CONTRIBUŢII PRIVIND STUDIUL SISTEMELOR MECANICE CU LEGĂTURI UNILATERALE ŞI FRECARE

Teză destinată obţinerii
titlului ştiinţific de doctor inginer
la
Universitatea "Politehnica" din Timişoara
în domeniul INGINERIE MECANICĂ
de către

...fiz. dipl. Oana Petcoviciu...

Conducător ştiinţific: Prof.univ.dr.ing Liviu Brîndeu

Prof. univ. ing.Dr. EurIng. Tiberiu Dimitrie Babeu

Referenţi ştiinţifici: Prof.univ.Dr. Acad. Radu Voinea
Prof.Dr.Doc.ing. P.P. Teodorescu
Prof.univ.Dr.ing. Nicolae Faur

Ziua susţinerii tezei: 25.10.200

CUPRINS

1. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRII SISTEMELOR MECANICE CU LEGĂTURI UNILATERALE ŞI FRECARE

1.1 Funcţia legăturii unilaterale

Pentru studiul mişcării reale a sistemelor vibropercutante se formulează, în continuare, un nou model dinamic prin generalizarea noţiunii de legătură unilaterală. Astfel se admite că pe durata ciocnirii, legătura cedează, ceea ce de fapt are loc în cazul corpurilor reale. Pe această bază se deduc proprietăţi ale funcţiei legăturii unilaterale ca şi în cazul idealizat al teoriei ciocnirilor instantanee[14].

În spaţiul vectorial real $\Re^2$ se consideră sistemul dinamic a cărui poziţie este determinată prin vectorul:

$$q = \{q_1, q_2, \ldots, q^T\}$$

al coordonatelor generalizate. Aici prin T se indică transpusa unei matrice.

Interacţiunile percutante din sistem se evidenţiază prin considerarea legăturii unilaterale, care limitează în spaţiu şi timp mişcările posibile ale sistemului.

Pentru punerea în evidenţă analitic a legăturii unilaterale se va considera aplicaţia $f : \Re^n \times \Re \to \Re$, corespunzătoare legăturii sistemului, definită prin egalitatea:

$$f = f(q, t) \tag{1.1}$$

Se presupune că sistemul se mişcă liber pentru $t \in I \subset \Re$ şi $q \in E \subset \Re$, produsul $G = E \times I$, fiind stabilit de restricţia determinată de legătura unilaterală (1.1), şi anume

$$f_G : E \times I \to \Re_+^* \tag{1.2}$$

$\Re_+^*$ fiind mulţimea numerelor naturale strict pozitive.

Sistemul se va afla pe legătură într-un interval de timp $t \in J$, cu $J \cap I = \varphi$. În acest interval nu mai este verificată restricţia (1.2). Între sistem şi legătură au loc ciocniri în intervalele $K = \{t | f(q,t) < 0\}$. Deoarece ciocnirile au loc numai când sistemul se află pe legătură rezultă $K \subset J$.

Datorită interacţiunii dintre sistem şi legătură se produc deformări care modifică natura sistemului, iar pentru studiul mişcării sunt necesare ipoteze suplimentare fizice. Sistemul se mişcă pe legătură fără ciocniri dacă $t \in C_J \Re$, pentru care este satisfăcută egalitatea $F(q) = f(q,t) = 0$. În această situaţie mişcarea sistemului nu este împiedicată de legătură şi deci nu apar interacţiuni percutante.

Intervalul I este compus din subintervale separate de subintervalele J. Presupunând cunoscute condiţiile iniţiale ale mişcării libere pe un anumit subinterval

$t \in I^* \subset I$, prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării se poate determina $q : I^* \to E$, care verifică condiţia:

$$(F \circ q)(t) > 0 \tag{1.3}$$

Prima rădăcină pozitivă a ecuaţiei

$$(F \circ q)(t) = 0 \tag{1.3'}$$

reprezintă momentul trecerii sistemului pe legătură. Se notează prin $t = \tau_0$ această rădăcină care reprezintă momentul iniţial al unei ciocniri. Se va nota prin $t = \tau_1$ momentul final al aceleaşi ciocniri.

Trebuie remarcat că, în mişcarea liberă, funcţia legăturii unilaterale

$$(F \circ q)(t) : I \to \Re^* \tag{1.4}$$

are minimul nul în momentele $t = \tau_0$ şi $t = \tau_1$, adică

$$\inf_{t \in (\tau_0, \tau_1)} ((F \circ q)(t) t \in J) = 0 \tag{1.5}$$

Pe baza acestei observaţii se pot deduce concluzii importante privind proprietăţile funcţiei legăturii unilaterale. Astfel, într-o vecinătate foarte mică dinaintea momentului iniţial al ciocnirii, funcţia (1.4) descreşte pe când într-o vecinătate foarte mică după ciocnire creşte. Din acest motiv rezultă anumite proprietăţi ale derivatei funcţiei (1.4).

Propoziţia 1.1. Ţinând seama că funcţia legăturii unilaterale (1.4) este descrescătoare, într-o vecinătate $V_0 = (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ derivata funcţiei satisface condiţia:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t \in V_0} \leq 0 \tag{1.6}$$

Dacă toate derivatele funcţiei (1.4) până la ordinul $s-1$ inclusiv, sunt nule pentru $t = \tau_0$, atunci derivata de ordinul s va trebui să fie pozitivă pentru s par şi negativ pentru s impar.

Propoziţia 1.2. Într-o vecinătate $V_1 = [\tau_1, \tau_1 + \varepsilon)$ derivata funcţiei legăturii unilaterale (1.4) satisface condiţia:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t \in V_1} \geq 0 \tag{1.7}$$

Presupunând derivatele până la ordinul $s-1$ inclusiv nule pentru $t = \tau_1$ următoarea derivată nenulă, este necesar să fie pozitivă.

Propoziţia este evidentă deoarece funcţia legăturii unilaterale (1.4) este crescătoare în vecinătatea V_1. Este uşor de remarcat că relaţia (1.6) rezultă din studiul mişcării, în schimb condiţia (I.7) este o consecinţă a fenomenului de ciocnire.

1.2 Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării

Studiul mişcării sistemului, supus la legătură unilaterală dată de restricţia (1.2), se va face cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange.

Dacă se notează prin $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, $(i, j = 1,2,..., n)$, matricea de inerţie a sistemului, iar prin q^T vectorul linie al coordonatelor generalizate, energia cinetică este forma pătratică pozitiv definită:

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} \tag{1.8}$$

Se mai introduce vectorul $Q = \{Q_1, Q_2, ..., Q_n\}^T$ al forţelor generalizate corespunzătoare forţelor ce acţionează în timpul mişcării asupra sistemului.

În mişcarea liberă, pentru $t \in I$, se vor folosi ecuaţiile Lagrange

$$G = Q \tag{1.9}$$

unde s-a folosit notaţia $G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}^T$, având elementele

$$G_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \tag{1.9$'$}$$

Pe întreaga durată a contactului dintre sistem şi legătură, adică pentru $t \in J$, este necesar să se ţină seama şi de reacţiunea legăturii unilaterale (1.2). Trebuie subliniat că în acest fel se va studia atât fenomenul de ciocnire pentru care $f < 0$ cât şi mişcarea pe legătură fără ciocnire ce corespunde la $f = 0$. În ambele cazuri reacţiunea legăturii se va admite că are direcţia vectorului $grad\ f$.

Cu ajutorul multiplicatorului λ al reacţiunii şi al vectorului $a = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial q_n}\right\}^n$, ecuaţiile lui Lagrange pentru $t \in J$ se vor scrie

$$G = Q + \lambda a \tag{1.10}$$

Teorema 1.1 În mişcarea fără ciocniri a sistemului pe legătură, multiplicatorul λ al reacţiunii este

$$\lambda : C_j K \to \Re_+ \tag{1.11}$$

$\Re_+$ fiind mulţimea numerelor reale pozitive.

Demonstraţie. Conform propoziţiei 2, pentru $t = \tau_1$, este satisfăcută condiţia (1.7). Dacă este valabilă inegalitatea (1.7), după ciocnire sistemul nu rămâne pe legătură devenind liber. Astfel $C_j K = \{\tau_0, \tau_1\}$, contactul cu legătura nu se prelungeşte după ciocnire, deci $\lambda = 0$, acceleraţiile nu sunt supuse la nici o condiţie din partea legăturii unilaterale.

În ipoteza că este valabilă egalitatea (1.7), atunci, conform propoziţiei 2 în momentul $t = \tau_1$ trebuie să fie satisfăcută şi relaţia:

$$\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_1 \geq 0 \tag{1.12}$$

care reprezintă o condiţie impusă acceleraţiilor datorită legăturii unilaterale.

Ţinând seama de expresia analitică (1.1) a lui f se poate uşor demonstra identitatea

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = a^T A^{-1} G + \psi \tag{1.13}$$

unde A^{-1} este matricea inversă a lui A, iar ψ expresie ce nu conţine acceleraţii, adică

$$\frac{\partial \psi}{\partial \ddot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots, n)$$

Dacă vectorul Q al forţelor generalizate verifică, pentru $t = \tau_1$ condiţia

$$a^T A^{-1} Q + \psi \geq 0 \tag{1.14}$$

mişcarea sistemului se face după legea (1.9) ca şi în lipsa legăturii, ceea ce înseamnă că $\lambda = 0$.

În schimb, dacă pentru $t = \tau_1$, forţele generalizate Q satisface inegalitatea

$$a^T A^{-1} Q + \psi < 0 \tag{1.15}$$

rezultă $Q \neq G$, sistemul nu mai este liber, fiind necesar să se introducă şi reacţiunea legăturii. Deoarece sistemul rămâne pe legătură , va fi satisfăcută egalitatea (1.12) în care se înglobează şi reacţiunea, care, cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange (1.10) şi a identităţii (1.13) se mai poate scrie:

$$\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_1 = a^T A^{-1} Q + \psi + \lambda a^T A^{-1} a = 0$$

Din această ecuaţie rezultă pentru λ valoarea

$$\lambda = \frac{a^T A^{-1} Q + \psi}{B} \tag{1.16}$$

unde

$$B = -a^T A^{-1} a \tag{1.17}$$

După cum se poate uşor constata, valoarea B la fel ca şi produsul $\dot{q}^T A^{-1} \dot{q}$ - forma pătratică reciprocă formei (1.8) – este negativ definită şi se poate pune sub forma:

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{vmatrix} \tag{1.17'}$$

Pe baza inegalităţii (1.15), deoarece $B < 0$, din expresia (1.16), rezultă $\lambda > 0$. Astfel teorema este demonstrată.

Teorema 1.2. Pe durata ciocnirii, în mişcarea sistemului sunt valabile ecuaţiile lui Lagrange (1.10) cu multiplicatorul $\lambda > 0$.

Demonstraţie. Legătura fiind unilaterală, sistemul acţionează asupra legăturii numai pentru $f \leq 0$. Deoarece, conform teoremei 1.1, chiar şi în cazul $f = 0$, s-a obţinut $\lambda \geq 0$, atunci pentru $f < 0$ când legătura este solicitată şi se deformează, cu atât mai mult trebuie să rezulte $\lambda > 0$.

1.3 Studiul ciocnirii

După cum s-a arătat ciocnirile din sistem vor avea loc pentru $t \in K$, când $f < 0$. Trebuie subliniat că în realitate, acest fenomen se caracterizează print-o solicitare intensă a legăturii şi că durata ciocnirii este întotdeauna foarte scurtă[16].

Definiţia 1.1. Se consideră fenomen de ciocnire în intervalul (τ_0, τ_1) dacă pentru momentul $t = \tau_0$, există o vecinătate $V_c = [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon)$ astfel ca $\tau_1 \in V_c$, iar $(F \circ q)(t) : (\tau_0, \tau_1) \to \Re_-^*, \Re_-^*$ fiind mulţimea numerelor reale strict negative.

Propoziţia 1.3. Extensia funcţiei legăturii unilaterale $(F \circ q)(t) : I \cup J \to \Re$ se determină prin condiţiile:

a) Pentru $t \in J$ vectorul q este soluţie a sistemului (1.10);

b) Vectorul $q : I \cup J \to \Re$ este cel puţin de clasă C^2.

Presupunând că în intervalul $(\tau_0, \tau_1) \subset K \subset J$ are loc o ciocnire, dacă $\tau_1 - \tau_0 < \varepsilon$, atunci rezultă:

$$|q(\tau_1) - q(\tau_0)| < \varepsilon |\dot{q}(t')|\,; \quad t' \in (\tau_0, \tau_1)$$

Demonstraţie: Datorită continuităţii vectorului $\dot{q}$, aceasta pentru $t \in (\tau_0, \tau_1)$ este mărginit. Deci există $t' \in (\tau_0, \tau_1)$ astfel încât aplicând funcţiei q teorema creşterilor finite rezultă:

$$q(\tau_1) - q(\tau_0) = \dot{q}(t')(\tau_1 - \tau_0)$$

ceea ce dovedeşte propoziţia. Prin urmare, poziţia sistemului în timpul ciocnirii se poate presupune neschimbată.

Teorema 1.3. Dacă funcţia $(F \circ q)(t) : (\tau_0, \tau_1) \to \Re_-^*$ admite un minim pentru $t = \tau_2 \in (\tau_0, \tau_1)$, atunci percuţiile de legătură vor fi

$$\mu_{02} = \int_{\tau_0}^{\tau_2} \lambda(t) dt = \frac{1}{B_0} \left(\frac{df}{dt} \right)_0 \tag{1.18}$$

$$\mu_{21} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \lambda(t) dt = -\frac{1}{B_0} \left(\frac{df}{dt} \right)_1 \tag{1.19}$$

De asemenea, variaţiile vectorului vitezelor în cele două etape ale ciocnirii rezultă

$$\dot{q}(\tau_2) - \dot{q}(\tau_0) = \frac{A_0^{-1} a}{B_0} \left(\frac{df}{dt} \right)_0 \tag{1.20}$$

$$\dot{q}(\tau_1) - \dot{q}(\tau_2) = -\frac{A_0^{-1} a}{B_0} \left(\frac{df}{dt} \right)_1 \tag{1.21}$$

unde prin indicele 0 se indică expresiile calculate pentru $t = \tau_0$.

Demonstraţie. Conform propoziţiei 1.3, pentru $t \in (\tau_0, \tau_1)$, vectorul q se poate presupune neschimbat şi analog percuţiile corespunzătoare forţelor Q neglijabile. În prima fază a ciocnirii, numită compresiune, ce are loc pentru $t \in (\tau_0, \tau_2)$ din ecuaţiile lui Lagrange (1.10) prin integrare se obţine:

$$A_0[\dot{q}(\tau_2) - \dot{q}(\tau_0)] = \mu_{02} a_0 \tag{1.22}$$

Cu ajutorul matricei A_0^{-1}, din această ecuaţie se mai deduce

$$\dot{q}(\tau_2) - \dot{q}(\tau_0) = \mu_{02} A_0^{-1} a_0 \tag{1.23}$$

Pe de altă parte, derivata funcţiei legăturii unilaterale (1.1) este

$$\frac{df}{dt} = a_0^T \dot{q} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \tag{1.24}$$

deci diferenţa derivatelor (1.24) calculate pentru $t = \tau_0$ şi $t = \tau_2$ va fi

$$a_0^T [\dot{q}(\tau_1) - \dot{q}(\tau_2)] = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{1.25}$$

Dacă se introduce expresia (1.23) în egalitatea (1.25) rezultă:

$$-\mu_{02} a_0^T A_0^{-1} a_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0$$

care conform cu (1.17), coincide cu formula (1.18). De asemenea dacă această valoare se introduce în ecuaţia (1.23), rezultă legea (1.20) de variaţie a vectorului vitezelor.

Procedând în acelaşi mod, se studiază cea de-a doua fază a ciocnirii (τ_2, τ_1) care corespunde destinderii. Astfel se ajunge la ecuaţiile

$$\dot{q}(\tau_1) - \dot{q}(\tau_2) = \mu_{21} A_0^{-1} a_0 \tag{1.26}$$

$$a_0^T [\dot{q}(\tau_2) - \dot{q}(\tau_1)] = -\left(\frac{df}{dt}\right)_1 \tag{1.27}$$

Este uşor de verificat că din aceste ecuaţii rezultă formulele (1.19) şi (1.21).

Definiţia 1.2. Se numeşte coeficient de restituire la ciocnire raportul percuţiilor de legătură din faza de destindere şi de compresiune, adică:

$$R = \frac{\mu_{21}}{\mu_{02}} \qquad (0 \le R \le 1) \tag{1.28}$$

unde $\mu_{02} \neq 0$.

Determinarea vitezelor la sfârşitul ciocnirii necesită încă o ecuaţie, care se deduce experimental din (1.28).

Teorema 1.4. Presupunând coeficientul de restituire R independent de viteze, funcţie numai de proprietăţile fizice ale sistemului (ipoteza lui Newton), vitezele la sfârşitul ciocnirii $(t = \tau_1)$, vor fi

$$\dot{q}(\tau_1) = \dot{q}(\tau_0) + (1 + R)\frac{A_0^{-1} a_0}{B_0}\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{1.29}$$

Demonstraţie. Dacă se introduc expresiile (1.18) şi 1.19) în formula (1.28), rezultă

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = -R\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \qquad (1.30)$$

Prin adunarea ecuaţiilor (1.20) şi (1.21), cu ajutorul relaţiei (1.30) se deduce formula (1.29).

1.4 Clasificarea mişcărilor posibile

Proprietăţile deduse pentru funcţia legăturii unilaterale, pot fi folosite la studiul şi clasificarea mişcărilor posibile ale sistemelor vibropercutante. Pe această

cale se stabilesc condiţiile necesare pentru realizarea mişcărilor cu sau fără ciocniri, precum şi cu sau fără contact prelungit [69].

Teorema 1.5. În caz că este verificată inegalitatea (1.6), sistemul suferă o ciocnire în intervalul (τ_0, τ_1), iar contactul cu legătura:

a) nu se prelungeşte dacă este valabilă inegalitatea (1.7) sau în şirul derivatelor de ordin superior există cel puţin una diferită de zero;
b) este prelungit dacă se verifică egalitatea (1.7) şi toate derivatele de ordin superior sunt de asemenea nule.

Demonstraţie. Deoarece $\mu_{02} \neq 0$ există percuţii de legătură şi se poate defini coeficientul de restituire (1.28). În ipoteza a) în vecinătatea V_1 a momentului $t = \tau_1$ funcţia legăturii unilaterale $(f \circ q)(t): I \cup J \to \Re$ este crescătoare şi ţinând seama că pentru $t = \tau_1$ se anulează, rezultă că ea trebuie să devină pozitivă, deci sistemul urmează să părăsească legătura. Evident, în ipoteza b), funcţia legăturii unilaterale va fi identic nulă în vecinătatea V_1 a momentului $t = \tau_1$ şi deci sistemul nu poate părăsi legătura.

Aceleaşi concluzii, privind contactul cu legătura sunt valabile şi pentru cazul când nu se realizează ciocnirea.

Propoziţia 1.4. În ipoteza verificării egalităţii din condiţia (1.6) mişcarea sistemului se face fără ciocnire.

Această propoziţie este evidentă deoarece din condiţii fizice $\mu_{21} < \mu_{02}$, dar conform relaţiei (1.18): $\mu_{02} = 0$.

1.5 Legături unilaterale echivalente

Într-un acelaşi sistem mecanic, la cuple percutante diferite corespund expresii analitice diferite ale legăturii unilaterale. În general acestea implică mişcări diferite ale sistemului, deoarece condiţiile limită corespunzătoare ciocnirilor sunt deosebite.

Definiţia 1.3. Două legături unilaterale de forma (1.1), exprimate prin funcţii (1.1), sunt echivalente dacă se obţin aceleaşi interacţiuni percutante pentru sistem.

În primul rând se va presupune funcţia legăturii unilaterale de forma:

$$f(q,t) = \varphi(q,t)\bar{f}(q,t) \tag{1.31}$$

unde $\varphi(q,t)$ este o funcţie pozitiv definită.

Teorema 1.6. Legătura unilaterală definită de funcţia $f(q,t)$ dată de produsul (1.31), unde $\varphi(q,t)$ are întotdeauna semn pozitiv este echivalentă cu legătura unilaterală definită de funcţia $\bar{f}(q,t)$.

Demonstraţie. Deoarece $\varphi(q,t) \geq 0$, ciocnirea se produce la momentul $t = \tau_0$ care anulează factorul al doilea, adică $\bar{f}_0 = 0$.

Ţinând seama de regula derivării unui produs şi de egalitatea $\bar{f}_0 = 0$ rezultă imediat

$$a_0 = \varphi_0 \bar{a}_0, \qquad B_0 = \varphi_0^2 \bar{B}_0, \qquad \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \varphi_0 \left(\frac{d\bar{f}}{dt}\right)_0 \tag{1.32}$$

$(\varphi_0 \neq 0)$

unde prin $\bar{a}$ şi $\bar{B}$ s-au notat expresii analoage lui a şi B calculate însă pentru funcţia $\bar{f}$. Pe baza egalităţilor (1.32) formulele (1.29) devin

$$\dot{q}(\tau_1) = \dot{q}(\tau_0) + (1+R)\frac{A_0^{-1}\bar{a}^T}{\bar{B}_0}\left(\frac{d\bar{f}}{dt}\right)_0 \tag{1.33}$$

ceea ce se obţine şi în cazul legăturii unilaterale date de funcţia $\bar{f}(q,t)$, aplicând formulele (1.29).

Dacă în particular $\varphi_0 = 0$, proprietatea anterioară rămâne valabilă deoarece prin trecerea la limită pentru $\varphi_0 \to 0$, se obţin tot egalităţile (1.33).

Prin urmare, existenţa unui factor nenegativ nu are nici o influenţă şi poate fi eliminat. În particular pentru $\bar{f} \geq 0$, mişcarea se face fără ciocniri.

Corolar. În cazul funcţiei (1.1) exprimată ca o putere de forma $\bar{f}(q,t) = \overline{f^p}(q,t)$, unde $p \in N$, condiţia (1.1):

a) pentru p par nu constituie legătură unilaterală;

b) pentru p impar este echivalentă legăturii unilaterale $\bar{f}(q,t) \geq 0$.

Demonstraţie. Pentru p par funcţia f este nenegativă şi conform celor arătate anterior, în sistem nu apar ciocniri. În schimb, pentru p impar, deci $p-1$ par, se poate lua $\varphi = \bar{f}^{p-1} \geq 0$ şi astfel legătura $f \geq 0$, pe baza teoremei 6, este echivalentă cu $\bar{f} \geq 0$.

1.6 Tipuri de legături unilaterale

Transpunerea analitică a interacţiunilor percutante, cu ajutorul funcţiei legăturii unilaterale, prezintă unele particularităţi ce trebuie analizate în funcţie de forma legăturii.

Este important de observat că fiecărei cuple percutante îi corespunde o legătură unilaterală (proprietatea inversă nefiind întotdeauna valabilă). Această observaţie este foarte importantă pentru sistemele vibropercutante ce conţin mai multe cuple percutante.[16]

Definiţia 1.4. Legătura unilaterală, corespunzătoare unei cuple percutante, se numeşte legătură simplă. Dacă legătura unilaterală reprezintă mai multe cuple percutante se va numi multiplă.

Evident, ca structură, legătura multiplă trebuie să conţină un produs de factori de forma

$$f = f_1 f_2 \dots f_h \geq 0 \tag{1.34}$$

unde

$$f_j = f_j(q,t) \qquad (j = 1,2,\dots,h) \tag{1.35}$$

aici, în virtutea teoremei 1.6, au fost înlăturaţi factorii care păstrează un semn constant. De asemenea, se presupune că s-au construit funcţiile f_j astfel ca domeniul mişcărilor posibile să corespundă la $f_j > 0$ $(j = 1,2,\dots,h)$.

Teorema 1.7. Legătura unilaterală multiplă de forma (1.34) este echivalentă cu ansamblul legăturilor simple $f \geq 0$ $(j = 1,2,\dots,h)$ şi reprezintă h cuple percutante.

Demonstraţie. Legătura (1.34) se va scrie astfel încât să fie evidenţiat numai factorul f_j, adică

$$f = \varphi_j f_j \geq 0 \tag{1.36}$$

unde

$$\varphi_j = f_1 \dots f_{j-1} f_{j+1} \dots f_h$$

Se constată uşor că pentru $f = 0$ va rezulta că este îndeplinită condiţia $\varphi_j > 0$. Aceasta înseamnă, conform teoremei 1.6, că în locul legăturii $f \geq 0$ se poate considera $f_j \geq 0$. Prin urmare, în cazul unei legături unilaterale multiple de forma (1.34), se pot considera h legături simple $f \geq 0$ $(j = 1,2,\dots,h)$. De exemplu, sistemul vibropercutant cu un grad de libertate, supus la legătura unilaterală:

$$f(q) = q_0^2 - q^2 \geq 0$$

poate fi presupus sub acţiunea a două legături simple

$$f_1(q) = q + q_0 > 0\,, \qquad f_2(q) = -q + q_0 \geq 0$$

Deci în sistem există două cuple percutante corespunzătoare celor două legături simple.

1.7 Prezentarea problemei elastostatice

Pentru scrierea problemei statice liniar elastice cu condiţii la limita contactului unilateral şi frecare Coulomb se poate considera un solid elastic cu frecare pe o suprafaţă rigidă plană fixă. O astfel de problemă a fost studiată de către N. Kikuchi şi J. T. Oden [38].

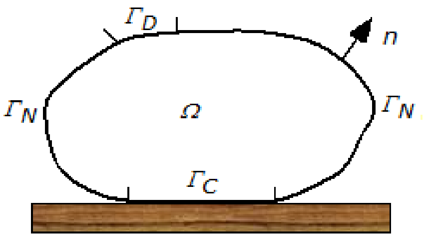


Fig. 1.1 – Corp elastic aflat în contact cu frecare pe o suprafaţă rigidă plană

Condiţiile contactului unilateral şi a frecării Coulomb

Pe Γ_C se descompune deplasarea şi forţele de constrângere în componente normale şi tangenţiale astfel:

$$u_N = u \cdot n \qquad u_T = u - u_N \cdot n$$

$$\sigma_N(u) = (\sigma(u)n)n \qquad \sigma_T = \sigma(u)n - \sigma_N(u)n$$

Pentru a da un sens acestor descompuneri presupunem că Γ_C este de clasă C^1. Presupunem de asemenea că nu există distanţă iniţială între solidul considerat şi planul rigid.

Contactul unilateral

Condiţia contactului unilateral se poate exprima cu ajutorul relaţiei următoare:

$$u_N \le 0\,,\ \sigma_N(u) \le 0 \text{ şi } u_N \sigma_N(\mu) = 0 \tag{1.37}$$

Aceste condiţii se exprimă în cazul în care în urma contactului corpurile se deformează şi nu prezintă întrepătrunderi.

Frecarea Coulomb

Notăm cu F coeficientul de frecare. Atunci condiţia de frecare Coulomb este:

a) $u_T = 0$ atunci $|\sigma_T(u)| \le -\sigma_N(u)F$

b) $u_T \ne 0$ atunci $\sigma_T(u) = \sigma_N(u)F\dfrac{u_T}{|u_T|}$

Aceste două condiţii reprezintă două situaţii fizice care sunt legate de blocare când $u_T = 0$ şi alunecare când $u_T \ne 0$.

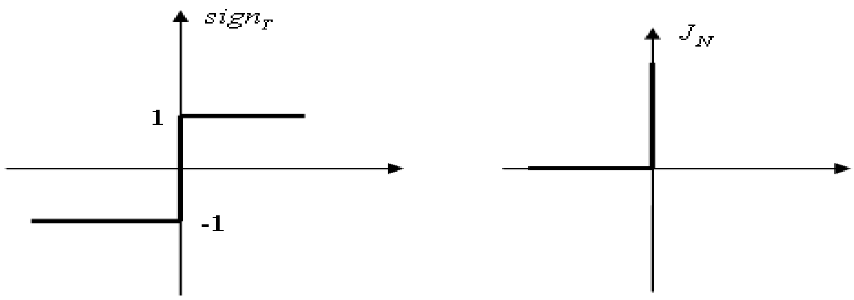
Putem rescrie aceste două condiţii într-o formă echivalentă utilizând următoarele funcţii multivoce:

$$J_N(\xi)=\begin{cases}\{0\}, \text{ dacă } \xi<0\\ [0,+\infty), \text{ dacă } \xi=0\\ \varphi, \text{ dacă } \xi>0\end{cases}$$

$$sign_T(v)=\begin{cases}\left\{\dfrac{v_T}{|v_T|}\right\}, \forall v\in\Re^d, v_T\neq 0\\ \left\{w\in\Re^d; |w|\leq 1, w_N=0\right\}, \text{ dacă } v_T=0\end{cases}$$

unde $d=2$ sau 3.

Funcţiile J_N şi $sign_T$ sunt maximal monotone reprezentând subgradientul funcţiei indice pe intervalul $(-\infty,0]$ şi funcţia $v\rightarrow|v_T|$. În cazul bidimensional $(n=2)$ şi funcţia $sign$ multivoce are următoarea formă:



Condiţiile de contact unilateral şi frecarea Coulomb devin:

$$-\sigma_N(u)\in J_N(u_N) \tag{1.38}$$

$$-\sigma_T(u)\in -F\sigma_N(u)sign_T(u_T) \tag{1.39}$$

Problema contactului static cu frecare

Problema contactului static cu frecare Coulomb în următoarea formă (se poate determina deplasarea u care verifică relaţia de mai jos) a fost introdusă de către G. Duvaut şi J.L. Lions[26]:

$$\begin{cases}-div\sigma(u)=f & \text{în } \Omega\\ \sigma(u)=A\varepsilon(u) & \text{în } \Omega\\ u=U & \text{pe } \Gamma_D\\ \sigma(u)n=g & \text{pe } \Gamma_N\\ -\sigma_N(u)\in J_N(u_N) & \text{pentru } \Gamma_C\\ -\sigma_T(u)\in -F\sigma_N(u)sign_T(u_T) & \text{pentru } \Gamma_C\end{cases} \tag{1.40}$$

Analiza stabilităţii sistemelor clasice

Pentru a rezolva problema elastodinamică liniară există două metode de aproximare: metoda superpoziţiei modale şi metoda integrării directe. Termenul

„integrare directă” înseamnă că nici o transformare de discretizare a problemei elastodinamice liniare nu este efectuată înaintea integrării numerice. Printre metodele de integrare directă se disting metodele explicite şi metodele implicite. Metodele explicite sunt de obicei utilizate pentru simularea impactului corpurilor solide şi alte fenomene care durează foarte puţin unde propagarea undelor de înaltă frecvenţă este importantă. Aceste metode nu necesită inversarea matricelor globale şi permit tratarea problemelor în cea mai mare măsură.

Stabilitatea precară a acestor metode necesită utilizarea unui pas de timp foarte mic. Tratarea contactului într-o formulare explicită este foarte delicată deoarece reacţiunile contactului nu sunt continue în funcţie de variabilele cinematice. Cel mai adesea se utilizează scheme clasice de integrare în timp adaptate, ale contactului cum sunt metoda θ şi schema Newmark sau schema punctului de mijloc (centru).

Noţiunea de stabilitate

Prin decuparea unui interval uniform $[0,T]$ obţinem un pas de timp $\Delta t = \frac{T}{N}$ asociat unui întreg $N \geq 1$ şi reprezentat de $t_n = n\Delta t$, $\forall 0 \leq n \leq N$. Încercăm să calculăm pentru toţi $n = 1,\ldots, N$ aproximările u^n şi v^n de $u(t_n)$ şi $\dot{u}(t_n)$. În această analiză a stabilităţii presupunem că f nu depinde de timp.

Fie $E(u,\dot{u})$ energia sistemului elastodinamic. Se pot da următoarele definiţii:

Definiţia 1.5. Spunem că schema de integrare în timp este stabilă dacă există $c > 0$ independent de Δt astfel încât $\forall n : E\left(u^n, v^n\right) \leq c$.

Definiţia 1.6. Spunem că schema de integrare în timp este disipativă dacă variaţia energiei verifică relaţia: $\Delta E = E\left(u^{n+1}, v^{n+1}\right) - E\left(u^n, v^n\right) \leq 0$.

Definiţia 1.7. Spunem că schema de integrare în timp este conservativă dacă variaţia de energie verifică relaţia $\Delta E = 0$.

Relaţia $\Delta E \leq 0$ va fi foarte utilă pentru alegerea schemei de integrare în timp deoarece condiţia ca schema să fie disipativă este suficientă pentru ca ea să fie stabilă.

Formularea metodei θ pentru problema contactului.

Metoda θ este una din cele mai utilizate metode. Această schemă este obţinută printr-o dezvoltare în serie Taylor a vectorului deplasare şi a vectorului viteză după primul ordin cu o pondere θ.[54] Vom nota cu a^n aproximarea lui $\ddot{u}(t_n)$ fără a fi confundată cu forma biliniară $a(\cdot,\cdot)$.

Schema metodei θ pentru problema cu contact elastodinamic se scrie în forma următoare:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t\left((1-\theta)v^n + \theta v^{n+1}\right) \\ v^{n+1} = v^n + \Delta t\left((1-\theta)a^n + \theta a^{n+1}\right) \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\begin{cases} Ma^{n+1} + Ku^{n+1} = L + B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} \\ -\lambda_N^{n+1} \in N_{K_N}\left(B_N u^{n+1}\right) \\ -\lambda_T^{n+1} \in \partial_2 j\left(\lambda_N^{n+1}, B_T v^{n+1}\right) \\ u(0) = u^0, v(0) = u^1 \end{cases} \tag{I.42}$$

Din relaţia (1.41) viteza v^{n+1} şi acceleraţia a^{n+1} în funcţie de u^{n+1} devin:

$$a^{n+1} = \frac{1}{\theta^2 \Delta t^2}\left(u^{n+1} - u^n\right) - \frac{1}{\theta^2 \Delta t} v^n - \frac{1-\theta}{\theta} a^n$$

$$v^{n+1} = \frac{1}{\theta \Delta t}\left(u^{n+1} - u^n\right) - \frac{1-\theta}{\theta} v^n$$

Înlocuind în sistemul (1.42), problema contactului elastodinamic se reduce la rezolvarea sistemului următor:

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{\theta^2 \Delta t^2} + K\right) u^{n+1} = \hat{L} + B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} \\ -\lambda_N^{n+1} \in N_{K_N}\left(B_N u^{n+1}\right) \\ -\lambda_T^{n+1} \in \partial_2 j\left(\lambda_N^{n+1}, a B_T u^{n+1} - C_T\right) \\ u(0) = u^0, v(0) = u^1 \end{cases} \tag{1.43}$$

unde

$$\hat{L} = L + \frac{1}{\theta^2 \Delta t^2} M u^n + \frac{1}{\theta^2 \Delta t} M v^n + \frac{1-\theta}{\theta} M a^n \tag{I.44}$$

$$a = \frac{1}{\theta \Delta t} \qquad \text{şi} \qquad C_T = \frac{1}{\theta \Delta t} B_T u^n + \frac{1-\theta}{\theta} B_T v^n \tag{I.45}$$

Schema Paoli şi Schatzman

Schema Paoli şi Schatzman urmează cadrul schemelor standard utilizate în literatura de specialitate. În schema Paoli – Schatzman intervine coeficientul de restituire $R \in [0,1]$ care se determină experimental.

Idea generală a schemei constă în utilizarea unei scheme centrate pe utilizarea a trei paşi de timp pentru viteze şi discretizarea deplasării normale în utilizarea conceptului de punct proxim la coeficientul de restituire R.

Problema contactului elastodinamic fără frecare, discretizată cu schema Paoli-Schatzman se scrie:

$$\begin{cases} U^0 \text{ şi } V^0 \text{ dau } U^1 = U^0 + \Delta t V^0 + \Delta t z(\Delta t), \text{ cu } \lim\limits_{\Delta t \to 0} z(\Delta t) = 0 \\ \forall n \geq 2, F^n \in \dfrac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + \partial I_{K_N}\left(\dfrac{U^{n+1} + RU^{n-1}}{1+R}\right) \\ F^n = M^{-1}\left(L - KU^n\right) \\ V^n = \dfrac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta T} \end{cases} \tag{1.46}$$

Schema a fost propusă prima dată pentru cazul matricei masă identice $M = Id_{\Re^d}$. Aceasta, fiind echivalentă cu algoritmul următor:

$$\begin{cases} U^0 \text{ şi } V^0 \text{ dau } U^1 = U^0 + \Delta t V^0 + \Delta t z(\Delta t), \text{ cu } \lim\limits_{\Delta t \to 0} z(\Delta t) = 0 \\ \forall n \geq 2, U^{n+1} = -RU^{n-1} + (1+R)P_{N_{K_N}}\left(\dfrac{2U^n - (1-R)U^{n-1} + \Delta t^2 F^n}{1+R}\right) \\ F^n = M^{-1}\left(L - KU^n\right) \\ V^n = \dfrac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta T} \end{cases} \tag{1.47}$$

Schema Paoli – Schatzman modificată

Idea acestei scheme constă în utilizarea unui punct de mijloc pentru partea elastodinamică a problemei[54]. Schema propusă se bazează pe relaţiile:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t V^{n+\frac{1}{2}}; \qquad U^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \tag{1.48}$$

$$\begin{cases} U^0 \text{ şi } V^0 \text{ dau } U^1 = U^0 + \Delta t V^0 + \Delta t z(\Delta t), \\ \text{cu } \lim\limits_{\Delta t \to 0} z(\Delta t) = 0, \forall n \geq 2, \\ M\left(\dfrac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + K\left(\dfrac{U^{n+1} + 2U^n + U^{n-1}}{4}\right) = L + B_N^T \Lambda_N^n + B_T^T \Lambda_T^n \\ -\Lambda_N^n \in N_{K_N}\left(\dfrac{B_N U^{n+1} + RB_N U^{n-1}}{1+R}\right) \\ -\Lambda_T^n \in \partial_2 j\left(-\Lambda_N^n, \dfrac{B_T V^{n+\frac{1}{2}} + B_T V^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) \end{cases} \tag{1.49}$$

Trebuie menţionat faptul că condiţia de contact este verificată pentru deplasarea pe punctul proxim definit de:

$$\frac{B_N U^{n+1} + R B_N U^{n-1}}{1+R}$$

şi condiţia de frecare este dată de viteza medie a jumătăţii de pas:

$$\frac{B_T V^{n+\frac{1}{2}} + B_T V^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Analiza stabilităţii

Ţinând seama de relaţiile (1.48) şi (1.49) de mai sus rezultă variaţia energiei definită ca $\Delta E = E\left(U^{n+\frac{1}{2}}, V^{n+\frac{1}{2}}\right) - E\left(U^{n-\frac{1}{2}}, V^{n-\frac{1}{2}}\right)$ satisface următoarea relaţie:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(\Lambda_N^n, B_N U^{n+1} - B_N U^{n-1}\right) + \Delta t\left(\Lambda_T^n, \frac{B_T V^{n+\frac{1}{2}} + B_T V^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) \le -\frac{1+R}{2}\left(\Lambda_N^n, B_N U^{n-1}\right)$$

Pentru schema dată de relaţiile (1.41) şi (1.42) variaţia energiei este:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(M\left(v^{n+1} - v^n\right), v^{n+1} - v^n\right) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} - u^n\right)$$
$$-\left((1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n\right) + \left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1}\right), u^{n+1} - u^n\right) \qquad (1.50)$$

Pentru a calcula această variaţie de energie se porneşte de la relaţia:

$$\Delta E = E\left(u^{n+1}, v^{n+1}\right) - E\left(u^n, v^n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(M\left(v^{n+1} - v^n\right), v^{n+1} + v^n\right) + \frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} + u^n\right) - \left(L, u^{n+1} - u^n\right)$$

sau

$$M\left(v^{n+1} - v^n\right) = \Delta t\left((1-\theta)Ma^n + \theta M a^{n+1}\right)$$
$$(1-\theta)\Delta t\left(L + B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n - Ku^n\right) + \theta \Delta t\left(L + B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} - Ku^{n+1}\right) = S + \Delta t L$$

unde

$$S = (1-\theta)\Delta t\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n - Ku^n\right) + \theta \Delta t\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} - Ku^{n+1}\right)$$

Înlocuind în relaţia de variaţie a energiei obţinem:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(S, v^{n+1} + v^n\right) + \frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} + u^n\right) + \left(L, \frac{\Delta t}{2}\left(v^{n+1} + v^n\right) - u^{n+1} + u^n\right)$$

sau din schema (1.41) rezultă:

$$\frac{\Delta T}{2}\left(v^{n+1} + v^n\right) - u^{n+1} + u^n = \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(v^{n+1} - v^n\right)$$

Deci, ΔE se exprimă cu ajutorul relaţiei următoare:

$$\Delta E = \frac{\Delta t}{2}(1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n - K u^n, v^{n+1} + v^n\right) + \frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} + u^n\right)$$
$$+ \frac{\Delta t}{2}\theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} - K u^{n+1}, v^{n+1} + v^n\right) + \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(L, v^{n+1} - v^n\right)$$

Pe de altă parte, putem scrie:

$$L = (1-\theta)L + \theta L$$

şi deoarece f nu depinde de intervalul de timp, ţinând cont de relaţia (1.49) obţinem:

$$L = \left(Ma^n + Ku^n - B_N^* \lambda_N^n - B_T^* \lambda_T^n\right) = \left(Ma^{n+1} + Ku^{n+1} - B_N^* \lambda_N^{n+1} - B_T^* \lambda_T^{n+1}\right)$$

deci

$$L = (1-\theta)\left(Ma^n + Ku^n - B_N^* \lambda_N^n - B_T^* \lambda_T^n\right) + \theta\left(Ma^{n+1} + Ku^{n+1} - B_N^* \lambda_N^{n+1} - B_T^* \lambda_T^{n+1}\right)$$

$$= M\left((1-\theta)a^n + \theta a^{n+1}\right) + K\left((1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}\right) - \left((1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n\right) + \theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} M\left(v^{n+1} - v^n\right) + K\left((1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}\right) - \left((1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n\right) + \theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1}\right)\right)$$

Prin urmare

$$\Delta E = \frac{\Delta t}{2}(1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^n \lambda_T^n - K u^n, v^{n+1} + v^n\right)$$
$$+ \frac{\Delta t}{2}\theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} - K u^{n+1}, v^{n+1} + v^n\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} + u^n\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(M\left(v^{n+1} - v^n\right), v^{n+1} - v^n\right)$$
$$+ \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(K\left((1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}\right), v^{n+1} - v^n\right)$$
$$- \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)(1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n, v^{n+1} - v^n\right)$$
$$- \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1}, v^{n+1} - v^n\right).$$

Prin introducerea aceloraşi termeni şi utilizarea ecuaţiei elastodinamice în relaţia (1.42) se obţine:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(M\left(v^{n+1} - v^n\right), v^{n+1} - v^n\right) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(K\left(u^{n+1} - u^n\right), u^{n+1} - u^n\right)$$
$$- \left((1-\theta)\left(B_N^* \lambda_N^n + B_T^* \lambda_T^n\right) + \theta\left(B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1}\right), u^{n+1} - u^n\right).$$

Stabilitatea metodei θ

Studiul stabilităţii problemei cu contact elastodinamic semidiscretizată în timp prin metoda θ generează următoarele rezultate:
Schema dată de relaţiile (1.41) şi (1.42) este disipativă prin urmare stabilă pentru $\theta = 1$.

Schema pentru $\theta = 1$ este tocmai schema Euler implicită.

Pentru $\theta = 1$, relaţia (1.50) devine:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\left(\left(M\left(v^{n+1}-v^{n}\right), v^{n+1}-v^{n}\right)+\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right), u^{n+1}-u^{n}\right)\right)-\left(B_N^* \lambda_N^{n+1}+B_T^* \lambda_T^{n+1}, u^{n+1}-u^{n}\right)$$

sau

$$\left(M\left(v^{n+1}-v^{n}\right), v^{n+1}-v^{n}\right) \geq 0 \text{ şi } \left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right), u^{n+1}-u^{n}\right)$$

Utilizând definiţiile pentru B_N^* şi B_T^* obţinem:

$$\left(B_N^* \lambda_N^{n+1}+B_T^* \lambda_T^{n+1}, u^{n+1}-u^{n}\right)=\left(\lambda_N^{n+1}, u_N^{n+1}-u_N^{n}\right)+\left(\lambda_T^{n+1}, u_T^{n+1}-u_T^{n}\right)$$

sau din condiţia contactului unilateral şi definiţia metodei θ, rezultă:

$$\left(\lambda_N^{n+1}, u_N^{n+1}\right)=0, \ \left(\lambda_N^{n+1}, u_N^{n}\right) \geq 0 \text{ şi } u_T^{n+1}-u_T^{n}=\Delta t v_T^{n+1}$$

deci

$$\Delta E \leq \Delta t\left(\lambda_T^{n+1}, v_T^{n+1}\right)$$

şi rezultă

$\Delta E \leq 0$ ceea ce implică $\left(\lambda_T^{n+1}, v_T^{n+1}\right) \leq 0$, din condiţia de frecare Coulomb.

Deci schema Euler implicită este disipativă ceea ce implică stabilitatea acestei scheme.

Remarcă Schema pentru $\theta = \frac{1}{2}$ corespunde schemei Crank – Nicholson, iar variaţia de energie pentru problema (I.41), (I.42) devine:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\left(\left(B_N^* \lambda_N^{n}+B_T^* \lambda_T^{n}\right)+\left(B_N^* \lambda_N^{n+1}+B_T^* \lambda_T^{n+1}\right), u^{n+1}-u^{n}\right)$$

În lipsa contactului, regăsim rezultatul clasic de conservare a energiei problemei elastodinamice liniare. În cazul prezenţei contactului, rezultatele numerice au demonstrat că schema dată de relaţiile (1.41) şi (1.42) nu este stabilă.

Schema Newmark

Adaptarea schemei Newmark pentru problema cu contact

Această schemă este mult mai utilizată decât metodele implicite. Formularea problemei elastodinamice semidiscrete cu schema lui Newmark este următoarea:

$$\begin{cases} u^{n+1}=u^{n}+\Delta t v^{n}+\Delta t^{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right) a^{n}+\beta a^{n+1}\right) \\ v^{n+1}=v^{n}+\Delta t\left((1-\gamma) a^{n}+\gamma a^{n+1}\right) \end{cases} \tag{1.51}$$

$$\begin{cases} M a^{n+1}+K u^{n+1}=L+B_N^* \lambda_N^{n+1}+B_T^* \lambda_T^{n+1} \\ -\lambda_N^{n+1} \in N_{K_N}\left(B_N u^{n+1}\right) \\ -\lambda_T^{n+1} \in \partial_2 j\left(\lambda_N^{n+1}, B_T v^{n+1}\right) \\ u(0)=u^{0}, v(0)=u^{1} \end{cases} \tag{1.52}$$

Parametrii β şi γ determină numeric stabilitatea şi disiparea schemei.

Remarcă În studiul său iniţial, Newmark a propus următoarele valori $\gamma = \frac{1}{2}$ şi $\beta = \frac{1}{4}$ care corespunde regulii trapezului. Aceste valori permit determinarea stabilităţii problemei liniare elastodinamice semidiscrete a schemei Newmark. Rezultatul obţinut de Newmark a fost generalizat şi condiţia de stabilitate este asigurată pentru $\gamma \geq \frac{1}{2}$ şi $\beta \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)$. Prin urmare, în prezenţa contactului problema devine neliniară şi condiţia de stabilitate devine foarte greu de stabilit.

