatigue* 27, 1040-1050.

Faur N., Dumitru I. (1997) *Diferențe finite și Elemente finite în Rezistența Materialelor*, Editura Mirton, Timișoara.

Faur N. (2002) *Elemente Finite. Fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara.



Fawaz S.A. (2008) Using the world's largest stress intensity factor database for fatigue life predictions, *First International Conference on Damage Tolerance of Aircraft Structures*, Delft.

Fedderson C.E. (1966) Discussion to: Okabe - Strain crack toughness testing of metallic materials, *ASTM STP* 410, 77-79.

Fedderson C.E. (1970) Evaluation and prediction of residual strength of center cracked tension panels, *ASTM STP* 486, 50-78.

Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. (2002) Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *International Journal of Solids and Structures* 39, 4543-4565.

Filippini M. (2000) Stress gradient calculations at notches, *International Journal of Fatigue* 22, 397-409.

Gdoutos E.E., Theocaris P.S. (1978) A photoelastic determination of mixed-mode stress intensity factors, *Experimental Mechanics* 18, 87-96.

Glinka G. (1985) Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks, *Engineering Fracture Mechanics* 22, 485-508.

Glinka G. (1985a) Calculation of inelastic notch tip strain-stress histories under cyclic-loading, *Engineering Fracture Mechanics* 22, 839-854.

Glinka G., Newport A. (1987) Universal features of elastic notch-tip stress fields, *International Journal of Fatigue* 9, 143-150.

Gómez F.J., Elices M. (2003) A fracture criterion for sharp V-notched samples, *International Journal of Fracture* 123, 163-175.

Gómez F.J., Elices M. (2004) A fracture criterion for blunted V-notched samples, *International Journal of Fracture* 127, 239-264.

Gómez F.J., Guinea G.V., Elices M. (2006) Failure criteria for linear elastic materials with U-notches, *International Journal of Fracture* 141, 99-113.

Gordunov S.K., Reabenki V.S. (1977) *Scheme de calcul cu difenețe finite*, Editura Tehnică, București.

Griffith A.A. (1920) The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 221, 163-198.

Gross B., Mendelson A. (1972) Plane elastoplastic analysis of V notched plates, *International Journal of Fracture Mechanics* 8, 267-276.

Grover H.J. (1966) *Fatigue of Aircraft Structures*, Naval Air Systems Command, NAVAIR 01-1A-13, Washington.

Han G., Sutton M.A., Chao Y.J. (1994) A study of stationary crack tip deformation fields in thin sheets by computer vision, *Experimental Mechanics* 34, 357-369.

Hardrath H.F., Ohman L. (1951) A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and fillets in flat plates, Technical Note 2566, *National Advisory Committee for Aeronautics*, Washington.

Harter J.A. (2008) *AFGROW users guide and technical manual*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

Hasebe N., Kutanda Y. (1978) Calculation of stress intensity factor from stress concentration factor, *Engineering Fracture Mechanics* 10, 215-221.

Heywood R.E. (1962) *Designing Against Fatigue*, Chapman & Hall, London.

Hills D.A., Dini D., Magadu A., Korsunsky A.M. (2004) A review of asymptotic procedures in stress analysis: known solutions and their applications, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 39, 553-568.

Howland R.C.J. (1930) On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 229, 49-86.