Pornind, de la sistemul (1.51) se calculează acceleraţia:

$$a^{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(u^{n+1} - u^n\right) - \frac{1}{\beta\Delta t}v^n - \frac{\frac{1}{2}-\beta}{\beta}a^n$$

Înlocuind în sistemul (1.52), obţinem următorul sistem:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{\beta\Delta t^2} + K\right)u^{n+1} = \hat{L} + B_N^* \lambda_N^{n+1} + B_T^* \lambda_T^{n+1} \\ -\lambda_N^{n+1} \in N_{K_N}\left(B_N u^{n+1}\right) \\ -\lambda_T^{n+1} \in \partial_2 j\left(\lambda_N^{n+1}, aB_T u^{n+1} - C_T\right) \\ u(0) = u_0, v(0) = u_1 \end{cases} \tag{1.53}$$

unde

$$\hat{L} = L + \frac{1}{\beta\Delta t^2}Mu^n + \frac{1}{\beta\Delta t}Mv^n + \frac{\frac{1}{2}-\beta}{\beta}Ma^n \tag{1.54}$$

$$a = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \text{ şi } C_T = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}B_T u^n + \frac{\gamma-\beta}{\beta}B_T v^n + \frac{\frac{\gamma}{2}-\beta}{\beta}\Delta t B_T a^n \tag{1.55}$$

Analiza stabilităţii

Variaţia energiei schemei dată de relaţiile (1.51) şi (1.52) este dată de:

$$\begin{aligned} \Delta E = {} & 2\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(K\left(u^{n+1}-u^n\right), u^{n+1}-u^n\right) + \Delta t\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)\left(K\left(u^{n+1}-u^n\right), v^{n+1}-v^n\right) \\ & + \Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\left(B_N^*\lambda_N^{n+1} + B_T^*\lambda_T^{n+1}\right) - \left(B_N^*\lambda_N^n + B_T^*\lambda_T^*\right), v^{n+1}-v^n\right) \\ & + \Delta t\left((1-\gamma)\left(B_N^*\lambda_N^n + B_T^*\lambda_T^n\right) + \gamma\left(B_N^*\lambda_N^{n+1} + B_T^*\lambda_T^{n+1}\right), u^{n+1}-u^n\right). \end{aligned}$$

Variaţia energiei va fi:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E\left(u^{n+1}, v^{n+1}\right) - E\left(u^n, v^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(M\left(v^{n+1}-v^n\right), v^{n+1}+v^n\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right),u^{n+1}+u^{n}\right)-\left(L,u^{n+1}-u^{n}\right) \tag{1.56}$$

Din sistemul (1.51), rezultă:

$$\begin{cases} u^{n+1}-u^{n}-\Delta t v^{n}=\Delta t^{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right)a^{n}+\beta a^{n+1}\right) \\ v^{n+1}-v^{n}=\Delta t\left((1-\gamma)a^{n}+\gamma a^{n+1}\right) \end{cases} \tag{1.57}$$

Multiplicăm cele două ecuaţii a sistemului (1.57) prin matricea masă M, şi obţinem:

$$\begin{cases} M\left(u^{n+1}-u^{n}-\Delta t v^{n}\right)=\Delta t^{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right)Ma^{n}+\beta Ma^{n+1}\right) \\ M\left(v^{n+1}-v^{n}\right)=\Delta t\left((1-\gamma)Ma^{n}+\gamma Ma^{n+1}\right) \end{cases} \tag{1.58}$$

Plecând de la ecuaţia elastodinamică a sistemului (1.52) obţinem:

$$\begin{aligned} M\left(u^{n+1}-u^{n}-\Delta t v^{n}\right)&=\Delta t^{2}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\left(-Ku^{n}+L+B_N^{*}\lambda_N^{n}+B_T^{*}\lambda_T^{n}\right) \\ &+\Delta t^{2}\beta\left(-Ku^{n+1}+L+B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right) \\ &=\frac{\Delta t^{2}}{2}L-\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)Ku^{n}+\beta Ku^{n+1}\right] \\ &+\Delta t^{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\left(B_N^{*}\lambda_N^{*}+B_T^{*}\lambda_T^{*}\right)+\beta\left(B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.59}$$

În plus

$$\begin{aligned} M\left(v^{n+1}-v^{n}\right)&=\Delta t(1-\gamma)\left(-Ku^{n}+L+B_N^{*}\lambda_N^{n}+B_T^{*}\lambda_T^{n}\right) \\ &+\Delta t\gamma\left(-Ku^{n+1}+L+B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right) \\ &=\Delta tL-\Delta t\left[(1-\gamma)Ku^{n}+\gamma Ku^{n+1}\right] \\ &+\Delta t\left[(1-\gamma)\left(B_N^{*}\lambda_N^{*}+B_T^{*}\lambda_T^{*}\right)+\gamma\left(B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.60}$$

Multiplicând relaţia (1.60) cu $\frac{\Delta t}{2}$ şi rescriind relaţia (1.58) obţinem:

$$\begin{aligned} M\left(u^{n+1}-u^{n}\right)&=\Delta t^{2}\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)K\left(u^{n+1}-u^{n}\right)+\frac{\Delta t}{2}M\left(v^{n+1}+v^{n}\right) \\ &+\Delta t^{2}\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\left(B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right)-\left(B_N^{*}\lambda_N^{n}+B_T^{*}\lambda_T^{n}\right)\right) \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} M\left(v^{n+1}+v^{n}\right)&=\frac{2}{\Delta t}M\left(u^{n+1}-u^{n}\right)+2\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)K\left(u^{n+1}-u^{n}\right) \\ &-2\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\left(B_N^{*}\lambda_N^{n+1}+B_T^{*}\lambda_T^{n+1}\right)-\left(B_N^{*}\lambda_N^{n}+B_T^{*}\lambda_T^{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.61}$$

Prin înlocuirea relaţiei (1.61) în relaţia (1.56) obţinem:

$$\Delta E=\frac{1}{2}\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right),u^{n+1}+u^{n}\right)+\frac{2}{\Delta t}\left(M\left(u^{n+1}-u^{n}\right),v^{n+1}-v^{n}\right)$$
$$+\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right),v^{n+1}-v^{n}\right)-\left(L,u^{n+1}-u^{n}\right)$$
$$-\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\left(\left(B_N^*\lambda_N^{n+1}+B_T^*\lambda_T^{n+1}\right)-\left(B_N^*\lambda_N^{n}+B_T^*\lambda_T^{n}\right)\right),v^{n+1}-v^{n}\right) \quad (1.62)$$

Pe de altă parte din relaţia (1.60) avem:

$$\left(L,u^{n+1}-u^{n}\right)=\frac{\Delta t}{2}\left(M\left(v^{n+1}-v^{n}\right),u^{n+1}-u^{n}\right)$$
$$+\Delta t\left(\left[(1-\gamma)Ku^{n}+\gamma Ku^{n+1}\right],u^{n+1}-u^{n}\right)$$
$$\Delta t\left(\left[(1-\gamma)\left(B_N^*\lambda_N^{n}+B_T^*\lambda_T^{n}\right)+\gamma\left(B_N^*\lambda_N^{n+1}+B_T^*\lambda_T^{n+1}\right)\right],u^{n+1}-u^{n}\right) \quad (1.63)$$

Înlocuind relaţia (1.63) în relaţia (1.62) şi aranjând termenii obţinem:

$$\Delta E=2\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right),u^{n+1}-u^{n}\right)+\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(K\left(u^{n+1}-u^{n}\right),v^{n+1}-v^{n}\right)$$
$$+\Delta t\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\left(B_N^*\lambda_N^{n+1}+B_T^*\lambda_T^{n+1}\right)-\left(B_N^*\lambda_N^{n}+B_T^*\lambda_T^{n}\right),v^{n+1}-v^{n}\right)$$
$$+\Delta t\left((1-\gamma)\left(B_N^*\lambda_N^{n}+B_T^*\lambda_T^{n}\right)+\gamma\left(B_N^*\lambda_N^{n+1}+B_T^*\lambda_T^{n+1}\right),u^{n+1}-u^{n}\right).$$

1.8 Formularea legii de frecare a lui Coulomb

Se consideră o particulă în $\Re^n$ cu masa m. Poziţia masei materiale este determinată de coordonata $U(t)\in\Re^n$, sistemul de coordonate va fi ales astfel încât legăturile unilaterale să fie exprimate cu ajutorul primei componente $U_N(t)$ a lui $U(t)$ sub forma[63]:

$$\forall t,\quad U_N(t)\le 0$$

Dacă x este un vector din $\Re^n$ şi x_N componenta normală şi x_T vectorul definit de cele $n-1$ componente ale sale numite componente tangenţiale, atunci matricea de rigiditate se scrie:

$[K]=\begin{pmatrix}K_N & W^t\\ W & K_T\end{pmatrix}$ unde $K_N\in\Re,\quad W\in\Re^{n-1}$, $[K_T]$ este matricea pătratică reală simetrică cu rangul $n-1$. Elementul W este cel care realizează legătura între diferitele posibilităţi de deplasare normale şi tangenţiale.

Următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(i) $[K]$este pozitiv definită

(ii) $[K_T]$ este pozitiv definită şi $K_N>W\cdot K_T^{-1}W$.

Evoluţia dinamică a masei materiale satisface următoarele:

$$m\ddot{U}(t) + KU(t) = F(t) + N(t) \tag{1.64}$$

$$U_N(t) \le 0 \quad N_N(t) \le 0 \quad U_N(t)N_N(t) = 0 \tag{1.65}$$

unde N este reacţiunea exercitată de către un obstacol asupra masei în mişcare. Prezenţa obstacolului se bazează pe faptul că evoluţia dinamică a mişcării prezintă discontinuităţi ale vitezei. Rezultă că ecuaţia de mişcare (1.64) nu poate fi satisfăcută în sens clasic şi trebuie atunci să fie exprimată cu ajutorul teoriei distribuţiilor.[31] În particular reacţiunea N este o distribuţie a cărei componentă normală N_N este negativă.

În cele ce urmează se notează $S\left([0,T];\Re^n\right)$ spaţiul funcţiilor definite pe intervalul $[0,T]$ cu valori din $\Re^n$.

Definiţia 1.8: Se notează prin $S\left([0,T];\Re^n\right)$ spaţiul vectorial al distribuţiilor cu valori în $\Re^n$ a cărei derivată de ordinul doi este o funcţie măsurabilă.

Elementele sunt funcţii cu variaţie mărginită şi pot fi identificate ca şi funcţiile continue.

Elementele spaţiului S sunt primitivele funcţiilor cu variaţie mărginită şi identificate cu funcţiile continue.

Funcţiile cu variaţia mărginită au următoarele proprietăţi: $U \in S\left([0,T];\Re^n\right)$ care admit derivate în sens clasic $\dot{U}^-(t)$ şi $\dot{U}^+(t)$ la stânga şi la dreapta momentului $t \in (0,T)$. Astfel, (1.64) şi (1.65) au sens pentru $U \in S\left([0,T];\Re^n\right)$ şi $N \in S\left([0,T];\Re^n\right)$.

În mod clasic aceste ecuaţii trebuie să fie completate de legea impactului şi din (1.64) rezultă:

$$m\ddot{U} + KU = F + N \tag{1.66}$$

$$U_N \le 0, \quad N_N \le 0, \quad U_N N_N = 0 \tag{1.67}$$

$$U_N(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+(t) = -R\dot{U}_N^- \tag{1.68}$$

unde $R \in [0,1]$ este coeficientul de restituire cunoscut. Se introduce $S\left([0,T];\Re^n\right)$ pentru a da un sens generalizat ecuaţiilor ce guvernează evoluţia unui asemenea sistem care se regăseşte şi în lucrările lui Schatzman[66] şi Moreau[48].

Sistemul (1.66), (1.67), (1.68) este incomplet. El trebuie completat cu condiţiile privitoare la componenta tangenţială N_T .

În cazul contactului ideal avem $N_T = 0$. Se doreşte a se studia influenţa frecării uscată în interacţiunea masei materiale cu obstacolul.

Presupunem că contactul dintre masa materială şi obstacol are loc în prezenţa frecării Coulomb şi deci $\dot{U}_T^+$ şi N verifică:

$$\|N_T\| \le -\mu N_N \quad şi \quad \begin{cases} \|N_T\| \le -\mu N_N \Rightarrow \dot{U}_T^+ = 0 \\ \|N_T\| = -\mu N_N \Rightarrow \exists \lambda > 0;\ N_T = -\lambda \dot{U}_T^+ \end{cases} \tag{1.69}$$

unde $\|\cdot\|$ reprezintă norma euclidiană.

Inegalitatea (1.69) indică faptul că reacţiunea se găseşte într-un con convex de revoluţie K_μ cu axa de-a lungul lui N şi de unghi φ cu $\tan\varphi = \mu$

$$K_\mu = \{N \in \Re^n, \|N_T\| \le -\mu N_N\}.$$

Formularea variaţională a legii lui Coulomb este:

Propoziţia 1.1 Formularea clasică (1.69) este echivalentă cu următoarea inegalitate variaţională:

$$\forall Y \in \Re^{n-1}, \left(N_T, Y - \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N \left(\|Y\| - \left\|\dot{U}_T^+\right\|\right) \ge 0 \tag{1.70}$$

Demonstraţie: Presupunem că are loc relaţia (1.70). Alegând succesiv $Y = 0$ şi $Y = 2\dot{U}_T^+$ în (1.70) rezultă:

$$-\left(N_T, \dot{U}_T^+\right) + \mu N_N \left\|\dot{U}_T^+\right\| \ge 0$$

$$\left(N_T, \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N \left\|\dot{U}_T^+\right\| \ge 0$$

şi prin urmare:

$$\left(N_T, \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N \left\|\dot{U}_T^+\right\| = 0 \tag{1.71}$$

Deci (1.70) implică:

$$\forall Y \in \Re^{n-1}, (N_T, Y) - \mu N_N \|Y\| \ge 0 \tag{1.72}$$

Alegând $Y \ne 0$ ortogonal la N_T se deduce $N_N \le 0$, apoi utilizând (1.72) cu $Y = -N_N$, avem

$$\|N_T\| \le -\mu N_N \tag{1.73}$$

Astfel rezultă că (1.71) şi (1.73) implică forma clasică a legii lui Coulomb.

Reciproc, presupunem că formularea clasică (1.69) a legii lui Coulomb este verificată. Inegalitatea (1.73) atrage după sine:

$$\forall Y \in \Re^{n-1}, -(N_T, Y) \le |(N_T, Y)| \le -\mu N_N \|Y\| \tag{1.74}$$

Pe de altă parte relaţia (1.71) este satisfăcută. În consecinţă din relaţiile (1.71) şi (1.74) rezultă:

$$\forall Y \in \Re^{n-1}, \left(N_T, Y - \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N \left(\|Y\| - \left\|\dot{U}_T^+\right\|\right) \ge 0 \tag{1.75}$$

O altă formulare a legii de frecare a lui Coulomb o dăm mai jos.

Propoziţia 1.2 Pentru $\mathcal{R} \in \Re^+$ definită pe $C(\mathcal{R}) = \{Y \in \Re^{n-1}, \|Y\| \le \mathcal{R}\}$. Forma clasică a legii lui Coulomb este echivalentă cu:

$$N_T \in \partial I^*_{C(-\mu N_N)}\left(-\dot{U}_T^+\right) \tag{1.76}$$

şi de asemenea echivalentă cu:

$$-\dot{U}_T^+ \in \partial I_{C(-\mu N_N)}(N_T) \tag{1.77}$$

Demonstraţie $C(-\mu N_N)$ este un convex închis în $\Re^{n-1}$, funcţia sa indicatoare $I_{C(-\mu N_N)}$ este convexă, semicontinuă inferior. Prin urmare însăşi conjugata sa $I^*_{C(-\mu N_N)}$ este funcţie sprijin de $C(-\mu N_N)$ definită de:

$$I^*_{C(-\mu N_N)}(X) = \sup_{Y \in C(-\mu N_N)} ((X,Y)) = -\mu N_N \|X\|$$

Deci, este evident că relaţia (1.76) este echivalentă cu relaţia (1.70) pentru definirea aceluiaşi ansamblu de gradienţi. Echivalenţa dintre relaţiile (1.76) şi (1.73) provine din propoziţia 1.1.

Propoziţia 1.3 Relaţia (1.69) a legii lui Coulomb este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} &(i) \quad N \in K_\mu \\ &(ii) \quad \forall X \in K_\mu, N_N\left(X_T, \dot{U}_T^+\right) \le X_N\left(N_T, \dot{U}_T^+\right) \end{aligned} \tag{1.78}$$

Demonstraţie

Din propoziţia 1.2 este suficient de demonstrat că relaţia (1.78) este echivalentă cu condiţia (1.77). Se presupune că relaţia (1.78) este satisfăcută şi se demonstrează că aceasta implică condiţia (1.77).

Dacă $N_N = 0$, nu se demonstrează nimic. Se presupune prin urmare că $N_N < 0, X_T \in (-\mu N_N); \left(-1, -\frac{X_T}{N_N}\right) \in K_\mu$. Pentru ipoteza $-1\left(\dot{U}_T^+, N_T\right) \ge N_N\left(\frac{-X_T}{N_N}, \dot{U}_T^+\right)$ fie $\left(\dot{U}_T^+, X_T - N_T\right) \ge 0; \forall X_T \in C(-\mu N_N)$ relaţie care nu este alta decât relaţia (1.77).

Reciproc, dacă condiţia (1.77) este satisfăcută $\|N_T\| \le -\mu N_N$. Se presupune $N_N < 0$. Fie $X \in K_\mu$ oarecare. Trebuie arătat că: $X_N\left(\dot{U}_T^+, N_T\right) \ge N_N\left(X_T, \dot{U}_T^+\right)$. Se poate considera $X_N < 0$, rezultă: $\left\|N_N \frac{X_T}{X_N}\right\| \le -\mu N_N \Rightarrow \left(\dot{U}_T^+, N_N \frac{X_T}{X_N} - N_T\right) \ge 0$ ceea ce trebuia demonstrat.

Ecuaţiile (1.66), (1.67), (1.68), trebuie să fie completate cu legea frecării deoarece masa materială este în contact cu un obstacol nedeformabil. Reacţiunea, este în general o funcţie pe intervalul $[0,T]$ cu valori în $\Re^n$.

Formularea variaţională este favorabilă ori de câte ori reacţiunea este o funcţie măsurabilă, iar viteza la dreapta este o funcţie mărginită, definită pe $[0,T]$ cu valori în $\Re^n$ şi poate fi considerată ca limita uniformă a unei funcţii scară şi deci universal integrabilă.

În acest fel se poate rescrie legea lui Coulomb în următoarea formă:

$$\forall V \in C^0\left([0,T]; \Re^{n-1}\right)$$

$$\int_{[0,T]} \left(N_T, V - \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N\left(\|V\| - \left\|\dot{U}_T^+\right\|\right) \ge 0$$

Completând ecuaţiile ce guvernează mişcarea sistemului, numit sistemul Klarbring cu condiţiile iniţiale problema evoluţiei se scrie[64]:

P_u există $U \in S\left([0,T];\Re^n\right)$ şi $N \in S\left([0,T];\Re^n\right)$ astfel că:

$m\ddot{U} + KU = F + N$ - ecuaţia de mişcare

$U(0) = U_0; \dot{U}_T^+ = V_0$ - condiţiile iniţiale

$U_N \le 0; N_N \le 0, U_N N_N = 0$ - contactul unilateral

$\forall V \in C^0\left([0,T];\Re^{n-1}\right), \int_{[0,T]}\left(N_T, V - \dot{U}_T^+\right) - \mu N_N\left(\|V\| - \left\|\dot{U}_T^+\right\|\right) \ge 0$ - legea Coulomb

$U_N(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+ = -R\dot{U}_N^-$ - legea ciocnirii

Condiţiile iniţiale sunt compatibile cu legăturile unilaterale;

$U_{0N} \le 0$ şi $U_{0N} = 0 \Rightarrow V_{0N} \le 0$.

În cele ce urmează se va studia cazul particular $R = 0$, deci a ciocnirii plastice.

1.9 Contribuţii personale

- Prezentarea stadiului actual al cercetărilor sistemelor mecanice cu legături unilaterale şi frecare, elementelor principale caracteristice mişcărilor sistemelor vibrpoercutante utilizând noţiunea de legătură unilaterală.
- Pe baza proprietăţilor deduse pentru funcţia legăturii unilaterale s-au clasificat mişcările cu sau fără contact prelungit ale sistemelor vibropercutante.
- Descrierea principalelor metode de aproximare utilizate pentru analiza evoluţiei şi stabilităţii sistemelor clasice liniar elastice cu condiţii la limita contactului unilateral şi frecare Coulomb, metoda teta, schema Paoli-Schatzman şi schema Newmark adaptată la cazul sistemelor mecanice cu contact.
- Punerea în evidenţă a legii de frecare Coulomb în formularea variaţională, exprimarea ecuaţiilor de mişcare pentru sistemul Klarbring.

2. MODELE MECANICE ALE SISTEMELOR CU FRECARE

Frecarea a două suprafeţe alunecoase joacă un rol important în comportamentul dinamic a unui număr mare de sisteme mecanice. Aspectele dinamice complexe cum sunt mişcarea de alunecare, autoexcitarea, oscilaţiile haotice sunt de asemenea identificate în prezenţa frecării în legături şi în suprafeţele de contact.

Studiul sistemelor dinamice cu frecare are o lungă şi bogată istorie[28]. Exceptând câteva cazuri efectele frecării duc la funcţionarea incorectă a mai multor sisteme şi necesită introducerea unor efecte – dispozitive de control care să compenseze fenomenele de frecare.

Modelul frecării uscate a lui Coulomb este utilizat pentru majoritatea calculelor inginereşti ale rugozităţii. Aceasta este însă greu de stabilit pentru aplicaţiile complexe deoarece acest model neglijează unele grade de libertate microscopice ale contactului care au un rol foarte important în cazul diferitelor aplicaţii. De exemplu, în cazul sistemelor mecatronice viteza şi lungimea intervalului mişcării devin comparabile cu lungimea şi intervalul de timp implicate în gradele de libertate microscopice ale contactului. Acest aspect a determinat dezvoltarea de noi modele fenomenologice de modelare a frecării şi a diferite tehnici de compensare a manifestării efectelor nedorite ale frecării[17],[25],[32].

Una din aceste tehnici consideră oscilaţiile de înaltă frecvenţă[29],[36],[74] în manifestarea câtorva efecte nedorite ale frecării. Un studiu recent al acestui efect a arătat că orice excitaţie efectuată pe un interval de timp mult mai mare în comparaţie cu intervalul de timp natural al sistemului poate scoate la iveală modificări netriviale în dinamica sistemelor neliniare. Vibraţiile au fost observate cu modificări efective în caracteristicile sistemelor mecanice cum sunt stările de echilibru, rigiditatea liniară, amortizarea şi frecvenţele naturale. Aspectul excitării rapide poate influenţa semnificativ aspectele neliniare cum sunt recuperarea şi disiparea energiei, răspunsul în frecvenţă şi bifurcarea.

O altă aplicaţie foarte importantă este efectul neliniar al oscilaţiilor pentru caracteristici ale sistemului cu discontinuităţi. Caracteristicile frecării uscate sunt descrise fenomenologic printr-o relaţie discontinuă a vitezei, discontinuităţile apărând la viteza zero, adică atunci când apare viteza de alunecare. Viteza nulă implică blocarea a două suprafeţe care interacţionează şi în timpul fazei de blocare; forţa de frecare are o valoare care depinde de sarcina externă. Astfel, există o diferenţă între nivelul forţei de frecare în faza de blocare şi cea de alunecare. Această situaţie este responsabilă pentru mişcarea „stick-slip”. În timpul vitezelor mici de alunecare, frecarea este prezentă având caracteristici de reducere cu creşterea/descreşterea vitezei. Acest fenomen este cunoscut ca efect Stribeck şi este cunoscut pentru oscilaţiile autoexcitare a diferitelor sisteme dinamice.

Thomsen[74] a considerat un model similar al frecării pentru a studia efectul excitaţiilor rapide asupra mişcării „stick-slip”. El a arătat că o alegere potrivită a vibraţiei rapide este capabilă de suprimarea oscilaţiilor de autoexcitare şi a mişcării „stick-slip”. Datorită efectului vibraţiei rapide, viteza zero, discontinuă a forţei de frecare este anulată printr-o caracteristică echivalentă; amortizarea vâscoasă şi caracteristica de reducere a vitezelor mici tinzând simultan spre aplatizare.

Recentele modele fenomenologice ale frecării consideră doar gradele de libertate macroscopice. Acest lucru implică faptul că toate gradele de libertate microscopice sunt mult mai puternice decât cele macroscopice. Scala lungimii microscopice poate fi de acelaşi ordin de mărime cu dimensiunea asperităţilor suprafeţei de contact sau lungimea de corelare a rugozităţii suprafeţei. Când viteza devine foarte mică trebuie acordat atenţie gradelor de libertate microscopice care sunt în general mai rapide în dinamica mişcării. Prezintă interes ştiinţific modelul LuGre şi cel al frecării pentru stări unice elasto-plastice. Efectul vibraţiilor rapide pentru starea „stick-slip" şi oscilaţiile de autoexcitare sunt prezentate prin prisma caracteristicilor frecării ale vibraţiilor rapide efective induse.

2.1 Modele cu frecare

Literatura actuală este bogată în numeroase modele matematice ale frecării. Fiecare dintre aceste modele este relevant pentru unul sau câteva domenii operaţionale şi fenomenologice, în funcţie de interes. Pentru rezolvarea unei probleme particulare selecţia modelului de frecare cel mai apropiat de realitate este foarte importantă. În funcţie de scala de timp şi de cea de lungime, modelele frecării pot fi clasificate în două categorii, care se numesc modele macroscopice, respectiv modele microscopice.

În modelele macroscopice, frecarea este reprezentată ca o funcţie disipativă a vitezei relative de alunecare. Asemenea modele sunt în general valabile în situaţiile în care doar gradele de libertate macroscopice implică micşorarea relativă a scalei de timp. Cea mai simplă formă a acestor modele macroscopice este modelul frecării uscate Coulomb pe care îl evidenţiem mai jos:

$$F = F_C sign(v) \tag{2.1}$$

Acest model ţine seama doar de faptul că forţa de frecare F este constantă şi depinde de semnul vitezei relative de alunecare. Cu toate acestea modelul lui Coulomb nu poate descrie efectul „stick-slip" sau efectul Stribeck. Există câteva extensii ale modelului Coulomb care consideră efectul „stick-slip" şi pe cel Stribeck. Aceste modele se numesc modele cinetice de frecare şi pot fi descrise în general de:

$$F = \begin{cases} g(v) & v \neq 0 \\ F_e & dacă \quad v = 0 \quad şi \quad |F_e| < F_S \\ F_S sign(F_e) & în\ celelalte\ cazuri \end{cases} \tag{2.2}$$

unde $g(v) = F_C + (F_S - F_C)e^{\left|\frac{v}{v_S}\right|^{\delta}} + F_V v$.

În relaţia (2.2) F_e este forţa exterioară, F_S este nivelul maxim al forţei de frecare în timpul blocării şi F_C forţa cinetică a frecării, v_S este viteza Stibeck caracteristică, iar F_V este coeficientul vîscos de frecare.

În ultima perioadă au fost dezvoltate o serie de modele de frecare sofisticate care consideră gradele de libertate microscopice ale interfeţei de frecare. Asemenea modele sunt cunoscute ca „modele aspre" unde asperităţile interfeţei de frecare sunt considerate ca nişte fibre, asperităţi de resorturi elastice. Când se aplică forţele tangenţiale asperităţile deviază ca şi resorturile şi forţa de frecare este reprezentată ca media forţei de deviaţie a asperităţilor de tip resort. Când deviaţia asperităţilor este suficient de mare, asperităţile încep să alunece. Viteza de alunecare determină media de deviaţie în timpul forţei de alunecare. Modelul LuGre este cel mai potrivit de utilizat în modelul microscopic al frecării pentru interpretarea asperităţilor.

Recent, Dupont şi ceilalţi[25] au generalizat modelul lui LuGre ţinând cont de fenomenul de blocare într-o manieră mult mai riguroasă. Generalizarea modelului LuGre, cunoscut ca modelul stării singulare elasto-plastice este descris de relaţia:

$$F=\sigma_0 z+\sigma_1\frac{dz}{dt}+\sigma_2 v;\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2>0$$

$$\frac{dz}{dt}=v-\frac{\sigma_0 a(z,v)|v|z}{g(v)} \tag{2.3}$$

unde v este viteza relativă dintre suprafeţele nerugoase şi z este media deviaţiei asperităţilor. $g(v)$ modelează efectul Stribeck. Cea mai cunoscută formă a lui $g(v)$ este următoarea:

$$g(v)=F_c+(F_s-F_c)e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^{\delta}} \tag{2.4}$$

σ_0 şi σ_1 reprezintă rigiditatea şi amortizarea asperităţilor , σ_2 este coeficientul de amortizare vâscoasă şi v_s este viteza caracteristică Stribeck. Pentru a reprezenta modelul disipativ, termenul σ_1 de amortizarea asperităţilor este considerat a fi o funcţie de viteză. Cea mai utilizată formă a acestei funcţii este:

$$\sigma_1(v)=\hat{\sigma}_1 e^{-\left|\frac{v}{v_d}\right|^{\delta}} \tag{2.5}$$

unde v_d este viteza caracteristică şi δ este o mărime pozitivă. Aceşti doi parametrii modelează coeficientul de modificare a amortizării asperităţilor cu viteza de alunecare. Funcţia $a(v,z)$ introdusă de Dupont controlează diferite faze ale proceselor de frecare ca: blocarea, antealunecarea elasto-plastică şi alunecarea pură prin considerarea diferitelor valori la diferite stări după cum urmează:

$$\begin{aligned} a(z,v)&=\left\{\begin{matrix} 0; & |z|<z_{ba} \\ a_m(z,z_{ba},z_{ss}); & z_{ba}<|z|<z_{ss}(v) \\ 1; & |z|>z_{ss}(v) \end{matrix}\right\} \text{ când } sign(v)=sign(z) \\ &=\{0\} \qquad \text{ când } sign(v)\neq sign(z) \end{aligned} \tag{2.6}$$

unde $0<a_m(z,z_{ba},z_{ss})<1$ şi $z_{ss}(v)=\dfrac{g(v)}{\sigma_0}$.

Pentru funcţia $a_m(z,z_{ba},z_{ss})$, Dupont[25] a propus următoarea formă:

$$a_m(z,z_{ba},z_{ss}(v))=\frac{1}{2}\sin\left(\pi\frac{z-\frac{z_{ss}+z_{ba}}{2}}{z_{ss}-z_{ba}}\right)+\frac{1}{2} \tag{2.7}$$

Această formă a funcţiei $a(z,v)$ sugerează clar că în timpul blocării când deviaţia asperităţii z este mai mică decât z_{ba} - deviaţia de alunecare; $a(z,v)=0$. După această fază prealunecarea elasto-plastică începe când $a(z,v)=a_m(z,z_{ba},z_{ss}(v))$ şi această
fază continuă până când $z=z_{ss}(v)$ maximum stării stabile, uniforme a deviaţiei asperităţii la viteza v. Când $a(z,v)=1$, urmează faza de alunecare plastică.

Trebuie subliniat faptul că modelul LuGre poate fi simulat considerând $a(z,v)=1$ în ecuaţia (2.3). Astfel, modelul LuGre nu poate conţine pe deplin starea de blocare în timp ce deviaţia asperităţii este pur elastică. Simularea numerică a sistemelor cu modelul LuGre evidenţiază o abatere mică a alunecării în timpul fazei de blocare. Acest lucru este similar prealunecării elasto-plastice observată în cazul modelului elasto-plastic.

2.2 Efectul variaţiei armonice a vitezei unidimensionale la caracteristicile frecării.

Dacă frecarea este puternic dependentă de viteză orice efect al excitaţiei de înaltă frecvenţă a frecării are loc prin variaţia vitezei de înaltă frecvenţă - pentru a înţelege efectul variaţiei vitezei de înaltă frecvenţă a frecării, un model ipotetic de contact este considerat acolo unde alunecarea se produce cu viteză constantă v_m şi o viteză de perturbaţie de forma $v_a\cos(\omega t)$ cu $v_a \le v_m$ este aplicată peste aceasta. Pentru o simplificare a analizei, se vor neglija gradele de libertate macroscopice ale alunecării. Aşa cum s-a amintit anterior modelul frecării LuGre este un caz particular al modelului elasto-plastic descris de ecuaţiile (2.3)-(2.7) şi simulat prin considerarea lui $a(z,v)=1$. Din considerente matematice, efectul Stribeck este modelat prin considerarea lui $\delta=1$ în ecuaţia (2.4).

Metoda echilibrului armonic este utilizată pentru analiza frecării caracteristice sub condiţia variaţiei vitezei. În această metodă, deplasarea, deviaţia asperităţii z este reprezentată printr-o dezvoltare în serie Fourier:

$$z = X_0 + \sum_{n=1}^{H} X_n\cos(n\omega t) - \sum_{n=1}^{H} Y_n\sin(n\omega t) \tag{2.8}$$

unde H este numărul termenilor armonici folosiţi în dezvoltare. X_0, X_n şi Y_n sunt calculaţi din următoarea ecuaţie liniară:

$$[A]\{\vec{\xi}\}=\{\vec{b}\} \tag{2.9}$$

unde

$$\{\vec{\xi}\}=\{X_0X_1...X_H \quad Y_1Y_2...Y_H\}^T$$
$$\{\vec{b}\}=\{Q_0Q_1...Q_H \quad 00...0\}^T$$

În ecuaţia (2.9) elementele matricei $[A]$ $(2H+1)\times(2H+1)$ şi vectorul $\{b\}$ sunt funcţii ale parametrilor model $a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, v_m, v_a, \omega, v_0$ şi v_d. În final, forţa de frecare este calculată cu ajutorul relaţiei:

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1(v)\frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \tag{2.10}$$

Modelul matematic al unui exemplu de sistem mecanic cu frecare dinamică

Modelul matematic al unui sistem mecanic cu un singur grad de libertate şi cu frecare este cel prezentat în continuare. Un corp de masă m alunecă mişcându-se pe o suprafaţă cu frecare şi este cuplat de un arc de constantă elastică k care este capabil să producă variaţii în timp ale vitezei de forma $v_m + v_a(t)$.

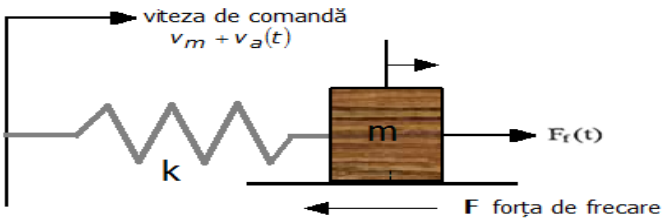


Fig. 2.1-Modelul matematic al sistemului considerat

Acest sistem este în acord cu modelul dinamic de frecare a lui LuGre.

Sistemul este excitat printr-o perturbaţie de mare frecvenţă. Frecvenţa de excitaţie este foarte mare comparativ cu frecvenţa naturală a sistemului sau cu frecvenţa de variaţie a vitezei de comandă. Ecuaţia de mişcare adimensională a sistemului este dată de următoarele relaţii:

$$\ddot{X} + X + \tilde{F} = \tilde{f}_f(\tau, T_0) + \tilde{f}_s(\tau) + v_m^* \tau$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \dot{X} - \frac{\sigma_0^* |\dot{X}| Z}{g^*(\dot{X})} \text{ şi}$$

$$\tilde{F} = \sigma_0^* Z + \sigma_1^*(\dot{X})\frac{dZ}{d\tau} + \sigma_2^* \dot{X} \tag{2.11}$$

unde aşa cum se poate observa, mărimile adimensionale sunt definite în cele ce urmează. $\tau = t\omega_n$ este timpul adimensional, $T_0(\ll 1)$ este perioada de timp adimensională a excitaţiei rapide.

$$\tilde{f}_f(\tau, T_0) = \frac{F_f}{m\omega_n^2 L} \text{ şi}$$

$$\tilde{f}_s(\tau) = \frac{k\int_0^\tau v_a(s)ds}{m\omega_n^2 L}$$ sunt excitaţiile rapide şi lente ale semnalului de superpoziţie (oscilaţiei corectoare de mică amplitudine) respectiv

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$X = \frac{x}{L}$, $\dot{X} = \frac{x}{\omega_n L}$, $\ddot{X} = \frac{x}{\omega_n^2 L}$, $Z = \frac{z}{L}$ cu L o lungime de mărime arbitrară.

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0}{k},\ \sigma_1^*(\dot{X}) = \hat{\sigma}_1^* e^{-\left(\frac{\dot{X}}{v_d^*}\right)^2},\ \hat{\sigma}_1^* = \frac{\hat{\sigma}_1}{m\omega_n},\ v_d^* = \frac{v_d}{\omega_n L},\ \sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{m\omega_n} \text{ şi}$$

$$g^*(\dot{X}) = f_c + (f_s - f_c) e^{-\left(\frac{\dot{X}}{v_s^*}\right)^2} \text{ cu}$$

$$f_c = \frac{F_c}{m\omega_n^2 L},\ f_s = \frac{F_s}{m\omega_n^2 L},\ v_m^* = \frac{v_m}{\omega_m L} \text{ şi } v_s^* = \frac{v_s}{\omega_n L}.$$

În modelul de mai sus X reprezintă gradul de libertate structural macroscopic şi Z - deviaţia interfeţei asperităţilor – reprezintă gradul de libertate microscopic al interfeţei de frecare. Aceste două grade de libertate sunt cuplate prin forţa de frecare. Ecuaţia de mişcare (2.11) fără excitaţie rapidă descrie în general dinamica pentru două scale de timp disparate, fără legătură; Z fiind variabila rapidă. Pot apare trei scale de timp disparate atunci când scala de timp a excitaţiei rapide este diferită de scalele de timp a lui X şi Z.

Estimări teoretice ale frecării sub vibraţie rapidă

Se consideră două modele diferite ale excitării rapide pentru analiza caracteristicilor frecării. Primul model ţine cont de câteva ipoteze teoretice posibile ale excitării rapide, care sunt echivalentul suprafeţei de frecare printr-o viteză de excitaţie de mare frecvenţă. Considerarea unei astfel de excitaţii determină ca sistemul să fie uşor de analizat.

Al doilea model utilizează excitaţia rapidă sinusoidală şi consideră o versiune relativ simplă a modelului de frecare în obţinerea unei expresii analitice a caracteristicilor frecării. Modelul excitaţiei sinusoidale este mai apropiat de realitate; metoda analitică devine tendenţioasă atunci când se consideră un model complet al frecării. Prin urmare din considerente matematice se va considera doar partea esenţială a modelului de frecare. Se va arăta că acest model parţial al frecării nu influenţează analiza din punct de vedere calitativ.

Modelul 1 – excitaţia rapidă este echivalentă cu pătratul vitezei undei de excitaţie.

Caracteristicile frecării sunt importante; se alege v_m^* egală cu zero. Ecuaţia adimensională a mişcării sistemului se scrie în următoarea formă:

$$\ddot{X} + X + \tilde{F} = \tilde{f}_f(\tau, T_0) + \tilde{f}_s(\tau)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \dot{X} - \frac{\sigma_0^* |\dot{X}| Z}{g^*(\dot{X})} \text{ şi}$$

$$\tilde{F} = \sigma_0^* Z + \sigma_1^*(\dot{X}) \frac{dZ}{d\tau} + \sigma_2^* \dot{X} \tag{2.12}$$

Dacă excitaţia rapidă se presupune mult mai rapidă comparativ cu X şi Z este necesar ca sistemul să fie reprezentat în două scale de timp separate. Prin urmare se poate utiliza metoda directă a partiţiei mişcării pentru împărţirea mişcării X şi Z

în componente lente şi rapide, scala de timp a componentei rapide având aceeaşi ordin al amplitudinii ca excitaţia rapidă. Astfel, se poate scrie:

$$X(\tau) = X_S(\tau) + T_0\varphi_1(\tau, T),$$
$$Z(\tau) = Z_S(\tau) + T_0\varphi_2(\tau, T) \tag{2.13}$$

unde

$T = T_0^{-1}\tau$ cu

$$\langle\varphi_{1,2}\rangle = T_0^{-1}\int_0^{T_0}\varphi_{1,2}(\tau, T)dT = 0 \tag{2.14}$$

Introducând ecuaţia (2.13) în ecuaţia (2.12) rezultă:

$$\varphi_1'' = -T_0\left(\ddot{X}_S + 2\varphi_1' + X_S + \tilde{F} - \tilde{f}_f(\tau)\right) + T_0\tilde{f}_f(\tau, T_0) + O\left(T_0^2\right) \tag{2.15a}$$

$$\varphi_2' = -\dot{Z}_S + \dot{X}_S + \varphi_1' - \frac{\sigma_0^*\left|\dot{X}_S + \varphi_1'\right|Z_S}{g^*\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)} + O(T_0) \tag{2.15b}$$

unde $'$ reprezintă diferenţială, cu respectarea variabilei timp T .

Dacă excitaţia rapidă este suficient de puternică astfel încât $T_0\tilde{f}_f(\tau, T_0) \approx O(1)$ sau mai mare, forma de ordinul unu al ecuaţiei (2.15a) este:

$$\varphi_1'' = T_0\tilde{f}_f(\tau, T_0) \tag{2.16}$$

Din considerente matematice se poate presupune că există o forţă de excitare rapidă, cel puţin din punct de vedere teoretic, astfel încât prima integrare a ecuaţiei (2.16) generează un puls pătratic deci, φ_1' este reprezentat printr-un puls pătratic la fel ca în figura următoare:

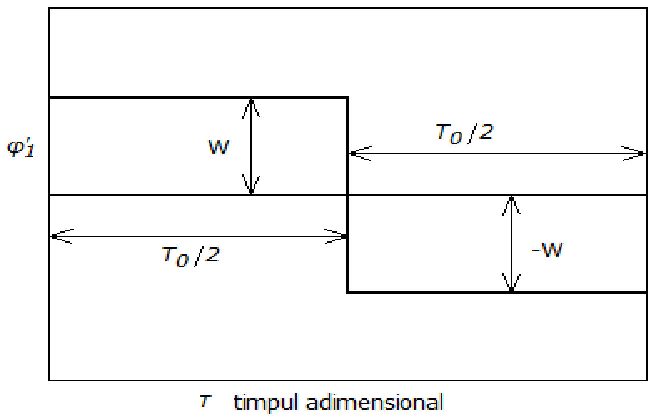


Fig. 2.2- Unda pătratică de înaltă frecvenţă

Trebuie menţionat că aplicarea unei astfel de excitaţii rapide produce acelaşi efect ca cel obţinut prin suprapunerea unei unde pătratice de înaltă frecvenţă peste frecarea de alunecare. Utilizând ecuaţia (2.14) se poate determina medierea ecuaţiilor (2.15a) şi (2.15b) pentru obţinerea ecuaţiilor următoare care guvernează dinamica sistemului:

$$\ddot{X}_S + X_S + \left\langle \tilde{F}\left(Z_S, \dot{X}_S + \varphi_1'\right)\right\rangle = \tilde{f}_S(\tau) \tag{2.17a}$$

$$\dot{Z}_S = \dot{X}_S - \sigma_0^* Z_S \left\langle \frac{\left|\dot{X}_S + \varphi_1'\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)} \right\rangle$$

$$= \dot{X}_S - \frac{1}{2}\sigma_0^* Z_S \left(\frac{\left|\dot{X}_S + W_1\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.17b}$$

unde

$$\left\langle \tilde{F} \right\rangle = \sigma_0^* \left(1 - \left\langle \frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)\left|\dot{X}_S + \varphi_1'\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)} \right\rangle \right) Z_S + \left(\sigma_2^* \dot{X}_S + \left\langle \sigma_1^*\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)\left(\dot{X}_S + \varphi_1'\right)\right\rangle \right)$$

$$= \sigma_0^* Z_S + \sigma_2^* \dot{X}_S + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left(\dot{X}_S + W\right) + \sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left(\dot{X}_S - W\right) \right)$$

$$- \frac{1}{2}\sigma_0^* Z_S \left(\frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.17c}$$

Presupunem că rigiditatea adimensională de contact $\sigma_0^* \gg 1$. Astfel, ecuaţiile (2.17a) – (2.17c) pot fi rescrise în următoarea formă:

$$\ddot{X}_S + X_S + \left\langle \tilde{F}\left(Y, \dot{X}_S + \varphi_1'\right)\right\rangle = \tilde{f}_S(\tau) \tag{2.18a}$$

$$\varepsilon \dot{Y} = \dot{X}_S - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\left|\dot{X}_S + W_1\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.18b}$$

unde

$$\left\langle \tilde{F} \right\rangle = Y + \sigma_2^* \dot{X}_S + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left(\dot{X}_S + W\right) + \sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left(\dot{X}_S - W\right) \right)$$

$$- \frac{1}{2} Y \left(\frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.18c}$$

unde $Y = \sigma_0^* Z_S$ şi mărimea mică $\varepsilon = \left(\sigma_0^*\right)^{-1}$.

Se observă că ecuaţiile (2.18a) şi (2.18b) sunt scrise în forma standard a problemei perturbaţiei singulare.

Se poate nota că gradul de libertate structural X_S descrie dinamica lentă iar gradul de libertate microscopic Y descrie dinamica rapidă a sistemului mecanic. Înlocuind $\varepsilon = 0$ în ecuaţia (2.18b) se obţine modelul sistemului de ordin redus în formă:

$$\ddot{X}_S + X_S + \left\langle \tilde{F}\left(Y, \dot{X}_S + \varphi_1'\right)\right\rangle = \tilde{f}_S(\tau) \tag{2.19}$$

unde forţa efectivă de frecare $\left\langle \tilde{F} \right\rangle$ este dată de relaţia

$$\left\langle \tilde{F} \right\rangle = Y + \sigma_2^* \dot{X}_S + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left(\dot{X}_S + W\right) + \sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left(\dot{X}_S - W\right)\right)$$
$$- \frac{1}{2} Y \left(\frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S + W\right)\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\sigma_1^*\left(\dot{X}_S - W\right)\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.20}$$

şi

$$Y = \frac{2\dot{X}_S}{\left(\frac{\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right)} \tag{2.21}$$

Ecuaţia (2.21) descrie variaţia lentă a sistemului. După utilizarea timpului următor şi transformarea coordonatei rezultă:

$$\hat{Y} = Y - \frac{2\dot{X}_S}{\left(\frac{\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right)} ; \quad \hat{\tau} = \frac{T}{\varepsilon}$$

şi considerând $\dot{X}_S$ ca o constantă se obţine stratul limită al sistemului descriind dinamica rapidă în forma:

$$\frac{d\hat{Y}}{d\hat{\tau}} = -\frac{1}{2}\hat{Y}\left(\frac{\left|\dot{X}_S + W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S + W\right)} + \frac{\left|\dot{X}_S - W\right|}{g^*\left(\dot{X}_S - W\right)} \right) \tag{2.22}$$

Se observă că la echilibru $\hat{Y} = 0$, problema stratului limită este asimptotic uniform stabilă pentru toate vitezele. Prin urmare sunt satisfăcute aproape oriunde, cu excepţia cazului unde valoarea absolută a vitezei de alunecare este W); problema redusă dată de ecuaţiile (2.19) – (2.21) descriu starea dinamică uniformă a lui X_S exact de ordinul lui ε.

Ca un exemplu numeric, graficul tipic al frecării efective în funcţie de viteză este prezentat în figura 2.3 pentru următoarele valori ale parametrilor:

$$\sigma_0^* = 100, \ \hat{\sigma}_1^* = 10, \ \sigma_2^* = 0.004, \ v_S^* = 0.1, \ f_C = 1, \ f_S = 1.5$$

Cum s-a arătat anterior, v_d^* descrie modelul disipativ al frecării prin controlul ratei de schimb al factorului de amortizare al asperităţilor cu viteza. Oricum nici o valoare experimentală a parametrului v_d^* nu se găseşte în literatura de specialitate. Teoretic, se poate considera orice valoare care satisface următoarea condiţie:

$$\sigma_1^*(v) < \frac{4g^*(v)}{|v|}$$

Se vor utiliza două valori ale lui v_d^*. În figura 2.3a v_d^* este de acelaşi ordin cu amplitudinea lui v_S^* şi este cu un ordin mai mic în cazul figurii 2.3b. De notat că forma din figura 2.3b pentru valori mici ale lui v_d^*, se poate neglija atenuarea efectivă a asperităţilor şi obţine o expresie simplificată a forţei de frecare efectivă, astfel:

$$\langle \tilde{F} \rangle = \frac{2\dot{X}_S}{\left(\frac{|\dot{X}_S + W|}{g^*(\dot{X}_S + W)} + \frac{|\dot{X}_S - W|}{g^*(\dot{X}_S - W)} \right)} + \sigma_2^* \dot{X}_S \tag{2.23}$$

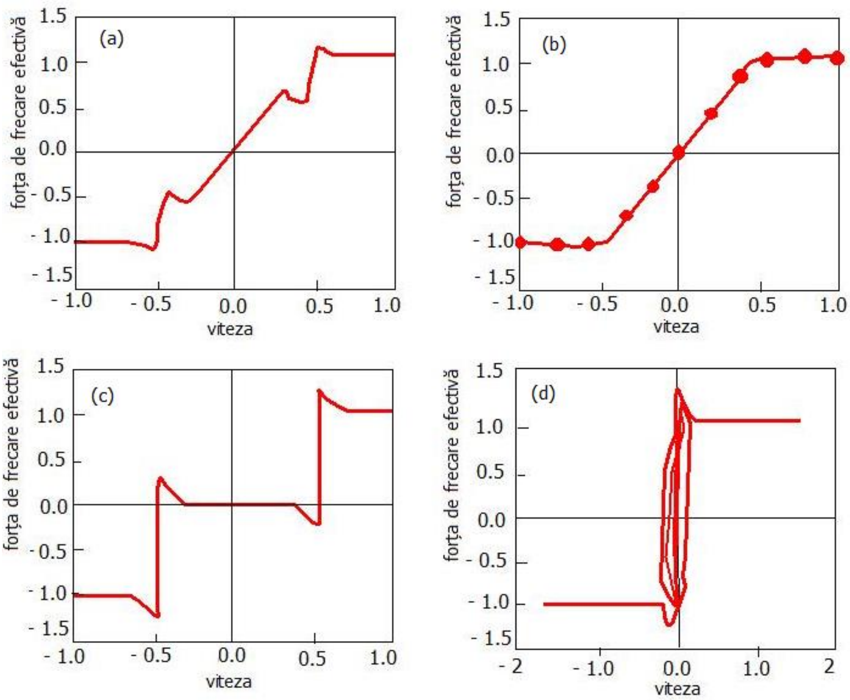


Fig.2.3 – Forţa de frecare determinată analitică cu şi fără excitaţie rapidă

a) Modelul LuGre $v_d^* = 0.1$; b) modelul LuGre $v_d^* = 0.01$; c) modelul static al frecării; d)modelul LuGre fără oscilaţii

Corespunzător, forţa de frecare efectivă obţinută din ecuaţia (2.23) este prezentată în figura 2.3b. Din figura 2.3a şi 2.3b se observă că la viteza inferioară ($\ll W$) forţa de frecare efectivă acţionează aproape liniar cu forţa vâscoasă de atenuare. În regiunea vitezei mari (superioare) caracteristicile frecării urmează caracteristicile atenuării vâscoase ale suprafeţei lubrifiate. Prin urmare se poate scrie:

$$\frac{d\langle \tilde{F} \rangle}{d\dot{X}_S} = \frac{f_C + W\sigma_2^*}{W} \quad \text{oricare ar fi } |\dot{X}_S| \ll W,$$

$$\frac{d\langle \tilde{F} \rangle}{d\dot{X}_S} \approx \sigma_2^* \quad \text{oricare ar fi } |\dot{X}_S| \gg W. \tag{2.24}$$

Din ecuaţia de mai sus se poate deduce că viteza inferioară efectivă de frecare caracteristică este o funcţie a nivelului Coulomb a forţei de frecare, coeficientul de atenuare vâscoasă a suprafeţei lubrifiate şi caracteristicile semnalului de superpoziţie.

În cazul unei valori mari a lui v_d^* se poate observa în figura 2.3a o complexitate tranziţională în frecarea efectivă în funcţie de caracteristicile vitezei în jurul vitezei semnalului de superpoziţie W. Pe de altă parte se observă o primă zonă a pantei negative din graficul frecării în funcţie de viteză, asociată cu efectul Stribeck, şi o a doua zonă a pantei negativă. Această a doua zonă apare la viteză mult mai mică ca W, întrucât prima zonă a pantei negative apare la viteze mult mai mari ca W.

Este important de menţionat diferenţa dintre caracteristicile frecării efective calculate pe baza modelului stării uniforme de frecare şi modelul LuGre. În cazul modelului stării uniforme de frecare caracteristica frecării efective este:

$$\left\langle \tilde{F} \right\rangle = 0.5\left(g^*\left(\dot{x}_S + W\right)sgn\left(\dot{x}_S + W\right) + g^*\left(\dot{x}_S - W\right)sgn\left(\dot{x}_S - W\right)\right) + \sigma_2^* \dot{x}_S \qquad (2.25)$$

Pentru comparaţie, în figura 2.3c este reprezentat grafic frecarea efectivă corespunzătoare în funcţie de viteză. Din figura 2.3c se observă că panta forţei de frecare efectivă calculată cu modelul stării uniforme este σ_2^* şi deci independentă de caracteristica semnalului de superpoziţie W. Când nu se utilizează lubrefianţi adică $\sigma_2 = 0$, cea mai mică forţă de frecare devine zero. Prin urmare se deduce că modelul stării uniforme de frecare subevaluează forţa de frecare efectivă în comparaţie cu cea obţinută în modelul LuGre.

Pentru verificarea acestor rezultate s-au realizat simulări numerice. Excitarea stării este modelată ca $1.7\sin(0.5\tau)$ şi semnalul de superpoziţie suprapus peste viteza de alunecare ca o undă pătratică de amplitudine 0.5 şi frecvenţă 1000. Forţa de frecare efectivă în funcţie de caracteristicile vitezei sunt construite utilizând versiunea filtrată a vitezei şi frecării. Filtrele analogice de mică trecere filtre de ordinul opt şi bandă de mică frecvenţă 500 sunt folosite pentru a elimina componentele de înaltă frecvenţă ale vitezei şi semnalului de frecare.

Simularea numerică a caracteristicilor de frecare efective sunt prezentate în figurile 2.4a şi 2.4b care demonstrează clar valabilitatea rezultatelor analitice prezentate în figurile 2.3a şi 2.3b.

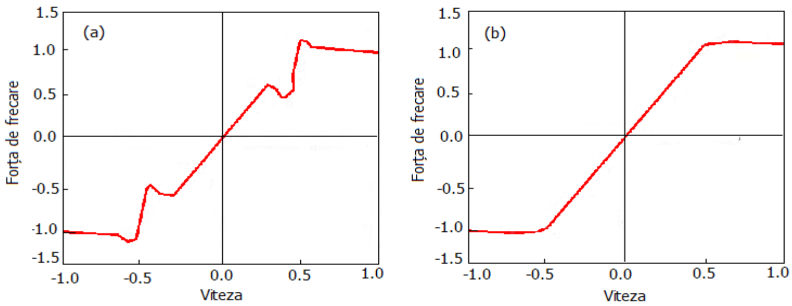


Fig.2.4 – Efectul caracteristic al frecării. prin simulare şi analitic

a) $v_d^* = 0.1$; b) $v_d^* = 0.01$

Modelul 2 – semnalul sinusoidal de superpoziţie

Analiza teoretică prezentată anterior a demonstrat că caracteristicile frecării efective de viteză mică este o funcţie puternică de nivelul de frecare Coulomb, caracteristicile atenuării vâscoase a suprafeţei lubrifiate şi caracteristicile semnalului de superpoziţie.

Se consideră un model al frecării fără a ţine seama de efectul Stribeck şi amortizarea asperităţilor pentru a analiza efectul sinusoidal al semnalului de superpoziţie pe caracteristicile frecării la viteză mică. În aceste circumstanţe ecuaţia de mişcare (2.12) devine:

$$\ddot{X} + X + \tilde{F} = \tilde{f}_s(\tau) + a\Omega_f^2 \sin(\Omega_f \tau)$$

$$\dot{Z} = \dot{X} - \frac{\sigma_0^* |\dot{X}| Z}{f_c} \tag{2.26}$$

unde forţa de frecare $\tilde{F}$ este:

$$\tilde{F} = \sigma_0^* Z + \sigma_2^* \dot{X}$$

În acord cu teoria metodei directă de partiţionare a mişcării se scrie:

$$X(\tau) = X_s(\tau) + \Omega_f^{-1} \varphi_1(\tau, T)$$

$$Z(\tau) = Z_s(\tau) + \Omega_f^{-1} \varphi_2(\tau, T) \tag{2.27}$$

unde

$$T = \Omega_f \tau$$

cu

$$\langle \varphi_{1,2} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{1,2}(\tau, T) dT = 0 \tag{2.28}$$

Cu consideraţii similare celor din cazul modelelor anterioare se obţine medierea dinamică a sistemului. Astfel:

$$\ddot{X}_s + X_s + \sigma_0^* Z_s + \sigma_2^* \dot{X}_s = \tilde{f}_s(\tau)$$

$$\dot{Z}_s = \dot{X}_s - \frac{\sigma_0^* Z_s \langle |\dot{X}_s + \varphi_1'| \rangle}{f_c} \tag{2.29}$$

unde

$$\varphi_1' = -a\Omega_f \cos(\Omega_f \tau)$$

După calcularea mediei $\langle |\dot{X}_s + \varphi_1'| \rangle$, ecuaţia (2.29) devine

$$\ddot{X}_s + X_s + \sigma_0^* Z_s + \sigma_2^* \dot{X}_s = \tilde{f}_s(\tau)$$

$$\dot{Z}_s = \dot{X}_s - \frac{\sigma_0^* Z_s}{f_c} \left[2a\Omega_f \sin(\theta_1) + \dot{X}_s (\pi - 2\theta_1) \right]$$

cu

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\dot{X}_s}{a\Omega_f} \right) \qquad \text{când} \qquad |\dot{X}_s| \le a\Omega_f \tag{2.30a}$$

Şi

$$\dot{Z}_S = \dot{X}_S - \frac{\sigma_0^* Z_S}{f_c}\left|\dot{X}_S\right| \quad \text{când} \quad \left|\dot{X}_S\right| > a\Omega_f \tag{2.30b}$$

Prin urmare se obţin caracteristicile frecării efective de forma:

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{F} \right\rangle &= \sigma_0^* Z_S + \sigma_2^* \dot{X}_S \\ &= \frac{\pi f_c \dot{X}_S}{2a\Omega_f \sin(\theta_1) + \dot{X}_S(\pi - 2\theta_1)} + \sigma_2^* \dot{X}_S, \quad \text{când} \quad \left|\dot{X}_S\right| \le a\Omega_f \\ &= f_S \,\mathrm{sgn}\left(\dot{X}_S\right) + \sigma_2^* \dot{X}_S \quad \text{când} \quad \left|\dot{X}_S\right| > a\Omega_f \end{aligned} \tag{2.31}$$

Caracteristicile frecării efective sunt prezentate în următoarea figură:

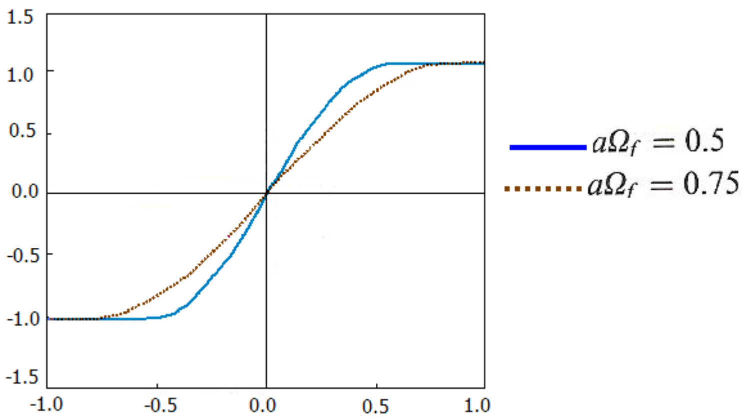


Fig. 2.5

Din această figură se observă că în apropierea regiunilor vitezelor foarte mici ($<< a\Omega_f$) frecarea efectivă acţionează aproximativ ca o atenuare vâscoasă liniară şi panta vitezei liniare mici descreşte cu creşterea forţei rapide de excitaţie ($a\Omega_f$). Această viteză mică a frecării efective se poate scrie în forma:

$$\left\langle \tilde{F} \right\rangle = \frac{\pi f_c}{2a\Omega_f}\dot{X}_S + \sigma_2^* \dot{X}_S \quad \text{pentru} \quad \left|\dot{X}_S\right| << a\Omega_f \tag{2.32}$$

Pentru simularea numerică se consideră modelul de frecare cu efect Stribeck. Excitaţia lentă este modelată ca fiind $1.7\sin(0.5\tau)$, iar excitaţia rapidă $1500\sin(2000\tau)$.

Frecarea efectivă în funcţie de caracteristicile vitezei este construită utilizând versiunile filtrate ale vitezei şi frecării. Filtrele analogice de mică trecere sunt utilizate pentru eliminarea semnalelor de înaltă frecvență ale vitezei şi frecării. Simularea numerică a caracteristicilor frecării efective sunt prezentate în figura următoare pentru două valori diferite ale lui v_d^*.

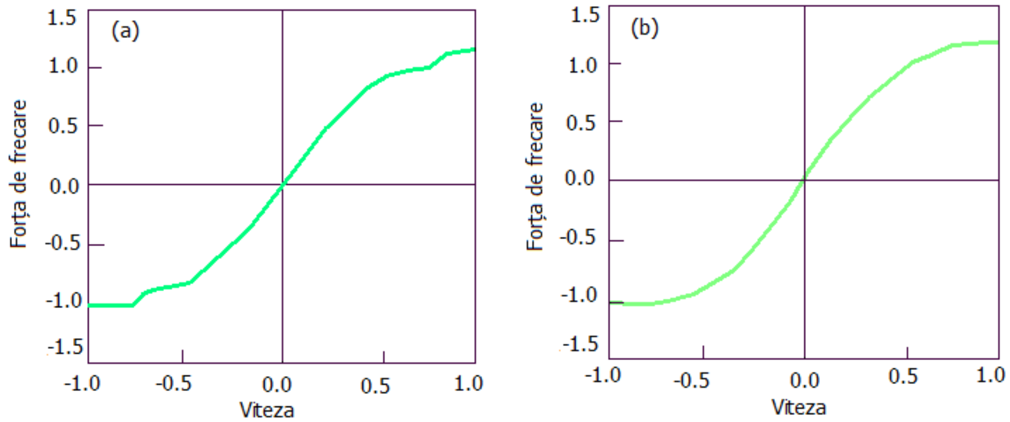


Fig.2.6

a) $v_d^* = 0.1$; b) $v_d^* = 0.01$

Din aceste figuri se observă că viteza mică de frecare efectivă se aseamănă cu caracteristicile liniare vâscoase date de ecuaţiile (2.31) şi (2.32).

Efectul vibraţiei rapide a instabilităţii „stick-slip"

Se va prezenta efectul excitaţiei rapide a stabilităţii sistemului (stabilitatea stării de referinţă a sistemului) din figura 2.1

În acest sens, viteza de comandă este considerată constantă şi ecuaţia de mişcare a sistemului este rescrisă în următoarea formă adimensională:

$$\dot{Z} = v - \frac{\sigma_0^* |v|}{g^*(v)} Z \tag{2.33}$$

$$\dot{e} = v_{ref} - v \tag{2.34}$$

$$\dot{v} = e - \tilde{F} + \tilde{f}_f(\tau, T_0) \tag{2.35}$$

unde

$$v = \dot{X} \quad \text{şi} \qquad v_{ref} = v_m^*$$

Sub acţiunea unui semnal de superpoziţie (oscilaţie) media mişcării lente a sistemului este dată de următoarea ecuaţie adimensională de mişcare:

$$\dot{Z} = v - \frac{\sigma_0^*}{2}\left[\frac{|v+W|}{g^*(v+W)} + \frac{|v-W|}{g^*(v-W)}\right] Z = f_1(v, Z, e) \tag{2.36}$$

$$\dot{e} = v_{ref} - v = f_2(v, Z, e) \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= e - \sigma_0^* Z - \sigma_2^* v \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[\sigma_1^*(v+W)\left\{(v+W) - \frac{\sigma_0^*|v+W|}{g^*(v+W)} Z\right\} + \sigma_1^*(v+W)\left\{(v-W) - \frac{\sigma_0^*(|v-W|)}{g^*(v-W)} Z\right\}\right] \\ &= f_3(v, Z, e) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Configuraţia de echilibru a sistemului este:

$$Z = Z_0 = \frac{2v_{ref}}{\sigma_0^*\left[\frac{|v+W|}{g^*(v+W)} + \frac{|v-W|}{g^*(v-W)}\right]}$$

$$e = e_0 = \sigma_0^* Z_0$$

$$v = v_0 = v_{ref} \tag{2.39}$$

Stabilitatea sistemului poate fi analizată prin calcularea numerelor caracteristice a următoarei matrice Jacobi:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Z} & \frac{\partial f_1}{\partial e} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Z} & \frac{\partial f_2}{\partial e} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Z} & \frac{\partial f_3}{\partial e} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

la $Z = Z_0$, $e = e_0$ şi $v = v_{ref}$. Sistemul este stabil când părţile reale ale tuturor numerelor caracteristice se întind în jumătatea stângă a planului complex. De exemplu, stabilitatea graficelor lui v_{ref} în funcţie de W sunt prezentate mai jos.

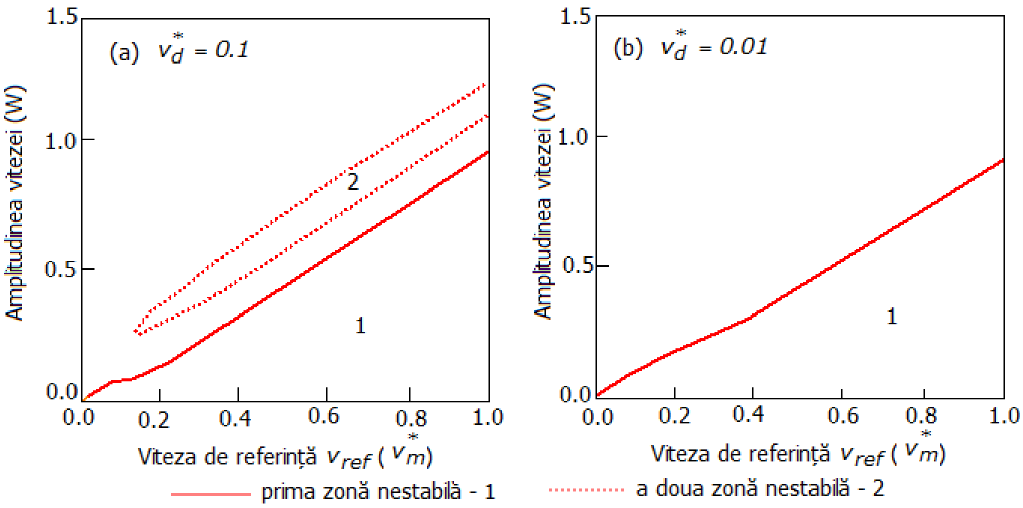


Fig.2.7 - Graficul stabilităţii în cazul excitaţiei rapide

Stabilitatea este reprezentată doar în regiunea vitezei de referinţă pentru care sistemul nesupus semnalului este nestabil.

În prima figură a graficului de mai sus se pot observa două regiuni de instabilitate. Cea mai mare suprafaţă de instabilitate se extinde peste întregul domeniu al vitezei de referinţă. Regiunea mică de instabilitate este asociată cu a doua pantă negativă prezentată la caracteristicile frecării efective din figura 2.3a.

Aşa cum se observă în figura 2.7b zona de instabilitate mică dispare pentru valori mici ale lui v_d^*. Se poate concluziona că în general selectarea unei excitaţii rapide potrivite poate determina stabilizarea frecării – induce instabilitatea.

De menţionat că în regiunea vitezei mici ca şi a vitezei caracteristice v_s vibraţia rapidă având amplitudinea vitezei W mult mai mare decât viteza de referinţă poate determina stabilitatea sistemului. Simularea numerică a modelului este prezentată grafic pentru diferite nivele ale vitezei semnalului de superpoziţie W, şi corespunzător histograma vitezei de alunecare sunt prezentate în figura 2.8a-f.

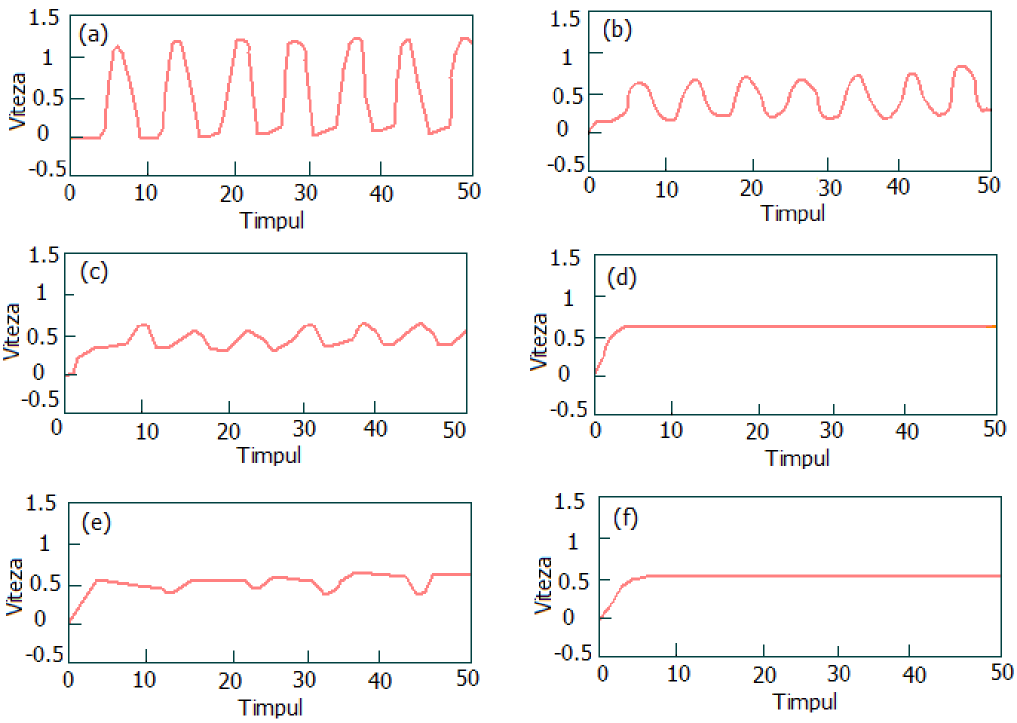


Fig.2.8 – Simularea numerică a vitezei pentru diferite valori ale amplitudinii vitezei semnalului de superpoziţie cu $v_{ref} = 0.4$ şi frecvenţa 1000

a) $W = 0$; b) $W = 0.2$; c) $W = 0.3$;d) $W = 0.4$; e) $W = 0.5$; f) $W = 0.6$

Din această figură se observă că viteza de autoîntreţinere a oscilaţiei poate fi ori amortizată ori redusă de semnalul de superpoziţie de înaltă frecvenţă. După o alegere corectă pentru frecvenţa acestui semnal de superpoziţie este posibilă amortizarea completă a oscilaţiei.

Simularea numerică a efectului vibraţiei rapide pentru mişcarea „stick-slip"

Rezultatele analitice şi numerice prezentate anterior au demonstrat că vibraţiile rapide stabilizează frecarea şi induce instabilitatea de la panta negativă a caracteristicilor vitezei de frecare până la panta pozitivă a amortizării vâscoase.

Caracteristicile frecării efective sub acţiunea vibraţiilor rapide sunt calculate analitic. Se va considera o reprezentare slab generalizată a modelului frecării LuGre, cunoscut ca modelul elasto-plastic. Descris în ecuaţia (2.3), modelul elasto-plastic al frecării este diferit de modelul LuGre doar cu respectarea funcţiei $\alpha(z,v)$, de aici înainte aceasta se va numi funcţie elasto-plastică. Introducerea unei astfel de funcţii face posibilă detectarea fazelor de mişcare ca: blocarea $\alpha = 0$, prealunecarea $0 < \alpha < 1$ şi alunecarea $\alpha = 1$. Vibraţia rapidă acţionează prin variaţia frecvenţei înalte a vitezei relative la interfaţa de frecare. Astfel, fără a pierde generalitatea se poate înlocui termenul forţa la frecvenţa înaltă în ecuaţia (2.11) prin variaţia vitezei la înaltă frecvenţă suprapusă peste viteza mică de alunecare.

Aceste consideraţii reduc în primul rând timpul de calcul şi în al doilea rând controlul întreg al vitezei semnalului de superpoziţie; este posibil ca prima variaţie să determine extinderea efectului. Simularea numerică se realizează pentru valorile parametrilor stabilite anterior şi pentru:

$$v_m^* = 0.1;\ \tilde{f}_s = 1.7\sin(0.3\tau);\ \lambda = \frac{z_{ba}}{z_{ss}} = 0.8$$

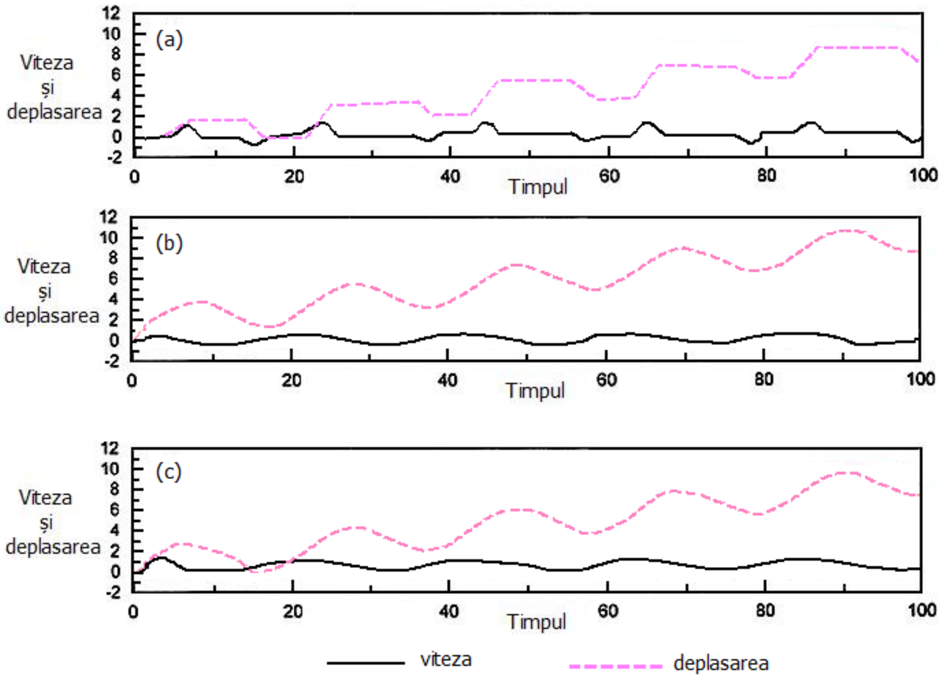


Fig. 2.9 – Deplasarea şi viteza cu şi fără excitaţie
a)fără semnal; b) cu semnal de amplitudine 1.5 şi frecvenţă 100; c) cu semnal de amplitudine 2.5 şi frecvenţa 100

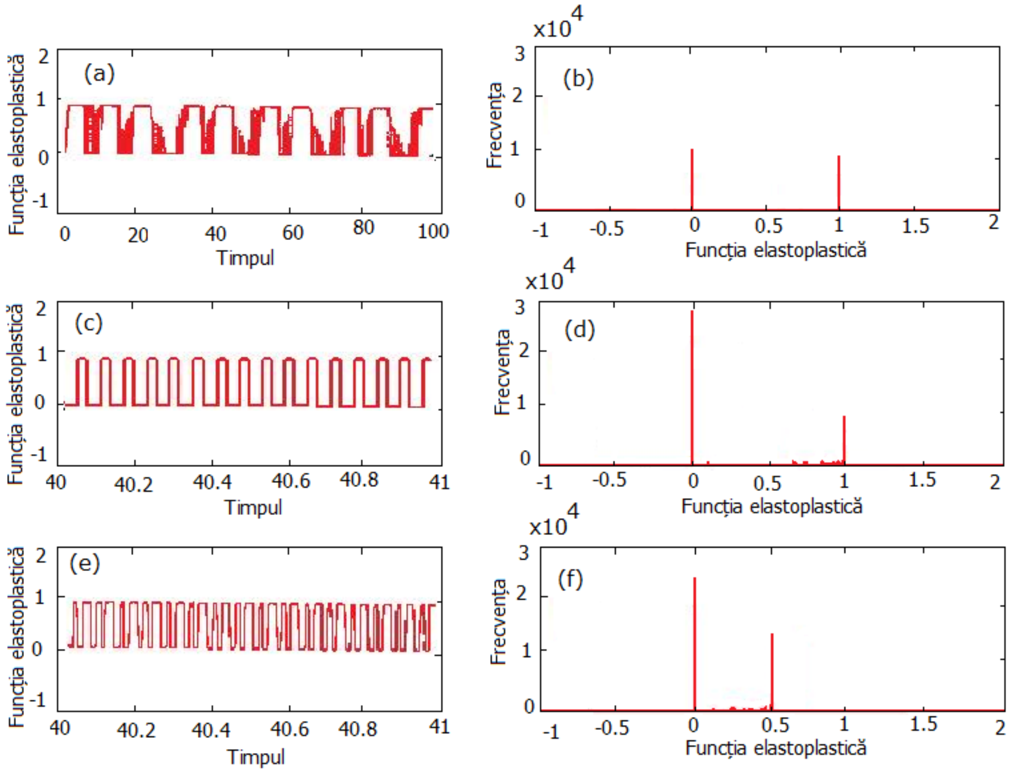


Fig. 2.10 – Evoluţia în timp a funcţiei elastoplastice cu şi fără excitaţie rapidă a).b) fără semnal; c),d) cu semnal de amplitudine 1.5 şi frecvenţă 100; e) f) cu semnal de amplitudine 2.5 şi frecvenţa 100

În figura 2.9(a)-(c) este prezentată deplasarea şi viteza filtrată cu pas mic. Evoluţia în timp a funcţiei $a(.)$ şi histograma valorilor eşantioanelor acesteia sunt redate în figura 2.10. Reprezentarea în timp a funcţiei elasto-plastice fără acţiunea semnalului de superpoziţie este prezentată în figura 2.10a şi demonstrează existenţa de lungă durată a blocării şi forţelor de alunecare interpuse cu fazele de prealunecare.

Din histogramele prezentate în figura 2.10b se poate concluziona ca fazele de blocare şi alunecare au părţi aproape egale din pricina numărului total de eşantioane considerate. Din figura 2.10c şi 2.10e se observă că sub acţiunea semnalului de superpoziţie durata lungă „stick-slip” este înlocuită prin fazele de scurtă durată „stick-slip”. Histogramele corespunzătoare sunt trasate pentru eşantioane luate peste timpul de integrare(100). Din aceste figuri se observă că împărţirea relativă a timpului de alunecare creşte cu puterea semnalului de superpoziţie. Curbele frecării efective pentru diferite amplitudini ale vitezei semnalului de superpoziţie cu o frecvenţă fixă de 100 sunt prezentate în figura 2.11.

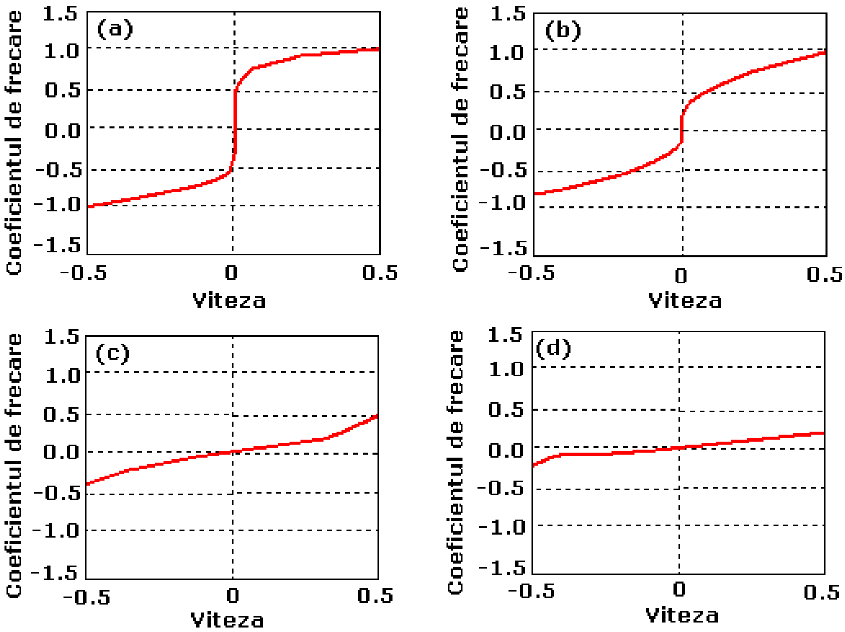


Fig. 2.11 – Simularea numerică a frecării efective $v_m^* = 0$

a)viteza semnalului 0.5; b) viteza semnalului 0.8; c) viteza semnalului 1.5; d) viteza semnalului 2

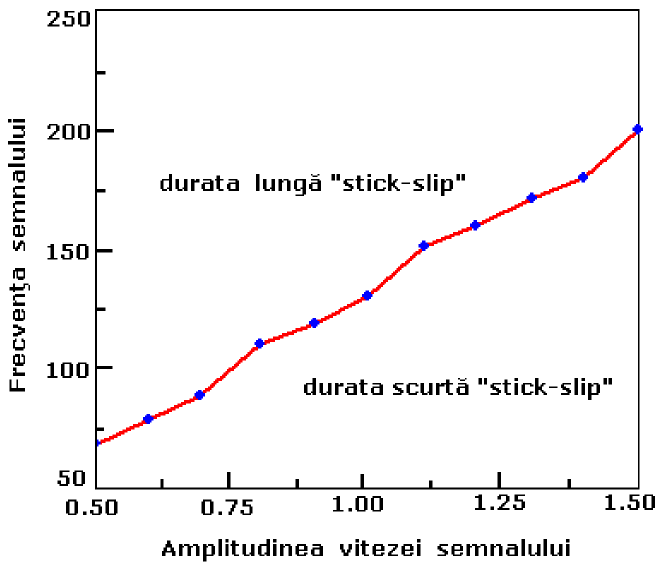


Fig. 2.12 – Zona ”stick - slip” pentru sistemul cu oscilaţii cu model elasto – plastic

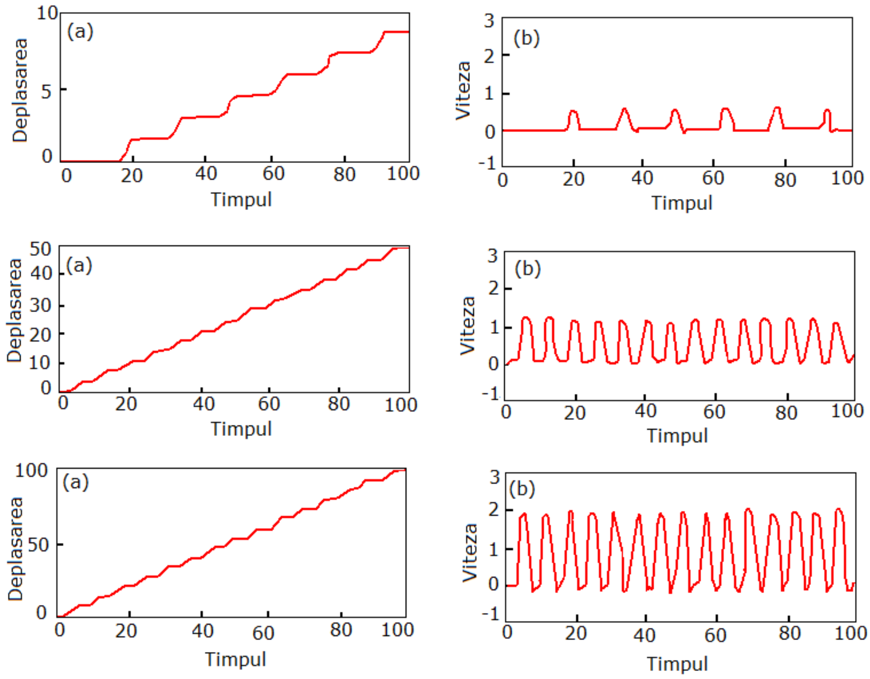


Fig. 2.13 – Deplasarea şi viteza sistemului considerat fără excitaţie rapidă

a),b) $v_m^* = 0.1$; c),d) $v_m^* = 0.5$; e),f) $v_m^* = 1$

Se observă linia verticală la viteza zero din graficul frecării efective (figura 2.11). Această indică existenţa de lungă durată a fazelor de blocare în timpul mişcării. Extensia liniei verticale de-a lungul axei de frecare reprezintă extensia forţei de frecare în timpul blocării. Evident extensia forţei descreşte cu creşterea puterii semnalului de superpoziţie.

Când puterea excitaţiei rapide este suficient de puternică, fazele de blocare dispar şi corespunzător curbele vitezei mici la frecarea efectivă seamănă cu caracteristicile amortizării vâscoase liniare aşa cum se poate observa în figura 2.11c şi 2.11.d. Când amplitudinea semnalului de superpoziţie este păstrată constantă şi frecvenţa este modificată se observă că mişcarea „stick-slip" reapare de la o valoare critică a frecvenţei semnalului de superpoziţie care este o funcţie de amplitudinea vitezei semnalului de superpoziţie.

Figura 2.12 prezintă regiunea de lungă durată a mişcării „stick-slip" a amplitudinii semnalului de superpoziţie în funcţie de frecvenţă. Acest rezultat este în contrast cu ceea ce s-a constatat în cazul modelului LuGre. Trebuie însă reamintit că modelul LuGre nu captează în mod riguros fenomenul de blocare. Este interesant de înţeles mecanismul fizic de bază al acţiunii semnalului de superpoziţie la reducerea vitezei mici-inferioare de frecare. În acest scop modelul este simulat pentru trei viteze de comandă diferite v_m^* şi fără nici o excitaţie. Corespunzător evoluţiei în timp a vitezei şi frecării sunt prezentate în figurile 2.13 şi 2.14, fără, respectiv cu semnal de superpoziţie.

Din figura 2.14 se poate observa că durata lungă „stick-slip” este suprapusă cu semnalul de superpoziţie. În figura 2.15 fazele de lungă durată „stick-slip”sunt înlocuite prin faze de scurtă durată „stick-slip”. Deoarece, forţa de frecare din timpul blocării depinde de durata alunecării, o reducere a forţei de frecare se poate observa în sistemul cu semnal de superpoziţie.

Histogramele eşantioanelor colectate ale funcţiilor elasto-plastice arată clar că durata totală relativă a fazei de blocare de scurtă durată creşte cu viteza de comandă care este de asemenea viteza uniformă a stării de alunecare a sistemului cu semnal de superpoziţie. Această tendinţă de creştere a forţei frecării cu viteza de alunecare sunt prezentate în figurile 2.14a, d şi f.

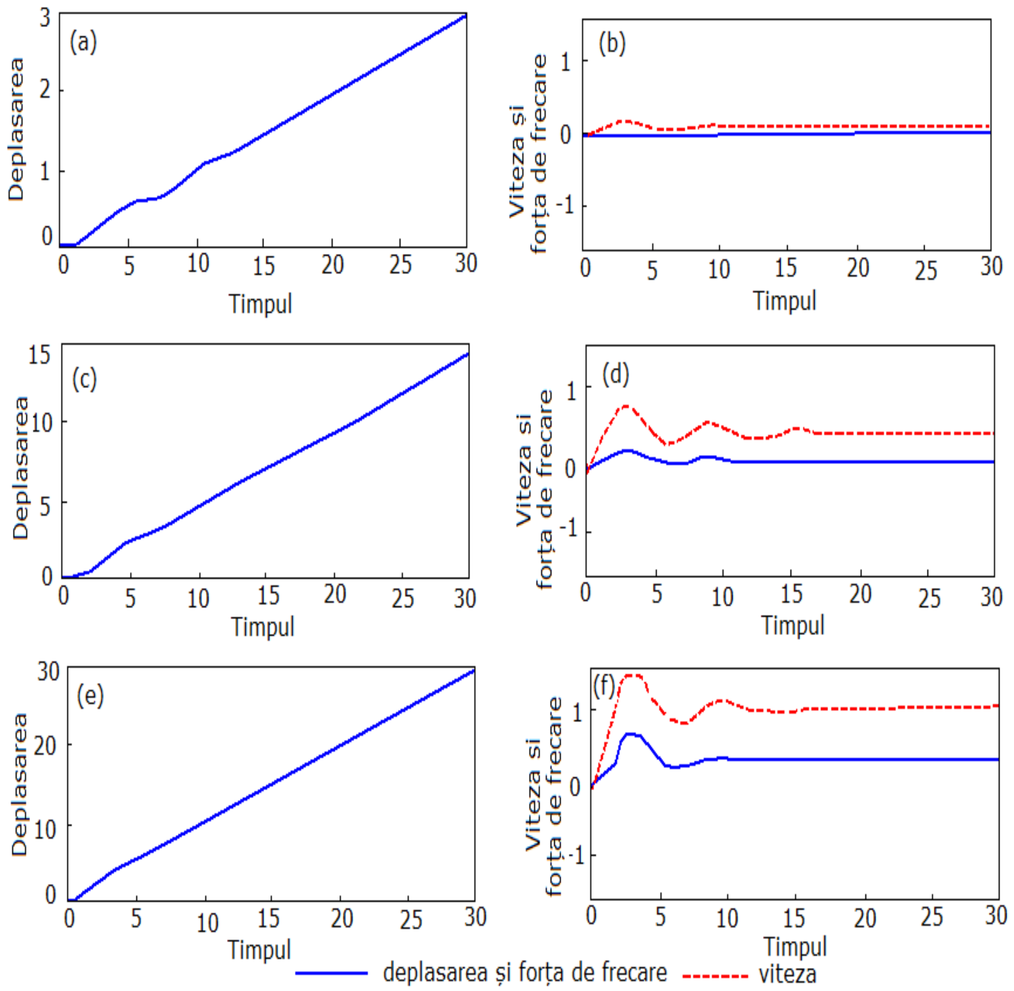


Fig.2.14 – Deplasarea şi viteza sistemului cu excitaţie

a),b) $v_m^* = 0.1$; c),d) $v_m^* = 0.5$; e),f) $v_m^* = 1$

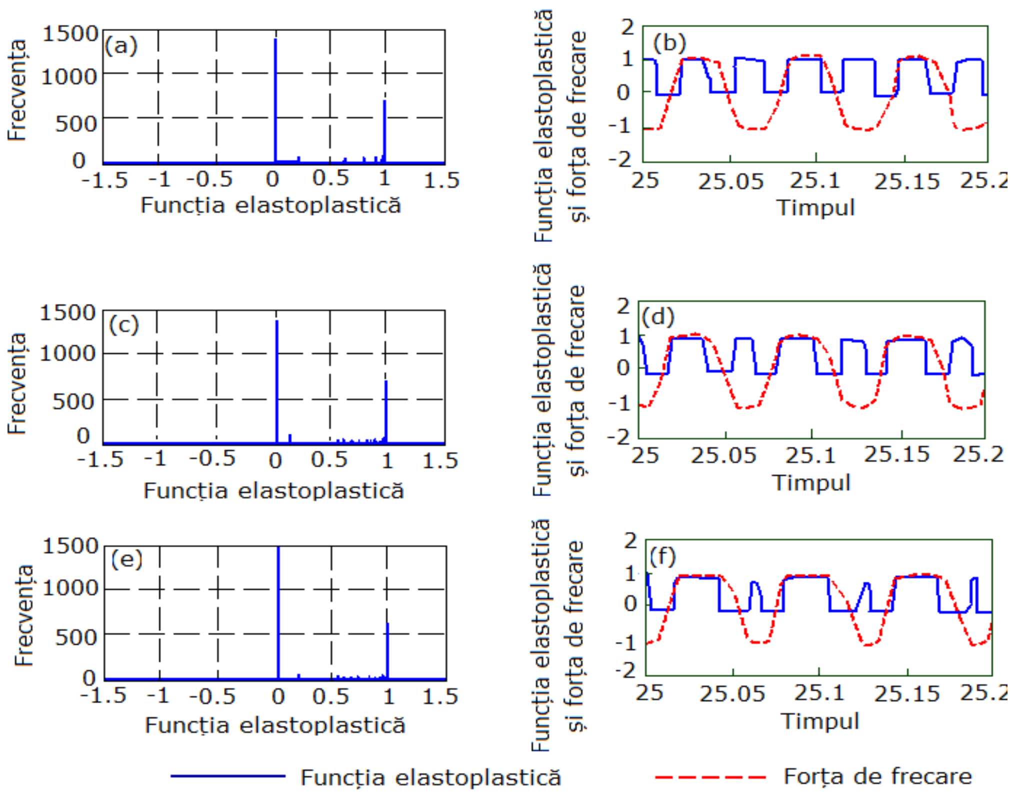


Fig. 2.15 – Histogramele funcţiei elastoplastice la frecvenţă înaltă şi ale frecării în funcţie de timp a sistemului cu excitaţie rapidă

a),b) $v_m^* = 0.1$; c),d) $v_m^* = 0.5$; e),f) $v_m^* = 1$

2.3 Contribuţii personale. Concluzii.

- S-a studiat efectul vibraţiei rapide numite „dither" – semnal de superpoziţie, pe o clasă de sisteme cu frecare. Interacţiunea gradelor de libertate microscopice şi macroscopice au fost considerate în investigaţiile analitice şi numerice.
- Modelul LuGre, modelul elasto-plastic care este mai riguros, sunt considerate modele ale frecării. Din expresiile analitice sunt obţinute două tipuri de semnale de superpoziţie numite viteză de excitaţie de tip puls pătratic şi forţă de excitare sinusoidală.
- Caracteristicile frecării efective prezintă tendinţa asemănătoare caracteristicilor de amortizare liniar vâscoasă la viteză foarte mică. Caracteristicile vitezei inferioare a frecării efective depinde mai ales de forţa

de frecare Coulomb şi de caracteristicile semnalului de superpoziţie. Viteza inferioară a forţei de frecare descreşte cu creşterea puterii excitaţiei rapide. În plus, o alegere favorabilă a caracteristicilor semnalului de superpoziţie poate completa sau şterge parţial panta negativă a caracteristicilor vitezei de frecare. Totuşi e greşit menţionat aici că fenomenul modificărilor netriviale ale caracteristicilor vitezei inferioare de frecare la caracteristicile amortizării vâscoase datorate excitării rapide nu este ceva nou. Acest rezultat este cunoscut pentru câteva modele macroscopice ale frecării. Aici, însă s-a arătat foarte bine că acest rezultat se regăseşte şi atunci când sunt considerate modelele microscopice ale frecării. De asemenea s-a arătat că modelul frecării stării uniform cinetice subevaluează caracteristicile vitezei inferioare de frecare efectivă comparativ cu modelele dinamice ale frecării.