- Inglis C.E. (1913) Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Transactions of the Institution of Naval Architects* 55, 219-230.
- Irwin G.R. (1957) Analysis of stresses and strain near the end of a crack transversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364.
- Kinloch A.J., Williams J.G. (1980) Crack blunting mechanisms in polymers, *Journal of Materials Science* 15, 987-996.
- Knesl Z. (1991) A criterion of V-notch stability, *International Journal of fracture* 48, R79-R83.
- Kolossov G.V. (1909) On an application of complex functions theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity, *Communication*, University of Dorpat.
- Kondo T., Kobayashi M., Sekine H. (2001) Strain Gage Method for Determining Stress Intensities of Sharp-notched Strips, *Experimental Mechanics* 41, 1-7.
- Kuhn P., Hardrath H.F. (1952) An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel, Technical Note 2805, *National Advisory Committee for Aeronautics*, Langley Aeronautical Laboratory, Washington.
- Lazzarin P., Tovo R. (1996) A unified approach to the evaluation of linear elastic fields in the neighborhood of cracks and notches, *International Journal of Fracture* 78, 3-19.
- Lazzarin P., Tovo R., Meneghetti G. (1997) Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity, *International Journal of Fatigue* 19, 647-657.
- Lazzarin P., Filippi S. (2006) A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2461-2478.
- Leguillon D. (2002) Strength or toughness ? A criterion for crack onset at a notch, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, 61-72.
- Li J., Zhang X.B. (2006) A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics* 73, 505-523.
- Ling C.-B. (1947) Stresses in a notched strip under tension, *Journal of Applied Mechanics* 69, A275-A280.
- Marşavina L., Tomlinson R.A. (2004) The use of infra-red detectors for determination of the fracture mechanics parameters, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials* 6, 1323-1329.
- Marşavina L., Nurse A.D. (2007) The asymptotic structure of small-scale yielding interfacial free-edge joint and crack tip fields, *Acta Mechanica* 190, 115-131.
- Marşavina L., Faur N., Susan-Resiga R., **Negru R.** (2009) Investigations on fracture of collector lamellas, în *Engineering Against Fracture. Proceedings of the 1st Conference* (ed. S. Pantelakis, C. Rodopoulos), Springer, 261-273.
- Marşavina L., Faur N., Susan-Resiga R., **Negru R.** (2010) Methodology to assess integrity with application to collector copper lamellas, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* (în curs de publicare).
- McClintock F.A., Irwin G.R. (1965) Plasticity aspects of fracture mechanics, *ASTM STP - Fracture Toughness Testing and its Applications* 381, 84-113, ASTM, Philadelphia, USA.
- Mohanty J.R., Verma B.B., Ray P.K. (2009) Prediction of fatigue crack growth and residual life using an exponential model: Part I (constant amplitude loading), *International Journal of Fatigue* 31, 418-424.

- Molski K., Glinka G. (1981) A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root, *Materials Science and Engineering* 50, 93-100.
- Murakami Y. (Ed.) (1987) *Stress Intensity Factors Handbook*, vols. 1 and 2, Pergamon Press, Oxford.
- Murakami Y. (Ed.) (1992) *Stress Intensity Factors Handbook*, vol. 3, The Society of Materials Science, Japan.
- Muskhelishvili N.I. (1953) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff.
- Nădășan S., Rațiu M. (2003) Considerații asupra folosirii raționale a oțelurilor în construcția de mașini, în *Cercetări de rezistență și fiabilitate la solicitări oscilante* (ed. M. Rațiu), Ed. Mirton, Timișoara.
- Negru R.**, Marșavina L., Faur N., Căplescu C. (2007) Analysis and design of adhesive-bonded corner joints, *5th International Conference Structural Integrity of Welded Structures*, 20-21 Nov., Timișoara, România.
- Neuber H. (1958) *Kerbspannungslehre. Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit*, Springer-Verlag, Berlin.
- Neuber H. (1961) Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law, *Journal of Applied Mechanics* 28, 544-550.
- Novozhilov V.V. (1969) On a necessary and sufficient criterion for brittle strength, *Prikl. Mat. Mek.* 33, 201-210.
- Nui L.S., Chehimi C., Pluvinage G. (1994) Stress field near a large blunted tip V-notch and application of the concept of the critical notch stress intensity factor (NSIF) to the fracture toughness of very brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics* 49, 325-335.
- Ostash O.P., Chepil R.V. (2003) Local strain measurement for prediction of fatigue macrocrack initiation in notched specimens, *Strain* 39, 11-19.
- Pană T., Pastramă S.D. (2000) *Integritatea Structurilor Metalice*, Editura Fair Partners, București.
- Paris P.C., Erdogan F. (1963) Critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME* 85, 528-534.
- Pascariu I. (1985) *Elemente finite. Concepte-Aplicații*, Editura Militară, București.
- Peters W.H., Ranson W.F. (1981) Digital imaging techniques in experimental stress analysis, *Optical Engineering* 21, 427-432.
- Peterson R.E. (1959) Notch-sensitivity, in *Metal Fatigue* (ed. Sines G., Waisman J.L.), McGraw Hill, New York, 293-306.
- Peterson R.E. (1974) *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York.
- Pilkey W.D. (1997) *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New York.
- Pilkey W.D. (2005) *Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*, 2<sup>nd</sup> edition, John & Sons, New Jersey.
- Pluvinage G. (2003) *Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Pluvinage G. (1998) Fatigue and fracture emanating from notch; the use of the notch stress intensity factor, *Nuclear Engineering and Design* 185, 173-184.
- Qylafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluvinage G. (1999) Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats, *International Journal of Fatigue* 21, 753-760.

Raju I.S., Newman J.C. (1984) Stress intensity factors circumferential surface cracks in pipe and rods, *Proceedings of 17<sup>th</sup> National Symposium on Fracture Mechanics*, Albany.

Rao S.S. (2005) *The Finite Element Method in Engineering 4<sup>th</sup> edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, USA.

Rashid Y.R. (1968) Analysis of prestressed concrete pressure vessels, *Nuclear Engineering and Design* 7, 334-355.

Rusu O., Gall T. (1970) *Probleme moderne ale Rezistenței Materialelor*, Editura Tehnică, București.

Rusu O., Teodorescu M., Lașcu-Simion N. (1992) *Oboseala Metalelor. Baze de calcul vol.1*, Editura Tehnică, București.

Sadd M.H. (2004) *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Elsevier Butterworth-Heinemann.

Schijve J. (1980) Stress gradients around notches, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 3, 325-338.

Schijve J. (2001) *Fatigue of Structures and Materials*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Seweryn A. (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics* 47, 673-681.

Seweryn A., Molski K. (1996) Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions, *Engineering Fracture Mechanics* 55, 529-556.

Seweryn A., Lukaszewicz A. (2002) Verification of brittle criteria for elements with V-shaped notches, *Engineering Fracture Mechanics* 69, 1487-1510.

Shigley J.E., Mischke C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design 5<sup>th</sup> edition*, McGraw-Hill, New York.

Siebel E., Stieler M. (1955) Ungleichformige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung, *VDI Z* 97, 121-126.

Sinescu C., Negruțiu M., Marșavina L., **Negru R.**, Căplescu C., Bradu A., Hughes M., Romînu M., Podoleanu A.G. (2009) Effect of masticatory load on crack deflection/penetration investigated with en-face optical coherence tomography in ceramic fixed partial, *Medical Imaging 2009: Physics of Medical Imaging*, Proceedings of SPIE vol. 7258, Lake Buena Vista, USA, 72584K.

Stephens R.I., Fatemi A., Stephens R.R., Fuchs H.O. (2001) *Metal Fatigue in Engineering*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New York.

Stowell E.Z. (1950) Stress and strain concentration at a circular hole in an infinite plate, Technical Note 2073, *National Advisory Committee for Aeronautics*, Washington.

Susmel L., Taylor D. (2008) On the use of the Theory of Critical Distances to predict static failures in ductile materials containing different geometrical features, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4410-4421.

Susmel L., Taylor D. (2008a) The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 534-550.

Sutton M.A., Wolters W.J., Peters W.H., Ranson W.F., McNeill S.R. (1983) Determination of displacements using an improved digital correlation method, *Image and Vision Computing* 1, 133-139.

Sutton M.A., Cheng M., McNeill S.R., Chao Y.J., Peters W.H. (1988) Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis, *Image and Vision Computing* 4, 143-150.

Sutton M.A., Bruck H.A., Chae T.L., Turner J.L. (1991) Experimental investigations of three-dimensional effects near a crack tip using computer vision, *International Journal of Fracture* 53, 201-228.

Sutton M.A. (2008) Digital Image Correlation for Shape and Deformation Measurements, in *Handbook of Experimental Solid Mechanics* (ed. Sharpe Jr. W.N.), Springer Science+Business Media, LLC New York.

Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. (1985) *The Stress Analysis of Cracks Handbook* 2<sup>nd</sup> edition, Paris Productions Incorporated, St. Louis, Missouri.

Tanaka K. (1983) Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches, *International Journal of Fracture* 22, R39-R45.

Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model, *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.

Taylor D., Zhou W., Ciepalowicz A.J., Devlukia J. (1999a) Mixed-mode fatigue from stress concentrations: an approach based on equivalent stress intensity, *International Journal of Fatigue* 21, 173-178.