- Pentru câteva valori ale parametrilor asociate cu modelul amortizării asperităţilor se poate observa o a doua zonă a pantei negative în frecarea efectivă în funcţie de caracteristicile vitezei alături de efectul Stribeck. Stabilitatea traiectoriei vitezei sistemului cu frecare a fost prezentat ţinând seama de caracteristicile semnalului de superpoziţie indus frecării efective.
- În graficul stabilităţii se observă două zone de instabilitate. Instabilitatea primei zone este asociată cu efectul Stribeck, în timp ce a doua zonă de instabilitate depinde de parametrii modelului amortizării asperităţilor. O alegere potrivită a excitaţiei rapide poate fi făcută întotdeauna pentru acele sisteme care sunt stabile. S-a arătat că fazele lungi de blocare şi alunecare sunt împărţite în faze de scurtă durată. Acest bilanţ pentru reducerea forţei de frecare s-a efectuat în cazul unui sistem cu semnal de superpoziţie deoarece forţa de blocare se reduce cu descreşterea timpului de blocare. Durata totală relativă a fazelor de blocare într-un timp scurt cresc cu viteza de comandă şi aceasta se contabilizează pentru creşterea frecării cu viteza de alunecare.

3. EXISTENŢA ŞI UNICITATEA SOLUŢIILOR SISTEMELOR MECANICE. METODE DE APROXIMARE.

3 1 Metode de aproximare

Acest capitol este destinat aproximărilor şi obţinerii unui rezultat de existenţă a soluţiilor pentru problema P_u în cazul în care ciocnirea este plastică, $R = 0$, şi forţa exterioară se presupune integrabilă $F \in L^1\left(\left[0,\hat{T}\right];\Re^n\right)$.

După discretizarea intervalului $\left[0,\hat{T}\right]$ se aplică algoritmul „NonSmooth Contact Dynamics" – NSCD, care este o adaptare a schemei implicite a lui Euler pentru problema considerată. Astfel se obţin valorile numerice care sunt interpolate pentru construirea unei aproximări în spaţiul S a unei eventuale soluţii a problemei P_u .[62]

Se consideră un şir de aproximări astfel construite pe intervale de timp din ce în ce mai mici pentru un eşantion după care ele verifică estimările uniforme permanent prin utilizarea unui rezultat de compactitate pentru extragerea unui subşir convergent. Se arată că la limită se obţine o soluţie a problemei P_u, rezultat obţinut de Monteiro – Marques.[47]

Aproximarea soluţiei ecuaţiei generale se face printr-o metodă numerică θ-Euler bazată pe o adaptare a schemei implicite Euler. Intervalul studiat $\left(0,T\right]$ este divizat în subintervale $\left(t_i,t_{i+1}\right]$; $i = 0,K-1$ de lungime h şi $t_k = T$. Ecuaţiile dinamicii mişcării particulei materiale sunt:

$$m\left[\dot{U}^+\left(t_{i+1}\right)-\dot{U}^+\left(t_i\right)\right] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F ds + \int_{\left(t_i,t_{i+1}\right]} N - \int_{t_i}^{t_{i+1}} KU ds$$

$$U\left(t_{i+1}\right) = U\left(t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{U} ds$$

Deoarece derivata la dreapta este continuă rezultă:

$$m\left[\dot{U}(t_{i+1}) - \dot{U}(t_i)\right] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F ds + \int_{(t_i, t_{i+1}]} N - \int_{t_i}^{t_{i+1}} KU ds$$
$$U(t_{i+1}) = U(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{U} ds \qquad (3.1)$$

în care integralele acestei relaţii sunt apoi aproximate.

Termenul în care apare reacţiunea este aproximat de valoarea medie a impulsului pe un interval de timp h. Intervalul de timp fiind mic integrala descrie forţele percutante instantanee. Se va nota atunci prin:

$$N^{i+1} = \frac{1}{h} \int_{(t_i, t_{i+1}]} N$$

Metoda propusă presupune o aproximare a vitezei printr-o metodă de tip Euler implicit din care avem:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{U} ds = hV^{i+1}$$
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F ds = h\left[\theta F^{i+1} + (1-\theta)F^i\right]$$
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} KU ds = h\left[\theta KU^{i+1} + (1-\theta)KU^i\right]$$

unde exponentul i desemnează aproximarea la momentul t_i şi θ este un parametru real cuprins între 0 şi 1. Se alege valoarea $\theta = 0,5$ care dă rezultate bune aproximării realizată prin această metodă. Metoda θ-Euler permite în final scrierea relaţiilor (3.1) în următoarea formă:

$$V^{i+1} = V^i + \frac{h}{2m}\left(\left(F^{i+1} + F^i\right) - K\left(U^{i+1} + U^i\right)\right) + \frac{h}{m} N^{i+1}$$
$$U^{i+1} = U^i + hV^{i+1} \qquad (3.2)$$

În timpul fazelor de mişcare fără contact, viteza la momentul t^{i+1} notată $\left(V^{i+1}\right)^{liber}$ se exprimă astfel:

$$\left(V^{i+1}\right)^{liber} = V^i + \frac{h}{2m}\left(\left(F^{i+1} + F^i\right) - K\left(U^{i+1} + U^i\right)\right)$$

Legea frecării lui Coulomb pentru problema discretă devine:

$$\left|N_T^{i+1}\right| \le \mu \left|N_N^{i+1}\right|; \begin{cases} \textit{dacă } \left|N_T^{i+1}\right| < \mu \left|N_N^{i+1}\right| \textit{ atunci } V_T^{i+1} = 0 \\ \textit{dacă } \left|N_T^{i+1}\right| = \mu \left|N_N^{i+1}\right| \textit{ atunci } \exists \lambda \ge 0 \Rightarrow N_T^{i+1} = -\lambda V_T^{i+1} \end{cases}$$

Considerând viteza ca singura necunoscută, se va introduce o lege de contact în viteze. Acest lucru se va face cu ajutorul propoziţiei 3.1. Funcţia N este absolut continuă în raport cu valoarea sa absolută.

$$N = r|R| \text{ cu } r \in L^1\left(\left[0,T,|N|;\Re^n\right]\right) \tag{3.3}$$

şi

$$|r(t)| = 1 \ |N| - \textit{aproape pestetot} \in [0,T] \tag{3.4}$$

unde s-a adoptat notaţia $|N| - \textit{aproape pes tetot} \in [0,T]$ pentru aproximativ toate valorile lui t din $[0,T]$.

Propoziţia 3.1

Fie $F \in L^1\left([0,T];\Re^n\right)$, $N \in M\left([0,T];\Re^n\right)$ şi $r \in L^1\left(\left[0,T,|N|;\Re^n\right]\right)$ densitatea N raportată la $|N|$.

Prin echivalenţă:

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{U} + KU = F + N \\ & U_N = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+ = 0 \\ & U_N \le 0, N_N \le 0, U_N N_N = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{U} + KU = F + N \\ & U_N \le 0 \begin{cases} U_N(t) < 0 \Rightarrow r_N(t) = 0 \\ |N| \textit{ aproape pes tetot} \in [0,T] \\ U_N = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+ \le 0, r_N(t) \le 0, \dot{U}_N^+(t) r_N(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Demonstraţie

Se presupune că $\dot{U}$ verifică relaţia (3.5) şi se arată că ea satisface relaţia (3.6). Condiţia pentru deplasarea normală este satisfăcută. În plus, din (3.5) rezultă $U_N N_N = 0$. Aceasta implică $U_N r_N(t)|N| = 0$ şi atunci $U_N r_N(t) = 0$ $|N|$ aproape peste tot aparţine la $[0,T]$. Astfel, dacă $U_N(t) < 0$, $r(t) = 0$. Din legea ciocnirii dacă $U_N(t) = 0$ atunci $\dot{U}_N^+(t) = 0$. Ca o consecinţă, pe de o parte $\dot{U}_N^+ \le 0$ şi pe de altă parte $r_N \dot{U}_N^+ = 0$.

Reciproc, condiţia pentru deplasarea normală este satisfăcută. Cum $N_N = r_N|N|$ condiţia pentru reacţiunea normală este satisfăcută. Ca rezultat: $U_N N_N = U_N r_N |N|$ şi $U_N r_N = 0$, $|N|$.aproape peste tot aparţine la $[0,T]$. Fie t astfel încât $U_N(t) = 0$. Trebuie arătat că $\dot{U}_N^+ = 0$. Se presupune atunci că $\dot{U}_N^+ < 0$. Condiţia pentru deplasarea normală şi ecuaţia de mişcare arată că viteza $\dot{U}_N^+$ este discontinuă la momentul t. Astfel, $|N|(\{t\}) \ne 0$ şi $r_N(t) < 0$. Aceasta contrazice $r_N \dot{U}_N^+ = 0$, $|N|$.aproape peste tot aparţine la $[0,T]$ şi deci $\dot{U}_N^+ = 0$ este demonstrată.

Propoziţia 3.1 permite obţinerea unei legi de contact în viteze pentru problema discretizată la momentul t_{i+1}:

$$\left.\begin{array}{l} \text{dacă } U_N^{i+1} \geq 0 \Rightarrow V_N^{i+1} \leq 0, N_N^{i+1} \leq 0, V_N^{i+1} N_N^{i+1} = 0 \\ \text{dacă} U_N^{i+1} < 0 \Rightarrow N_N^{i+1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

Observăm că această formă discretizată dă o condiţie de interpenetrabilitate care nu este cazul dat prin relaţia (3.6). Algoritmul este echivalent cu relaţia (3.5), fapt care face ca interpenetrabilitatea să fie slabă, adică numai în contact.

3.2 Principiul metodei contactului dinamic neneted (NSCD)

Metoda „NSCD" permite determinarea soluţiilor problemei dinamice în prezenţa constrângerilor unilaterale fără restricţii particulare. O prezentăm pentru cazul unei probleme bidimensionale[62],[63]. Ecuaţia modificată a mişcării sistemului este:

$$V^{i+1} = V^i + \frac{h}{m}\left(\left(\theta F^{i+1} + (1-\theta)F^i\right) - \left(\theta K U^{i+1} + (1-\theta) K U^i\right)\right) + hN^{i+1}$$

$$U^{i+1} = U^i + hV^{i+1}$$

sub o formă echivalentă:

$$MV^{i+1} = F^{i+1} + hN^{i+1}$$

cu

$$M = mI + h^2 \theta K$$

$$F^{i+1} = mV^i - hKU^i + h\left[\theta F^{i+1} + (1-\theta)F^i\right]$$

h este intervalul de timp, θ este parametrul metodei Euler, $\theta \in [0,1]$. De amintit că $\theta = 0$ corespunde metodei explicite şi $\theta = 1$ metodei implicite.
Această ultimă relaţie este o ecuaţie liniară în viteză:

$$V^{i+1} = \left(V^{i+1}\right)^{liber} + LN^{i+1}$$

cu

$$\left\{\begin{array}{l} \left(V^{i+1}\right)^{liber} = M^{-1} F^{i+1} \\ L = hM^{-1} = \begin{pmatrix} L_{NN} & L_{NT} \\ L_{TN} & L_{TT} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Pentru a determina soluţia acestei metode se începe prin estimarea distanţei de contact U_N^{i+1}. Se consideră ecuaţia mişcării în cazul în care restricţiile sunt nule. Mărimea $\left(V^{i+1}\right)^{liber}$ reprezintă viteza masei materiale libere şi estimarea acestei distanţe de contact este dată de relaţia:

$$U_N^{i+1} = U_N^i + h\left(\theta\left(V_N^{i+1}\right)^{liber} + (1-\theta)V_N^i\right) \quad (3.8)$$

Dacă această cantitate este negativă înseamnă că masa este în zbor liber. Astfel, la iteraţia $i+1$ soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ este determinată de relaţia de mai jos:

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = \left(V_N^{i+1}\right)^{liber} \\ V_T^{i+1} = \left(V_T^{i+1}\right)^{liber} \\ N_N^{i+1} = 0 \\ N_T^{i+1} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Dacă mărimea (3.8) este pozitivă sau nulă, masa se află în contact. Patru situaţii sunt atunci posibile:

i. masa zboară
ii. masa alunecă în sens pozitiv
iii. masa alunecă în sens negativ
iv. masa este blocată.

Se presupune că valorile $\left(V_N^{i+1}\right)^{liber}$ sunt negative. Masa zboară şi soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ este atunci determinată de:

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = \left(V_N^{i+1}\right)^{liber} \\ V_T^{i+1} = \left(V_T^{i+1}\right)^{liber} \\ N_N^{i+1} = 0 \\ N_T^{i+1} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Se presupune că masa rămâne în contact. Atunci ne situăm în una din situaţiile ii. – iv. Obţinerea soluţiei $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ acestei probleme va exprima valoarea forţei tangenţiale în funcţie de:

$$N_T^{i+1} = \frac{M_{2,2}V_T^{i+1} - F_T^{i+1}}{h} \quad (3.11)$$

care în plan reprezintă ecuaţia unei drepte notată prin D.

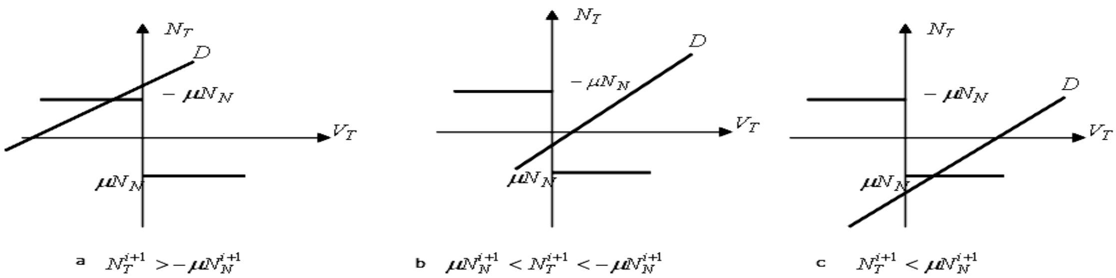


Fig.3.1 – Intersecţia graficului lui Coulomb cu dreapta D
a) alunecare negativă; b) contact blocat; c) alunecare pozitivă

Înainte de toate, se caută intersecţia dreptei D cu graficul legii lui Coulomb pentru $N_T^{i+1} \geq -\mu N_N^{i+1}$.În acest caz $V_T^{i+1} \leq 0$ ceea ce înseamnă că masa alunecă în sens negativ. Distingerea diferitelor stări de contact revine la considerarea a trei posibilităţi de intersecţie a dreptei D cu funcţia scară a legii lui Coulomb. Se deduce atunci soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ a problemei iterate cu iteraţia $i+1$.

Condiţia (3.11) exprimă reacţiunea tangenţială ceea ce permite să se transforme în relaţii ale componentelor F^{i+1} exprimată prin:

$$F_T^{i+1} + \mu F_N^{i+1} \leq 0 \tag{3.12}$$

În consecinţă dacă masa alunecă în sens negativ soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ este dată de:

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = 0 \\ V_T^{i+1} = \dfrac{F_T^{i+1} + \mu F_N^{i+1}}{M_{2,2} + \mu M_{1,2}} \\ N_N^{i+1} = \dfrac{M_{1,2} V_T^{i+1} - F_N^{i+1}}{h} \\ N_T^{i+1} = -\mu N_N^{i+1} \end{cases} \tag{3.13}$$

Prezintă interes intersecţia dreptei D cu graficul lui Coulomb în cazul în care $N_T^{i+1} \leq \mu N_N^{i+1}$. Viteza tangenţială este pozitivă, prin urmare se poate spune că masa materială alunecă în sens pozitiv. Deoarece, condiţia (3.11) descrie reacţiunea tangenţială ceea ce permite să se transforme în relaţii ale componentelor F^{i+1} exprimată prin:

$$F_T^{i+1} - \mu F_N^{i+1} \geq 0 \tag{3.14}$$

Se determină atunci soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ a problemei pentru alunecarea pozitivă:

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = 0 \\ V_T^{i+1} = \dfrac{F_T^{i+1} - \mu F_N^{i+1}}{M_{2,2} - \mu M_{1,2}} \\ N_N^{i+1} = \dfrac{M_{1,2} V_T^{i+1} - F_N^{i+1}}{h} \\ N_T^{i+1} = \mu N_N^{i+1} \end{cases} \tag{3.15}$$

Dacă nici una din relaţiile (3.12) şi (3.14) nu sunt satisfăcute situaţia corespunde unei mase materiale aflată în contact blocat. Soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ este dată de relaţiile următoare:

$$\begin{cases} V_N^{i+1} = 0 \\ V_T^{i+1} = 0 \\ N_N^{i+1} = -\dfrac{F_T^{i+1}}{h} \\ N_T^{i+1} = -\dfrac{F_T^{i+1}}{h} \end{cases} \tag{3.16}$$

În final se deduce deplasarea din relaţia:

$$U^{i+1} = U^i + hV^{i+1}$$

3.3 Algoritmul de studiu[62]

Prezentăm mai jos schema logică a algoritmului pe care îl utilizăm:

La timpul $(i+1)$ *se face:*

Estimarea distanţei de contact U_N^{i+1}

dacă $U_N^{i+1} < 0$ *masa este în zbor liber, soluţia* $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ *este dată de relaţiile (3.9)*

dacă nu

dacă $\left(V_N^{i+1}\right)^{liber} < 0$ *masa zboară, soluţia* $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ *este dată de relaţiile (3.10)*

dacă nu

dacă $F_T^{i+1} - \mu F_N^{i+1} \geq 0$ *masa alunecă în sens pozitiv,*

soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ *este dată de relaţiile (3.13)*

dacă nu

dacă $F_T^{i+1} + \mu F_N^{i+1} \leq 0$*, masa alunecă în sens negativ* *soluţia* $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ *este dată de relaţiile (3.15)*

dacă nu masa este în contact blocat

soluţia $\left(V^{i+1}, N^{i+1}\right)$ *este dată de relaţiile (3.16)*

sfârşit dacă

sfârşit dacă

sfârşit dacă

sfârşit dacă

actualizarea deplasării $U^{i+1} = U^i + hV^{i+1}$

sfârşit calcul.

Studiul şirului de aproximaţii

Fie K o mărime strict pozitivă. Notăm prin:

$$h = \frac{T}{K}$$

Se defineşte o aproximaţie a lui F printr-o funcţie scară F_K astfel:

$F_K(t) = F_K^i, \forall t \in [ih, (i+1)h[$ unde $F_K^i (i \in \{0,1,\dots, K-1\})$ sunt definite astfel încât $\|F - F_K\|_{L^1}$ tinde spre zero atunci când K tinde spre infinit.

Algoritmul descris anterior furnizează, un şir de valori de aproximare $U_K^i (i \in \{0,1,\dots, K-1\})$ ale deplasării U la momentul ih.

Se defineşte soluţia aproximativă $U_K \in S\left([0,T]; \Re^n\right)$ obţinută prin interpolarea liniară a acestor valori, astfel putem exprima:

$$U_K(t) = \left(\frac{U_K^{i+1} - U_K}{h}\right)(t - ih) + U_k^i, \quad t \in [ih, (i+1)h)$$

Viteză $\dot{U}_K^+$ este o funcţie treaptă definită prin:

$\dot{U}_K^i(t) = \dfrac{U_K^{i+1} - U_K^i}{h} = V_k^i \quad t \in [ih, (i+1)h)$ şi acceleraţia se reduce la o sumă finită de funcţii Dirac:

$$\ddot{U}_K = \sum_{i=1}^{K-1}\left[\dot{U}_K^+(ih) - \dot{U}_K^-(ih)\right]\delta_{ih} = \sum_{i=1}^{K-1}\left[V_K^i - V_K^{i-1}\right]\delta_{ih}.$$

Se va arăta în continuare că viteza este o funcţie mărginită pe intervalul $[0,T]$.

Lema 3.1

$\forall K \geq 1$ pentru $j = 0,1,\dots, K-1$ avem:

$$m\left\|V_K^{j+1}\right\|^2 - m\left\|V_K^j\right\|^2 + \left(KU_K^{j+1}, U_K^{j+1}\right) - \left(KU_K^j, U_K^j\right) \leq h\left(F_K^{j+1} + F_K^j, V_K^{j+1}\right) \qquad (3.17)$$

Demonstraţie:
Se realizează produsul scalar dintre ecuaţia dinamică discretizată (3.2) şi mărimea V_K^{j+1}.
Rezultă:

$$\left(V_K^{j+1}, m\left(V_K^{j+1} - V_K^j\right)\right) = \left(V_K^{j+1}, hN_K^{j+1} - \frac{h}{2}K\left(U_K^{j+1} + U_K^j\right) + \frac{h}{2}F_K^{j+1}F_K^j\right),$$
$$= h\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) + \frac{h}{2}\left(V_K^{j+1}, F_K^{j+1} + F_K^j - K\left(U_K^{j+1} + U_K^j\right)\right),$$
$$\leq \frac{h}{2}\left(V_K^{j+1}, F_K^{j+1} + F_K^j - K\left(U_K^{j+1} + U_K^j\right)\right)$$

Prin urmare oricare ar fi statutul masei materiale la momentul $(j+1)h$ mărimea $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right)$ este negativă. Se vor examina următoarele cazuri:

- masa materială este în mişcare fără contact: $N_K^{j+1} = 0$ unde $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) = 0$
- masa materială se află în contact fără frecare: $N_K^{j+1} = 0$ unde $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) = 0$
- masa materială se află în contact blocat: $V_K^{j+1} = 0$ unde $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) = 0$
- masa alunecă: $V_{KN}^{j+1} = 0$ şi $V_{KT}^{j+1} = -\lambda N_{KT}^{j+1}$ unde $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) = -\lambda\left(N_{KT}^{j+1}, N_{KT}^{j+1}\right) < 0$

În consecinţă oricare este statutul particulei la momentul $(j+1)h$, $\left(V_K^{j+1}, N_K^{j+1}\right) \leq 0$. În plus:

$$\frac{h}{2}\left(V_K^{j+1}, F_K^{j+1} + F_K^j - K\left(U_K^{j+1} + U_K^j\right)\right) = \frac{1}{2}\left(U_K^{j+1} - U_K^j, F_K^{j+1} + F_K^j - K\left(U_K^{j+1} + U_K^j\right)\right),$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(F_K^{j+1} + F_K^j, U_K^{j+1} - U_K^j\right) - \left(KU_K^{j+1}, U_K^{j+1}\right) + \left(KU_K^{j+1}, U_K^j\right)\right.$$
$$\left. - \left(KU_K^j, U_K^{j+1}\right) + \left(KU_K^j, U_K^j\right)\right\},$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(F_K^{j+1} + F_k^j, U_K^{j+1} - U_K^j\right) - \left(KU_K^{j+1}, U_K^{j+1}\right) + \left(KU_K^j, U_K^j\right)\right\},$$
$$= \frac{h}{2}\left(F_K^{j+1} + F_K^j, V_K^{j+1}\right) - \frac{1}{2}\left\{\left(KU_K^{j+1}, U_K^{j+1}\right) - \left(KU_K^j, U_K^j\right)\right\}.$$

Rezultă inegalitatea:

$$\left(V_K^{j+1}, m\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right)\right) \le \frac{h}{2}\left(F_K^{j+1}+F_K^j, V_K^{j+1}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(KU_K^{j+1}, U_K^{j+1}\right)-\left(KU_K^j, U_K^j\right)\right\}$$
(3.18)

sau pentru orice $j = 0,1,\dots,K-1$ avem:

$$\left(m\left(V_K^{j+1}-V_K^{j+1}\right),V_K^{j+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(V_K^{j+1}+V_K^j\right)+\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right),m\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right)\right),$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(V_K^{j+1}+V_K^j\right),m\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right),m\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right)\right),$$
$$=\frac{1}{2}\left(mV_K^{j+1},V_K^{j+1}\right)-\frac{1}{2}\left(mV_K^j,V_K^j\right)+\frac{1}{2}\left(\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right),m\left(V_K^{j+1}-V_K^j\right)\right),$$
$$\ge\frac{1}{2}\left(mV_K^{j+1},V_K^{j+1}\right)-\frac{1}{2}\left(mV_K^j,V_K^j\right),$$
$$\ge\frac{m}{2}\left\|V_K^{j+1}\right\|^2-\frac{m}{2}\left\|V_K^j\right\|^2. \qquad (3.19)$$

Prin adunarea relaţiilor (3.18) şi (3.19) se obţine inegalitatea (3.17).

Lema 3.2

Fie $\left(\dot{U}_K^+\right)_{K\ge 1}$ şirul de aproximare a vitezelor.

Atunci există un $M > 0$, şi pentru orice $t \in [0,T)$,avem $\left\|\dot{U}_K^+(t)\right\| < M$, unde M este o constantă reală care nu depinde de K.

Demonstraţie

Se va demonstra că: $\forall K, \forall i \in \{0,1,\dots,K-1\}, \left\|V_K^i\right\| < M$. Inegalitatea de disipare (3.17) obţinută din lema precedentă permite următoarea relaţie pentru toate $j = 0,1,\dots,K-1$:

$\left(\beta_K^{j+1}\right)^2-\left(\beta_K^j\right)^2 \le h\left\|F_K^{i+1}+F_K^i\right\|\left\|V_K^{j+1}\right\|$ unde β_K^j e definit prin: $\beta_K^j=\sqrt{m\left\|V_K^j\right\|^2+\left(KU_K^j,U_K^j\right)}$

satisface:

$$\beta_K^j \ge \sqrt{m}\left\|V_K^j\right\| \qquad (3.20)$$

Rezultă:

$$\forall j \in \{0,1,\dots,K-1\},\ \left(\beta_K^{j+1}\right)^2-\left(\beta_K^j\right)^2-\frac{h}{\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1}+F_K^j\right\|\beta_K^{j+1} \le 0 \qquad (3.21)$$

Se consideră în cele ce urmează că inegalitatea (3.21) admite pe β_K^{j+1} ca necunoscut şi se determină valorile lui β_K^{j+1}pentru care această relaţie este satisfăcută. Discriminantul primului termen este:

$\Delta=\left(\beta_K^j\right)^2+\frac{h^2}{4m}\left\|F_K^{j+1}+F_K^j\right\|^2 \ge 0$ şi rădăcinile primului termen sunt:

$$\left(\beta_K^{j+1}\right)^{\pm} = \frac{h}{2\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\| \pm \sqrt{\left(\beta_K^j\right)^2 + \frac{h^2}{4m}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\|^2}\ .$$

Astfel rezultă:

$$\begin{aligned}\beta_K^{j+1} - \beta_K^j \le \left(\beta_K^{j+1}\right)^{+} - \beta_K^j &= \frac{h}{2\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\| + \sqrt{\left(\beta_K^j\right)^2 + \frac{h^2}{4m}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\|^2} - \beta_K^j \\ &\le \frac{h}{2\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\| + \beta_K^j + \frac{h}{2\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\| - \beta_K^j \\ &\le \frac{h}{\sqrt{m}}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\|\end{aligned} \tag{3.22}$$

Prin însumarea relaţiei de mai sus de la $j = 0$ la i obţinem:

$$\begin{aligned}\beta_K^{i+1} &\le \beta_K^0 + \frac{h}{\sqrt{m}}\sum_{j=0}^{i}\left\|F_K^{j+1} + F_K^j\right\|, \\ &\le \beta_K^0 + \frac{2}{\sqrt{m}}\left\|F_K\right\|_{L^1\left([0,\hat{T}];\Re^n\right)}\end{aligned}$$

care dă rezultatul dorit.

Se notează prin $var(f,[a,b])$ variaţia definită astfel $\left\{sup\sum_{i=0}^{n-1}\left\|f(t_{i+1}) - f(t_i)\right\|\right\}$ pentru orice partiţie finită $a = t_0,\dots,t_n = b$.

Lema 3.3

Fie $\left(\dot{U}_K^+\right)_{K\ge 1}$ şirul de aproximaţii ale vitezelor. Atunci $var\left(\dot{U}_K^+;[0,T]\right) < M'$ unde M' este o constantă reală pozitivă care nu depinde de K.

Demonstraţie

Pentru a arăta că variaţia şirului de aproximare în viteză este mărginită independent de K este suficient de arătat că există două constante C_N şi C_T reale, pozitive care nu depind de K şi pentru care:

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left|V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i\right| < C_N \tag{3.23}$$

şi

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left|V_{KT}^{i+1} - V_{KT}^i\right| < C_T \tag{3.24}$$

Se consideră componentele normale ale ecuaţiei dinamice discretizate:

$$m\left(V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^i\right) = hN_{KN}^{i+1} + \frac{h}{2}\left\{\left(F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^i\right) - \left(\overbrace{\left[K_N\left(U_{KN}^{i+1} + U_{KN}^i\right) + W\left(U_{KT}^{i+1} + U_{KT}^i\right)\right]}^{G_N^i}\right)\right\} \tag{3.25}$$

Astfel, $\forall i = 0,\ldots, K-1$, $\left|V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^{i}\right| < \frac{h}{m}\left|N_{KN}^{i+1}\right| + \frac{h}{2m}\left\{\left|F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^{i}\right| + \left|G_{N}^{i}\right|\right\}$. Deoarece masa este în contact la momentul $(i+1)h$, reacţiunea N_{K}^{i+1} nu este nulă şi viteza normală V_{N}^{i+1} este nulă. La momentul ih masa materială poate fie să zboare şi atunci $V_{N}^{i} > 0$ fie rămâne în contact şi atunci $V_{N}^{i} = 0$, dar în toate situaţiile reacţiunea normală este:

$\left|hN_{KN}^{i+1}\right| \le \frac{h}{2}\left\{\left|F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^{i}\right| + \left|G_{N}^{i}\right|\right\}$ unde mărimea G_{N}^{i} a fost definită prin termenul corespondent al celui de-al doilea membru al relaţiei (3.25). Rezultă:

$$\forall i = 0,\ldots, K-1$$

$$\left|V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^{i}\right| \le \frac{h}{m}\left\{\left|F_{KN}^{i+1} + F_{KN}^{i}\right| + \left|G_{N}^{i}\right|\right\}$$

Astfel,

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left|V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^{i}\right| \le \frac{2}{m}\left\|F_K\right\|_{L^1([0,T];\mathfrak{R}^n)} + \frac{h}{m}\sum_{i=0}^{K-1}\left|G_{N}^{i}\right|$$

sau

$$\frac{h}{m}\sum_{i=0}^{K-1}\left|G_{N}^{i}\right| = \frac{h}{m}\sum_{i=0}^{K-1}\left\{\left|K_N\right|\left[2\left|U_{KN}(0)\right| + h\sum_{j=1}^{i+1}\left|V_{KN}^{j}\right| + h\sum_{j=1}^{i}\left|V_{KN}^{j}\right|\right] + \left\|W\right\|\left[2\left\|U_{KT}(0)\right\| + h\sum_{j=1}^{i+1}\left\|V_{KT}^{j}\right\| + \sum_{j=1}^{i}\left\|V_{KT}^{j}\right\|\right]\right\},$$

$$\le \frac{h}{m}\sum_{i=0}^{K-1}\left\{\left|K_N\right|\left[2\left|U_{KN}(0)\right| + h(i+1)M + hiM\right] + \left\|W\right\|\left[2\left\|U_{KT}(0)\right\| + h(i+1)M + hiM\right]\right\},$$

$$\le \frac{2h}{m}\sum_{i=0}^{K-1}\left\{\left(\left|K_N\right|\left|U_{KN}(0)\right| + \left\|W\right\|\left\|U_{KT}(0)\right\| + TM\left(\left|K_N\right| + \left\|W\right\|\right)\right)\right\},$$

$$\le \frac{2}{m}\left\{\left(\left|K_N\right|\left|U_{KN}(0)\right| + \left\|W\right\|\left\|U_{KT}(0)\right\|\right) + \left(\left|K_N\right| + \left\|W\right\|\right)MT\right\}T,$$

$$\le \underbrace{\frac{2}{m}\left\{\left(\left|K_N\right|\left|U_{0N}\right| + \left\|W\right\|\left\|U_{0T}\right\|\right) + \left(\left|K_N\right| + \left\|W\right\|\right)MT\right\}T.}_{C_N}$$

În final obţinem:

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left|V_{KN}^{i+1} - V_{KN}^{i}\right| \le \frac{2}{m}\left\|F_K\right\|_{L^1([0,T];\mathfrak{R}^n)} + C_N$$

Un raţionament similar permite stabilirea relaţiei:

$$\sum_{i=0}^{K-1}\left|V_{KT}^{i+1} - V_{KT}^{i}\right| \le \frac{2}{m}\left\|F_K\right\|_{L^1([0,T];\mathfrak{R}^n)} + C_T, \text{ cu}$$

$$C_T = \frac{2}{m}\left\{\left(\left\|W\right\|\left|U_{0N}\right| + \left\|K_T\right\|\left\|U_{0T}\right\|\right) + \left(\left\|K_T\right\| + \left\|W\right\|\right)MT\right\}T.$$

Aceasta demonstrează că variaţia vitezei de aproximare $\dot{U}_K^{+}$ este mărginită pe intervalul $[0,T]$, independent de K.

Concluzii:

- Am realizat o schemă de discretizare în viteze privind contactul cu frecare a unei particule materiale din $\Re^2$.
- Am arătat că variaţia vitezei de aproximare este mărginită pe un interval.

3.4 Rezultate privind unicitatea

Schatzaman[66] a obţinut un rezultat privind existenţa soluţiei pentru un sistem dinamic discret cu constrângeri unilaterale fără frecare.

Ea a extins rezultatele din lucrarea [66] la cazul în care forţa exterioară este o funcţie analitică de timp şi care acţionează asupra unui punct material.

În cele ce urmează dăm o tehnică de obţinere a unicităţii soluţiei în cazul când punctul material e în contact cu frecare Coulomb, în situaţia în care forţa exterioară este o funcţie analitică.

Pentru cazul în care punctul material se deplasează pe o semidreaptă şi se va ciocni de un perete rigid se arată existenţa şi unicitatea soluţiei prin metoda „NSCD”.

Exemplu de unicitate pentru un sistem cu un grad de libertate

Se consideră un sistem mecanic cu un grad de libertate format dintr-o masă constrânsă să se mişte în lungul unei semidreapte orizontale, masa fiind obligată să lovească prin şoc mecanic un perete vertical rigid.

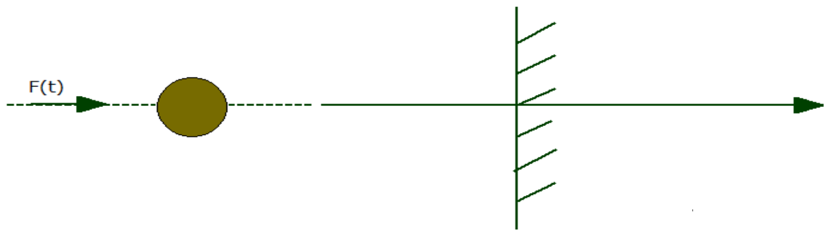


Fig. 3.2 – particula care se deplasează de-a lungul unei drepte

S-a notat cu $F(t)$ forţa exterioară aplicată punctului material, în contact cu obstacolul la momentul iniţial; problema devine:

P_1 : Să se determine $U \in S([0,T];\Re)$ şi $N \in S([0,T];\Re)$ astfel că:

$$U(0) = 0, \quad \dot{U}^{+}(0) = 0$$
$$\ddot{U} = F + N$$
$$U \le 0, \; N \le 0, \; UN = 0$$

$U(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}^{+}(t) = -R\dot{U}^{-}(t)$; unde $R \in [0,1]$ este coeficientul de restituire.

Se consideră cazul în care forţa externă F se presupune de clasă C^{∞} şi pozitivă. Se verifică că problema P_1 admite soluţia nulă:

$$U \equiv 0$$

$$N(t) = -\int_0^t \int_0^s F(\sigma) d\sigma ds$$

ce corespunde stării de echilibru a punctului material. Obiectivul urmărit este construirea unui caz particular de funcţie F pozitivă şi de clasă C^{∞} pentru care problema P_1 admite o altă soluţie decât soluţia banală. Această construcţie este prezentată în [66] şi fie $\varsigma : \Re \to \Re$ funcţia definită prin:

$$\varsigma = \begin{cases} 0 \quad pentru \ t \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ e^{\frac{1}{t(t-1)}} \left(\int_0^1 e^{\frac{1}{t(t-1)}} dt \right)^{-1} \quad pentru \ t \in (0,1) \end{cases} \tag{3.26}$$

Această funcţie verifică următoarele proprietăţi:

- $\varsigma \in C^{\infty}(\Re, \Re^{+})$
- $supp\varsigma = [0,1]$
- $\int_0^1 \varsigma(s) ds = 1, \quad \int_0^1 s\varsigma(s) ds = \frac{1}{2}$

Intervalul de timp $[0, T)$ este împărţit în subintervale $[a_{n+1}, a_n)$, unde $(a_n)_{n \in N}$ este un şir descrescător strict spre zero, care va fi precizat în cele ce urmează.

Se consideră atunci $F(0) = 0$ şi:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad dacă \quad t \in [a_{n+1}, a_{n+1} + d_n) \\ \frac{F_n}{2} \rho \left(\frac{t - a_{n+1} - d_n}{a_n - a_{n+1} - d_n} \right) \quad dacă \ t \in [a_{n+1} + d_n, a_n) \end{cases} \tag{3.27}$$

Funcţia $F(t)$ va avea următoarea diagramă:

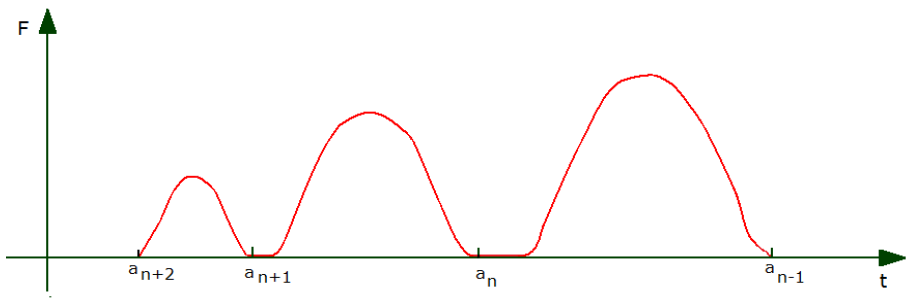


Fig. 3.3 – Forma variaţiei lui *F* pentru legea ciocnirii elastice

şi este de clasă C^{∞} pe intervalul $(0,T]$.

Pentru aceste funcţii de clasă C^{∞} la $t=0$ trebuie ştiut că amplitudinea descreşte suficient de repede în timp ce t tinde la zero, la acest rezultat se poate considera că:

$$F_n = \frac{1}{n!}$$

Prin consideraţiile:

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+5)^2}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}$$

$$d_n = \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+4)} = \frac{n+3}{n+5}(a_n - a_{n+1})$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

se alege:

$$V(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n+4)!} & \text{dacă } t \in [a_{n+1}, a_{n+1}+d_n) \\ -\dfrac{1}{(n+4)!} + \dfrac{F_n}{2} \displaystyle\int_{a_{n+1}+d_n}^{t} \left(\dfrac{s-a_{n+1}-d_n}{a_n - a_{n+1} - d_n}\right) ds & \text{dacă } t \in [a_{n+1}+d_n, a_n) \end{cases}$$

şi apoi

$U(t) = \int_0^t V(s)ds$ rezultă că funcţia $U(t)$ va avea următoarea formă:

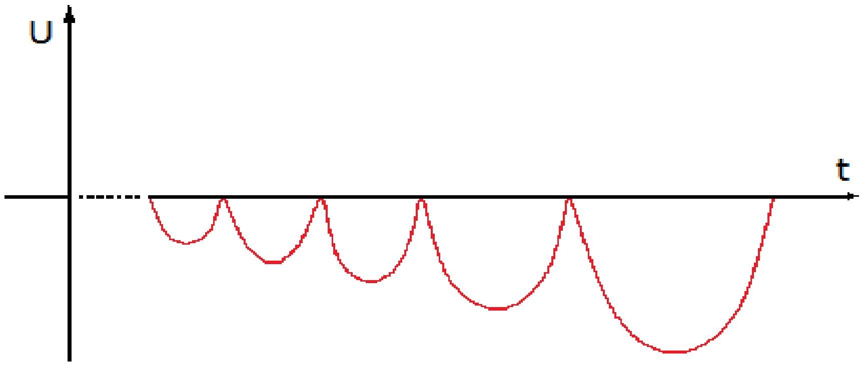


Fig. 3.4 – Forma unei soluţii pentru legea impactului elastic

Se verifică uşor că funcţia $V(t)$ este cu variaţie mărginită pe $[0,T]$ şi rezultă $U \in S([0,T];\mathfrak{R})$. Pe de altă parte funcţia $U(t)$ este negativă şi:

- $\{t \in [0,T[; U(t)=0\} = \{0\} \cup \{a_n; n \in N^*\}$

- $\forall n \in N,\ \dot{U}^{-}(a_n) = \dfrac{1}{(n+3)!} \qquad \dot{U}^{+}(a_n) = -\dfrac{1}{(n+3)!}$

Astfel, $\ddot{U} - F = -2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\delta_{an}}{(n+3)!} \stackrel{def}{=} N$ unde δ_a este funcţia Dirac în punctul a şi deci este o funcţie negativă.

Cazul ciocnirii plastice

Considerăm problema P_1 în cazul în care $R = 0$. Dacă funcţia F este întotdeauna pozitivă, atunci problema P_1 admite funcţia $U \equiv 0$ ca soluţie unică.

Rezultă că există un t' astfel încât $U(t') < 0$. Dacă alegem $t'' = inf\{t, \forall s \in (t, t'], U(s) < 0\}$ se obţine:

$U(t'') = \dot{U}^{+}(t'') = 0$ şi apoi la:

$$U(t') = \int_{t''}^{t'}\int_{t''}^{s} F(\sigma)d\sigma ds > 0$$

ceea ce este absurd.

Din această exprimare rezultă că şi în acest caz al ciocnirii plastice, problema neunicităţii rămâne adevărată şi aici; acelaşi tip de construcţie realizată pentru exemplul unicităţii în cazul impactului plastic, cum rezultă în [6].

Subdivizând intervalul $[0, T)$ în subintervale de forma $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ funcţia F este construită astfel: $F(0) = 0$ şi

$$F(t) = \begin{cases} -F_{1,n}\rho\left(\dfrac{t - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) & pentru\ \ t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}\right) \\ 0 \quad pentru\ \ t \in \left[\dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}, \dfrac{1}{n} - d_{2,n}\right) & \\ F_{2,n}\rho\left(\dfrac{t - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) & pentru\ \ t \in \left[\dfrac{1}{n} - d_{2,n}, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases} \tag{3.28}$$

unde $n \in N^{*}$, $(F_{1,n})_{n \in N^{*}}$, $(F_{2,n})_{n \in N^{*}}$, $(d_{2,n})_{n \in N^{*}}$ sunt şiruri pozitive care vor fi precizate ulterior.

Redăm diagrama funcţiei:

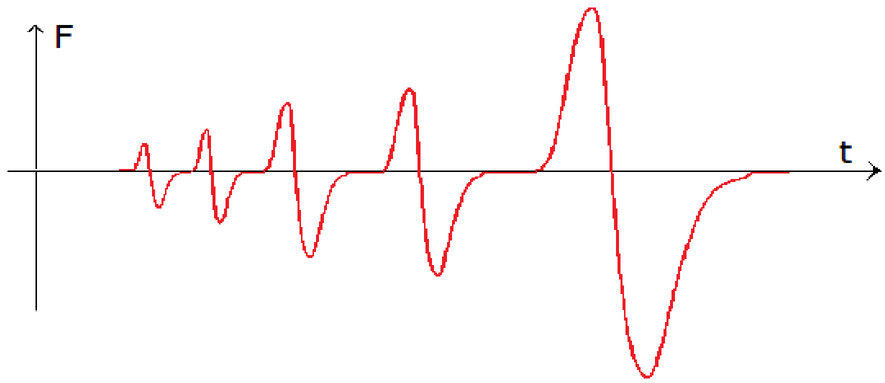


Fig. 3.5 – Forma variaţiei funcţiei *F* pentru ciocnirea plastică

Şirurile $(d_{1,n})_{n>0}$ şi $(d_{2,n})_{n>0}$ satisfac:

$$d_{1,n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \qquad d_{2,n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \tag{3.29}$$

Şirurile $(F_{1,n})_{n\in N^*}$, $(F_{2,n})_{n\in N^*}$, $(d_{1,n})_{n\in N^*}$, $(d_{2,n})_{n\in N^*}$ trebuie să fie construite astfel încât problema P_1 să admită două soluţii U_1 şi U_2. Se cere ca funcţiile U_1 şi U_2 să satisfacă următoarele:

- dacă n este par

$$\begin{cases} U_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \dot{U}_1^+\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_2\left(\frac{1}{n}\right) = -U_n \\ \dot{U}_2^+\left(\frac{1}{n}\right) = V_n \end{cases} \tag{3.30}$$

- dacă n este impar

$$\begin{cases} U_1\left(\frac{1}{n}\right) = -U_n \\ \dot{U}_1^+\left(\frac{1}{n}\right) = V_n \end{cases} \qquad \begin{cases} U_2\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \dot{U}_2^+\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

unde $(U_n)_{n\in N^*}$ şi $(V_n)_{n\in N^*}$ sunt şiruri strict pozitive care vor fi definite mai jos. Faptul că U_1 şi U_2 satisfac (3.30) şi (3.31) ne asigură că ele sunt distincte.

Se consideră intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ pentru toţi $n > 2$ şi se analizează diferitele situaţii. Presupunem că la momentul $\frac{1}{n+1}$, punctul material va fi la poziţia $U = -U_{n+1}$ cu viteza $\dot{U}^+ = V_{n+1}$ [62].

Sub acţiunea forţei F pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}+d_{1,n}\right]$ acest punct material se regăseşte la momentul $\frac{1}{n}+d_{1,n}$ în contact cu peretele rigid. În consecinţă, deplasarea creşte pe acest interval. Aceasta se deduce prin:

$$-U_{n+1}+V_{n+1}d_{1,n}-\frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^{2}=0 \tag{3.32}$$

obţinută prin integrarea ecuaţiei $\ddot{U}=F$ pe intervalul $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}+d_{1,n}\right)$.

Condiţia de contact unilateral ne obligă ca deplasarea să fie în sens negativ sau nulă ceea ce permite determinarea valorii $d_{1,n}$ ca rădăcină a ecuaţiei de gradul doi a relaţiei (3.32), deci:

$$d_{1,n}=\frac{V_{n+1}-\sqrt{V_{n+1}^{2}-2F_{1,n}U_{n+1}}}{F_{1,n}} \tag{3.33}$$

Pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}+d_{1,n}, \frac{1}{n}\right)$ deplasarea şi viteza sunt identic nule deoarece punctul material rămâne în contact în decursul şocului. Se consideră cazul în care punctul material, în contact la momentul $\frac{1}{n+1}$ este în repaus. Acest punct material este în poziţia $-U_n$ cu viteza V_n la momentul $\frac{1}{n}$. Integrând relaţia $\ddot{U}=F$ şi explicitând relaţia $U(t)-U(t')=\int_{t'}^{t}V(s)ds$ pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ se obţine:

$$\begin{cases} V_n=-F_{1,n}d_{1,n}+F_{2,n}d_{2,n} \\ -U_n=\frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^{2}-F_{1,n}d_{1,n}\left(\frac{1}{n(n+1)}-d_{1,n}\right)+\frac{1}{2}F_{2,n}d_{2,n}^{2} \end{cases}$$

Adică:

$$\begin{cases} V_n=-F_{1,n}d_{1,n}+F_{2,n}d_{2,n} \\ -U_n=\frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}^{2}-F_{1,n}d_{1,n}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}F_{1,n}d_{1,n}d_{2,n}+\frac{1}{2}V_n d_{2,n} \end{cases} \tag{3.34}$$

Dacă luăm $\forall n\in N^{*}$, $U_n=\frac{1}{n^{4}2^{n}}$, $V_n=\frac{1}{2^{n}}$, $F_{1,n}=\frac{n^{3}}{2^{n}}$ (3.35)

din ecuaţia (3.33) obţinem:

$$d_{1,n}=\frac{1}{2n^{3}}\left(1-\sqrt{1-\frac{4n^{3}}{(n+1)^{4}}}\right) \tag{3.36}$$

şi deci obţinem estimarea asimptotică:

$$d_{1,n}\approx\frac{1}{n^{4}} \text{ când } n\to\infty \tag{3.37}$$

Ecuaţiile din sistemul (3.34) permit determinarea lui $d_{2,n}$ şi $F_{2,n}$:

$$d_{2,n} = \frac{\frac{2n^2}{n+1} d_{1,n} - n^3 d_{1,n}^2 - \frac{2}{n^4}}{1 + n^3 d_{1,n}}$$

$$F_{2,n} = F_{1,n} \frac{d_{1,n}}{d_{2,n}} + \frac{V_n}{d_{2,n}}$$

care se comportă ca şi:

$$\left.\begin{aligned} d_{2,n} &\approx \frac{2}{n^3} \\ F_{2,n} &\approx \frac{n^3}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} \text{ când } n \to \infty \tag{3.38}$$

Din estimările (3.37) şi (3.38) există un $n_0, n \ge n_0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < d_{1,n} < \dfrac{1}{2n(n+1)} \\ 0 < d_{2,n} < \dfrac{1}{2n(n+1)} \end{cases}$. Se defineşte atunci $T = \frac{1}{n_0}$ şi pentru $n \ge n_0$ se va considera:

$$W_1(0) = 0$$
$$W_2(0) = 0$$

$$W_1(t) = \begin{cases} V_{n+1} - F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{t} \rho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds & \text{dacă } t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}\right) \\ 0 & \text{dacă } t \in \left[\dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} -F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{t} \rho\left(\frac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right) ds & \text{dacă } t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}\right) \\ -F_{1,n} d_{1,n} & \text{dacă } t \in \left[\dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}, \dfrac{1}{n} - d_{2,n}\right) \\ -F_{1,n} d_{1,n} + F_{2,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n} - d_{2,n}}^{t} \rho\left(\frac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right) ds & \text{dacă } t \in \left[\dfrac{1}{n} - d_{2,n}, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

În scopul satisfacerii condiţiilor (3.30) şi (3.31);

$$V_1(0) = 0$$
$$V_2(0) = 0$$

- dacă $t \in \left[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p}\right), (2p \geq n_0) \begin{cases} V_1(t) = W_1(t) \\ V_2(t) = W_2(t) \end{cases}$
- dacă $t \in \left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right), (2p-1 \geq n_0) \begin{cases} V_1(t) = W_2(t) \\ V_2(t) = W_1(t) \end{cases}$

şi în sfârşit $U_1(t) = \int_0^t V_1(s)ds$, $U_2(t) = \int_0^t V_2(s)ds$.

Două soluţii sunt atunci construite pentru problema P_1. Forma funcţiilor astfel construite este următoarea:

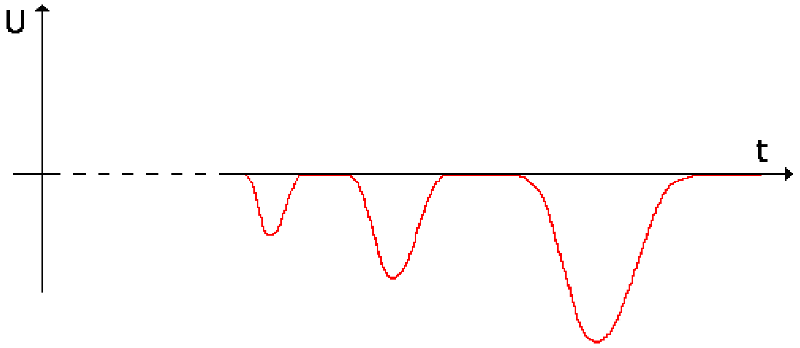


Fig. 3.6 – Forma unei soluţii

Se verifică că F astfel construită este de clasă C^∞ şi $U_1, U_2 \in S([0,T];\mathfrak{R})$. Rămâne de verificat că U_1 şi U_2 sunt două soluţii adevărate ale problemei P_1. De exemplu U_2. Forma graficului său pe intervalul de timp $\left[\frac{1}{2p+1}; \frac{1}{2p-1}\right)$ este:

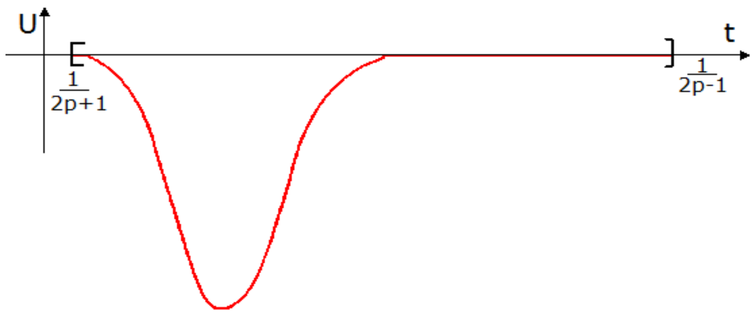


Fig. 3.7 – Forma soluţiei U_2 pe intervalul $\left[\frac{1}{2p+1}; \frac{1}{2p-1}\right)$

Un calcul simplu arată atunci:

$$\ddot{U} - F =$$

$$-\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^p}\sqrt{1-\frac{(2p-1)^3}{4p^4}}\delta_{\left(\frac{1}{2p}+d_{1,2p-1}\right)}(t)+F_{2,2p-1}\rho\left(\frac{t-\frac{1}{2p-1}+d_{2,2p-1}}{d_{2,2p-1}}\right)\chi_{\left]\frac{1}{2p}+d_{1,2p-1},\frac{1}{2p-1}\right[}(t)\right\} \overset{def}{=} N$$

este o mărime negativă, unde $\chi(.)$ este o funcţia caracteristică pe intervalul $(.)$. În general, nu se obţine unicitatea soluţiei problemei P_1 pentru o ciocnire plastică $R = 0$, chiar dacă $F \in C^{\infty}([0,T];\Re)$.

Adăugăm sistemului anterior, legătura cu un resort liniar elastic ca in exemplul de mai jos

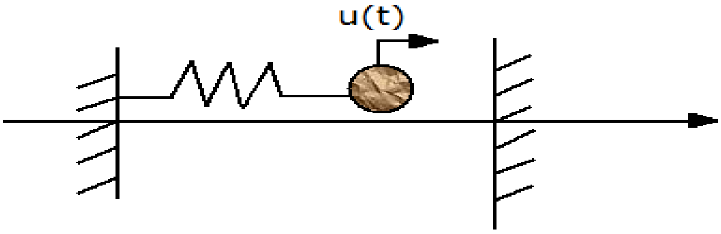


Fig. 3.8 – Sistem dinamic cu legături elastice si ciocnire plastică

Problema P_1 devine:

P_1' : să se determine $U \in S([0,T];\Re)$ şi $N \in M([0,T];\Re)$ astfel încât:

$$U(0) = 0 \quad \dot{U}^+(0) = 0$$

$$\ddot{U} - U = F + N$$

$$U \le 0, \quad N \le 0, \quad UN = 0$$

$$U(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}^+(t) = 0$$

unde se consideră ciocnirea plastică.

Adoptând un raţionament analog celui anterior se construiesc două soluţii ale problemei P_1' pentru forţa F definită de relaţiile (3.28) uniforme în C^{∞}.

Divizăm intervalul $[0,T)$ în subintervale $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ pe care se vor construi două soluţii care satisfac condiţiile (3.30) şi (3.31). Şirurile $(d_{1,n})_{n>0}$ şi $(d_{2,n})_{n>0}$ verifică condiţiile (3.29). Se alege intervalul $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ pentru $n \ge 1$ şi se analizează diferitele situaţii.

Presupunând că la momentul $\frac{1}{n+1}$ masa se găseşte în poziţia $U = -U_{n+1}$ cu viteza $V = V_{n+1}$. Sub acţiunea forţei F pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}+d_{1,n}\right]$ masa se găseşte la momentul $\frac{1}{n}+d_{1,n}$ în contact cu peretele rigid. În consecinţă, deplasarea creşte pe acest interval. Acest lucru se evidenţiază prin relaţia:

$$0=-U_{n+1}\cos(d_{1,n})+V_{n+1}\sin(d_{1,n})-F_{1,n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}+d_{n+1}}\sin\left(\frac{1}{n+1}+d_{1,n}-s\right)\rho\left(\frac{s-\frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds$$

obţinută prin integrarea ecuaţiei diferenţiale $\ddot{U}+U=F$ pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}+d_{1,n}\right]$. După metoda schimbării variabilei aceasta devine:

$$0=-U_{n+1}\cos(d_{1,n})+V_{n+1}\sin(d_{1,n})-F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\sin(d_{1,n}(1-s))\rho(s)ds \tag{3.39}$$

unde şirurile $(U_n)_{n>0}$, $(V_n)_{n>0}$ şi $(F_{1,n})_{n>0}$ sunt definite de relaţiile (3.35).

Condiţia contactului unilateral permite determinarea parametrului $d_{1,n}$ ca o mică valoare pozitivă care arată că relaţia (3.39) este satisfăcută.

Fie atunci $g(x)$ o funcţie continuă definită prin:

$$g(x)=-U_{n+1}\cos(x)+V_{n+1}\sin(x)-F_{1,n}x\int_0^1\sin(x(1-s))\rho(s)ds$$

Pe de o parte $g(0)=-U_{n+1}<0$, iar pe de altă parte:

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x)\geq\frac{2x}{\pi} \tag{3.40}$$

Atunci:

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ g(x)>-U_{n+1}+\left(\frac{2V_{n+1}}{\pi}-F_{1,n}\right)x \tag{3.41}$$

Membrul din dreapta se anulează pentru $x=\frac{U_{n+1}}{\frac{2}{\pi}V_{n+1}-F_{1,n}}\approx\frac{\pi}{2n^4}$. Pentru $n\geq 2$, $\frac{\pi}{2n^4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. În consecinţă există valori $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ care arată că membrul drept al inegalităţii (3.41) este pozitiv. Atunci se deduce că există cel puţin o valoare x pentru care $g(x)=0$ şi se notează $d_{1,n}$ cea mai mică valoare a sa; cum $d_{1,n}\leq\frac{\pi}{2n^4}$, $d_{1,n}$ tinde la zero când n tinde la infinit. Ecuaţia (3.39) ne permite să obţinem estimarea următoare:

$$d_{1,n}\approx\frac{1}{n^4},\ n\to+\infty \tag{3.42}$$

Momentul $\frac{1}{n+1}+d_{1,n}$ este momentul ciocnirii. Pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}+d_{1,n};\frac{1}{n}\right)$ masa rămâne în contact cu peretele. Atunci $U=V=0$.

Se consideră cazul când masa este în contact la momentul $\frac{1}{n+1}$ şi deci ea rămâne în repaus. Acesta este poziţia $-U_n$ cu viteza V_n la momentul $\frac{1}{n}$. Integrarea ecuaţiei diferenţiale $\ddot{U}+U=F$ pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ permite obţinerea următoarelor relaţii:

$$V_n=-F_{1,n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}+d_{1,n}}\cos\left(\frac{1}{n+1}+d_{1,n}-s\right)\rho\left(\frac{s-\frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds+F_{2,n}\int_{\frac{1}{n}-d_{2,n}}^{\frac{1}{n}}\cos\left(\frac{1}{n}-s\right)\rho\left(\frac{s-\frac{1}{n}+d_{2,n}}{d_{2,n}}\right)ds \tag{3.43}$$

$$-U_n=-F_{1,n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}+d_{1,n}}\sin\left(\frac{1}{n+1}+d_{1,n}-s\right)\rho\left(\frac{s-\frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds+F_{2,n}\int_{\frac{1}{n}-d_{2,n}}^{\frac{1}{n}}\sin\left(\frac{1}{n}-s\right)\rho\left(\frac{s-\frac{1}{n}+d_{2,n}}{d_{2,n}}\right)ds \tag{3.44}$$

Relaţia (3.43) şi (3.44) permit determinarea coeficienţilor $d_{2,n}$ şi $F_{2,n}$:

$$\begin{aligned}0=&\left[U_n-F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}-d_{1,n}s\right)\rho(s)ds\right]\int_0^1\cos(d_{2,n}(1-s))\rho(s)ds+\\&+\left[V_n+F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\cos\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)-d_{1,n}s\right];\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$F_{2,n}=\frac{1}{d_{2,n}}\frac{V_n+F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\cos\left(\frac{1}{n(n+1)}-d_{1,n}s\right)\rho(s)ds}{\cos\left(\frac{1}{n(n+1)-d_{1,n}s}\right)\rho(s)ds} \tag{3.46}$$

Coeficientul $d_{2,n}$ este soluţie a ecuaţiei (3.45). Prin urmare, se defineşte ca şi mai sus funcţia continuă $h(x)$ prin:

$$\begin{aligned}h(x)=&\left[U_n-F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\sin\left(\frac{1}{n(n+1)-d_{1,n}s}\right)\rho(s)ds\right]\int_0^1\cos(x(1-s))\rho(s)ds+\\&+\left[V_n+F_{1,n}d_{1,n}\int_0^1\cos\left(\frac{1}{n(n+1)-d_{1,n}s}\right)\rho(s)ds\right]\int_0^1\sin(x(1-s))\rho(s)ds\end{aligned} \tag{3.47}$$

Pe de-o parte:

$$h(0) \approx \frac{-F_{1,n} d_{1,n}}{n^2} \approx \frac{-1}{2n^3} < 0$$

Pe de altă parte, din relaţia (3.40)

$$\left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \rho(s) ds \right] \int_0^1 sin(x(1-s))\rho(s) ds$$

$$\geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \rho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \rho(s) ds,$$

$$\geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 cos\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \rho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi}$$

şi

$$\left[U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 sin\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \rho(s) ds \right] \int_0^1 cos(x(1-s))\rho(s) ds$$

$$\geq U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 sin\left(\frac{1}{n(n+1)} - d_{1,n} s \right) \rho(s) ds$$

Va rezulta:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; h(x) \geq \left[V_n + F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 cos\left(\frac{1}{n(n+1) - d_{1,n} s} \right) \rho(s) ds \right] \frac{2x}{\pi}$$

$$+ \left[U_n - F_{1,n} d_{1,n} \int_0^1 sin\left(\frac{1}{n(n+1) - d_{1,n} s} \right) \rho(s) ds \right]$$

unde membrul drept devine pozitiv pentru valori certe ale lui x pentru care rezultă o funcţie afină care se anulează pentru o valoare x apropiată de $\frac{\pi}{2n^3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru $n \geq 2$.

Astfel, s-a demonstrat existenţa cel puţin a unei valori x pentru care $h(x) = 0$ şi în consecinţă a celei mai mici valori $d_{2,n}$, soluţie a ecuaţiei (3.45). Deci $d_{2,n} \leq \frac{\pi}{n^3}$ tinde spre zero în timp ce n tinde spre infinit. Rezultă:

$$d_{2,n} \approx \frac{2}{n^3}, n \to \infty \tag{3.48}$$

Relaţia (3.46) permite estimarea lui $F_{2,n}$ ca fiind:

$$F_{2,n} \approx \frac{n^3}{2^{n+1}}, n \to \infty.$$

Datorită estimărilor (3.42) şi (3.48) rezultă că există

$$n_0, n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < d_{1,n} < \dfrac{1}{2n(n+1)} \\ 0 < d_{2,n} < \dfrac{1}{2n(n+1)} \end{cases} \tag{3.49}$$

Se defineşte atunci $T = \dfrac{1}{n_0}$ şi pentru toate $n \geq n_0$ se scrie:

$$W_1(0) = 0$$
$$W_2(0) = 0$$

$$W_1(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \dfrac{1}{n+1}\right)U_{n+1} + \cos\left(t - \dfrac{1}{n+1}\right)V_{n+1} \\ \qquad - F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{t} \cos(t-s)\rho\left(\dfrac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds \quad \text{dacă} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}\right) \\ 0 \qquad \text{dacă} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} -F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{t} \cos(t-s)\rho\left(\dfrac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds \quad \text{dacă} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}\right) \\ -F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}+d_{1,n}} \cos(t-s)\rho\left(\dfrac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds \quad \text{dacă} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1} + d_{1,n}, \dfrac{1}{n} - d_{2,n}\right) \\ -F_{1,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}+d_{1,n}} \cos(t-s)\rho\left(\dfrac{s - \frac{1}{n+1}}{d_{1,n}}\right)ds \\ + F_{2,n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}-d_{2,n}}^{t} \cos(t-s)\rho\left(\dfrac{s - \frac{1}{n} + d_{2,n}}{d_{2,n}}\right)ds \quad \text{dacă} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n} - d_{2,n}, \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

În final, pentru satisfacerea condiţiilor (3.30) şi (3.31) se alege:

$$V_1(0) = 0$$
$$V_2(0) = 0$$

- dacă $t \in \left[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p}\right), (2p \geq n_0) \begin{cases} V_1(t) = W_1(t) \\ V_2(t) = W_2(t) \end{cases}$
- dacă $t \in \left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right), (2p-1 \geq n_0) \begin{cases} V_1(t) = W_2(t) \\ V_2(t) = W_1(t) \end{cases}$

şi în sfârşit $U_1(t) = \int_0^t V_1(s)ds$, $U_2(t) = \int_0^t V_2(s)ds$.

Procedând în aceeaşi manieră ca şi anterior, se arată că U_1 şi U_2 sunt cele două soluţii ale problemei P_1'.

Aplicarea metodei „NSCD" la un model de tip Klarbring

Se consideră sistemul Klarbring (problema P_u) în cazul particular $m = 1$ şi $K = I$ (la cuplajul între gradele de mobilitate normale şi tangenţiale) şi $R = 0$ cazul ciocnirii plastice.[63]

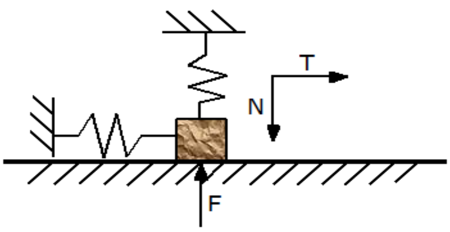


Fig.3.9

Dacă ne limităm în cazul condiţiilor iniţiale definite de către $U_0 = V_0 = 0$ şi forţa exterioară totdeauna coliniară cu normala la obstacol; $F_T \equiv 0$, se constată că gradul de mobilitate normal U_N este guvernat de către problema de evoluţie P_1' şi în cazul particular al sistemului Klarbring considerat aici toate soluţiile problemei P_1' completate de $U_T \equiv 0$ furnizează o soluţie a problemei P_u.

Se consideră problema P_u dacă forţa exterioară $F(t)$ o presupunem analitică pe porţiuni. Contactul dinamic unilateral şi cu frecare Coulomb se va studia pentru un sistem cu un număr finit de grade de libertate.

Studiul se va concentra asupra existenţei şi unicităţii soluţiilor asociate ecuaţiilor de evoluţie a problemei. Pentru aceasta se consideră un sistem simplu de tip Klarbring [40] aflat în una dintre situaţiile dinamice generale.

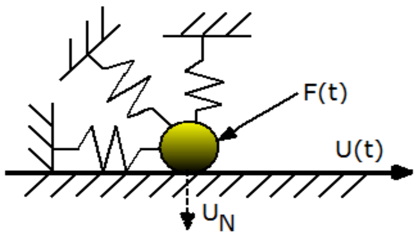


Fig.III.10 – Sistemul Klarbring

Sistemul de tip Klarbring se referă la următoarea situaţie. Fie $n \geq 2$ un întreg. Un punct material cu masa unitate din $\Re^n$ se mişcă într-un câmp de energie cu potenţial pătratic. Acesta este descris printr-o matrice de rigiditate simetrică, pozitivă definită K şi de o forţă externă $F(t)$ dependentă de timp. Punctul material este constrâns să rămână într-un semispaţiu de contact, iar în decursul ciocnirii legea lui Coulomb rămâne adevărată.

Pentru un vector din $x \in \Re^n$ se va nota prin x_N componenta normală şi prin x_T vectorul lui $\Re^{n-1}$ format de către ultimele $n-1$ componente a lui x - componenta tangenţială.

Matricea de rigiditate $[K]$ simetrică şi pozitivă este:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_N & {}^tW \\ W & K_T \end{bmatrix}$$

unde $[K_N] \in \Re$, $W \in \Re^{n-1}$ şi $[K_T]$ este reală simetrică pozitiv definită cu rangul $n-1$.

Următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

i) matricea $[K]$ este pozitiv definită

ii) matricea $[K_T]$ este pozitiv definită şi $K_N > {}^tWK_T^{-1}W$.

Termenul W cuplează gradele de libertate normale şi tangenţiale şi reprezintă o sursă de dificultate în analiza sistemului[62].

Funcţiile U din S sunt continue şi admit derivate la dreapta şi la stânga în sens clasic, $\dot{U}^-, \dot{U}^+$, în fiecare punct, ambele fiind funcţii de variaţie mărginită.

Pentru problema evoluţiilor mişcării sistemului, o problemă unilaterală, obţinem problema de evoluţie P_u:

Să se determine $U \in S\left([0,T];\Re^n\right)$ şi $N \in M\left([0,T];\Re^n\right)$ astfel încât:

$m\ddot{U} + KU = F + N$ - ecuaţia mişcării

$U(0) = U_0 ; \dot{U}_T^+ = V_0$ - condiţiile iniţiale

$U_N \leq 0; N_N \leq 0, U_N N_N = 0$ - contactul unilateral

$\int_{[0,T]} \left[N_T \cdot \left(V - \dot{U}_T^+ \right) - \mu N_N \left(|V| - \left| \dot{U}_T^+ \right| \right) \right] \geq 0, \quad \forall V \in C^0\left([0,T];\Re^{n-1}\right)$ - frecarea Coulomb

$U_N(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+(t) = -R\dot{U}_N^-(t)$ pe $(0,T]$- legea ciocnirii

unde F reprezintă funcţia integrabilă dată pe $[0,T]$ în $\Re^n$ denumită exterioară, μ este coeficientul de frecare, $R \in [0,1]$ o constantă reală – coeficientul de restituire şi (U_0, V_0) sunt condiţiile iniţiale presupuse a fi compatibile cu constrângerea unilaterală:

$U_{0N} \leq 0$ şi $U_{0N} = 0 \Rightarrow V_{0N} \leq 0$

Scopul studiului din acest capitol este al existenţei şi unicităţii soluţiei problemei P_u.

Problema unilaterală P_u se transformă într-o problemă bilaterală atunci când constrângerile unilaterale devin bilaterale. Astfel problema P_u devine problema P_b care este mai generală şi din care se obţine prin particularizări ale problemei P_u.

Problema bilaterală

Să se determine $U \in S\left(\left[0,T\right];\Re^n\right)$ şi $N \in M\left(\left[0,T\right];\Re^n\right)$ astfel încât:

$\ddot{U} + KU = F + N$ în $\left[0,T\right]$ - ecuaţia mişcării

$U(0) = U_0 ; \dot{U}_T^+ = V_0$ - condiţiile iniţiale

$U_N \equiv 0$ - contactul bilateral

$\int\limits_{[0,T]} \left[N_T \cdot \left(V - \dot{U}_T^+\right) + \mu\left|N_N\right|\left(\left|V\right| - \left|\dot{U}_T^+\right|\right)\right] \geq 0$, $\forall V \in C^0\left(\left[0,T\right];\Re^{n-1}\right)$ - frecarea Coulomb

unde F este o funcţie integrabilă dată $F \in L^1(\left[0,T\right];\Re)$ şi (U_0, V_0) condiţiile iniţiale presupuse a fi compatibile cu constrângerea bilaterală:

$U_{0N} = 0$ şi $V_{0N} = 0$

Prima componentă a ecuaţiei mişcării:

$N_N = WU_T - F_N$

arată că mărimea N_N este absolut continuă, pentru care este îndeplinită următoarea inegalitate:

$\left|N_T\right| \leq \mu\left|N_N\right|$

măsura N_T fiind de asemenea absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue.

Problema bilaterală cu forţă analitică

Scopul acestei secţiuni este de a arăta că în situaţia când forţa externă F nu este integrabilă ci este analitică, atunci soluţia problemei bilaterale P_b este analitică în vecinătatea la dreapta a lui $t = 0$.

Propoziţie 3.1

Fie n un întreg pozitiv, O o vecinătate a lui $(0,0)$ în $\Re^n \times \Re$, $G : O \rightarrow \Re^n$ o funcţie analitică şi A matricea pătratică reală de ordin n fără nici o valoare proprie în $N \setminus \{0\}$. Atunci există $\eta > 0$ şi o funcţie analitică $X : [0,\eta) \rightarrow \Re^n$ care este o soluţie a problemei Cauchy:

$X(0) = 0$

$\dot{X}(t) = \frac{1}{t} A \cdot X(t) + G(X(t),t)$, $\forall t \in (0,\eta)$

În plus, orice soluţie a problemei Cauchy este o restricţie sau o extensie analitică a lui $X(t)$.

Demonstraţie – pentru claritate demonstraţia este prezentată doar pentru cazul particular $n = 1$. Pentru $\left|X\right| < r$ şi $\left|t\right| < r$ se poate scrie dezvoltarea asimptotică:

$$G(X,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} g_{ij} X^i t^j$$

Atunci pentru $|X| < r$ şi $|t| < r$ se consideră restricţia:

$$\tilde{G}(X,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} |g_{ij}| X^i t^j$$

şi considerând problema Cauchy:

$$\tilde{X}(0) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) = \tilde{G}\left(\tilde{X}(t), t\right); \forall t$$

admite soluţie unică locală $\tilde{X}$ care în plus este şi analitică (teorema 1, pg. 214[10]). Această soluţie poate fi dezvoltată într-o serie de puteri [31]

$\tilde{X}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{x}_i t^i$ care converge într-o vecinătate a lui $t = 0$.

Coeficienţii $\tilde{x}_i$ sunt calculaţi inductiv prin substituirea dezvoltării seriei de puteri în ecuaţia diferenţială. Această procedură permite să afirmăm că:

$$(k+1)\tilde{x}_{k+1} = P_{k+1}\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k; |g_{ij}|\right) \tag{3.50}$$

unde P_{k+1} este un polinom cu coeficienţii întregi şi argumentele $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ şi $|g_{ij}|$ este un număr finit.

Prin inducţie din ecuaţia (3.50) se arată că toate $\tilde{x}_i$ sunt unic determinate şi în plus satisfac relaţia:

$$\forall k \in N, \tilde{x}_{k+1} \geq 0$$

De menţionat că toate polinoamele P_{k+1} au proprietatea:

$$\forall a \geq 1, \forall \tilde{x}_i \in \Re,$$

$$\left|P_{k+1}\left(a\tilde{x}_1, a^2\tilde{x}_2, \dots, a^k\tilde{x}_k; |g_{ij}|\right)\right| \leq a^k P_{k+1}\left(|\tilde{x}_1|, |\tilde{x}_2|, \dots, |\tilde{x}_k|; |g_{ij}|\right) \tag{3.51}$$

Se revine la problema Cauchy:

$$X(0) = 0$$
$$\dot{X}(t) = \frac{1}{t}AX(t) + G(X(t), t)$$

şi se va căuta soluţia ca o formă serie de puteri:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i t^i$$

Substituind această expresie în ecuaţia diferenţială, se obţine pentru toţi $k \in N$:

$$(k+1-A)x_{k+1} = P_{k+1}\left(x_1, x_2, \dots, x_k; g_{ij}\right) \tag{3.52}$$

Dacă se ia $a = \sup_{k \in N} \left\{ \frac{k+1}{k+1-A} \right\}$ $(a \geq 1)$, care este finită; în ipoteza A nu este un întreg pozitiv. În virtutea inducţiei obţinută din ecuaţia (3.52) avem pentru orice $k \in N$

$$|x_{k+1}| \leq \frac{a}{k+1} P_{k+1}\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|; |g_{ij}|\right)$$

Din inducţia bazată pe proprietatea (3.51) obţinem:

$$\forall k \in N,\ |x_{k+1}| \leq a^{k+1} \tilde{x}_{k+1}$$

care demonstrează că raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{i \geq 1} x_i t^i$ este pozitivă şi astfel rezultă concluzia dorită. În cazul unde n arbitrar, argumentaţia este asemănătoare.

Propoziţia 3.2

Fie $F_N : [0,T] \to \Re$ şi $F_T : [0,T] \to \Re^{n-1}$, două funcţii analitice. Atunci există $\eta > 0$ astfel încât restricţia pentru $[0,\eta)$ a lui $U_T \in S^{2,1}$ este analitică.

Demonstraţie

Din presupunerile faptului că funcţiile $F_N(t)$ şi $F_T(t)$ sunt analitice, există $\eta > 0$ astfel încât trebuie să aibă loc unul din cazurile următoare:

Cazul 1: $V_{0T} \neq 0$

Cazul 2: $V_{0T} = 0$ şi $\forall t \in (0,\eta)$ $|F_T(t) - K_T U_{0T}| \leq \mu |F_N(t) - WU_{0T}|$

Cazul 3: $V_{0T} = 0$ şi $\forall t \in (0,\eta)$ $|F_T(t) - K_T U_{0T}| > \mu |F_N(t) - WU_{0T}|$

Trebuie demonstrat că condiţia este valabilă pentru toate cazurile de mai sus.

Cazul 1 $V_{0T} \neq 0$

Fie o vecinătate deschisă a lui V_{0T} în $\Re^{n-1}$ care nu conţine pe zero. Atunci funcţia:

$$\begin{cases} O \to \Re^{n-1} \\ V \mapsto \dfrac{V}{|V|} \end{cases}$$ este analitică.

Teorema Cauchy-Lipschits arată că soluţia $U_T \in C^2\left([0,a[; \Re^{n-1}\right)$ este soluţie a problemei Cauchy:

- $U_T(0) = U_{0T};\quad \dot{U}_T(0) = V_{0T}$
- $\ddot{U}_T(t) + K_T U_T(t) + \mu |F_N(t) - WU_T(t)| \dfrac{\dot{U}_T(t)}{|\dot{U}_T(t)|} = F_T(t)$
- $\dot{U}_T(t) \in O$ (3.53)

Căutăm o soluţie a lui (3.53) ca o formă serie de puteri:

$U_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ şi substituind-o în (3.53) este necesar ca:

$\lambda_0 = U_{0T};\ \lambda_1 = V_{0T}$ şi atunci:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left\{F_T(0) - K_T U_{0T} - |F_N(0) - WU_{0T}|\frac{V_{0T}}{|V_{0T}|}\right\}$$

Înlocuind termenul $|F_N(t) - WU_T(t)|$ în (3.53) prin $\pm[|F_N(t) - WU_T(t)|]$ în acord cu semnul primului termen al seriei de puteri dezvoltată a lui $[|F_N(t) - WU_T(t)|]$, se poate arăta prin inducţie că şirul $(\lambda_n)_{n\in N}$ este unic determinat.

Sunt posibile două cazuri:

Cazul 1.1 oricare ar fi $n \in N$, $\frac{F_N^{(n)}(0)}{n!} = W\lambda_n$ în care soluţia problemei Cauchy este:

- $U_T(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T(0) = V_{0T}$
- $\ddot{U}_T(t) + K_T U_T(t) = F_T(t)$
- $\dot{U}_T(t) \in O$ care este analitică conform teoremei 1 pag. 214[10].

Deci λ_n sunt coeficienţii seriei de puteri de dezvoltare la zero în vecinătatea dreaptă a lui zero care rezolvă problema.

Cazul 1.2 oricare ar fi $n \in \{0,1,\dots, n_0 - 1\}$; $\frac{F_N^{(n)}}{n!} = W\lambda_n$ şi $\frac{F_N^{(n_0)}}{n_0!} \neq W\lambda_{n0}$ caz în care soluţia analitică a problemei Cauchy este:

- $U_T(0) = U_{0T}$; $\dot{U}_T(0) = V_{0T}$
- $\ddot{U}_T(t) + K_T U_T(t) + \mu sign\left[\frac{F_N^{(n_0)}(0)}{n_0!} - W\lambda_{n_0}\right][F_N(t) - WU_T(t)]\frac{\dot{U}_T(t)}{|\dot{U}_T(t)|} = F_T(t)$
- $\dot{U}_T(t) \in O$

este o soluţie a problemei (3.53), în vecinătatea dreaptă la $t = 0$ şi prin urmare rezolvă problema Cauchy.

Cazul 2 $V_{0T} = 0$ şi $\forall t \in (0,\eta)$ $|F_T(t) - K_T U_{0T}| \leq \mu|F_N(t) - WU_{0T}|$

În acest caz este verificat direct faptul că funcţia constantă $U_T = U_{0T}$ pe intervalul $[0,\eta)$ care este analitică determină o soluţie pe intervalul $[0,\eta)$ a problemei Cauchy.

Cazul 3 $V_{0T} = 0$ şi oricare ar fi $t \in (0,\eta)$ $|F_T(t) - K_T U_{0T}| > \mu|F_N(t) - WU_{0T}|$

Prin asumarea analicităţii funcţiilor $F_N(t)$ şi $F_T(t)$, împreună cu ipotezele cazului 3, se ştie că există doi întregi n_0 şi $n_1 \geq n_0$ astfel încât:

$$F_T(t) - K_T U_{0T} \approx at^{n_0}; a \in \Re^{n-1} \setminus \{0\}$$

$$F_N(t) - WU_{0T} \approx \beta t^{n_1}; \beta \in \Re \setminus \{0\}$$

când $t \to 0$, în cazul în care $F_N(t) \equiv WU_{0T}$, doar considerând în şir $n_1 = +\infty$.

Se va analiza soluţia formală ca o serie de puteri a problemei (3.53). Trebuie verificat dacă primul termen diferit de zero al seriei de puteri asociat cu $U_T - U_{0T}$ poate fi scris sub forma γt^{n_0+2} unde γ trebuie să satisfacă ecuaţia:

$$(n_0+2)(n_0+1)\gamma+\mu\delta_{n_0}^{n_1}|\beta|\frac{\gamma}{|\gamma|}=a \tag{3.54}$$

$\delta_{n_0}^{n_1}$ reprezintă indicele lui Kronecher, care este egal cu unu dacă $n_0=n_1$ şi zero în celelalte cazuri. Soluţia ecuaţiei (3.54) este:

$$\gamma=\frac{|a|-\mu\delta_{n_0}^{n_1}|\beta|}{(n_0+2)(n_0+1)}\cdot\frac{a}{|a|}$$

Pentru $t>0$ introducem funcţiile:

$$\tilde{U}_T=\frac{U_T-U_{0T}}{t^{n_0+1}}$$

$$\tilde{V}_T=\frac{\dot{U}_T}{(n_0+2)t^{n_0+1}}-\gamma$$

Pentru $\tilde{U}_T$ şi $\tilde{V}_T$ avem următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}_T=-\frac{n_0+1}{t}\tilde{U}_T+(n_0+2)\left(\tilde{V}_T+\gamma\right)$$

Acum se va scrie ecuaţia diferenţială a problemei (3.53) în termenii acestor noi funcţii. Se obţine:

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}_T=-\frac{n_0+1}{t}\left(\tilde{V}_T+\gamma\right)-\frac{1}{n_0+2}K_T\tilde{U}_T+\frac{F_T-K_TU_{0T}}{(n_0+2)t^{n_0+1}}-\frac{\mu}{n_0+2}\left|\frac{F_N-WU_{0T}}{t^{n_0+1}}-W\tilde{U}_T\right|\frac{\gamma+\tilde{V}_T}{\left|\gamma+\tilde{V}_T\right|}$$

Folosind relaţia (3.54) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}_T=-\frac{n_0+1}{t}\tilde{V}_T-\frac{1}{n_0+2}K_T\tilde{U}_T+\frac{F_T-K_TU_{0T}-at^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}}+\frac{\mu\delta_{n_0}^{n_1}|\beta|}{(n_0+2)t}\cdot\frac{\gamma}{|\gamma|}$$
$$-\frac{\mu}{n_0+2}\left|\frac{F_N-WU_{0T}}{t^{n_0+1}}-W\tilde{U}_T\right|\frac{\gamma+\tilde{V}_T}{\left|\gamma+\tilde{V}_T\right|}$$

Acum, este evident că problema Cauchy:

- $\tilde{U}_T(0)=0;\ \tilde{V}_T(0)=0$
- $\frac{d}{dt}\tilde{U}_T=-\frac{n_0+1}{t}\tilde{U}_T+(n_0+2)\left(\tilde{V}_T+\gamma\right)$
- $$\frac{d}{dt}\tilde{V}_T=-\frac{n_0+1}{t}\tilde{V}_T-\frac{1}{n_0+2}K_T\tilde{U}_T+\frac{F_T-K_TU_{0T}-at^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}}+\frac{\mu\delta_{n_0}^{n_1}|\beta|}{(n_0+2)t}\cdot\frac{\gamma}{|\gamma|}$$
  $$-\frac{\mu}{n_0+2}\left|\frac{F_N-WU_{0T}}{t^{n_0+1}}-W\tilde{U}_T\right|\frac{\gamma+\tilde{V}_T}{\left|\gamma+\tilde{V}_T\right|}$$

are o soluţie unică în serie de puteri:

$$F_N-WU_{0T}-t^{n_0+1}W\tilde{U}_T$$

Este uşor de verificat că în cazul particular pentru care $n_1 = n_0$ se obţine $sign = sign(\beta)$, astfel că funcţia $\tilde{G}$ poate fi definită prin expresia de mai jos:

$$\tilde{G}\left(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T, t\right) = \frac{F_T - K_T U_{0T} - at^{n_0}}{(n_0+2)t^{n_0+1}} + \frac{\mu\delta_{n_0}^{n_1}|\beta|}{(n_0+2)t} \cdot \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\mu sign}{n_0+2}\left|\frac{F_N - WU_{0T}}{t^{n_0+1}} - W\tilde{U}_T\right| \frac{\gamma + \tilde{V}_T}{\left|\gamma + \tilde{V}_T\right|}$$

este analitică într-o vecinătate a lui $(0,0,0)$. În aceste condiţii enunţul anterior al propoziţiei 3.1 devine o soluţie analitică locală $\left(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T\right)$ a problemei:

- $\tilde{U}_T(0) = 0;\ \tilde{V}_T(0) = 0$
- $\frac{d}{dt}\tilde{U}_T = -\frac{n_0+1}{t}\tilde{U}_T + (n_0+2)\left(\tilde{V}_T + \gamma\right)$
- $\frac{d}{dt}\tilde{V}_T = -\frac{n_0+1}{t}\tilde{V}_T - \frac{1}{n_0+2}K_T\tilde{U}_T + \tilde{G}\left(\tilde{U}_T, \tilde{V}_T, t\right).$

Contactul cu frecare la sisteme cu două grade de libertate

Formularea problemei

Considerăm un punct material care se mişcă în semispaţiul $S_2 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \Re^2 : x_2 \le 0\right\}$. Fie t timpul, $t \in I$:

$$I = [0, T); T > 0 \qquad (3.55)$$

şi fie $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ forţa aplicată la momentul $t \in I$ şi presupunem că:

$$f \in C^1\left(\bar{I}, \Re^2\right) \text{ cu } f(t) \ne 0 \text{ pentru toţi } t \in I \qquad (3.56)$$

Pentru orice $t \in I$, vectorul deplasare al punctului material este notat cu $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, iar reacţiunile exercitate asupra punctului material de către frontierele semispaţiului se notează cu $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$. Punctul material este constrâns printr-un sistem de resoarte liniare elastice astfel că:

K este matricea 2×2 de rigiditate pozitiv definită şi simetrică (3.57)

Pentru u şi N suficient de netede, astfel încât evoluţia mişcării punctului material este guvernată de ecuaţiile:

$$Ku(t) = f(t) + N(t) \qquad (3.58)$$

împreună cu condiţiile contactului unilateral clasic:

$$u_2(t) \le 0,\ \ N_2(t) \le 0,\ \ u_2(t)N_2(t) = 0 \qquad (3.59)$$

şi legea frecării lui Coulomb:

$$N_1(t) \in \mu N_2(t)\sigma[\dot{u}_1(t)] \qquad (3.60)$$

unde

$\mu > 0$ este coeficientul de frecare (3.61)

şi $\sigma[.]$ reprezintă funcţia:

$$\sigma[x] \overset{def}{=} \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & dacă \quad x \neq 0 \\ \\ [-1,1] & dacă \quad x = 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \Re$$

De asemenea, este cunoscută poziţia iniţială admisă:

$$u_0 \in S \tag{3.62}$$

Se cunoaşte că u_0, f, K şi μ sunt:

$$\begin{aligned} &(i)\ k_{11} - \mu|k_{21}| \leq 0 \\ &(ii)\ u_{02} = 0,\ (f_1(0) - k_{11}u_{01})\sigma[k_{21}] = \mu(f_2(0) - k_{21}u_{01}) > 0 \\ &(iii)\ \dot{f}_1(0)\sigma[k_{21}] - \mu\dot{f}_2(0) > 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

atunci există funcţii nu absolut continue u şi N care pot arăta că soluţiile ecuaţiilor (3.58) şi (3.59) pentru toţi $t \in I$ există (3.60), adică, aproape peste tot în I, unde $T > 0$ cu condiţia iniţială:

$$u(0) = u_0 \tag{3.64}$$

Pe de altă parte se ştie că la aceeaşi forţă f aplicată, aceeaşi matrice de rigiditate K şi acelaşi coeficient de frecare μ există condiţii iniţiale u_0^*, astfel că pot fi găsite funcţiile continue diferenţiabile u^* şi N^* care sunt soluţii ale ecuaţiilor (3.58), (3.59) şi (3.60) la orice $t \in I$, cu $T > 0$ suficient de mic şi cu u^* şi N^* înlocuind pe u şi N şi astfel:

$$u^*(0) = u_0^*$$

În cele ce urmează arătăm că necunoscute sunt:

$J = [0, S), S > 0$ - lungimea arcului (3.65)

$\theta : J \to I$ - funcţie surjectivă absolut continuă cu derivata la dreapta finită, θ'^+ oricare ar fi $s \in J$ (3.66)

$U : J \to \Re^2$ - funcţie absolut continuă cu derivata la dreapta finită U'^+ oricare ar fi $s \in J$, $U(s)$ reprezintă poziţia la momentul $\theta(s)$ dacă $\theta'^+(s) > 0$ (3.67)

$N : J \to \Re^2$ - funcţie continuă la dreapta, pentru $s \in J$, $N(s)$ este reacţiunea la momentul $\theta(s)$ dacă $\theta'^+(s) > 0$ (3.68)

$\gamma : J \to \Re$ - funcţie continuă la dreapta, pentru $s \in J$, $\gamma(s)$ este o mărime ce exprimă dimensiunea forţei de readucere a echilibrului cu respectarea parametrizării vitezei $U'^+(s)$.()

Aceste necunoscute trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

$U(0) = u_0$, $\theta(0) = 0$ - condiţiile iniţiale (3.70)

$U_2(s) \leq 0$, $N_2(s) \leq 0$, $U_2(s)N_2(s) = 0$ pentru toţi $s \in J$ - condiţia contactului unilateral (3.71)

$N_1(s) \in \mu N_2(s)\left[U_1'^+(s)\right]$ pentru toţi $s \in J$ - legea de frecare Coulomb (3.72)

$\gamma(s)U'^{+}(s)+KU(s)=f(\theta(s))+N(s)$ pentru toţi $s\in J$ - ecuaţia mişcării (3.73)

$\dot{\theta}^{+}(s)\geq 0$, $\gamma(s)\geq 0$, $\dot{\theta}^{+}(s)\gamma(s)=0$ pentru toţi $s\in J$ - forţa de readucere a echilibrului se anulează când timpul variază şi timpul nu variază când forţa de readucere a echilibrului nu se anulează. (3.74)

$\dot{\theta}^{+}(s)+\left|\dot{U}^{+}(s)\right|=1$ pentru toţi $s\in J$ - normalizarea lungimii arcului (3.75)

Se doreşte determinarea funcţiilor necunoscute θ şi U prin rezolvarea incluziunii diferenţiale:

$$(\dot{\theta}(s),\dot{U}(s))\in X(\theta(s),U(s)) \tag{3.76}$$

cu condiţia iniţială:

$$\theta(0)=0,\ \ U(0)=u_0 \tag{3.77}$$

Partea dreaptă a ecuaţiei (3.76) se obţine prin evaluarea unei funcţii multivoce $X(x,y)$ definită în $\Re^3$.

Se va construi această funcţie multivoce în termenii unor funcţii auxiliare. Considerăm orice extensie C^1 a forţei aplicate care în N satisface relaţia (3.56);

$$f\in C^1\left(\Re;\Re^2\right),\ \text{cu}\ \dot{f}(t)\neq 0,\ \text{pentru toţi}\ t\in\Re \tag{3.56$'$}$$

Astfel pentru $x\in\Re$ şi $y=(y_1,y_2)\in\Re^2$ considerăm:

$$G(x,y)=f(x)-Ky;\ \ E(x,y)=|G_1(x,y)|-\mu G_2(x,y) \tag{3.78}$$

unde G este de clasă C^1 şi funcţia E este continuă Lipschitz.