Taylor D., Wang G. (2000) The validation of some methods of notch fatigue analysis, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23, 387-394.

Taylor D., Merlo M., Pegley R., Cavatorta M.P. (2004) The effect of stress concentrations on the fracture strength of polymethylmethacrylate, *Materials Science and Engineering A* 382, 288-294.

Taylor D. (2006) The Theory of Critical Distances: a history and a new definition, *Structural Durability & Health Monitoring* 2, 1-10.

Taylor D. (2007) *The Theory of Critical Distances. A New Perspective in Fracture Mechanics*, Elsevier, London.

Thomson W. (1853) On the dynamical theory of heat with numerical results deduced from Mr. Joule's equivalent of the thermal unit, and M. Regnault's observations on steam, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 20, 261-288.

Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1970) *Theory of Elasticity* 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, New York.

Tripa P., Faur N. (1994) *Metode teoretice și experimentale pentru determinarea stării de tensiune și deformație*, Universitatea Tehnică Timișoara.

Walker K. (1970) The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum, in *Effects of Environmental and Complex Load History for Fatigue Life*, ASTM STP 462, 1-14.

Wang G., Taylor D., Bouquin B., Devlukia J., Ciepalowicz A. (2000) Prediction of fatigue failure in a camshaft using the crack modelling method, *Engineering Failure Analysis* 7, 189-197.

Westergaard H.M. (1939) Bearing Pressures and Cracks, *Journal of Applied Mechanics* 6, A49-53.

Whitney J.M., Nuismer R.J. (1974) Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *Journal of Composite Materials* 8, 253-265.

Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *Journal of Applied Mechanics* 19, 526-528.

Ye D.Y., Wang D.J. (1996) A new approach to the prediction of fatigue notch reduction factor  $K_f$ , *International Journal of Fatigue* 18, 105-109.

Young W.C., Budynas R.G. (2002) *Roark's Formulas for Stress and Strain* 7<sup>th</sup> edition, McGraw-Hill, New York.

Xu R.X., Thompson J.C., Topper T.H. (1995) Practical stress expressions for stress concentration regions, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 18, 885-895.

Zeng Z., Fatemi A. (2001) Elasto-plastic stress and strain behaviour at notch roots under monotonic and cyclic loadings, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 36, 287-300.

Zhang X.B., Li J. (2008) A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4925-4932.

Zienkiewicz O.C. (1977) *The Finite Element Method 3<sup>rd</sup> edition*, McGraw-Hill Book Company Ltd., Maidenhead, Berkshire, England.

\*\*\* - ASTM D5045-99 Standard Test Methods for Plain-Strain Fracture Toughness and Strain Energy Release Rate of Plastic Materials.

\*\*\* - ASTM E647-00 Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates.

\*\*\* - CEEEX nr. 202/20.07.2006, *Modelarea și simularea comportării la solicitări complexe a materialelor compozite cu aplicații în industria aeronautică*, Constantinescu D.M. (director de proiect), Marșavina L. (coordonator proiect UPT), Faur N., **Negru R.**, Chelu P. samd.

\*\*\* - CEEEX nr. 262/12.09.2006, *Asamblări hibride cu adezivi și nituri la structuri din materiale compozite și aliaje de aluminiu*, Sandu M. (director de proiect), **Negru R.** (coordonator proiect UPT), Marșavina L., Faur N., Culea L. samd.

\*\*\* - Contract nr. 2/12.02.2009, *Încercări de materiale plastice*, Marșavina L., **Negru R.**, Cernescu A., Linul E.

\*\*\* - Contract BC 146/13.10.2008, *Analiză privind soluția de fiabilizare a arborelui turbinelor aplicată cu ocazia re tehnologizării hidroagregatelor. Propuneri de metodologie de urmărire în timp a stării arborilor turbinelor*, Bordeasu I., Popoviciu M., Mădăras L., Bălăsoiu V., Marșavina L., Vodă M., **Negru R.**, Stroiță C.

\*\*\* - EN ISO 527-1 (1993) Plastics – Determination of tensile properties – Part 1: General principles.

\*\*\* - EN ISO 527-2 (1994) Plastics – Determination of tensile properties – Part 2: Test conditions for moulding and extrusion plastics.

\*\*\* - Manual Cosmos 2.9 (2004), Structural Research and Analysis Corporation.