Pentru $s\geq 0$ se poate scrie:

$$G(s)=G(\theta(s),U(s)),\ \ E(s)=E(\theta(s),U(s)) \tag{3.79}$$

Cu aceste notaţii ecuaţia de echilibru (3.73) poate fi scrisă în următoarea formă echivalentă:

$$\gamma(s)\dot{U}^{+}(s)=G(s)+N(s);\ s\in J \tag{3.80}$$

Atunci, este posibil să arătăm că pentru $\gamma(s)\geq 0$ (3.74), condiţiile contactului cu frecare (3.73) şi ecuaţia (3.74) sunt satisfăcute pentru orice $s\in J$ dacă:

$$N(s)=\begin{cases}0 & \text{dacă } U_2(s)<0,\ \text{sau}\ U_2(s)\geq 0, G_2(s)\leq 0\\ -G(s) & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)<0\\ -(\mu\sigma[G_1(s)],1)G_2(s) & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)\geq 0\end{cases} \tag{3.81}$$

şi $\dot{U}^{+}(s)$ aparţine mulţimii $\aleph(s)$ definită prin:

$$\begin{aligned}\aleph(s)=\{v\in\Re^2 :\ & v_2\leq 0,\ \text{dacă}\ U_2(s)\geq 0, G_2(s)\leq 0,\\ & v=0,\ \text{dacă}\ U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)<0\\ & v_2=0, v_1=\beta\sigma[G_1(s)]\ \text{cu}\ \beta\geq 0\\ & \text{dacă}\ U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)\geq 0\}\end{aligned} \tag{3.82}$$

Dacă luăm $Y(s)\in\aleph(s)$ definită prin:

$$Y(s)=G(s)+N(s)=\begin{cases}G(s) & \text{dacă } U_2(s)<0,\ \text{sau}\ U_2(s)\geq 0, G_2(s)\leq 0\\ 0 & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)<0\\ (E(s)\sigma[G_1(s)],0) & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)\geq 0\end{cases} \tag{3.83}$$

Rezultă că ecuaţia de echilibru se poate scrie în forma:

$$\gamma(s)\dot{U}^{+}(s)=Y(s),\qquad s\in J \tag{3.84}$$

Folosind acum (3.74) şi (3.75) obţinem:

$$|Y(s)|=\gamma(s)\left|\dot{U}^{+}(s)\right|=\gamma(s)\left(1-\dot{\theta}^{+}(s)\right)=\gamma(s)$$

unde

$$\gamma(s)=\begin{cases}|G(s)| & \text{dacă } U_2(s)<0,\ \text{sau } U_2(s)\geq 0, G_2(s)\leq 0\\ 0 & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)<0\\ E(s) & \text{dacă } U_2(s)\geq 0, G_2(s)>0, E(s)\geq 0\end{cases} \tag{3.85}$$

Se poate concluziona că condiţiile (3.71) – (3.75) sunt satisfăcute pentru fiecare $s\in J$ dacă:

$$\begin{aligned}&\dot{U}^{+}(s)\in\aleph(s),\\ &\dot{\theta}^{+}(s)=[0,1],\\ &\left|\dot{U}^{+}(s)\right|=1-\dot{\theta}^{+}(s),\\ &|Y(s)|\dot{U}^{+}(s)=Y(s)\end{aligned} \tag{3.86}$$

sau echivalent, dacă pentru toţi $s\in J$

$$\dot{\theta}^{+}(s)=0, \dot{U}^{+}(s)=\frac{Y(s)}{|Y(s)|},\quad \text{dacă } Y(s)\neq 0 \tag{3.87}$$

$$\dot{\theta}^{+}(s)=\xi, \dot{U}^{+}(s)\in\aleph(s), \left|\dot{U}^{+}(s)\right|=1-\xi, \xi\in[0,1],\ \text{dacă } Y(s)=0 \tag{3.88}$$

Într-o formă explicită aceste condiţii sunt:

$$\dot{\theta}^{+}(s)=0\,,\ \dot{U}^{+}(s)=\frac{G(s)}{|G(s)|}\,,\ \text{dacă } U_2(s)<0\,,\ G(s)\neq 0\,,$$

$$\text{sau dacă } U_2(s)\geq 0\,,\ G_2(s)<0\,,$$

$$\text{sau dacă } U_2(s)\geq 0\,,\ G_2(s)=0\,,\ E(s)>0\,;$$

$\dot{\theta}^{+}(s)=\xi\in[0,1]$, $\dot{U}^{+}(s)=(z_1,z_2)\in\Re^2, z_1^2+z_2^2=(1-\xi)^2$, dacă $U_2(s)<0$, $G(s)=0$;

$$\begin{aligned}&\dot{\theta}^{+}(s)=\xi\in[0,1],\ \dot{U}^{+}(s)=(z_1,z_2)\in\Re^2,\ z_2\leq 0,\ z_1^2+z_2^2=(1-\xi)^2,\\ &\qquad\text{dacă } U_2(s)\geq 0\,,\ G(s)=0\,;\\ &\dot{\theta}^{+}(s)=1,\ \dot{U}^{+}(s)=0,\ \text{dacă } U_2(s)\geq 0,\ G_2(s)>0,\ E(s)<0\,;\\ &\dot{\theta}^{+}(s)=0,\ \dot{U}^{+}(s)=(\sigma[G_1(s)],0)\,,\ \text{dacă } U_2(s)\geq 0,\ G_2(s)>0,\ E(s)>0\,;\\ &\dot{\theta}^{+}(s)=\xi\in[0,1],\ \dot{U}^{+}(s)=((1-\xi)\sigma[G_1(s)],0),\ \text{dacă } U_2(s)\geq 0,\ G_2(s)>0,\ E(s)=0\,.\end{aligned} \tag{3.89}$$

Pentru $(\theta(s),U(s))$ în regiunea deschisă a lui $\Re^3$ definită prin:

$$\left\{(x,y)\in\Re^3 : y_2<0, G(x,y)\neq 0\right\},$$

$$\left\{(x,y)\in\Re^3 : y_2>0, G_2(x,y)<0\right\},$$

$$\{(x,y)\in\Re^3 : y_2>0, G_2(x,y)>0, E(x,y)<0\},$$
$$\{(x,y)\in\Re^3 : y_2>0, G_2(x,y)>0, E(x,y)>0\},\tag{3.90}$$

mulţimea funcţiilor mutivoce considerate în incluziunea diferenţială (3.76) au în regiunile deschise (3.90) valorile date de (3.89). Pe fiecare punct al frontierelor acestei regiuni mulţimea valorilor lui X e o combinaţie complexă de valori în regiuni adiacente. Această procedură arată semicontinuitatea superioară a lui X în sensul funcţiilor multivoce. Astfel se poate defini X prin:

$$X(x,y)=\begin{cases}\left(0,\dfrac{G}{|G|}\right) & \text{dacă } y_2<0, G\neq 0, \text{ sau dacă } y_2\geq 0, G_2<0\\ (0,\sigma[G_1],0) & \text{dacă } y_2>0, G_2\geq 0, E>0\\ (1,0,0) & \text{dacă } y_2>0, G_2>0, E>0\\ (\xi,(1-\xi)\sigma[G_1],0) & \text{dacă } y_2>0, G_2>0, E=0, \xi\in[0,1]\\ (0,\sigma[G_1],0) & \text{dacă } y_2=0, G_2=0, E>0\\ \left(\xi,(1-\xi)\dfrac{G}{|G|}\right) & \text{dacă } y_2=0, G_2>0, E<0, \xi\in[0,1]\\ \left(0,\xi\dfrac{G}{|G|}+(1-\xi)(\sigma[G_1]),0\right) & \text{dacă } y_2=0, G_2>0, E>0, \xi\in[0,1]\\ T & \text{dacă } y_2=0, G_2>0, E=0\\ C & \text{dacă } y_2<0, G=0\\ C^- & \text{dacă } y_2>0, G=0\\ C & \text{dacă } y_2=0, G=0\end{cases}\tag{3.91}$$

Studiul soluţiilor ecuaţiilor (3.76) şi (3.77)

Ţinând cont de ecuaţia (3.79) pentru $s\geq 0$ considerăm mulţimile:

$$A(s)=k_{11}-\mu k_{12}\sigma[G_1(s)],\quad B(s)=\dot f_1(\theta(s))\sigma[G_1(s)]-\mu\dot f_2(\theta(s))\tag{3.92}$$

De menţionat că $A(s), B(s)\in\Re$ dacă $G_1(s)\neq 0$. În acest caz A este o constantă şi B este o funcţie continuă într-o vecinătate a lui s datorită lui (3.56′), iar pentru continuitatea lui G_1 rezultă:

$$B_+(s)=\begin{cases}B(s), & \text{dacă } B(s)\geq 0\\ 0, & \text{dacă } B(s)<0\end{cases}\qquad B_-(s)=\begin{cases}-B(s), & \text{dacă } B(s)\leq 0\\ 0, & \text{dacă } B(s)>0\end{cases}$$

Sunt necesare următoarele notaţii: pentru $t\in I$ şi $s\geq 0$

$$b^*(t)=|\dot f_1(t)|-\mu\dot f_2(t),\qquad B^*(s)=b^*(\theta(s)),$$
$$h^*(t)=k_{11}\dot f_2(t)-k_{12}\dot f_1(t),\quad H^*(s)=h^*(\theta(s))\tag{3.93}$$

În final avem:

$$A^{*} = k_{11} - \mu|k_{12}| \tag{3.94}$$

Observaţia 3.1 Se observă că $k_{12} \neq 0$ ori de câte ori $A^{*} = 0$, în plus, pentru toţi $s \geq 0$ cu $G_1(s) \neq 0$ rezultă:

$$B(s) \leq B^{*}(s), B_{+}(s) \leq B_{+}^{*}(s), A^{*} \leq A(s)$$

dacă $A(s) = 0$, atunci $k_{12}\sigma[G_1(s)] > 0$ şi $A^{*} = 0$ (3.95)

Motivul pentru care H^{*} este relevant este următorul: în cele ce urmează vom considera o valoare $s_0 \geq 0$ astfel încât $U_2(s_0) = 0, G(s_0) = 0$ iar din (3.78) avem $\left(K^{-1}f\right)_2(\theta(s_0)) = 0$. Acum $h^{*} = det\, K\left(K^{-1}\dot{f}\right)_2$; iar semnul lui $H^{*}(s_0)$ oferă informaţii despre comportamentul lui U_2 într-o vecinătate la dreapta a lui s_0.

Definiţie

O soluţie maximală (θ, U) pentru (3.76) şi (3.77) este uniform locală pentru $s \geq 0$ dacă există $s_1 > s_0$ şi un indice $i = 1,...,12$ astfel că:

(a) pentru toţi $s \in (s_0, s_1], (U_2(s), G(s)) \in S_i$

(b) $\dot{\theta}(s) + |\dot{U}(s)| = 1$ pentru $s \in (s_0, s_1)$

(c) dacă există configuraţii care satisfac (a) şi (b) atunci pentru toţi $s \in (s_0, s_1)$ valoarea $\theta(s)$ este minimală printre toate valorile date de relaţia (3.76).

Spunem că soluţia maximală (θ, U) pentru (3.76) şi (3.77) este uniformă local dacă ea este uniform locală pentru orice $s_0 \geq 0$.

Spunem că (θ, U) admite o continuitate local uniformă pentru $s_0 \geq 0$ dacă există $s_1 > s_0$ şi perechea $(\bar{\theta}, \bar{U})$ definită pe $[s_0, s_1]$ satisface $\left(\dot{\bar{\theta}}(s), \dot{\bar{U}}(s)\right) \in X(\bar{\theta}(s), \bar{U}(s))$ aproape peste tot, astfel că avem:

$$\bar{\theta}(s_0 = \theta(s_0)),\ \bar{U}(s_0) = U(s_0) \tag{3.96}$$

şi funcţia multivoce:

$(\theta(s), U(s))$ pentru $s \in [0, s_0]$,

$(\bar{\theta}(s), \bar{U}(s))$ pentru $s \in [s_0, s_1]$ este local uniformă în s_0.

Evident dacă o pereche $(\bar{\theta}, \bar{U})$ este local uniform continuă atunci (3.92) şi (3.93) ne permite să definim $\bar{G}(s), \bar{E}(s), \bar{A}(s), \bar{B}(s), \bar{B}^{*}(s), \bar{H}^{*}(s)$ pentru toţi $s \in [s_0, s_1]$.

Observaţia 3.2

Condiţia (c) din definiţia de mai sus este necesară deoarece (θ, U) este netedă la dreapta lui s_0 şi evoluţia sa în vecinătatea la dreapta a lui s_0 este unic determinată.

Pentru a studia soluţiile uniforme locale se face următoarea ipoteză asupra sistemului de forţe f. Mai întâi considerăm următoarele notaţii: pentru toţi $v, w \in \Re^2$, luăm $\pi[v, w] = v_1 w_2 - v_2 w_1$;

Ipoteză. Pentru orice $t_0 \geq 0$, există $t_1 > t_0$ astfel că pe intervalul $(t_0, t_1]$ mărimea $n[\dot{f}(t), \dot{f}(t_0)]$ este fie pozitivă, fie negativă sau identic nulă.

Observaţia 3.3

Această ipoteză ne permite să evităm oscilaţiile asimptotice ale vectorului $\dot{f}(t)$. Această presupunere este satisfăcută la t_0 dacă există $t_1 > t_0$ şi un vector unitar $v_0 \in \Re^2$ şi o funcţie $\lambda_0 : [t_0, t_1] \to \Re$ astfel că $\lambda_0(t) \geq 0$ şi $\dot{f}(t) = \lambda_0(t) v_0$, pentru toţi $t \in [t_0, t_1]$.

În condiţiile ipotezei de mai sus putem declara existenţa continuităţii uniforme local pentru toţi $s_0 \geq 0$.

În cele ce urmează, fie (θ, U) o soluţie maximală pentru (3.76) şi (3.77)

(a) dacă $U_2(s_0) < 0, \; G(s_0 \neq 0)$ atunci există o soluţie local uniform continuă şi unică pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin perechea $\left|\bar{\theta}, \bar{U}\right|$ care satisface relaţia 3.96 şi pentru $s_1 > s_0$ rezultă

$$\dot{\bar{\theta}}(s) = 0, \; \dot{\bar{U}}(s) = \frac{\bar{G}(s)}{\left|\bar{G}(s)\right|}, \; s \in (s_0, s_1) \tag{3.97}$$

Configuraţia pe intervalul (s_0, s_1) este aceeaşi ca şi în s_0

(b) dacă $U_2(s_0) = 0, \; G_2(s_0) < 0$ atunci $s_0 = 0$ şi există $s_1 > s_0$ astfel că $U_2(s) < 0, \; G_2(s) < 0$ pentru toţi $s \in (s_0, s_1)$. În particular există o soluţie local uniform continuă unică (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii $\left|\bar{\theta}, \bar{U}\right|$ care satisface (3.96) şi (3.97).

(c) dacă $U_2(s) = 0, \; G_2(s) > 0, \; E(s_0 < 0)$, atunci există o soluţie local continuă uniformă unică obţinută prin considerarea perechii $\left|\bar{\theta}, \bar{U}\right|$ care satisface (3.97) şi (3.98) şi pentru $s_1 > s_0$

$$\dot{\bar{\theta}}(s) = 1, \; \dot{\bar{U}}(s) = 0, \; s \in (s_0, s_1) \tag{3.98}$$

Configuraţia pe intervalul (s_0, s_1) este aceeaşi ca şi în s_0.

(d) dacă $U_2(s_0) = 0, \; G_2(s_0) > 0, \; E(s_0 > 0)$ atunci există o soluţie local continuă uniformă unică pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii care satisface (3.96) şi pentru $s_1 > s_0$

$$\dot{\bar{\theta}}(s) = 0, \; \dot{\bar{U}}_1 = \sigma[\bar{G}_1(s_0)], \; \dot{\bar{U}}_2(s) = 0, \; s \in (s_0, s_1) \tag{3.99}$$

Configuraţia pe intervalul (s_0, s_1) este aceeaşi ca şi în s_0. Mai mult dacă $A(s_0 \leq 0)$ atunci există s_2, s_3 astfel că $s_3 > s_2 > s_1$ şi

$\bar{U}_2(s) = 0, \; \bar{G}_2(s) > 0, \; \bar{E}(s) > 0,$ pentru toţi $s \in [s_0, s_2)$

$\bar{U}_2(s_2) = 0, \; \bar{G}_2(s_2) = 0, \; \bar{E}(s_2) > 0,$

$\bar{U}_2(s) < 0, \; \bar{G}_2(s) > 0,$ pentru toţi $s \in (s_2, s_3)$

$\bar{U}_2(s_3) < 0, \; \bar{G}(s_3) = 0$.

astfel, sistemul e rezolvat în s_0 într-o formă definită ca mai sus.

(e) dacă $U_2(s_0)=0,\ G_2(s_0)=0,\ E(s_0)>0$ atunci există o soluţie local continuă uniformă, unică, pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii care satisface (3.96) şi pentru orice $s_1 > s_0$:

1. dacă $k_{12}\sigma[G_1(s_0)]<0$ atunci

$$\bar{U}_2(s)=0,\ \bar{G}_2(s)>0,\ \bar{E}(s)>0,$$
$$\dot{\bar{\theta}}(s)=0,\ \dot{\bar{U}}_1(s)=\sigma[G_1(s_0)],\ \dot{\bar{U}}_2(s)=0,\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.100)$$

2. dacă $k_{12}\sigma[G_1(s_0)]>0$ atunci

$$\bar{U}_2(s)<0,\ \bar{G}_2(s)<0,\ \bar{E}(s)>0,$$
$$\dot{\bar{\theta}}(s)=0,\ \dot{\bar{U}}(s)=\frac{\bar{G}(s)}{\left|\bar{G}(s)\right|},\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.101)$$

3. dacă $k_{12}=0$ atunci

$$\bar{U}_2(s)=0,\ \bar{G}_2(s)=0,\ \bar{E}(s)>0,$$
$$\dot{\bar{\theta}}(s)=0,\ \dot{\bar{U}}_1(s)=\sigma[G_1(s_0)],\ \dot{\bar{U}}_2(s)=0,\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.102)$$

(f) dacă $U_2(s_0)<0,\ G_2(s_0)=0,$ atunci există o soluţie local continuă uniformă, unică, pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii care satisface (3.96) şi pentru orice $s_1 > s_0$:

$$\dot{\bar{\theta}}(s)=\frac{1}{1+\left|K^{-1}\dot{f}(\bar{\theta}(s))\right|},\ \dot{\bar{U}}(s)=\dot{\bar{\theta}}(s)K^{-1}\dot{f}(\bar{\theta}(s)),\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.103)$$

(g) dacă $U_2(s_0)=0,\ G_2(s_0)>0,\ E(s_0)=0,\ A(s_0)>0$ atunci există o soluţie local continuă uniformă, unică, pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii care satisface (3.96) şi pentru orice $s_1 > s_0$:

$$\dot{\bar{\theta}}(s)=\frac{A(s_0)}{A(s_0)+\bar{B}_+(s)},\ \dot{\bar{U}}_1(s)=\frac{\bar{B}_+(s)}{A(s_0)+\bar{B}_+(s)}\sigma[G_1(s_0)],\ \dot{\bar{U}}_2(s)=0,\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.104)$$

(h) dacă $U_2(s_0)=0,\ G_2(s_0)>0,\ E(s_0)=0,\ A(s_0)\le 0$ atunci există o soluţie local continuă uniformă, unică, pentru (θ, U) la s_0 obţinută prin considerarea perechii care satisface (3.96) şi pentru orice $s_1 > s_0$:

$$\dot{\bar{\theta}}(s)=0,\ \dot{\bar{U}}_1(s)=\sigma[G_1(s_0)],\ \dot{\bar{U}}_2(s)=0,\ s\in(s_0,s_1) \qquad (3.105)$$

În plus, $U_2=0,\ G_2>0,\ E>0,$ pe (s_0,s_1), dacă $A(s_0)<0;\ U_2=0,\ G_2>0,\ E=0$ pe (s_0,s_1), dacă $A(s_0)=0$.

Reamintim că condiţia de admisibilitate $U_2(s)\le 0, s\ge 0$ pentru determinarea soluţiilor maximale ale ecuaţiilor (3.76) şi (3.77) pe configuraţia care nu este în lista (a) – (h) este următoarea:

(k) dacă $U_2(s_0)=0,\ G(s_0)=0$. Aceasta este o situaţie dificilă deoarece sistemul poate evolua pe mai multe configuraţii.

Existenţa soluţiilor pentru problema P

Demonstrăm că o soluţie a problemei P poate fi obţinută dintr-o soluţie local uniformă. Primul pas în procedeul demonstraţiei este a arăta cum se obţin funcţiile γ şi N. Un mod rezonabil este cel bazat pe relaţia (3.85) care permite definirea lui γ. De asemenea putem utiliza relaţia (3.80) pentru a defini reacţiunea N.

Dăm mai jos următorul rezultat.

Funcţia γ definită prin relaţia (3.85) este continuă la dreapta pe $[0,+\infty)$ care nu este strict pozitivă. Dacă $A^* \geq 0$ atunci γ este necrescătoare.

Pasul al doilea arată cum se determină intervalul necunoscut $J = [0, S)$. Deoarece funcţia θ e definită şi continuă pe $[0,+\infty)$ cu $\theta(0) = 0$ este evident că o condiţie suficientă pentru existenţa unei valori a lui s astfel încât $\theta(s) = T$ este nemărginirea lui pe θ. Pentru a demonstra această proprietate considerăm mulţimea:

$$Z = \{s \geq 0 : \dot{\theta}^+(s) = 0\} \tag{3.106}$$

amintim că $\dot{\theta}^+$ există pentru orice $s \geq 0$.

Propoziţia 3.3

Presupunem $A^* > 0$. Dacă mulţimea Z nu este vidă atunci coincide cu intervalul $[0, \varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon > 0$. În plus, θ este nemărginit.

Demonstraţie

Există un $s_0 \geq 0$ astfel încât $\gamma(s) = 0$ pentru toţi $s \geq s_0$. Din relaţia (3.85) doar pentru $s \geq s_0$ avem unul din următoarele cazuri:

(i) $U_2(s) < 0, G(s) = 0$

(ii) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) < 0$

(iii) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) = 0$

(iv) $U_2(s) = 0, G(s) = 0$

Din prezentarea cazurilor (a) – (k) rezultă:

$$\dot{\theta}^+(s) \geq min\left(\frac{1}{1 + \left|K^{-1}\dot{f}(\theta(s))\right|}, \frac{A^*}{k_{11} + \mu\left|k_{12}\right| + B_+^*(s)}\right) \tag{3.107}$$

În particular, $Z \subset [0, s_0)$, deci Z este mărginită. Acelaşi argument arată că dacă $s \notin Z$ atunci $[s,+\infty) \cap Z = \varphi$, prin urmare Z este vidă sau se reduce la un singur interval pornind de la zero; punctul final al acestui interval nu poate aparţine lui Z. În sfârşit, dacă θ este mărginit ca mai sus atunci din (3.107) şi presupunerea (3.56′) pentru f implică existenţa unei mărimi $\beta > 0$ astfel încât $\dot{\theta}^+(s) \geq \beta$ pentru toţi $s \notin Z$, ceea ce este imposibil.

Caracterizarea mulţimii Z şi nemărginirea lui θ sunt mult mai complicate dacă $A^* \leq 0$. Următoarea observaţie conţine câteva rezultate preliminare pentru cazul $A^* < 0$ bazate pe întreaga discuţie a cazurilor (a) – (k).

Observaţia 3.4

Considerăm $A^* < 0$.

a) Dacă $s \notin Z$ atunci pot avea loc doar următoarele cazuri:

(i) $U_2(s) \le 0, G(s) = 0$

(ii) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) < 0, E(s) = 0$

b) Dacă $s \in Z$, atunci au loc următoarele cazuri:

(z1) $U_2(s) = 0, G_2(s) < 0$ - acest caz are loc doar dacă $s = 0$

(z2) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) = 0; E > 0$ pe $(s, \bar{s})$ pentru orice $\bar{s} > s$

(z3) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) > 0$

(z4) $U_2(s) = 0, G_2(s) = 0, E(s) > 0$

(z5) $U_2(s) < 0, G(s) \ne 0$ mai precis $G_2(s) < 0$ când $[0, s) \not\subset Z$

În orice caz dacă există $s_1 > s$ astfel încât $[s, s_1) \subset Z$ spunem că Z este deschisă la dreapta. Mai mult, Z este închisă la stânga, deci dacă $s_n \downarrow s_0$ este o secvenţă în Z, atunci $s_0 \in Z$, şi pentru toţi $s_0 \in Z$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât fie $(s_0 - \varepsilon, s_0) \subset Z$ sau $(s_0 - \varepsilon, s_0) \cap Z = \varphi$. În sfârşit dacă θ este mărginită atunci $\dot{\theta}^+(s) \ge \beta$ pentru toţi $s \notin Z$ şi pentru orice $\beta > 0$.

Acum putem identifica structura mulţimii Z.

Observaţia 3.5

Fie $A^* < 0$. Mulţimea Z poate fi reprezentată ca $Z = \cup_n [a_n, b_n)$ unde $\{[a_n, b_n)\}$ este o familie finită de intervale astfel încât $[a_n, b_n] \cap [a_k, b_k] = \varphi$ pentru $n \ne k$ (componentele conectate ale lui Z).

Următoarea observaţie determină o caracterizare a componentelor lui Z când $A^* < 0$.

Observaţia 3.6

Fie $A^* < 0$, $s_0 \in Z$ şi $[a_0, b_0)$ componenta conectă a lui Z care conţine pe s_0. Atunci b_0 este finit. Mai mult dacă $a_0 > 0$ atunci există $s_1 \in (a_0, b_0)$ astfel încât:

$U_2(a_0) = 0, \quad G_2(a_0) > 0, \quad E(a_0 = 0),$

$U_2 = 0, \quad G_2 > 0, \quad E > 0,$ pe (a_0, s_1)

$U_2(s) = 0, \quad G_2(s_1) = 0, \quad E(s_1) > 0,$

$U_2 < 0, \quad G_2 < 0,$ pe (s_1, b_0)

$U_2(b_0) < 0, \quad G(b_0) = 0.$

Observaţia 3.7

Luând aceleaşi presupuneri şi utilizând aceleaşi notaţii ca şi în observaţia precedentă, dacă $(b_0, +\infty) \cap Z \ne \varphi$ atunci există $c_0 > b_0$ astfel încât (k_{min} este cea mai mică valoare a lui K):

(i) $U_2 < 0, G = 0$ pe (b_0, c_0)

(ii) $U_2(c_0) = 0, G(c_0) = 0$

(iii) $c_0 - b_0 \geq -\frac{A^*}{\det K} G_2(a_0)$

(iv) $\frac{c_0 - b_0}{b_0 - a_0} \geq -\frac{A^* |k_{12}| k_{min}}{\det K\left(k_{min} - A^*\right)} > 0$ (3.108)

Vom discuta proprietăţile pentru cazul $A^* = 0$. Dacă:

$$s^* = \inf\{s \geq 0 : \gamma(s) = 0\} \tag{3.109}$$

atunci $\gamma = 0$ pe $\left[s^*, +\infty\right)$.

Din relaţia (3.85), doar următoarele configuraţii sunt permise pentru orice $s \geq s^*$:

fie $U_2(s) < 0, G(s) = 0$ sau $U_2(s) = 0, G_2(s) \geq 0, E(s) \leq 0$ (3.110)

Ca şi în cazul anterior, rezultatele preliminare se bazează pe întreaga discuţie a cazurilor (a) – (k).

Observaţia 3.8

Presupunem $A^* = 0$ şi fie $s > s^*$:

a) Fie $s \notin Z$. Aceasta este adevărat dacă şi numai dacă au loc următoarele alternative:

(i) $U_2(s) < 0, G(s) = 0$

(ii) $U_2(s) = 0, G(s) = 0$

(iii) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) < 0$

(iv) $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) = 0, A(s) > 0$.

b) Dacă $s \in Z$ atunci dacă şi numai dacă următoarele alternative au loc: $U_2(s) = 0, G_2(s) > 0, E(s) = 0, A(s) = 0$; în plus dacă θ este mărginit atunci $\dot{\theta}^+(s) \geq \beta$ pentru toţi $s \geq s^*, s \notin Z$ pentru orice $\beta > 0$.

c) $Z \cap \left[s^*, +\infty\right)$ este închis la stânga şi deschis la dreapta. Dacă $s_0 > s^*$ satisface $s_0 \in Z$ atunci au loc cazurile prezentate în cazul observaţiei 3.4 În final, dacă $s^* > 0$ atunci $\left[0, s^*\right) \subset Z$.

3.6 Problema unilaterală cu forţă analitică

Existenţa unei soluţii locale analitice este arătată prin:

Fie $F : [0, T] \to \Re^n$ o funcţie analitică. Atunci există $T_a > 0$ şi funcţiile analitice $U_a : [0, T_a) \to \Re^n$ şi $N_{aN} : [0, T_a) \to \Re$ soluţii ale problemei

- $\ddot{U}_{aN} + k_N U_{aN} + W U_{aT} = F_N + N_{aN}$ în $[0, T_a)$
- $U_a(0) = U_0$ $\dot{U}_a(0) = V_0$

- $\ddot{U}_{aT} + K_T U_{aT} + W U_{aN} - F_T \in \partial S_{-\mu N_{aN}} \beta\left|-\dot{U}_{aT}\right|$ în $[0, T_a)$
- $U_{aN} \leq 0,\ N_{aN} \leq 0,\ U_{aN} N_{aN} \equiv 0$.

Orice altă soluţie analitică a problemei este o restricţie sau o extensie analitică a acestei soluţii.

Dacă nu există $U_{0N} = V_{0N} = 0$, afirmaţia de mai sus este evidentă, deci ne concentrăm pe cazul în care $U_{0N} = V_{0N} = 0$. Se va nota prin $F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$, dezvoltarea în serie de puteri a lui F la $t = 0$; se va considera pentru o soluţie seriile formale de puteri:

$$U_n = \sum_{i=2}^{\infty} u_i t^i,\quad N_{aN} = \sum_{i=0}^{\infty} r_i t^i$$

Primul termen al acestor două serii formale trebuie să satisfacă:

- $2u_{2N} = f_{0N} + r_0$
- $u_{2N} \leq 0,\ r_0 \leq 0,\ u_{2N} r_0 = 0$

Acest sistem determină unicitatea perechii (u_{2N}, r_0). Dacă această pereche nu este determinată, analiza pentru determinarea soluţiei este oprită. Pe de altă parte se va continua inducţia până când o pereche $(u_{(i+1)N}, r_i)$ devine diferită de $(0,0)$. La iteraţia i problema ce trebuie rezolvată este:

- $i(i+1) u_{(i+1)T} + K_T u_{(i-1)T} + W u_{(i-1)N} = f_{(i-1)T}$
- $(i+1)(i+2) u_{(i+2)N} + k_N u_{iN} + W u_{iT} = f_i + r_i$
- $u_{(i+2)N} \leq 0,\ r_i \leq 0,$

Trebuie analizate următoarele cazuri.

__Cazul 1__ Inducţia nu se opreşte deoarece toate perechile $(u_{(i+2)N}, r_i)$ se anulează. Rezultă că este o soluţie analitică $U_a : [0, T_a) \to \Re^n$ a problemei:

- $U_a(0) = U_0;\ \dot{U}_a(0) = V_0$
- $\ddot{U}_a + K U_a = F,$ pe $[0, T_a)$

Această soluţie asociată cu condiţia $N_{aN} \equiv 0$ determină direct soluţia analitică a problemei considerate.

__Cazul 2__ Inducţia se opreşte la iteraţia n_0, deoarece $u_{(n_0+2)N} < 0$. Atunci se poate determina o soluţie analitică $U_a : [0, T_a) \to \Re^n$ a problemei:

- $U_a(0) = U_0;\ \dot{U}_a(0) = V_0$
- $\ddot{U}_a + K U_a = F,$ pe $[0, T_a)$

Dacă este necesar, se restricţionează intervalul de timp pe care U_a este definit şi avem:

$$\forall t \in (0, T_a),\ U_{aN}(t) < 0$$

şi această soluţie asociată cu $N_{aN} \equiv 0$ determină soluţia analitică a problemei considerate.

Cazul 3 Inducţia se opreşte la iteraţia n_0, deoarece $r_{n_0} < 0$. Propoziţiile anterioare determină o soluţie analitică $U_{aT} : [0,T_a) \to \Re^{n-1}$ a problemei:

- $U_{aT}(0) = 0; \; \dot{U}_{aT}(0) = 0$
- $\ddot{U}_{aT}(t) + K_T U_{aT}(t) - F_T(t) \in \partial S_{\mu|F_N(t) - WU_{aT}(t)|\beta}\left[-\dot{U}_{aT}(t)\right], \quad \forall t \in [0,T_a)$

Se restricţionează dacă este necesar intervalul de timp pe care este definit U_{0T} şi rezultă:

$$\forall t \in (0,T_a), \; WU_{aT}(t) - F_N(t) < 0$$

şi această funcţie împreună cu condiţiile considerate conduc la:

$$U_{aN} \equiv 0, \; N_{aN} \equiv WU_{aT} - F_N$$

care determină soluţia analitică a problemei considerate.
Unicitatea teoremei provine din faptul că inducţia finită sau infinită determină starea de contact sau nu a sistemului într-o vecinătate la dreapta a lui $t = 0$, unicitatea , la starea aleasă apare în virtutea teoremei 1 pagina 214 din [10] sau a propoziţiilor enunţate anterior.

Unicitatea locală pentru problema unilaterală a problemei cu forţă analitică

Fie $F : [0,T] \to \Re^n$ o funcţie analitică, $U_a : [0,T_a) \to \Re^n$ soluţia analitică locală a problemei P_U şi $U \in S\left([0,T]; \Re^n\right)$ o soluţie arbitrară a problemei P_U. Atunci U_a şi U sunt identice în vecinătatea la dreapta a lui $t = 0$:

$$\exists T' \le T_a, \; \forall t \in [0,T'), \; U_a(t) = U(t)$$

Pasul 1 Pentru toate $t \in [0,T_a)$ are loc următoarea estimare:

$$\left|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right|(t) + |U_T - U_{aT}|(t) \le C_1 \int_{[0,T]} |N_N - N_{aN}| dt + C_2 \int_0^t |U_N - U_{aN} dt|$$

pentru orice constante reale C_1 şi C_2 care depind doar de K şi μ.
Vom începe cu:

$$\ddot{U}_T - \ddot{U}_{aT} + K_T(U_T - U_{aT}) + (U_N - U_{aN})W = N_T - N_{aT}$$

Se va multiplica prin $\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}$ şi se va integra pe intervalul $[0,t]$. Legea frecării lui Coulomb dă:

$$\int_{[0,t]} (N_T - N_{aT})\left(\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right) dt \le \mu \int_{[0,t]} (N_N - N_{aN})\left(\left|\dot{U}_T^+\right| - \left|\dot{U}_{aT}\right|\right) dt$$
$$\le \mu \int_{[0,T]} |N_N - N_{aN}| \left|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right| dt$$

În plus $\int_{[0,t]} \ddot{U}_T \dot{U}_T^+ dt \ge \frac{1}{2}\left|\dot{U}_T^+\right|^2(t) - \frac{1}{2}|V_{0T}|^2$ ceea ce conduce la

$$\int_{[0,t]} \left(\ddot{U}_T - \ddot{U}_{aT}\right)\left(\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right) dt \ge \frac{1}{2}\left|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right|^2(t)$$

Şi astfel, pentru orice $t \in [0,T_a)$

$$\frac{1}{2}\left|\dot U_T^+ - \dot U_{aT}\right|^2(t) + \frac{1}{2}\left|U_T - U_{aT}\right|^2_{K(t)}(t) \le \mu\int_{[0,t]}\left|N_N - N_{aN}\right|\left|\dot U_T^+ - \dot U_{aT}\right| + |W|\int_0^t \left|U_N - U_{aN}\right|\left|\dot U_T^+ - \dot U_{aT}\right|$$

ceea ce conduce la estimarea:

$$\left|\dot U_T^+ - \dot U_{aT}\right|(t) + \left|U_T - U_{aT}\right|_{K_T}(t) \le \mu\sqrt{2}\int_{[0,T]}\left|N_N - N_{aN} + |W|\right|\sqrt{2}\int_0^t \left|U_N - U_{aN}\right|$$

Pasul 2 Pentru orice $t \in [0,T_a)$ următoarea estimare are loc:

$$\left|\dot U_N^+ - \dot U_{aN}\right|(t) + \left|U_N - U_{aN}\right|(t) \le C_3\int_0^t \left|U_T - U_{aT}\right|dt + C_4\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

pentru constantele reale C_3 şi C_4 care depind numai de K.
Se începe cu:

$$\ddot U_N - \ddot U_{aN} + k_N(U_N - U_{aN}) + W(U_T - U_{aT}) = N_N - N_{aN}$$

Multiplicând cu $\left(\dot U_N^+ + \dot U_N^-\right)/2 - \dot U_{aN}$ şi integrând pe $[0,t]$ se obţine:

$$\frac{1}{2}\left|\dot U_N^+ - \dot U_{aN}\right|^2(t) + \frac{k_N}{2}\left|U_N - U_{aN}\right|^2(t)$$

$$= \int_{[0,t]}(N_N - N_{aN})\left(\left(\dot U_N^+ + \dot U_N^-\right)/2 - \dot U_{aN}\right) - \int_0^t\left(\dot U_N^+ - \dot U_{aN}\right)W(U_T - U_{aT}) \qquad (3.111)$$

Aici facem următoarele observaţii:

1. Pe un interval de timp are loc $N_N\dot U_{aN} \ge 0$ deoarece, dacă $U_{0N} < 0$ atunci N_N se anulează în vecinătatea lui $t = 0$ la dreapta şi dacă $U_{0N} = 0$ atunci funcţia analitică dependentă de U_{aN} trebuie să fie necrescătoare în vecinătatea la dreapta a lui $t = 0$.
2. Mărimea $N_N\left(\dot U_N^+ + \dot U_N^-\right) \le 0$ este nepozitivă. Astfel, fie D o submulţime a lui $[0,T]$ şi la orice moment t pentru care viteza are o discontinuitate avem $\dot U_N^+(t) \ne \dot U_N^-(t)$. Pe $[0,T]\setminus D$ funcţia $N_N\left(\dot U_N^+ + \dot U_N^-\right)$ egală cu $N_N\dot U_N^-$ care este nepozitivă asigură condiţia de contact unilateral. În plus, pentru orice moment $t \in D$ funcţia $N_N\left(\dot U_N^+ - \dot U_N^-\right)$ îndeplineşte condiţia:

   $$\left|\dot U_N^+\right|^2 - \left|\dot U_N^-\right|^2 = \left(e^2 - 1\right)\left|\dot U_N^-\right|^2 \le 0$$

   care este echivalentă cu legea impactului din mişcarea particulei.

Ţinând seama de aceste două elemente din ecuaţia (3.111) se obţine:

$$\int_{[0,t]}(N_N - N_{aN})\left(\left(\dot U_N^+ + \dot U_N^-\right)/2 - \dot U_{aN}\right)dt \le -\int_0^t N_{aN}\left(\dot U_N^+ - \dot U_{aN}\right)dt$$

şi astfel rezultă:

$$\frac{1}{2}\left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|^2(t) + \frac{k_N}{2}\left|U_N - U_{aN}\right|^2(t) \le |W|\int_0^t \left|U_T - U_{aT}\right|\left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|dt + \int_0^t \left|N_{aN}\right|\left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|dt$$

care conduce la estimarea:

$$\left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|(t) + \left|U_N - U_{aN}\right|(t) \le \frac{k_N + 1}{k_N}|W|\sqrt{2}\int_0^t \left|U_T - U_{aT}\right|dt + \frac{k_N + 1}{k_N}\sqrt{2}\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

Pasul 3 Pentru orice $t \in [0, T_a)$ are loc următoarea estimare:

$$\int_{[0,t]}\left|N_N - N_{aN}\right|dt \le \left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|(t) + C_5\int_0^t \left|U_N - U_{aN}\right|dt + C_6\int_0^t \left|U_T - U_{aT}\right|dt + 2\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

pentru constantele reale C_5 şi C_6 care depind numai de K.

Deoarece N_N este o funcţie nepozitivă avem:

$$\int_{[0,t]}\left|N_N - N_{aN}\right|dt \le -\int_{[0,t]} N_N dt + \int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

Astfel se obţine estimarea:

$$-\int_{[0,t]} N_N dt = -\int_{[0,t]}\left(\ddot{U}_N - \ddot{U}_{aN}\right)dt - \int_0^t \left(k_N\left(U_N - U_{aN}\right) + W\left(U_T - U_{aT}\right) + N_{aN}\right)dt$$

$$\le \left|\dot{U}_N^+ - \dot{U}_{aN}\right|(t) + k_N\int_0^t \left|U_N - U_{aN}\right|dt + |W|\int_0^t \left|U_T - U_{aT}\right|dt + \int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

echivalentă cu cea din pasul doi cu $C_5 = k_N$ şi $C_6 = |W|$.

Pasul 4 Pentru orice $t \in [0, T_a)$ are loc următoarea estimare

$$\left|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right|(t) + \left|U_T - U_{aT}\right|(t) \le C\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

pentru constanta C care depinde numai de K, μ şi T_a.

Din cei trei paşi anteriori rezultă că funcţia:

$$\varphi(t) \overset{def}{=} \left|\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right|(t) + \left|U_T - U_{aT}\right|(t)$$

satisface estimarea:

$$\varphi(t) \le C_7\int_0^t \varphi dt + C_8\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt$$

Constantele C_7 şi C_8 depind de K, μ şi T_a

Din lema lui Gronwall se obţine:

$$\varphi(t) \le C_8\int_0^t \left|N_{aN}\right|dt + C_7 C_8\int_0^t e^{C_7(t-s)}dt\int_0^s \left|N_{aN}\right|ds$$

$$\leq C_8\left(1+C_7T_ae^{C_7T_a}\right)\int_0^t |N_{aN}|dt$$

care este estimarea dorită.

Pasul 5 Concluzii

Deoarece funcţia N_{aN} este analitică sunt posibile numai următoarele cazuri:

1. $N_{aN} \equiv 0$. În astfel de situaţii din pasul patru obţinem $U_T \equiv U_{aT}$ şi din pasul doi. $U_N \equiv U_{aN}$ Concluzia este adevărată.

2. $\forall t \in (0,T_a],\ N_{aN}(t) < 0$. Atunci funcţia U_{aN} se anulează. Unicitatea soluţiei a fost demonstrată pentru problema bilaterală. Este suficient să arătăm că $U_N \equiv 0$.

Considerăm cel mai mic T_a , dacă este necesar, avem:

$$\forall t \in (0,T_a],\ -N_{aN}(t)-C|W|\int_0^t |N_{aN}|dt > 0$$

Multiplicând ecuaţia:

$$\ddot{U}_N + k_N U_N = N_N - N_{aN} - W(U_T - U_{aT})$$

prin $\left(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-\right)/2$ şi integrând pe $[0,t]$ se obţine:

$$\frac{1}{2}\left|\dot{U}_N^+\right|^2(t)+\frac{k_N}{2}|U_N|^2(t)=\int_{[0,t]} N_N\frac{\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-}{2}dt-\int_0^t (N_{aN}+W(U_T-U_{aT}))\dot{U}_N^+ dt$$

Deoarece $N_N\left(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-\right)$ este o funcţie nepozitivă, avem:

$$\int_0^t (N_{aN}+W(U_T-U_{aT}))\dot{U}_N^+ \leq 0$$

Integrând prin părţi se obţine:

$$(N_{aN}+W(U_T-U_{aT}))U_N \leq \int_0^t \left(\dot{N}_{aN}+W\left(\dot{U}_T^+ - \dot{U}_{aT}\right)\right)U_N dt$$

şi prin urmare, din pasul patru avem:

$$0 \leq \left\{|N_{aN}|(t)-C|W|\int_0^t |N_{aN}|dt\right\}|U_N|(t) \leq \int_0^t \left\{\left|\dot{N}_{aN}\right|(s)+C|W|dt\int_0^s |N_{aN}|ds\right\}|U_N|(s)$$

Notând prin $m \in N$ ordinul primului termen diferit de zero al dezvoltării în serie de puteri a funcţiei analitice N_{aN} se poate estima că:

$$\forall t \in (0,T_a),\ \left|\dot{N}_{aN}\right|(t) \leq \frac{m+\tilde{D}t}{t}|N_{aN}|(t)$$

oricare ar fi constantele $\tilde{D}$ nenegative. Se deduce astfel următoarea estimare:

$$\forall t \in (0,T_a), \quad \left| \dot{N}_{aN}(t) + C|W| \int_0^t |N_{aN}| dt \right| \leq \frac{m+Dt}{t} \left| |N_{aN}|(t) - C|W| \int_0^t |N_{aN}| dt \right|$$

oricare ar fi constanta reală D nenegativă.
Înlocuind această reală în inegalitatea anterioară rezultă:

$$t\psi(t) \leq (m+Dt)\int_0^t \psi dt$$

unde:

$$\psi(t) \stackrel{def}{=} \left\{ |N_{aN}|(t) - C|W| \int_0^t |N_{aN}| dt \right\} \frac{|U_N|(t)}{t}$$

este o funcţie continuă aproape peste tot în vecinătatea lui $t=0$, mai precis $\psi(t) = O\left(t^m\right)$ când $t \to 0$. Atunci se poate vedea că:

$$\forall t \in (0,T_a), \quad \frac{d}{dt}\left\{ \frac{e^{-Dt}}{t^m} \int_0^t \psi dt \right\} \leq 0$$

care implică că funcţia nenegativă ψ se anulează identic la $t=0$. Prin urmare $\psi \equiv 0$ şi atunci $U_N \equiv 0$ care reprezintă concluzia cerută.

În cazul problemei unilaterale cu forţă analitică, din cele de mai înainte se poate arăta că:

Dacă $F : [0,T] \to \Re^n$ este analitică sau analitică pe porţiuni atunci problema P_u admite o soluţie unică în $S\left([0,T]; \Re^n\right)$.

Utilizând existenţa locală a soluţiei pentru problema P_u şi unicitatea locală în S prezentate mai sus, considerăm o soluţie maximală U care este definită pe orice subinterval $[0,\eta)$, oricare ar fi $\eta \in (0,T]$ sau pe $[0,T]$. Este suficient de demonstrat că dacă soluţia maximală este definită doar pe un subinterval $[0,\eta)$ atunci variaţia totală a vitezei $\dot{U}^+$ pe $[0,\eta)$ este finită pentru un asemenea caz , aceasta poate fi posibil pentru dezvoltarea lui U de-a lungul lui $[0,\eta)$ şi se obţine astfel o contradicţie. Deci, se presupune că soluţia maximală este definită doar pe $[0,\eta)$. S-a arătat deja că $N_N\left(\dot{U}_N^+ + \dot{U}_N^-\right)$ este o funcţie nepozitivă datorită condiţiilor de contact, ecuaţiei de mişcare şi legii ciocnirii.

De asemenea din legea frecării Coulomb $N_T\dot{U}_T^+$ este o mărime nepozitivă. Fie D o submulţime numărabilă al momentelor instantanee $t \in [0,\eta)$ la care viteza tangenţială este discontinuă $\dot{U}_T^+(t) \neq \dot{U}_T^-(t)$. Pe $[0,n) \setminus D$, funcţia $N_T\left(\dot{U}_T^+ + \dot{U}_T^-\right)$ este egală cu $N_T\dot{U}_T^+$ care este nepozitivă. La fiecare moment $t \in D$, utilizând ecuaţia mişcării împreună cu legea frecării Coulomb, s-a verificat că funcţia $N_T\left(\dot{U}_T^+ + \dot{U}_T^-\right)$ este nenegativă. În final $N\left(\dot{U}^+ + \dot{U}^-\right)$ este o funcţie nenegativă.

Multiplicând ecuaţia mişcării:

$$\ddot{U} + KU = F + N$$

cu $\left(\dot{U}^+ + \dot{U}^-\right)/2$ şi integrând pe $(0,t]$, $t \in (0,\eta)$ se obţine inegalitatea:

$$\frac{1}{2}\left|\dot{U}^+\right|^2(t) + \frac{1}{2}|U|_K^2(t) \le \frac{1}{2}|V_0|^2 + \frac{1}{2}|U_0|_K^2 + \int_0^t F\dot{U}^+ dt$$

Din care rezultă că:

$$\left|\dot{U}^+\right|(t) \le |U_0|_K + |V_0| + \int_0^T |F| dt$$

De aici rezultă că $\dot{U}^+$ este mărginită pe orice interval $[0,\eta)$. În continuare integrând prima componentă a ecuaţiei de mişcare peste $[0,t]$, $t \in (0,\eta)$ rezultă:

$$\int_{[0,t]} N_N dt = \dot{U}_N^+(t) - V_{0N} + \int_0^t (k_N U_N + WU_T)dt - \int_0^t F_N dt$$

Deoarece $\dot{U}^+$ este mărginită pe $[0,\eta)$ şi N_N este o funcţie nepozitivă, avem:

$$\int_{[0,\eta)} |N_N| < \infty$$

Legea frecării Coulomb implică $|N_T| \le \mu |N_N|$ şi prin urmare:

$$\int_{[0,\eta)} |N| < \infty$$

Revenind la ecuaţia de mişcare rezultă:

$$\int_{[0,\eta)} \left|\ddot{U}\right| < \infty$$

care este condiţia dorită.

Din considerarea problemei P_u, în cazul particular al ciocnirii neelastice rezultă:

- Dacă se poate extrage un şir de aproximaţii ce furnizează algoritmul NSCD din care se obţine un subşir uniform convergent care furnizează obţinerea soluţiei problemei P_u.
- Dacă $F \notin L^1$, presupusă analitică pe porţiuni, problema P_u admite o soluţie unică în S.

3.7 Contribuţii personale

- S-a elaborat schema logică a algoritmului NSCD pentru metoda contactului dinamic neneted [62]
- Sunt prezentate principiile teoretice care stau la baza construirii şirurilor de aproximaţii ale vitezelor necesare determinării soluţiei problemei P_u
- S-a realizat o schema de discretizare în viteze[63] privind contactul cu frecare a unei particule materiale din R^2
- S-a arătat că variaţia vitezei de aproximare este mărginită pe un interval.

4.SIMULAREA SISTEMELOR MECANICE CU LEGĂTURI UNILATERALE ŞI FRECARE

4.1 Problema evoluţiei în spaţiul bidimensional

Se analizează spaţiul bidimensional pentru problema reprezentată în figura 2.1 şi se alege legea de ciocnire plastică. Evoluţia sistemului este descrisă de relaţiile[64]:

$$P_u' : U \in S\left([0,T];\Re^2\right) \text{ şi } N \in M\left([0,T];\Re^2\right) \text{ astfel că:}$$

$$m\ddot{U} + KU = F + N$$

$$U(0) = U_0, \dot{U}^+(0) = V_0$$

$$U_N \le 0, N_N \le 0, U_N N_N = 0$$

$$\forall V \in C^0([0,T];\Re), \int_{[0,T]} \left| N_T, V - \dot{U}_T^+ \right| - \mu N_N \left(|V| - \left| \dot{U}_T^+ \right| \right) \ge 0 \qquad (4.1)$$

$$U_N(t) = 0 \text{ rezultă } \dot{U}_N^+(t) = 0$$

Rezultatele anterioare furnizează existenţa şi unicitatea soluţiei pentru această problemă pe $[0,T]$ pentru o forţă F analitică. Forţa exterioară F aplicată a fost aleasă constantă, problema studiată admite o soluţie unică care este analitică. Toţi coeficienţii matricei $[K]$ au fost aleşi pozitivi şi $\det K > 0$.

Analiza stărilor de echilibru

Dăm mai jos următoarea propoziţie:

Propoziţia 4.1

Problema dinamică (4.1) admite o stare de echilibru unică U^e, dacă se notează prin $A = K_T F_N - W F_T$ atunci pot interveni următoarele situaţii:

- Dacă $A < 0$ - pentru $\mu \le \frac{K_T}{W}$ soluţia de echilibru de zbor este unică,

  - pentru $\mu > \frac{K_T}{W}$ există două soluţii de echilibru, una de zbor şi una de alunecare pozitivă.
- Dacă $A = 0$ - pentru $\mu \le \frac{K_T}{W}$ există o soluţie unică de echilibru în contact neted,

  - pentru $\mu = \frac{K_T}{W}$ există o infinitate de soluţii de alunecare,

- pentru $\mu > \frac{K_T}{W}$ există o soluţie de echilibru de contact neted şi o infinitate de soluţii de contact blocat.

- Dacă $A > 0$ există o infinitate de soluţii de contact blocat şi una sau două poziţii de echilibru de alunecare.

Starea de echilibru a problemei (4.1) este soluţia următoarei probleme P_S :

P_s : Există $(U, N) \in \left(\Re^2, \Re^2\right)$ astfel că:

$$K\ddot{U} = F + N$$
$$U_N \le 0, N_N \le 0, U_N N_N = 0$$
$$|N_T| \le \mu |N_N|$$

Deoarece sistemul este format numai dintr-o masă materială starea de echilibru sub forţa constantă se poate studia separat, fie cu contact fie fără contact. Se studiază doar condiţia de existenţă a soluţiilor fără ca masa să rămână în contact. Dacă masa nu atinge planul orizontal se spune că U_N este strict negativ şi deci are ca efect:

$$\begin{cases} U_N = \dfrac{A}{\det K} \\ U_T = \dfrac{K_N F_T - W F_N}{\det K} \\ N_N = N_T = 0 \end{cases}$$

Astfel de soluţii nu există. Vom cerceta stările de echilibru în contact cu obstacolul. Problema P_S se reduce la:

$$\begin{cases} W\ddot{U}_T = F_N + N_N \\ K_T \ddot{U}_T = F_T + N_T \\ U_N \equiv 0 \\ |N_T| \le \mu |N_N| \end{cases}$$

şi astfel se deduce:

$$\begin{cases} N_T = \dfrac{A}{W} + \dfrac{K_T}{W} N_N \\ |N_T| \le \mu |N_N| \end{cases}$$

În planul $\{N_T, N_N\}$ soluţiile echilibrului cu contact se găsesc în intervalul de la dreapta conului lui Coulomb dată de $N_T = \frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} N_N$.

Din figura 4.1 se observă că forţa exterioară şi parametrii de rigiditate sunt astfel încât cantitatea A este strict negativă. Dacă coeficientul de frecare este mai mic decât $\frac{K_T}{W}$ dreapta nu intersectează domeniul. Masa nu atinge obstacolul, aceasta semnifică faptul că soluţia în contact este unică şi deci nu există soluţie cu contact.

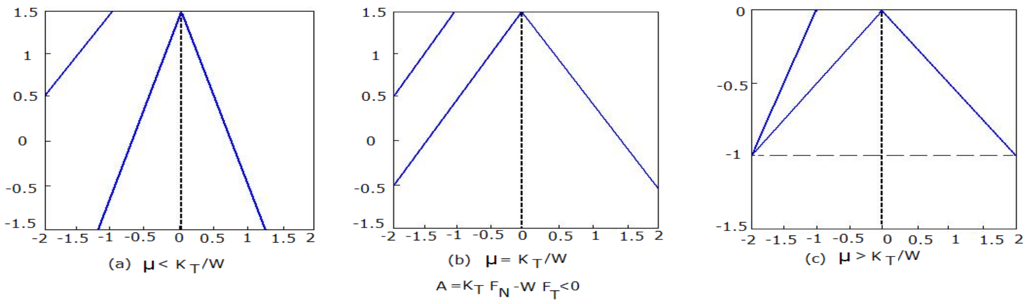


Fig.4.1

Dacă valoarea lui μ este strict superioară lui $\frac{K_T}{W}$, domeniul admisibil al reacţiunilor normale corespunde intervalului $\left[-\frac{A}{K_T-\mu W},0\right)$ iar intersecţia sa cu dreapta semnifică existenţa unei singure soluţii la alunecarea pozitivă a particulei materiale.

În toate celelalte cazuri care apar nu există soluţii fără contact.

Se consideră acum cazul în care A este nul, reprezentat în figura 4.2. Dacă coeficientul de frecare este strict mai mic decât $\frac{K_T}{W}$, dreapta intersectează domeniul de admisibilitate al reacţiunilor în domeniul exact în vârful conului de frecare. Deci în acest punct alunecarea cu reacţiunea nulă este singura soluţie a problemei de echilibru.

Dacă coeficientul de frecare μ este egal cu $\frac{K_T}{W}$, toate punctele situate pe partea stângă a conului lui Coulomb sunt soluţii deoarece domeniul admisibil al reacţiunilor normale este $(-\infty,0]$. Există prin urmare o infinitate de soluţii în alunecarea pozitivă şi una pentru care reacţiunea este nulă.

Dacă coeficientul de frecare este mai mare decât $\frac{K_T}{W}$ se obţine existenţa unei infinităţi de soluţii pentru contactul blocat şi o poziţie unică pentru alunecarea fără reacţiune deoarece dreapta trece din nou printr-un punct al conului.

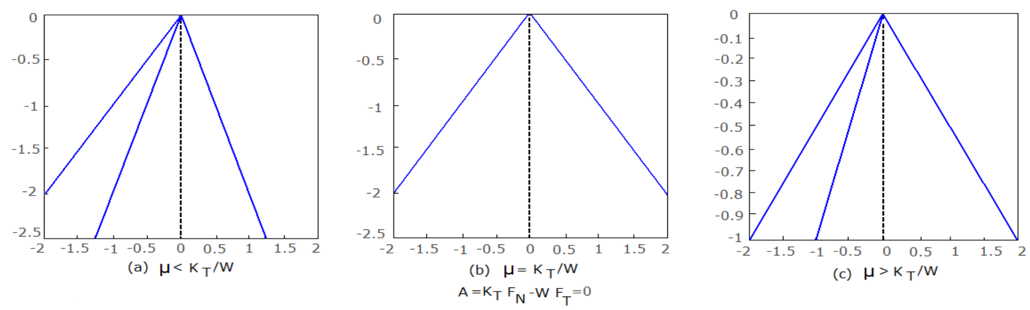


Fig.4.2

În cazul când A este strict pozitiv, particularitatea apare în cazul dreptei care nu mai trece printr-un punct al conului.

Dacă coeficientul de frecare este mai mic decât $\frac{K_T}{W}$, domeniul admisibil al reacţiunilor normale corespunde intervalului $\left[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W}\right]$. Intersecţia acestui interval cu dreapta dă o infinitate de soluţii pentru contactul blocat şi două poziţii pentru alunecare (pozitivă sau negativă). Pentru o valoare a lui μ egală cu $\frac{K_T}{W}$, intervalul $\left(-\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}\right]$ reprezintă domeniul admisibil al reacţiunii normale. Semidreapta corespunde ansamblului de poziţii de echilibru compuse dintr-o infinitate de poziţii în contact blocat şi unei soluţii unice pentru alunecarea negativă.

Dacă coeficientul de frecare μ este strict mai mare decât $\frac{K_T}{W}$ reacţiunea va aparţine intervalului. $\left(-\infty, -\frac{A}{K_T + \mu W}\right]$ Semidreapta corespunde acestor soluţii de echilibru; există încă o infinitate de poziţii de echilibru pentru contactul blocat şi o soluţie unică în alunecarea negativă. Ansamblul poziţiilor de echilibru depind de parametrii de rigiditate, de coeficientul de frecare şi de forţele externe.

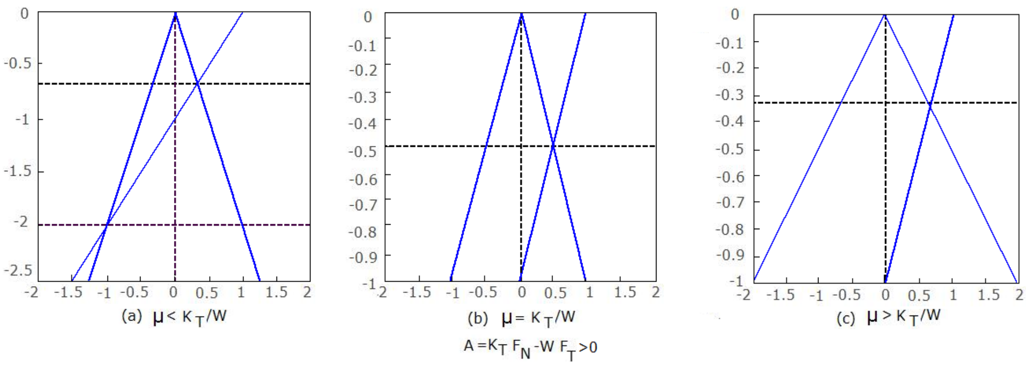


Fig.4.3

Dăm în cele ce urmează următorul rezultat de ansamblu:

Tabelul 4.1

	$\mu < \frac{K_T}{W}$	$\mu = \frac{K_T}{W}$	$\mu > \frac{K_T}{W}$
$A < 0$	- o soluţie pentru zbor	- o soluţie pentru zbor	- o soluţie pentru zbor - o soluţie pentru alunecarea pozitivă
$A = 0$	- o soluţie pentru contactul în zbor	- o soluţie pentru contactul în zbor - o infinitate de soluţii pentru alunecarea pozitivă	- o soluţie pentru contactul în zbor - o infinitate de soluţii pentru contactul blocat
$A > 0$	- 2 soluţii pentru alunecarea pozitivă şi negativă - o infinitate de soluţii pentru contactul blocat	- o soluţie pentru alunecarea negativă - o infinitate de soluţii pentru contactul blocat	- o soluţie pentru alunecarea negativă - o infinitate de soluţii pentru contactul blocat

Cele trei situaţii $A < 0$, $A = 0$, $A > 0$ au fost exemplificate printr-o metodă a secţiunii de intersecţie a dreptei D cu conul de frecare (fig.4.1, fig.4.2, fig.4.3).

4.2 Stabilitatea stărilor de echilibru

Stabilitatea stărilor de echilibru prezintă interes deoarece la mici perturbaţii ale acestor poziţii în regim dinamic pot conduce fie la reîntoarcerea la poziţia de echilibru, fie la crearea instabilităţii dinamice. Obţinerea acestor rezultate se face cu metoda lui Lyapunov, care pentru cazul nostru conduc la utilizarea algoritmului iteraţiilor succesive „NSCD”.

Dăm în cele ce urmează unele rezultate privind sistemul dinamic discretizat considerând următoarele remarci.

Remarca 4.1

1. O perturbaţie în deplasare corespunde celei de a doua iteraţii privind perturbaţia în viteză.
2. O perturbaţie în viteză corespunde celei de a doua iteraţii corespunzătoare unei perturbaţii în cele două direcţii ale deplasării.

Din acest motiv este posibil ca în studiul efectuat să ne limităm numai la perturbaţii în viteze.

Fie $\left(U^e, N^e\right)$ cu $U_N^e = 0$ stare de echilibru şi $V_{0N} < 0$ o perturbare a acestei stări în viteză normală la $t = 0$. Atunci soluţia problemei există chiar şi la momentul impactului cu obstacolul $t^{imp} > 0, t^{imp} \in (0, T)$.

O perturbaţie în viteză normală compatibilă cu o legătură unilaterală la $t = 0$ este aceea că există un interval la dreapta originii în timpul căreia masa începe să zboare. Pe parcursul acestei faze de mişcare fără contat evoluţia este descrisă de relaţiile următoare:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N \\ m\ddot{U}_T + K_T U_T + W U_N = F_T \\ U_N(0) = 0, U_T(0) = \dfrac{F_N + N_N^e}{W} \\ \dot{U}_N(0) = V_{0N}, \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Soluţia acestei probleme se scrie:

$$U(t) = (a_1 \cos(\alpha_1 t) + b_1 \sin(\alpha_1 t))\varphi^1 + (a_2 \cos(\alpha_2 t) + b_2 \sin(\alpha_2 t))\varphi^2 + K^{-1}F \qquad (4.2)$$

K^{-1} reprezintă inversa matricei K cu:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{(K_N + K_T) + \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{(K_N + K_T) - \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m}}$$

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{K_N - K_T + \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m} \end{pmatrix}, \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{K_N - K_T - \sqrt{(K_N - K_T)^2 + 4W^2}}{2m} \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{1}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\left\{\frac{A}{\det K}\left(\varphi_T^2 + \frac{K_N}{W}\right) + \frac{N_N^e}{W}\right\}, a_2 = -\frac{1}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\left\{\frac{A}{\det K}\left(\varphi_T^1 + \frac{K_N}{W}\right) + \frac{N_N^e}{W}\right\}$$

$$b_1 = \frac{-V_{0N}\varphi_T^2}{\alpha_1\left(\varphi_T^1 - \varphi_T^2\right)}, b_2 = \frac{V_{0N}\varphi_T^1}{\alpha_2\left(\varphi_T^1 - \varphi_T^2\right)}$$

$$K^{-1}F = \frac{1}{\det K}\begin{pmatrix} A \\ K_N F_T - W F_N \end{pmatrix}$$

Deoarece $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{p}{q} \in Q$, U_N este o funcţie periodică. Trebuie luate câteva precauţii dacă $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin Q$. Fie $\tilde{U}_N(t)$ o funcţie aproape peste tot periodică din $\Re$ în $\Re$ care coincide cu $U_N(t)$ pe $[0,+\infty)$. Ne amintim că o funcţie f este periodică aproape peste tot [12] dacă în orice intervale $[a, a + I_\varepsilon]$ îi corespunde un număr τ conţinut în acest interval. În alţi termeni, în toate intervalele I_ε există un număr τ pentru care $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$. Numerele τ se numesc perioade aproape peste tot ataşate lui ε. $\tilde{U}_N(t)$ este evident continuă şi derivabilă. Fie $\eta > 0$ suficient de mic astfel încât $\tilde{U}_N(-\eta) > 0$ şi $\tilde{U}_N(\eta) < 0$. Se poate alege atunci $\varepsilon > 0$ pentru care $\tilde{U}_N(-\eta + \tau) > 0$ şi $\tilde{U}_N(\eta + \tau) < 0$ unde τ este perioada funcţiei $\tilde{U}_N(t)$. $\tilde{U}_N(t)$ are aşadar un zero pe intervalul $(-\eta + \tau, \eta + \tau)$ care este un moment al impactului pentru U_N. Există deci un moment t^{imp} oricare ar fi α_1, α_2. Deci se poate alege T destul de mari pentru care $t^{imp} \in (0, T)$.

Fie $\left(U^e, 0\right)$ o poziţie de echilibru în contact de zbor şi V_{0T} o perturbaţie a acestui echilibru în viteză strict pozitivă la $t = 0$. Atunci soluţia problemei (4.1) există şi deci şi un moment de impact $t^{imp} > 0$, $t^{imp} \in (o, T)$.

Se consideră o poziţie de echilibru în contact de zbor caracterizată prin deplasarea $U^e = \left(0, \frac{F_N}{W}\right)$ şi reacţiunea $N^e = 0$. Această poziţie de echilibru există numai dacă mărimea A este identic nulă. La dreapta originii există un interval în care soluţia este fie de contact fie în zbor.

În manieră intuitivă se pare că doar perturbaţiile în viteze normale strict negative la $t = 0$ sunt cele care arată că există un interval la dreapta originii în timpul căruia masa este constant în zbor.

În cele ce urmează se arată existenţa unui astfel de interval. Problema mişcării fără contact pentru o perturbaţie în viteze tangenţiale pozitive devine:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N \\ m\ddot{U}_T + K_T U_T + W U_N = F_T \\ U_N(0) = 0, U_T(0) = \frac{F_N}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0N} > 0, \dot{U}_N(0) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Se va arăta că soluţia U_N a acestei probleme este strict negativă pe un interval la dreapta originii. Soluţia problemei (4.3) este:

$$U_N(t) = \frac{V_{0T}}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\left(\frac{\sin(a_1 t)}{a_1} - \frac{\sin(a_2 t)}{a_2}\right) \tag{4.4}$$

$$U_T(t) = \frac{V_{0T}}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\left(\frac{\sin(a_1 t)}{a_1}\varphi_T^1 - \frac{\sin(a_2 t)}{a_2}\varphi_T^2\right) + \frac{F_N}{W} \tag{4.5}$$

Valorile φ_1, φ_2, a_1 şi a_2 sunt date anterior. În vecinătatea lui $t = 0$ expresia deplasării normale este dată de:

$$U_N(t) = \frac{V_{0T}}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\frac{\left(a_2^2 - a_1^2\right)}{6}t^3 + O\left(t^5\right) \tag{4.6}$$

Cantitatea $\varphi_T^1 - \varphi_T^2$ este pozitivă şi mărimea $a_2^2 - a_1^2$ este negativă, deplasarea normală este strict negativă. Aceasta garantează existenţa unui interval la dreapta originii în timpul căruia masa va decola. Relaţia (4.5) arată existenţa unui moment de impact t^{imp} caracterizat ca fiind cea mai mică rădăcină pozitivă a acestei ecuaţii. De mai sus rezultă următoarele: presupunem că într-o fază oarecare a evoluţiei există un moment pentru care soluţia se găseşte în vârful conului lui Coulomb cu o viteză tangenţială pozitivă. Prin urmare acest moment este urmat de o fază de mişcare fără contact şi deci urmează un moment de impact t^{imp}.

Dacă $A = 0$ rezultă soluţia dată de relaţiile (4.4) şi (4.5).

Dacă $A \neq 0$ se studiază iteraţiile „NSCD". Masa zboară dacă mărimea $\left(\dot{U}_N^{i+1}\right)^{liber}$ este strict negativă şi rezultă:

$$\left(\dot{U}_N^{i+1}\right)^{liber} = \frac{1}{\det \tilde{M}}\left\{\left(m + \frac{h^2 K_T}{2}\right)\tilde{F}_N^{i+1} - \frac{h^2 W}{2}\tilde{F}_T^{i+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\det \tilde{M}}\left\{\left(m + \frac{h^2 K_T}{2}\right)\left(-hWU_T^i + hF_N\right) - \frac{h^2 W}{2}\left(m\dot{U}_T^i - hK_T U_T^i + hF_T\right)\right\}$$

Presupunem că la cea de a i -a iteraţie masa se găseşte la vârful conului, rezultă:

$$\left(U_N^{i+1}\right)^{liber} = \frac{h^2}{2\det \tilde{M}}\left\{-m\dot{U}_T^i - \frac{Ah}{W}\right\}$$

Semnul lui $\left(U_N^{i+1}\right)^{liber}$ depinde de semnul lui $-m\dot{U}_T^i$ care este strict negativ. În consecinţă, plecând de la iteraţia $i+1$ masa materială este într-o mişcare fără contact. În plus, rezolvarea problemei asociate:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + WU_T = F_N \\ m\ddot{U}_T + K_T U_T + WU_N = F_T \\ U_N(0) = 0, U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0N}, \dot{U}_N(0) = 0 \end{cases}$$

conduce la:

$$U_N(t) = \frac{1}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\frac{A}{\det K}\left\{\left(\varphi_T^2 + \frac{K_N}{W}\right)\cos(a_1 t) - \left(\varphi_T^1 + \frac{K_N}{W}\right)\cos(a_2 t)\right\}$$
$$+ \frac{\dot{U}_T(\tilde{t})}{\varphi_T^1 - \varphi_T^2}\left\{\frac{\sin(a_1 t)}{a_1} - \frac{\sin(a_2 t)}{a_2}\right\} + \frac{A}{\det K}$$

şi permite demonstrarea existenţei unui moment de impact t^{imp}.
În cazul în care

1. Fie $A \geq 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$ dacă $A > 0$, μ oarecare dacă $A = 0$. Fie V_{0N} o perturbaţie la $t = 0$ în viteze normale negative. Fie $t^{imp} > 0$ un moment de impact astfel încât $\dot{U}_T(t) > 0$. Atunci există $\eta > 0$ astfel încât oricare ar fi $V_{0N} \in (-\eta, 0)$ şi există $\hat{t} > t^{imp}$ cu $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ şi $N_N(\hat{t}) < 0$.
2. Fie $A = 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$. Fie V_{0N} o perturbaţie la $t = 0$ în viteze tangenţiale pozitive ale poziţiei de echilibru în contact şi zbor. Fie $t^{imp} > 0$ un moment de impact astfel încât $\dot{U}_{\bar{T}}\left(t^{imp}\right) > 0$. Atunci există $\eta > 0$ ceea ce arată că oricare ar fi $V_{0T} \in (-\eta, 0)$ şi există $\hat{t} > t^{imp}$ cu $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ şi $N_N(\hat{t}) < 0$.

Se consideră o poziţie de echilibru $\left(U^e, N^e\right)$ caracterizată de $A = 0$ şi $\mu > \frac{K_T}{W}$. Fie V_{0N} o perturbaţie strict negativă a poziţiei de echilibru. Se studiază dinamica problemei (4.1) pe $[0, T]$ pentru T suficient de mare. Aşa cum am arătat mai sus, există un moment de ciocnire t^{imp}. Evoluţia masei materiale după momentul de ciocnire depinde de semnul vitezei tangenţiale $\dot{U}_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) = \frac{dU_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)}{dt}$, deoarece algoritmul „NSCD" se apropie prin viteza calculată de ultimul interval de timp de mişcarea fără contact şi care este o aproximaţie de $\dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)$; U_T fiind definit de relaţia (4.2).

În cazul când viteza tangenţială $\dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)$ este strict pozitivă masa alunecă în sens pozitiv. În timpul acestei faze de alunecare, reacţiunea creşte. Ca efect, forţa exterioară fiind aleasă constantă, în timpul fazei de alunecare a sistemului este regulată şi corespunde unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Deci evoluţia reacţiunii normale e dată de:

$$\text{dacă } U_N(t) \equiv 0, \ \frac{dN_N(t)}{dt} = W\dot{U}_T(t) \tag{4.7}$$

şi depinde de semnul vitezei tangenţiale deoarece termenul de cuplaj W este pozitiv. Masa poate deci atinge vârful conului lui Coulomb, apoi zboară.

Se va arăta că viteza tangenţială se anulează înainte ca masa materială să atingă vârful conului dacă perturbaţia V_{0N} este suficient de mică. Amintind că $U_T = \frac{F_N}{W}$ caracterizează vârful conului, această condiţie se va scrie sub forma:

$$\exists \hat{t} > t^{imp} \text{ astfel încât } \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ cu } U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W} \tag{4.8}$$

Conform rezultatelor de regularitate obţinute anterior, viteza tangenţială este continuă la momentul ciocnirii; deci faza de alunecare pozitivă este descrisă de relaţiile:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) \end{cases}$$

Soluţia acestei probleme este dată de:

$$U_T(t) = \frac{1}{2}\left\{U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right\} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right\} e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

Condiţiile (4.8) se traduc atunci prin condiţia:

$$U_T\left(V_{0N},t^{imp}(V_{0N})\right)+\dot{U}_T^-\left(V_{0N},t^{imp}(V_{0N})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}<0 \qquad (4.9)$$

Rămâne de stabilit existenţa parametrului $\eta>0$ astfel încât oricare ar fi $V_{0N}\in(-\eta,0)$ condiţia (4.9) este satisfăcută. Pentru aceasta, se consideră funcţia V_{0N} definită pentru membrul stâng al relaţiei (4.9) şi se arată că această funcţie admite un zero.

În primul moment se presupune că perturbaţia iniţială negativă este infinitezimală. Fie atunci $V_{0N}=-\xi_1,\ \xi_1>0$. Expresia deplasării normale în faza de mişcare fără contact este dată de:

$$U_N(t)=\frac{N_N^e}{W\left(\varphi_T^1-\varphi_T^2\right)}\{cos(a_1t)-cos(a_2t)\}+\frac{\xi_1}{\left(\varphi_T^1-\varphi_T^2\right)}\left\{\frac{sin(a_1t)\varphi_T^2}{a_1}-\frac{sin(a_2t)\varphi_T^1}{a_2}\right\}$$

ξ_1 fiind suficient de mic, momentul impactului va fi suficient de aproape de zero şi mişcarea fără contact va fi dată de relaţia:

$$U_N(t)=\left\{\frac{N_N^e}{2W\left(\varphi_T^1-\varphi_T^2\right)}\left(a_2^2-a_1^2\right)t-\xi_1\right\}t+O\left(t^3\right)$$

În consecinţă, masa este în contact la momentul $t^{imp}=\dfrac{2W\xi_1\left(\varphi_T^1-\varphi_T^2\right)}{N_N^e\left(a_2^2-a_1^2\right)}$.

Se calculează membrul stâng al lui (4.9) la acest moment t^{imp}

$$U_T\left(\xi_1,t^{imp}(\xi_1)\right)+\dot{U}_T^-\left(\xi_1,t^{imp}(\xi_1)\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}$$

$$=-2\frac{a_1^2\varphi_T^1-a_2^2\varphi_T^2}{a_2^2-a_1^2}\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}\xi_1+\frac{N_N^e}{W}+O\left(\xi_1^2\right)$$

ξ_1 fiind considerat mic şi mărimea $2\dfrac{a_1^2\varphi_T^1-a_2^2\varphi_T^2}{a_2^2-a_1^2}\sqrt{\dfrac{m}{\mu W-K_T}}$ este finită. Semnul acestei mărimi depinde de semnul lui $\dfrac{N_N^e}{W}$ care este strict negativ.

Se va arăta acum, că pentru $V_{0N}=-\xi_2,\xi_2>0$ suficient de mare funcţia definită de membrul stâng al relaţiei (4.9) este strict pozitiv.

$$U_T\left(\xi_2,t^{imp}(\xi_2)\right)+\dot{U}_T^-\left(\xi_2,t^{imp}(\xi_2)\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}$$

$$>U_T\left(\xi_2,t^{imp}(\xi_2)\right)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}>\frac{N_N^e}{W}-\frac{\xi_2\varphi_T^1\varphi_T^2}{\varphi_T^1-\varphi_T^2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}$$

Se constată atunci că pentru:

$$\xi_2 > \frac{\left(\varphi_T^1 - \varphi_T^2\right)a_1 a_2}{(a_1 - a_2)\varphi_T^1\varphi_T^2}\left\{\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{N_N^e}{W}\right\}$$

funcţia definită prin membrul stâng al relaţiei (4.9) este pozitivă. Această funcţie fiind continuă există $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ astfel încât pentru toate $V_{0N} \in (-\eta, 0)$ condiţia (4.9) este satisfăcută.

Raţionamentul este făcut în mod analog în cazul în care A este strict pozitiv. Condiţiile analoage cazului (4.9) sunt:

- Dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$,

$$\left(U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right)^2 + \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}\dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)^2 - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}\dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) < 0$$

- Dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$, $\frac{mW}{2A}U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)^2 + \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) - \frac{F_N}{W} < 0$

- Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$,

$$U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}\dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} < 0$$

Demonstraţia punctului doi este identică cu precedenta. Sistemul care descrie alunecarea pozitivă după impact este în acest caz:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T\left(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})\right) \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0T})\right) \end{cases}$$

Soluţia problemei este dată de:

$$U_T(t) = \frac{1}{2}\left\{U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right\}e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{U_T\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right) + \dot{U}_T^-\left(V_{0N}, t^{imp}(V_{0N})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right\}e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}$$
$$+ \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

şi analog condiţiei (4.7) se scrie:

$$U_T\left(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})\right) + \dot{U}_T^-\left(V_{0T}, t^{imp}(V_{0T})\right)\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} < 0$$

de unde se deduce asemănător cazului precedent existenţa unui parametru $\eta > 0$ astfel încât:

$$\forall V_{0T} \in (0,\eta), \exists \hat{t} > t^{imp}, \text{ astfel încât } \begin{cases} \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \\ N_N(\hat{t}) < 0 \end{cases}$$

Se mai pot considera şi următoarele afirmaţii:

1. Fie $A \geq 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$ dacă $A = 0$ şi oricare ar fi μ dacă $A > 0$. Fie V_{0T} o perturbaţie la $t = 0$ în viteze tangenţiale la stări de echilibru. Atunci există $\eta > 0$ astfel încât oricare ar fi $V_{0T} < \eta$ există $\hat{t} > 0$ ceea ce implică $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ cu $N_N(\hat{t}) < 0$.
2. Fie $A = 0$ cu $\mu = \frac{K_T}{W}$, V_{0T} o perturbaţie la $t = 0$ în viteze tangenţiale negative a stării de echilibru în contact cu zbor. Atunci există $\hat{t} > 0$ ceea ce implică $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ cu $N_N(\hat{t}) < 0$.

Se consideră o poziţie de echilibru (U^e, N^e). Perturbaţiile în viteze tangenţiale pentru soluţiile de echilibru în contact fără zbor conduc la o situaţie de alunecare. În acest caz particular soluţia de echilibru în contact cu zbor, în viteze tangenţiale negative conduc la alunecare deoarece perturbaţiile în viteze tangenţiale pozitive conduc la o fază de mişcare fără contact.

Arătăm că atunci când perturbaţia V_{0T} nu este prea mare viteza tangenţială se anulează înainte ca punctul material să atingă vârful conului. În timpul fazei de alunecare pozitivă, mişcarea este dată ca soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{N_N^e}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} > 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

În funcţie de coeficientul de frecare soluţia problemei se scrie.

- Dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$,
$$U_T(t) = \left\{ \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{N_N^e}{W} \right\} \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t \right) + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t \right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \tag{4.11}$$

- Dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$, $U_T(t) = -\frac{A}{2mW}t^2 + V_{0T}t + \frac{F_N + N_N^e}{W}$ (4.12)

- Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$, $U_T(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{W(K_T-\mu W)} + \frac{N_N^e}{W} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}\right\} e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{A}{W(K_T-\mu W)} + \frac{N_N^e}{W} - V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}\right\} e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}$$

$$+\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \qquad (4.13)$$

În timpul acestei faze de alunecare, deplasarea creşte. Masa se opreşte din alunecare înainte să atingă vârful conului dacă condiţia următoare este satisfăcută:

există $\hat{t} > 0$ astfel încât $\dot{U}_T(t) = 0$ cu $U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W}$ (4.14)

Condiţiile (4.14) se traduc în funcţie de valoarea coeficientului de frecare prin condiţiile pe care le dăm mai jos:

Dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$, $0 < V_{0T} < -\frac{N_N^e}{W}\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}$

Dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$, $0 < V_{0T} < \sqrt{\frac{-2AN_N^e}{mW^2}}$

Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$, $0 < V_{0T} < -\left(\frac{A}{(K_T - \mu W)W} + \frac{N_N^e}{W}\right)\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}$ (4.15)

Relaţiile (4.15) generează deci explicit valoarea lui η astfel încât, dacă perturbaţia $V_{0T} \in (0,\eta)$ atunci viteza se anulează la momentul $\hat{t}$ înainte de atingerea vârfului conului.

Se consideră o perturbaţie V_{0T} strict negativă. Din relaţia (4.6) reacţiunea normală descreşte. Mişcarea este descrisă de către sistemul:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{N_N^e}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0 \end{cases}$$

a cărei soluţie este:

$$U_T(t) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{N_N^e}{W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + $$
$$+ V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \qquad (4.16)$$

Viteza se anulează în cazul în care momentul $\hat{t}$ verifică:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right)=\left(\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\frac{1}{V_{0T}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right)$$

şi evident $N_N(\hat{t})<0$ pentru toate $V_{0T}<0$.

Rezultatul de la punctul doi se obţine printr-un raţionament analog cu cazul perturbaţiilor în viteze tangenţiale negative.

În anumite situaţii se pot întâlni şi următoarele cazuri:

1. Fie $A \geq 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$. Există $\hat{t}>0$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t})=0$ cu $\dot{U}_N(\hat{t})=0$. Dacă există o stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e,\tilde{N}^e\right)$ astfel încât $N_N(\hat{t})=\tilde{N}_N^e$, atunci oricare ar fi $t>\hat{t}$, $\dot{U}_T(t)\equiv 0$ şi $\dot{U}_N(t)\equiv 0$.
2. Fie $A=0$ cu $\mu=\frac{K_T}{W}$. Există $\hat{t}>0$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t})=0$ cu $\dot{U}_N(\hat{t})=0$. Atunci oricare ar fi $t>\hat{t}$, $\dot{U}_T(t)\equiv 0$ şi $\dot{U}_N(t)\equiv 0$.

Este uşor aici de studiat iteraţiile succesive ale algoritmului NSCD. Rezultatul decurge imediat din rezultatul de convergenţă stabilit anterior.

Se presupune că există un moment de contact $\hat{t}>0$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t})=0$ şi notând cu i iteraţia astfel încât $\hat{t}\in\left[t_K^i,t_K^{i+1}\right]$ pentru K suficient de mare. Se arată că dacă există o stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e,\tilde{N}^e\right)$ astfel încât $N_N(\hat{t})=\tilde{N}_N^e$ atunci oricare ar fi $j>i$, $\dot{U}_{KT}^j\equiv 0$. Prin urmare pentru simplificarea notaţiilor se va omite indicele K.

Pentru a demonstra că pentru toate $j>i$, $\dot{U}_T^j\equiv 0$ se arată că plecând de la iteraţia $i+1$ masa intră într-o buclă de contact blocat. Algoritmul prezentat la capitolul doi indică că trebuie demonstrat că relaţiile următoare:

$$\tilde{F}_T^j-\mu\tilde{F}_N^j<0 \tag{4.17}$$

$$\tilde{F}_T^j+\mu\tilde{F}_N^j>0 \tag{4.18}$$

sunt verificate simultan pentru toate $j>i$.

Mărimile $\tilde{F}_T^j$ şi $\tilde{F}_N^j$ au fost definite anterior.

Înainte de toate se presupune că la iteraţiile precedente lui i masa alunecă în sens pozitiv. Ca şi la iteraţia $i+1$ această alunecare încetează conform tabelului 4.1, la $\tilde{F}_T^{i+1}-\mu\tilde{F}_N^{i+1}<0$. Rămâne să se verifice că relaţia (4.18) este satisfăcută pentru $j=i+1$. Prin definiţie:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1}+\mu\tilde{F}_N^{i+1}&=m\dot{U}_T^i-h\left\{(K_T+\mu W)U_T^i+(F_T+\mu F_N)\right\}\\&>-h\left\{(K_T+\mu W)U_T(\hat{t})+(F_T+\mu F_N)\right\}\end{aligned}$$

$$> -h\left\{(K_T + \mu W)\left(\frac{F_N}{W} + \frac{\tilde{N}_N^e}{W}\right) + (F_T + \mu F_N)\right\}$$

$$> -h\left\{\frac{A}{W} + (K_T + \mu W)\frac{\tilde{N}_N^e}{W}\right\}$$

În consecinţă, dacă $A = 0$ avem $\tilde{N}_N^e \in (-\infty, 0]$ şi dacă $A > 0$, $\tilde{N}_N^e \le -\frac{A}{K_T + \mu W}$.

Suma $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ este deci strict pozitivă. Astfel la intrarea în bucla de contact blocată avem $\dot{U}^{i+1} \equiv 0$ ceea ce implică $\dot{U}^{i+1} = \dot{U}^i$. Prin urmare:

$$\tilde{F}_T^j + \mu\tilde{F}_N^j = -h\left\{(K_T + \mu W)U_T^i + (F_T + \mu F_N)\right\} > 0$$

şi

$$\tilde{F}_T^j - \mu\tilde{F}_N^j = -m\dot{U}_T^i + \tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < 0$$

ceea ce permite a demonstra că relaţiile (4.17) şi (4.18) sunt satisfăcute pentru toate $j > i$. Astfel, $\dot{U}^j \equiv 0$ pentru toate $j > i$.

Se presupune că iteraţiile precedente lui $i + 1$ corespund la o fază de alunecare negativă. Relaţia (4.18) este evident satisfăcută la iteraţia $i + 1$ conform tabelului 4.1. În concluzie este suficient de stabilit că mărimea $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ este strict negativă.

Avem

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} = m\dot{U}_T^i - h\left\{(K_T - \mu W)U_T^i + (F_T - \mu F_N)\right\}$$

$$< -h\left\{(K_T - \mu W)U_T^i + (F_T - \mu F_N)\right\}$$

dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -h\left\{(K_T - \mu W)U_T(\hat{t}) + (F_T - \mu F_N)\right\} < -h\left\{\frac{A}{W} + (K_T - \mu W)\frac{N_N^e}{W}\right\} < 0$$

$$N_N^e \in \left[-\frac{A}{K_T - \mu W}, -\frac{A}{K_T + \mu W}\right]$$

dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$, $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -h\frac{A}{W} < 0$

dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$, $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -h\left\{(K_T - \mu W)U_T^i + (F_T - \mu F_N)\right\}$

$$< -h\left\{(K_T - \mu W)\frac{F_N}{W} + (F_T - \mu F_N)\right\}$$

$$< -h\frac{A}{W} < 0$$

Mărimea $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ este strict negativă. Astfel, iteraţia $i+1$ se găseşte la interiorul buclei de contact blocat ceea ce implică $\dot{U}^{i+1} \equiv 0$ şi deci $U^{i+1} = U^i$. La fel ca şi în cazul precedent se obţine $\tilde{F}_T^j - \mu\tilde{F}_N^j < 0$ şi $\tilde{F}_T^j + \mu\tilde{F}_N^j > 0$ pentru toate $j > i$; ceea ce dă rezultatul aşteptat.

Dacă $A = 0$ şi $\mu = \dfrac{K_T}{W}$ există o iteraţie $i+1$ la care alunecarea negativă se opreşte. În consecinţă, din tabelul 4.1 mărimea $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ este strict pozitivă.

La aceeaşi iteraţie

$$\begin{aligned}\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i + h(F_T - \mu F_N)\\ &< -h\frac{A}{W} = 0\end{aligned}$$

Astfel, $\dot{U}^{i+1} = 0$. La fel ca şi în cazul precedent se obţine $\tilde{F}_T^j - \mu\tilde{F}_N^j < 0$ şi $\tilde{F}_T^j + \mu\tilde{F}_N^j > 0$ pentru toate $j > i$; ceea ce implică că viteza $\dot{U}^j$ este identic nulă pentru orice $j > i$.

Fie $A > 0$. Se studiază problema 4.1 pe $\left[0, \hat{T}\right]$plecând de la o stare în afara echilibrului, deci:

$$\begin{cases} U_N(0) = 0, U_T(0) = U_T^e + U_{0T} \\ N_T(0) = \pm\mu N_N(0) \neq 0 \\ \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Atunci:

- Dacă $\mu < \dfrac{K_T}{W}$ există η_1 şi η_2 pozitive $\eta_2 > \eta_1$ astfel încât pentru orice perturbaţie $U_{0T} \in (-\eta_1, \eta_2)$ există $\hat{t} > 0$ pentru care $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$, $N_N(\hat{t}) < 0$;
- Dacă $\mu > \dfrac{K_T}{W}$, există $\eta > 0$ astfel încât pentru orice perturbaţie $U_{0T} \in (-\infty, \eta)$ există $\hat{t} > 0$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ cu $N_N(\hat{t}) < 0$.

Se consideră mai întâi cazul $N_T(0) = +\mu N_N(0)$ cu $\mu < \dfrac{K_T}{W}$. În funcţie de valoarea lui U_{0T}, masa poate să alunece în sens pozitiv sau să se găsească într-o stare de echilibru.

Pentru o perturbaţie $U_{0T} \in \left[-\dfrac{A}{W(K_T - \mu W)} - \dfrac{N_N^e}{W}, -\dfrac{A}{W(K_T + \mu W)} - \dfrac{N_N^e}{W}\right]$ există o stare de echilibru astfel încât $N_N(0) = \tilde{N}_N^e$. Dacă pentru $U_{0T} < -\dfrac{A}{W(K_T - \mu W)} - \dfrac{N_N^e}{W}$ nu există stare de echilibru, masa alunecă spre dreapta.

Din relaţia 4.6 reacţiunea normală creşte. Masa este capabilă să atingă vârful conului de frecare cu o viteză pozitivă, apoi zboară. Se va demonstra că viteza tangenţială se anulează înainte ca masa materială să atingă vârful conului de frecare dacă perturbaţia U_{0T} de la poziţia de echilibru nu este suficient de mare. În timpul alunecării bilaterale mişcarea este descrisă de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T^e + U_{0T} \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Soluţia este:

$$U_T(t) = \left(U_T^e + U_{0T} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \tag{4.19}$$

şi există un moment $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\pi$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. La acest moment $N_N(\hat{t})$ este strict negativă. Dar,

$$\begin{aligned} U_T(\hat{t}) &= -\frac{N_N^e}{W} - U_{0T} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ &= -2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{N_N^e}{W} - U_{0T} + \frac{F_N}{W} \end{aligned}$$

Astfel, dacă $U_{0T} > -2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{N_N^e}{W}$ alunecarea se opreşte înainte ca reacţiunea să se anuleze. În consecinţă, se obţin două valori $\eta_1 = 2\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{N_N^e}{W} > 0$ şi $\eta_2 = -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{N_N^e}{W} > 0$ astfel încât pentru toate $U_{0T} \in (-\eta_1, \eta_2)$, $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ cu $N_N(\hat{t}) < 0$.

Dacă acum, $\mu \geq \frac{K_T}{W}$ fazele de alunecare pozitive sunt imposibile. Avem direct stare de echilibru pentru care $N_N(0) = \tilde{N}_N^e$ oricare ar fi $U_{0T} \in \left(-\infty, -\frac{A}{W(K_T + \mu W)} - \frac{N_N^e}{W}\right]$.

Se studiază acum cazul $N_T(0) = -\mu N_N(0)$. Dacă coeficientul de frecare μ este inferior lui $\frac{K_T}{W}$ masa poate să alunece fie în sens negativ, fie se găseşte într-o stare de echilibru, în funcţie de valorile lui U_{0T}. De fapt, în general, domeniul admisibil al reacţiunilor normale este $\left[-\frac{A}{K_T-\mu W},-\frac{A}{K_T+\mu W}\right]$.

Astfel, dacă perturbaţia $U_{0T}\in\left[-\frac{A}{W(K_T-\mu W)}-\frac{N_N^e}{W},-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}-\frac{N_N^e}{W}\right]$ există o stare de echilibru astfel că $N_N(0)=\tilde{N}_N^e$. În concluzie dacă perturbaţia $U_{0T}\in\left(-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}-\frac{N_N^e}{W},-\frac{N_N^e}{W}\right)$ masa se găseşte în alunecare negativă şi problema de alunecare bilaterală corespunzătoare devine:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T+(K_T+\mu W)U_T=F_T+\mu F_N \\ U_T(0)=U_T^e+U_{0T} \\ \dot{U}_T(0)=0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Fie

$$U_T(t)=\left(U_T^e+U_{0T}-\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}t\right)+\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}$$

Există un moment $\hat{t}=\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\pi$ pentru care $\dot{U}_T(\hat{t})=0$. Masa materială fiind în alunecare negativă, reacţiunea descreşte conform relaţiei 4.6, în consecinţă $N_N(\hat{t})<0$. Astfel, există $\eta_1=\frac{A}{W(K_T-\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}>0$ şi $\eta_2=-\frac{N_N^e}{W}>0$ astfel încât oricare ar fi $U_{0T}\in(-\eta_1,\eta_2)$, există $\hat{t}>0$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t})=0$ cu $N_N(\hat{t})<0$.

Dacă coeficientul de frecare $\mu\geq\frac{K_T}{W}$ atunci pentru orice perturbaţie $U_{0T}\in\left(-\infty,-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}-\frac{N_N^e}{W}\right]$ există o stare de echilibru pentru care avem $N_N(0)=\tilde{N}_N^e$. Prin urmare, dacă $U_{0T}\in\left(-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}-\frac{N_N^e}{W},-\frac{N_N^e}{W}\right)$ mişcarea masei materiale este descrisă de către o problemă analogă problemei 4.20 şi se obţine un moment $\hat{t}$ astfel încât viteza se anulează. În concluzie, pentru $\eta=-\frac{N_N^e}{W}>0$ alunecarea are loc pentru orice perturbaţie $U_{0T}\in(-\infty,\eta)$, există $\hat{t}>0$ cu $\dot{U}_T(\hat{t})=0$ şi $N_N(\hat{t})<0$.

Fie $A > 0$ şi $\mu < \frac{K_T}{W}$. Se studiază dinamica problemei (4.1) plecând de la o stare în afara echilibrului: $\forall t > 0,\ U_N \equiv 0$:

$$\begin{cases} U_N(0) = 0, U_T(0) = U_{0T} \\ N_T(0) = \pm\mu N_N(0) \neq 0 \\ \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Fiind t_i, $i = 1,\dots,n$ momentele $t_1 < \dots < t_n$ astfel că:

$$\dot{U}_T(t_i) = 0 \text{ cu } N_N(t_i) \neq N_N^e, i = 1,\dots,n$$

$$sign(\dot{U}_T(t_i)) = sign(\dot{U}_T(t_{i+2})),\ i = 0,\dots,n-2;$$

Atunci:

- Dacă $sign(\dot{U}_T(t_j)) > 0,\ j = i, i+2 : U_T(t_i) > U_T(t_{i+2}),\ i = 1,\dots,n;$
- Dacă $sign(\dot{U}_T(t_j)) < 0,\ j = i, i+2 : U_T(t_i) < U_T(t_{i+2}),\ i = 1,\dots,n;$

Demonstraţia acestei afirmaţii este asemănătoare cu cea anterioară caracterizată de $N_T(0) = +\mu N_N(0)$ sau $N_T(0) = -\mu N_N(0)$. Se va prezenta numai cazul unicităţii.

În acest caz există o fază de alunecare pozitivă la dreapta originii şi evoluţia în timpul acestei faze este soluţia sistemului:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_{0T} \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

Soluţia problemei este:

$$U_T(t) = \left(U_{0T} - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \tag{4.22}$$

Relaţia (4.22) arată existenţa unui moment $t_1 > 0$ astfel că $\dot{U}_T(t_1) = 0$ cu $U_T(t_1) = -U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$. În acest moment reacţiunea normală devine $N_N(t_1) = -WU_{0T} - \frac{2A}{K_T - \mu W} + F_N$. Din ipoteza $N_N(t_1) \neq N_N^e$ ceea ce implică:

$$U_{0T} < -\frac{2A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{F_N}{W}$$

Viteza tangenţială fiind continuă, mişcarea va trece la o fază de alunecare negativă dată prin:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = -U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Soluţia în această fază este:

$$U_T(t) = \left(-U_{0T} + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \right) cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t \right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

Relaţia de mai sus arată existenţa unui moment $t_2 > t_1$ astfel că $\dot{U}_T(t_2 = 0)$.

În acest moment deplasarea tangenţială este egală cu $U_T(t_2) = -U_{0T} - 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Din ipoteza $N_N(t_2) \neq N_N^e$ masa va aluneca în sens pozitiv şi evoluţia în timpul acestei faze este descrisă de către o problemă analogă problemei 4.21, dar cu condiţia iniţială care acum este: $U_T(0) = U_{0T} - 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} + 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Există un moment $t_3 > t_2$ astfel că $\dot{U}_T(t_3) = 0$ cu $U_T(t_3) = -U_{0T} + 4\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$. Nu rămâne atunci decât de verificat că $U_T(t_1) > U_T(t_3)$, adică $\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} > \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$ care este evident satisfăcută deoarece $A > 0$ şi $\mu < \frac{K_T}{W}$. Raţionamentul precedent se extinde la toate momentele $t_i, i = 1,..., n$ şi permite obţinerea concluziei dorite.

4.3 Stabilitatea stărilor

Studiul stabilităţii stărilor este o problemă generală care ne permite să punem în evidenţă condiţiile în care masa materială, în evoluţia sa poate fi considerată ca stare de echilibru. Evoluţia particulei materiale poate fi cu alunecare spre dreapta sau spre stânga şi există momente în care particula poate sării schimbând astfel condiţia alunecării spre dreapta sau spre stânga.

Condiţiile pentru o stare de echilibru obţinute anterior, s-au obţinut pentru $A < 0$. În plus, se ştie că nu există o stare de echilibru atunci când particula trece de la alunecare la zbor.

Poziţia de echilibru în contact de zbor caracterizată de $A = 0$ şi $\mu < \frac{K_T}{W}$ este asimptotic stabilă.

Exponentul $"e"$ semnifică ca şi în cazul precedent o stare de echilibru şi indicele zero o perturbaţie de echilibru la $t = 0$; se va stabili implicaţiile următoare:

există $\eta > 0, \begin{cases} \|V_0\| < \eta \\ \|U^e - U_0\| < \eta \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} lim_{t \to +\infty} \|\dot{U}(t)\| = 0 \\ lim_{t \to +\infty} \|U^e - U(t)\| = 0 \end{cases}$

Demonstrarea acestei afirmaţii se face în următoarele etape:

Etapa 1

Sunt considerate numai perturbaţiile în viteze.

Se demonstrează în ceea ce urmează că stadiul perturbaţiilor în viteză tangenţială negativă cuprind stadiul perturbaţiilor în viteză tangenţială pozitivă. Aceste constatări arată că este suficient să se stabilească următoarele implicaţii:

există $\eta > 0, V_{0T} \in (-\eta, 0]$ rezultă $\begin{cases} lim_{t \to +\infty} |U_N(t)| = 0 \\ lim_{t \to +\infty} \left| U_T(t) - U_T^e \right| = 0 \end{cases}$

Înainte de toate se va demonstra faptul că pentru cazul perturbaţiilor în viteză tangenţială cuprind perturbaţiile în viteză tangenţială pozitivă. Pentru aceasta se arată că următor unei perturbaţii V_{0T} negative există un moment t_1^{punct} cu $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right) > 0$. Deci plecând de la momentul t_1^{punct} starea rămâne la evoluţia soluţiei de echilibru perturbată în viteze tangenţiale pozitive. Urmează o perturbaţie în viteze tangenţiale negative, evoluţia fiind descrisă de ecuaţiile de mai jos.

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Soluţia problemei (4.23) se exprimă:

$$U_T(t) = V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\, sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \tag{4.24}$$

Expresia (4.24) permite obţinerea unui moment $\hat{t}$ unde viteza se anulează. Pentru că la acest moment nu există poziţie de echilibru, această fază de alunecare în sens negativ se succede unei faze de alunecare în sens pozitiv. În timpul celei de a doua faze mişcarea este obţinută ca soluţia următorului sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = V_{0T}\sqrt{\dfrac{m}{K_T + \mu W}} + \dfrac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Rezultă:

$$U_T(t) = V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\, cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

Există atunci un moment t_1^{punct} astfel că masa se găseşte la vârful conului de frecare. La acest moment se verifică că:

$$U_T\left(t_1^{punct}\right) = \frac{F_N}{W}$$

Fie $V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\cos\left(\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{m}}t_1^{punct}\right)=0$ sau $A=K_T F_N-WF_T=0$. Ceea ce implică $t_1^{punct}=\sqrt{\frac{m}{K_T-\mu W}}\frac{\pi}{2}$. La acest moment avem: $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)=-V_{0T}\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{K_T+\mu W}}>0$. În consecinţă la momentul t_1^{punct} starea de echilibru rămâne la evoluţia soluţiei de echilibru perturbată în viteze tangenţiale pozitive.

Etapa 2

Se va arăta că evoluţia particulei materiale cuprinde o succesiune de faze de alunecare şi faze de mişcare fără contact. Fie t_i^{punct} un moment la care reacţiunea atinge vârful conului de frecare, cum s-a calculat la etapa 1. Evoluţia ulterioară este atunci aceea a existenţei unei faze de mişcare fără contact, un moment de ciocnire t_i^{imp}, o fază de alunecare apoi un nou moment t_{i+1}^{punct}.

De la momentul t_i^{punct}, relaţia (4.5) permite caracterizarea deplasării în viteză la momentul ciocnirii. Aceasta va fi:

$$U_T\left(t_i^{imp}\right)=\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1}+\frac{F_N}{W}\text{, cu } \sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)<0$$

$$\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)=\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\cos\left(a_1 t_i^{imp}\right)$$

Evoluţia masei materiale la plecarea de la momentul t_i^{imp} depinde de semnul vitezei tangenţiale la momentul ciocnirii

$$\dot{U}_T\left(\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right),t_i^{imp}\left(\dot{U}\left(t_i^{punct}\right)\right)\right)=\frac{dU_T\left(\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right),t_i^{imp}\left(\dot{U}\left(t_i^{punct}\right)\right)\right)}{dt}$$

pe care algoritmul NSCD o aproximează prin viteza calculată la ultimul pas de timp de mişcare fără contact şi care este o aproximaţie de $\dot{U}_T^{-}\left(V_T\left(t_i^{punct}\right),t_i^{imp}\left(V_T\left(t_i^{punct}\right)\right)\right)$. Deplasarea care intervine în această expresie U_T este definită de relaţia (4.2). Semnul acestei viteze notată prin $\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)$ depinde de coeficienţii matricei de rigiditate.

Dacă $\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)>0$ alunecarea este pozitivă. În timpul acestei faze mişcarea particulei materiale este dată de soluţia sistemului:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T\left(t_i^{imp}\right) \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right) \end{cases} \tag{4.25}$$

Prin translatarea condiţiilor iniţiale se poate determina un $\beta < 0$ astfel că această problemă de mai sus este echivalentă cu:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \beta \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

Soluţia acestui sistem este:

$$U_T(t) = \beta \cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

şi masa materială atinge punctul conului de frecare la momentul t_{i+1}^{punct} dacă relaţia următoare este satisfăcută:

$$U_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = \frac{F_N}{W}.$$

Se obţine în consecinţă $t_{i+1}^{punct} = \sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}\frac{\pi}{2}$.

Rezultă $\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = -\eta\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} > 0$

Dacă viteza la momentul ciocnirii este pozitivă masa materială atinge punctul conului de frecare cu o viteză strict pozitivă. Dacă $\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right) < 0$ alunecarea este pozitivă. În timpul acestei faze, mişcarea este soluţia sistemului:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = U_T\left(t_i^{imp}\right) \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right) \end{cases}$$

a cărui soluţie este:

$$U_T(t) = \left(U_T\left(t_i^{imp}\right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t\right) + \dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}} t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

Această expresie arată existenţa unui moment $\hat{t}_i$ astfel că $\dot{U}_T(\hat{t}_i) = 0$. $N_N(\hat{t}_i)$ este atunci strict negativă. Această fază de alunecare negativă se continuă print-o fază de alunecare pozitivă. Evoluţia este descrisă de un sistem analog cu (4.26). Rezultă, că dacă viteza la momentul de ciocnire este negativă masa materială atinge punctul conului de frecare cu o viteză strict pozitivă.

Oricare ar fi semnul vitezei la momentul ciocnirii există, deci un moment t_{i+1}^{punct} pentru care viteza tangenţială este pozitivă. Există un moment t_{i+1}^{imp}, deci evoluţia sistemului este constituită dintr-o succesiune de faze de mişcare fără contact şi de alunecare.

Etapa 3

Fie t_i^{punct} şi t_{i+1}^{punct} două momente consecutive astfel încât $U_T\left(t_j^{punct} = \frac{F_N}{W}\right)$, $j = i, i+1$, $\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$.

Dacă $\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right) > 0$ mişcarea particulei materiale este de forma:

$$U_T(t) = \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right)$$
$$+\sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)cos\left(a_1 t_i^{imp}\right)sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

Din etapa 2, există t_{i+1}^{punct} astfel că $U_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = \frac{F_N}{W}$. La acest moment expresia vitezei este următoarea:

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{puncte}\right) = \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\left\{-\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}\frac{sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t_{i+1}^{punct}\right)\right.$$
$$\left. + cos\left(a_1 t_i^{imp}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t_{i+1}^{punct}\right)\right\}$$

Dar $\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} < a_1$ şi $sin\left(a_1 t_i^{imp}\right) < 0$ devine

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$$
$$\left\{- sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t_{i+1}^{punct}\right) + cos\left(a_1 t_i^{imp}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t_{i+1}^{punct}\right)\right\}$$
$$< \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)cos\left(a_1 t_i^{imp} + \sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t_{i+1}^{punct}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right) \qquad (4.27)$$

Dacă $\dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right) < 0$ evoluţia este descrisă de sistemul (4.27) şi, ca şi în cazul precedent această problemă este echivalentă cu:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} + \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\dfrac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} + \beta;\ \beta > 0 \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

Soluţia este dată de:

$$U_T(t) = \left(\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} + \beta\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

Rezultă existenţa unui moment $\hat{t}_i$ astfel că viteza se anulează. Această fază de alunecare negativă este urmată de o fază de alunecare pozitivă a cărui condiţii iniţiale sunt date:

$$\left(U_T(0), \dot{U}_T(0)\right) = \left(-\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} - \beta + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}, 0\right)$$

Deplasarea corespunzătoare acestei faze devine:

$$U_T(t) = -\left(\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} + \beta\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

Masa materială atinge vârful conului de frecare la momentul $t_{i+1}^{punct} = \sqrt{\dfrac{m}{K_T - \mu W}}\dfrac{3\pi}{2}$ şi avem:

$$\begin{aligned} \dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) &= -\left(\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1} + \beta\right)\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \\ &< -\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_i^{imp}\right)}{a_1}\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} \\ &< \frac{\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)}{a_1}\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}} < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ceea ce arată că oricare ar fi semnul vitezei la momentul ciocnirii, masa materială atinge vârful conului de frecare cu o viteză pozitivă $\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$.

Etapa 4

Fie t_{i+1}^{punct} un moment astfel că $U_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = \dfrac{F_N}{W}$, i starea numărului de cicluri de alunecare fără contact. Atunci $\lim\limits_{i \to +\infty} \dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = 0$.

Din etapa 3, expresia vitezei la momentul t_{i+1}^{punct} depinde de semnul vitezei la momentul ciocnirii, dar expresiile (4.27) şi (4.28) arată că se poate găsi pentru fiecare i un γ_i astfel că:

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \gamma_i \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$$

Rezultă:

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \gamma_i \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right) \text{ cu } \gamma = \sup_{i \in N} \gamma_i < 1$$

În consecinţă $\lim\limits_{i \to +\infty} \dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = 0$.

<u>Etapa 5</u> Concluzii

În urma unei perturbaţii în viteză tangenţială negativă poziţia de echilibru este alunecarea iminentă, etapele 1 şi 2 arată că masa trece printr-o succesiune de faze de mişcare fără contact şi de alunecare. Etapele 3 şi 4 arată că atunci când masa materială se găseşte într-un punct al conului de frecare viteza tangenţială tinde spre zero când timpul tinde la infinit. Rezultă că:

$$\lim_{t \to +\infty} \left|U_T(t) - U_T^e\right| = 0 \text{ şi } \lim_{t \to +\infty} \left|U_N(t)\right| = 0$$

Starea de echilibru în contact cu zbor $\underline{U}^{zbor} = \left(0, \frac{F_N}{W}\right)$, $\underline{N}^{zbor} = 0$ caracterizată de $A = 0$ şi $\mu = \frac{K_T}{W}$ este stabilă în sens Lyapunov.

În cele ce urmează demonstrăm următoarea relaţia:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \left\|V_0\right\| < \eta \Rightarrow \left\|U(t) - U^{zbor}\right\| < \varepsilon$$

Evoluţia masei materiale în contact cu zbor va fi aceeaşi pentru perturbaţiile în viteză normală compatibile cu legăturile unilaterale şi pentru perturbaţiile în viteză tangenţială pozitivă, este suficient de demonstrat următoarea relaţie:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \left|V_{0T}\right| < \eta \Rightarrow \left|U_T(t) - U_T^{zbor}\right| < \varepsilon \qquad (4.29)$$

Pentru perturbaţiile în viteze tangenţiale negative dorim să demonstrăm că relaţia 4.29 este îndeplinită. Echilibrul în contact cu zbor este dat de către $U^{zbor} = \left(0, \frac{F_N}{W}\right)$ şi $N^{zbor} = 0$. După o perturbaţie V_{0T} negativă, prima fază de alunecare este soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \dfrac{WF_T + K_T F_N}{W} \\ U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0 \end{cases}$$

a cărei soluţie este:

$$U_T(t) = V_{0T}\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}t\right) + \frac{F_N}{W},$$

viteza se anulează pentru $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{2K_T}}\frac{\pi}{2}$. Pentru $A = 0$ şi $\mu = \frac{K_T}{W}$ domeniul admisibil al reacţiunilor normale corespund la $\Re^-$. În consecinţă, există o stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e, \tilde{N}^e\right)$ astfel încât $\tilde{N}^e = N(\hat{t})$. Pentru orice $t > \hat{t}$ viteza este identic nulă şi oricare ar fi $t > \hat{t}$ avem:

$$\left|U_T^{zbor} - U_T(t)\right| = \left|U_T^{zbor} - U_T(\hat{t})\right| < -V_{0T}\sqrt{\frac{m}{2K_T}}$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ relaţia 4.29 este satisfăcută cu $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{2K_T}{m}}$.

Pentru perturbaţiile în viteză tangenţială pozitivă arătăm îndeplinirea condiţiilor cerute. Se consideră o perturbaţie tangenţială V_{0T} pozitivă, astfel există un moment de impact $t_1^{imp} > 0$.

Evoluţia masei materiale la plecarea de la momentul t_1^{imp} depinde de semnul vitezei tangenţiale $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right)$. Dacă viteza la momentul impactului $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right)$ este negativă evoluţia pe un interval la dreapta lui t_1^{imp} verifică ecuaţia diferenţială:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \dfrac{WF_T + K_T F_N}{W} \\ U_T(0) = U_T\left(t_1^{imp}\right) \\ \dot{U}_T(0) = \dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) < 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

Deplasarea şi viteza la momentul impactului sunt date de:

$$U_T\left(t_1^{imp}\right) = V_{0T}\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1} + \frac{F_N}{W},$$

$$\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) = V_{0T}\cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)$$

şi soluţia sistemului 4.29 verifică:

$$U_T(t) = V_{0T}\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}t\right) + V_{0T}\cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}t\right) \tag{4.31}$$

Există atunci un moment $\hat{t}$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. Domeniul admisibil al reacţiunilor normale fiind încă $\Re^-$, există o stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e, \tilde{N}^e\right)$ astfel încât $\tilde{N}^e = N(\hat{t})$. Pentru orice $t > \hat{t}$ viteza este identic nulă şi astfel:

$$\forall t > \hat{t}, \left|U_T^{zbor} - U_T(t)\right| = \left|U_T^{zbor} - U_T(\hat{t})\right| < V_{0T}\left(\frac{1}{a_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}}\right)$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, relaţia 4.29 este satisfăcută cu $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2} \dfrac{a_1\sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + a_1\sqrt{m}}$. Dacă viteza la momentul impactului $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right)$ este pozitivă, faza de alunecare pozitivă care urmează t_1^{imp} se face la viteză constantă $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right)$. Există atunci un moment t_2^{punct} astfel încât $U_T\left(t_2^{punct}\right) = \dfrac{F_N}{W}$ cu $\dot{U}_T\left(t_2^{punct}\right) = \dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) > 0$, apoi un moment de impact $t_2^{imp} > t_2^{punct}$.

Fie t_i^{imp} şi t_{i+1}^{imp} cele două momente de impact consecutive. Arătăm că există un moment de impact t_l^{imp} astfel încât $\dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right) > 0$ şi $\dot{U}_T\left(t_l^{imp}\right) < 0$. Presupunem că pentru orice $i < l$, $\dot{U}_T\left(t_j^{imp}\right) > 0, j = i, i+1$. Avem:

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{imp}\right) = \dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)\cos\left(a_1 t_{i+1}^{imp}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{imp}\right)$$

În consecinţă, valoarea vitezei între cele două faze consecutive de alunecare pozitivă se diminuează. În timpul oricărei faze de alunecare viteza este constantă şi masa atinge punctul conului de frecare la momentul t_{j+1}^{punct} cu viteza $\dot{U}_T\left(t_{j+1}^{punct}\right) = \dot{U}_T\left(t_j^{imp}\right)$. În plus, deplasarea tangenţială satisface:

$$U_T(t) = \dot{U}_T\left(t_j^{imp}\right)t + U_T\left(t_j^{imp}\right)$$

Atunci durata alunecării pozitive este:

$$\Delta t_{j+1}^{punct} = -\frac{\dot{U}_T\left(t_j^{imp}\right)}{\dot{U}\left(t_{j+1}^{imp}\right)} \frac{\sin\left(a_1 t_{j+1}^{imp}\right)}{a_1}$$

Rezultă: $\Delta t_{i+2}^{punct} < \Delta t_{i+1}^{punct}$. Durata mişcării fără contact este identică pentru fiecare din faze, există un moment de impact $t_l^{imp} \in \left[\dfrac{\pi}{a_1}, \dfrac{3\pi}{2a_1}\right] + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. Prin urmare $\dot{U}_T\left(t_l^{imp}\right) < 0$. Plecând de la momentul t_l^{imp} masa este în alunecare negativă dată de sistemul:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + 2K_T U_T = \dfrac{WF_T + K_T F_N}{W} \\ U_T(0) = U_T\left(t_1^{imp}\right) = \dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\dfrac{\sin\left(a_1 t_l^{imp}\right)}{a_1} + \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{U}_T(0) = U_T\left(t_l^{imp}\right) = \dot{U}_T\left(t_{1-1}^{imp}\right)\cos\left(a_1 t_l^{imp}\right) < 0 \end{cases}$$

Soluţia este:

$$U_T(t) = \dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_l^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}t\right)$$
$$+\dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\cos\left(a_1 t_l^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}t\right) + \frac{WF_T + K_T F_N}{2K_T W}$$

de unde se deduce că există un moment $\hat{t}$ astfel încât viteza se anulează. În acest moment, reacţiunea normală $N_N(\hat{t})$ corespunde la o stare de echilibru deoarece domeniul admisibil al reacţiunilor normale este $\Re^-$. În consecinţă, viteza rămâne nulă pentru orice $t > \hat{t}$. Rezultă că pentru orice $t > \hat{t}$:

$$\left|U_T^{zbor} - U_T(t)\right| = \left|U_T^{zbor} - U_T(\hat{t})\right|$$
$$< \left|\dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_l^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + \dot{U}_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\cos\left(a_1 t_l^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right)\right|$$
$$< V_{0T}\left|\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\sin\left(a_1 t_j^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + \prod_{j=1}^{l-1}\cos\left(a_1 t_j^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right)\right|$$
$$< V_{0T}\left(\frac{1}{a_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}}\right).$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ relaţia 4.29 este satisfăcută cu $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{a_1\sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + a_1\sqrt{m}}$.

Toate stările de echilibru în alunecare pozitivă caracterizate prin $A = 0$ şi $\mu = \dfrac{K_T}{W}$ care au o reacţiune normală strict negativă sunt nestabile.

În orice vecinătate a poziţiei de echilibru se poate găsi o perturbaţie V_{0T} pozitivă astfel că dinamica sistemului în vecinătatea acestei stări se îndepărtează de poziţia de echilibru.

Arătăm că soluţia sistemului ajunge întotdeauna în vecinătatea stării de echilibru în contact cu zbor caracterizată de $U^{zbor} = \left(0, \frac{F_N}{W}\right)$, $N^{zbor} = 0$, sau altfel, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$, există $\left|V_{0T}\right| < \eta$ astfel încât $\left|U_T^e - U_T(t)\right| > \varepsilon$ ceea ce arată că:

$$\left|U_T^{zbor} - U_T(t)\right| < \varepsilon \tag{4.32}$$

U^{zbor} fiind la distanţa finită faţă de U^e obţinută din 4.32 care va demonstra rezultatul.

Fie atunci o poziţie de echilibru în tendinţă de alunecare cu o perturbaţie a vitezei tangenţiale V_{0T} pozitivă infinitezimală. Amintim că pentru $A = 0$ şi $\mu = \frac{K_T}{W}$ masa alunecă în sens pozitiv cu o viteză constantă V_{0T}. Există atunci un moment $t_1^{punct} > 0$ astfel că masa se găseşte într-un punct al conului. Masa zboară şi există un moment t_1^{imp} astfel că masa intră în contact. Relaţiile 4.4 şi 4.5 furnizează deplasarea tangenţială la momentul impactului:

$$U_T\left(t_1^{imp}\right) = V_{0T}\,\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1} + \frac{F_N}{W}$$

$$\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) = V_{0T}\cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)$$

Evoluţia masei materiale după impact depinde de semnul vitezei tangenţiale $\dot{U}_T\left(V_{0T}, t_1^{imp}(V_{0T})\right)$. Presupunem că $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) < 0$. În timpul fazei de alunecare negativă evoluţia este descrisă de sistemul 4.30. Soluţia este dată de expresia 4.31. Aceasta arată că există un moment $\hat{t}$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$. Ansamblul domeniului admisibil al reacţiunii normale fiind $\Re^-$, există o stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e, \tilde{N}^e\right)$ pentru care $N(\hat{t}) = \tilde{N}^e$. În consecinţă, $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ pentru orice $t > \hat{t}$.

V_{0T} fiind infinitezimală rezultă:

$$\forall t > \hat{t}, \left|U_T(t) - U_T^e\right| = \left|U_T(\hat{t}) - U_T^e\right|$$

$$= \left|V_{0T}\,\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + V_{0T}\cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) - \frac{N_N^e}{W}\right|$$

$$> V_{0T}\left|\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + \cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right)\right|.$$

Rezultă:

$$\forall t > \hat{t}, \left|U_T(t) - U_T^{zbor}\right| = \left|U_T(\hat{t}) - U_T^{zbor}\right|$$

$$< V_{0T}\left|\frac{\sin\left(a_1 t_1^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + \cos\left(a_1 t_1^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right)\right| < V_{0T}\left(\frac{1}{a_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}}\right)$$

Există deci $\eta > 0$ astfel încât relaţia 4.32 este verificată deoarece este suficient de ales $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\frac{a_1\sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + a_1\sqrt{m}}$.

Se presupune că $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) > 0$. Masa alunecă în sens pozitiv şi viteza constantă $\dot{U}_T\left(t_1^{imp}\right) > 0$ atinge conul de frecare. Fie t_l^{imp} un moment de impact cu $\dot{U}_T\left(t_l^{imp}\right) < 0$. Atunci există un moment $\hat{t}$ astfel că $\dot{U}_T(t) \equiv 0$ şi pentru orice $t > \hat{t}$.

Perturbaţia iniţială fiind infinitezimală rezultă:

$$\forall t > \hat{t}, \left|U_T(t) - U_T^e\right| > \left|U_T(\hat{t}) - U_T^e\right|$$

$$= \left|V_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\frac{\sin\left(a_1 t_l^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + V_T\left(t_{l-1}^{imp}\right)\cos\left(a_1 t_l^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) - \frac{N_N^e}{W}\right|$$

$$> V_{0T}\left|\prod_{j=1}^{l-1}\cos\left(a_1 t_j^{imp}\right)\left\{\frac{\sin\left(a_1 t_l^{imp}\right)}{a_1}\cos\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right) + \cos\left(a_1 t_l^{imp}\right)\sqrt{\frac{m}{2K_T}}\sin\left(\sqrt{\frac{2K_T}{m}}\hat{t}\right)\right\}\right|$$

Ca şi în cazul situaţiei anterioare:

$$\forall t > \hat{t}, \left|U_T(t) - U_T^{zbor}\right| = \left|U_T(\hat{t}) - U_T^{zbor}\right| < V_{0T}\left(\frac{1}{a_1} + \sqrt{\frac{m}{2K_T}}\right)$$

În consecinţă există $\eta > 0$ astfel încât relaţia 4.32 este verificată pentru $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\frac{a_1\sqrt{2K_T}}{\sqrt{2K_T} + a_1\sqrt{m}}$. Aceasta arată că traiectoria punctului material ce rezultă din condiţiile iniţiale din vecinătatea echilibrului în tendinţă de alunecare intră într-un timp finit în vecinătatea poziţiei de zbor.

Orice stare de echilibru este stabilă în sens Lyapunov pentru $A = 0$ cu $\mu = \frac{K_T}{W}$ fie dacă $A = 0$ fie dacă $A > 0$ oricare ar fi μ.

Această afirmaţie se evidenţiază în câteva etape pentru evidenţierea tuturor condiţiilor necesare în studiul stabilităţii Lyapunov a sistemului analizat.

Stabilim următoarea implicaţie:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \|V_0\| < \eta, \Rightarrow \left\|U^e - U(t)\right\| < \varepsilon \tag{4.33}$$

Etapa1

Se stabileşte relaţia 4.33 pentru perturbaţiile în viteză tangenţială V_{0T} negativă. Înainte de toate se face următoarea remarcă: deoarece $A > 0$ cu $\mu < \frac{K_T}{W}$, faza de alunecare negativă care urmează unei perturbaţii în viteze tangenţiale negative poate fi chiar ea însăşi urmată de o fază de alunecare pozitivă. În consecinţă, masa poate atinge punctul conului de frecare apoi zboară. Ca să evităm această situaţie se determină un parametru $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $V_{0T} \in (-\eta, 0)$ situaţia precedentă se exclude.

Presupunem că faza de alunecare negativă este urmată de o fază de alunecare pozitivă. Există un $\hat{t}$ astfel încât $\dot{U}_T(\hat{t}) = 0$ cu $N_N(\hat{t}) < 0$. În timpul fazei de alunecare negativă evoluţia mişcării masei este descrisă de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = \frac{F_N}{W} + \frac{N_N^e}{W} \\ \dot{U}_T(0) = V_{0T} < 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

a cărei soluţie este:

$$U_T(t) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \frac{N_N^e}{W}\right) cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\, sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

Există deci un moment $\tilde{t}$ pentru care $\dot{U}_T(\tilde{t}) = 0$. Rezultă că dacă nu există stare de echilibru $\left(\tilde{U}^e, \tilde{N}^e\right)$ astfel ca $\tilde{N}^e = N(\hat{t})$ mişcarea ce trece peste o fază de alunecare pozitivă este dată de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T(\tilde{t}) \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

cu $U_T(\tilde{t}) < -\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{F_N}{W}$

Soluţia este:

$$U_T(t) = \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right) cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

Se spune că masa se opreşte din alunecare înainte de a atinge punctul conului de frecare ceea ce înseamnă că există $\hat{t} > \tilde{t}$ astfel că

$$\dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ cu } U_T(\hat{t}) < \frac{F_N}{W} \tag{4.35}$$

Rezultă:

$$U_T(\hat{t}) < -U_T(\tilde{t}) + 2\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

$$< -\left\{\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}\right\} - V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}} - \frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W} + 2\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}$$

Condiţia 4.35 este satisfăcută dacă perturbaţia V_{0T} verifică:

$$V_{0T} > \sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\left\{-\frac{2A}{W(K_T-\mu W)}+\frac{A}{W(K_T+\mu W)}\right\}$$

care dă explicit valoarea lui η.

Fie $\left(U^e, N^e\right)$ o poziţie de echilibru perturbată şi V_{0T} o perturbaţie infinitezimală în viteze tangenţiale negative. Pentru $A > 0$ şi $\mu < \frac{K_T}{W}$ se presupune pentru moment $N_N^e \neq -\frac{A}{K_T-\mu W}$. În consecinţă, la această perturbaţie iniţială $V_{0T} < 0$, masa este în alunecare negativă şi există un moment $\hat{t} > 0$ astfel încât $\dot{U}(\hat{t}) = 0$ cu $U_T(\hat{t})$ de forma 4.16. Perturbaţia fiind infinitezimală există o stare de echilibru $\left(U^e, N^e\right)$ pentru care la momentul $\hat{t}$ avem $N_N(\hat{t}) = \tilde{N}_N^e$.

Rezultă:

$$\begin{aligned}
\forall t > \hat{t}, \left|U_T^e - U_T(t)\right| &= \left|U_T^e - U_T(\hat{t})\right| = U_T^e - U_T(\hat{t}) \\
&= \frac{F_N}{W}+\frac{N_N^e}{W}-\left(\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right) \\
&\quad - V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\,sin\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right) - \frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W} \\
&= \frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}-\left(\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\frac{N_N^e}{W}\right)cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right) \\
&\quad - V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\,sin\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right) < -V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Astfel, pentru orice $\varepsilon > 0$ relaţia 4.33 este verificată pentru $V_{0T} < 0$ cu $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}$.

Pentru cazul particular $N_N^e = -\frac{A}{K_T-\mu W}$ cu $A > 0$ şi cu $\mu < \frac{K_T}{W}$. Există un moment $\tilde{t} > 0$ astfel că $\dot{U}(\tilde{t}) = 0$ cu $U_T(\tilde{t})$ dat de relaţia 4.16. şi $N_N(\tilde{t}) < -\frac{A}{K_T-\mu W}$. La momentul $\tilde{t}$, masa alunecă în sens pozitiv. Există un moment $\hat{t} > \tilde{t}$ astfel că

$\dot{U}_T\left(\tilde{t}\right)=0$ cu $U_T\left(\hat{t}\right)$ soluţia relaţiei 4.19. Perturbaţia iniţială V_{0T} fiind aleasă infinitezimală, există $\left(\tilde{U}^e,\tilde{N}^e\right)$ astfel că $N_N\left(\hat{t}\right)=\tilde{N}_N^e$. Rezultă:

$$N_N\left(\hat{t}\right)=WU_T\left(\hat{t}\right)-F_N=WU_T\left(\tilde{t}\right)+2W\frac{\left(F_N-\mu W\right)}{K_T-\mu W}-F_N$$

Dar $U_T\left(\tilde{t}\right)<\frac{F_N}{W}-\frac{A}{W\left(K_T-\mu W\right)}$, rezultă $N_N\left(\tilde{t}\right)>-\frac{A}{K_T-\mu W}$. Perturbaţia fiind infinitezimală, avem $N_N\left(\hat{t}\right)<\frac{-A}{K_T+\mu W}$. Domeniul de admisibilitate al reacţiunii normale este aici $\left[-\frac{A}{K_T-\mu W},-\frac{A}{K_T+\mu W}\right]$ ceea ce arată că pentru orice $t>\hat{t}$, $\dot{U}(t)\equiv 0$.

Rezultă:

$$\forall t>\hat{t},\left|U_T^e-U_T(t)\right|=\left|U_T^e-U_T\left(\hat{t}\right)\right|<U_T\left(\hat{t}\right)-U_T\left(\hat{t}\right)$$

$$=\left(U_T\left(\tilde{t}\right)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{m}}\hat{t}\right)+\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}$$

$$-\left(-\frac{A}{W\left(K_T-\mu W\right)}+\frac{A}{W\left(K_T+\mu W\right)}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\tilde{t}\right)$$

$$-V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\tilde{t}\right)-\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}$$

$$<-\left(U_T\left(\tilde{t}\right)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)+\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}-\left(-\frac{A}{W\left(K_T-\mu W\right)}+\frac{A}{W\left(K_T+\mu W\right)}\right)$$

$$-V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}-\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}<2\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}-2V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}-2\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}$$

$$-2\left(-\frac{A}{W\left(K_T-\mu W\right)}+\frac{A}{W\left(K_T+\mu W\right)}\right),\ \forall t>\hat{t},\left|U_T^e-U_T(t)\right|<-2V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}$$

Oricare ar fi $\varepsilon>0$, relaţia 4.33 este verificată pentru $\eta=\varepsilon\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}$ pentru $V_{0T}<0$. Pentru $A=0$ cu $\mu>\frac{K_T}{W}$ sau pentru $A>0$ cu $\mu\geq\frac{K_T}{W}$ nici o restricţie pentru valorile perturbaţiei V_{0T} nu este necesară. Pentru o alunecare negativă, reacţiunea normală descreşte. În consecinţă, domeniul admisibil fiind $\left(-\infty,-\frac{A}{K_T+\mu W}\right]$, care arată existenţa unei poziţii de echilibru pentru care viteza se anulează. Relaţia 4.36 este totdeauna valabilă. Aceasta permite stabilirea relaţiei 4.33.

Pentru $A>0$ cu $\mu<\frac{K_T}{W}$, relaţia 4.33 este valabilă pentru perturbaţiile $V_{0T}\in(-\eta,0)$ unde η este definit la începutul etapei 1. În funcţie de mărimea lui V_{0T} fazele de alunecare negativă şi pozitivă se succed. Există un moment $\hat{t}$ astfel că pentru orice $t>\hat{t}$ viteza este identic nulă. În consecinţă relaţia 4.33 este satisfăcută.

Etapa 2

Stabilim relaţia 4.33 pentru perturbaţiile în viteză tangenţială V_{0T} pozitive. Amintim că dacă $\left(U^e, N^e\right)$ este poziţia de echilibru în contact cu zbor, o fază de mişcare fără contact urmează perturbaţiei. Evoluţia este atunci identică evoluţiei acestei soluţii de echilibru perturbată în viteze normale negative. În consecinţă pentru această poziţie de echilibru, rezultatul va fi prezentat în etapa 3.

Fie atunci $\left(U^e, N^e\right)$, $N_N^e\neq 0$ o soluţie de echilibru perturbată cu o viteză pozitivă V_{0T} infinitezimală. În primul rând se presupune că dacă $A>0,\ N_N^e\neq-\frac{A}{K_T+\mu W}$. Masa alunecă atunci în sens pozitiv şi există un moment $\hat{t}>0$ astfel încât $\dot{U}_T\left(\hat{t}\right)=0$. Perturbaţia fiind infinitezimală, există o poziţie de echilibru $\left(\tilde{U}^e, \tilde{N}^e\right)$ pentru care $N_N\left(\hat{t}\right)=\tilde{N}^e$. Atunci rezultă că oricare ar fi $t>\hat{t}$:

$$\left|U_T^e-U_T(t)\right|=\left|U_T^e-U_T\left(\hat{t}\right)\right|=U_T\left(\hat{t}\right)-U_T^e \tag{4.37}$$

În funcţie de coeficientul de frecare relaţiile 4.11, 4.12 şi 4.13 permit exprimarea inegalităţii 4.37 sub una din formele:

- Dacă $\mu<\frac{K_T}{W}$, oricare ar fi $t>\hat{t}$

$$\left|U_T^e-U_T(t)\right|=U_T\left(\hat{t}\right)-U_T^e$$
$$=\left(\frac{A}{W\left(K_T-\mu W\right)}+\frac{N_N^e}{W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{m}}\hat{t}\right)+V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T-\mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{m}}\hat{t}\right)$$
$$+\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}-\frac{F_N}{W}-\frac{N_N^e}{W}<V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T-\mu W}}$$

Oricare ar fi $\varepsilon>0$ relaţia 4.33 este verificată pentru $\eta=\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{K_T-\mu W}{m}}$ şi $V_{0T}>0$.

- Dacă $\mu=\frac{K_T}{W}$ şi oricare ar fi $t>\hat{t}$

$$\left|U_T^e-U_T(t)\right|=-\frac{A}{2mW}\hat{t}^2+V_{0T}\hat{t}+\frac{F_N}{W}+\frac{N_N^e}{W}-\frac{F_N}{W}-\frac{N_N^e}{W}$$

Din relaţia 4.12 se deduce $\hat{t} = \frac{V_{0T} mW}{A}$. Astfel, oricare ar fi $t > \hat{t}$

$$\left| U_T^e - U_T(t) \right| = \frac{mW \cdot V_{0T}^2}{2A}$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ relaţia 4.33 este verificată pentru $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon 2A}{mW}}$ şi $V_{0T} > 0$.

- Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$ $\forall t > \hat{t}$,

$$\left| U_T^e - U_T(t) \right| = \left(\frac{A}{W(\mu W - K_T)} + \frac{N_N^e}{W} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right) e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}\hat{t}} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_N}{W} - \frac{N_N^e}{W}$$

Perturbarea fiind suficient de mică momentul pentru care viteza se anulează va fi suficient de aproape de zero şi atunci oricare ar fi $t > \hat{t}$

$$\left| U_T^e - U_T(t) \right| = \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{N_N^e}{W} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} \right) - \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{N_N^e}{W} \right) + O\left(V_{0T}^2 \right)$$

$$= V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}} + O\left(V_{0T}^2 \right)$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, relaţia 4.33 este verificată cu $\eta = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}$ pentru $V_{0T} > 0$. Se consideră starea de echilibru cu tendinţa de alunecare negativă $N_N^e = -\frac{A}{K_T + \mu W}$ pentru $A > 0$; există un moment $\hat{t} > 0$ astfel că $\dot{U}\left(\tilde{t}\right) = 0$ cu $U_T\left(\tilde{t}\right) > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)}$. Masa alunecă în sens negativ şi există un moment $\hat{t} > \tilde{t}$ astfel că $\dot{U}_T\left(\hat{t}\right) = 0$ şi $N_N\left(\hat{t}\right)$ este egal la reacţiune cu o poziţie de echilibru $\left(\tilde{U}^e ; \tilde{N}^e\right)$.

De fapt,

$$N_N\left(\hat{t}\right) = WU_T\left(\hat{t}\right) - F_N$$

$$= -WU_T\left(\tilde{t}\right) + 2W\frac{F_T - \mu F_N}{K_T - W} - F_N$$

Dar, $U_T\left(\tilde{t}\right) > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}$, rezultă $N_N\left(\hat{t}\right) < -\frac{A}{K_T + \mu W}$. Pentru $A = 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$ sau $A > 0$ cu $\mu \geq \frac{K_T}{W}$ domeniul de admisibilitate a reacţiunilor normale este $\left(-\infty ; -\frac{A}{K_T + \mu W} \right)$.

Pentru $A > 0$ cu $\mu < \frac{K_T}{W}$ perturbaţia se presupune a fi infinitezimală; $N_N(\hat{t}) > -\frac{A}{K_T - \mu W}$ ceea ce implică că $N_N(\hat{t})$ aparţine domeniului admisibil al reacţiunilor normale. În consecinţă, rezultă că oricare ar fi $t > \hat{t}$

$$\left|U_T^e - U_T(t)\right| = \left|U_T^e - U_T(\hat{t})\right| < U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t})$$

Mărimile $U_T(\tilde{t})$ şi $U_T(\hat{t})$ se obţin la fel ca şi în cazul precedent datorită relaţiilor 4.11, 4.12, 4.13 şi 4.22.

- Dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$ oricare ar fi $t > \hat{t}$

$$\left|U_T^e - U_T(t)\right| = U_T(\hat{t}) - U_T^e$$

$$= \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} + \frac{N_N^e}{W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}\hat{t}\right) + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}\hat{t}\right)$$

$$+ \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W} - \frac{F_N}{W} - \frac{N_N^e}{W} < V_{0T}\sqrt{\frac{m}{K_T - \mu W}}$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, relaţia 4.33 este verificată cu $\eta = \varepsilon\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}$ pentru $V_{0T} > 0$.

- Dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$, oricare ar fi $t > \hat{t}$

$$\left|U_T^e - U_T(t)\right| < U_T(\tilde{t}) - U_T(\hat{t})$$

$$< U_T(\tilde{t}) - \left(U_T(\tilde{t}) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{(K_T + \mu W)}{m}}\hat{t}\right) - \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

$$< 2U_T(\tilde{t}) - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

$$< \frac{V_{0T}^2 mW}{A} + \frac{2F_N}{W} - \frac{2A}{W(K_T + \mu W)} - 2\frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} < \frac{V_{0T}^2 mW}{A}$$

În consecinţă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ relaţia 4.33 este verificată cu $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon 2A}{mW}}$ pentru $V_{0T} > 0$.

- Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$, perturbaţia fiind suficient de mică, momentul pentru care viteza se anulează va fi suficient de aproape de zero.

Deplasarea $U_T(\tilde{t})$ soluţia lui 4.13 la momentul pentru care $\dot{U} = 0.$ se scrie:

$$U_T(\tilde{t}) = \left(\frac{A}{W(K_T - \mu W)} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)} + V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}\right)e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}\tilde{t}} + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

care se rescrie:

$$u_T\left(\tilde{t}\right)=\frac{A}{W(K_T-\mu W)}-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}+\frac{F_N-\mu F_N}{K_T-\mu W}+O\left(V_{0T}^2\right)$$

$u_T\left(\hat{t}\right)$ este soluţia unei probleme similare problemei 4.34 cu condiţiile iniţiale $\left(u_T(0),\dot{u}_T(0)=\left(u_T\left(\tilde{t}\right),0\right)\right)$ şi este:

$$u_T\left(\hat{t}\right)=\left(u_T\left(\tilde{t}\right)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T+\mu W}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T+\mu W}{m}}\hat{t}\right)+\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}$$

Rezultă că oricare ar fi $t>\hat{t}$,

$$\left|u_T^e-u_T(t)\right|<u_T\left(\tilde{t}\right)-u_T\left(\hat{t}\right)$$

$$<2u_T\left(\tilde{t}\right)-2\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}$$; şi astfel oricare ar fi $t>\hat{t}$

$$\left|u_T^e-u_T(t)\right|<2\left(\frac{A}{W(K_T-\mu W)}-\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}+\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)$$

$$-2\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}+O\left(V_{0T}^2\right)<2V_{0T}\sqrt{\frac{m}{\mu W-K_T}}+O\left(V_{0T}^2\right)$$

Astfel pentru orice $\varepsilon>0$ relaţia 4.33 este verificată cu $\eta=\varepsilon\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}$ pentru $V_{0T}>0$

În consecinţă relaţia 4.33 este satisfăcută pentru toate soluţiile de echilibru caracterizate de $A=0$ cu $\mu>\frac{K_T}{W}$ şi $A>0$, μ oarecare.

Rezultatele au fost stabilite pentru o perturbaţie infinitezimală. Cu toate acestea dacă perturbaţia $V_{0T}\in(0,\eta)$, unde oricare ar fi $\eta>0$ există un moment astfel că pentru oricare $t>\hat{t}$ viteza este identic nulă. În consecinţă relaţia 4.33 rămâne adevărată.

Etapa 3

Stabilim relaţia 4.33 pentru perturbaţiile în viteză normală V_{0N}.

Se consideră o poziţie de echilibru perturbată în viteză normală V_{0N} compatibilă cu legătura unilaterală. Se presupune că această perturbaţie este infinitezimală. Există o fază de mişcare fără contact urmată de un moment de impact $t^{imp}>0$. Perturbaţia fiind suficient de mică momentul de impact va fi suficient de apropiat de zero. Relaţiile 4.2 dau mişcarea fără contact:

$$u_N(t)=\left(-\frac{a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2}{2}t+V_{0N}\right)t+O\left(t^3\right),$$

$$u_T(t)=\left(\frac{a_1\varphi_1\alpha_1^2+a_2\varphi_2\alpha_2^2}{2}\right)t^2+u_T^e+O\left(t^3\right)$$

Masa materială intră atunci în contact la momentul $t^{imp} = -\dfrac{2V_{0N}}{a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2}$.

La acest moment componentele tangenţiale ale deplasării şi vitezei verifică relaţiile:

$$U_T\left(t^{imp}\right) = U_T^e + O\left(V_{0N}^2\right),$$

$$\dot{U}_T\left(t^{imp}\right) = -2\frac{a_1\varphi_1\alpha_1^2 + a_2\varphi_2\alpha_2^2}{a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2}V_{0N} + O\left(V_{0N}^2\right) = \gamma V_{0N} + O\left(V_{0N}^2\right)$$

În consecinţă, aceasta revine la a considera o soluţie de echilibru perturbată la momentul t^{imp} de o viteză tangenţială $\dot{U}_T\left(\tilde{t}\right)$ infinitezimală. În funcţie de semnul acesteia etapa 1 şi etapa 2 permit rezolvarea problemei. Dacă perturbaţia $V_{0N} \in (-\eta, 0)$ şi $\eta > 0$ relaţia 4.33 este verificată.

Remarca făcută la începutul etapei 2 pune la dispoziţie o poziţie de echilibru în contact cu zbor, perturbată în viteze tangenţiale V_{0T} pozitive; raţionamentul ce permite obţinerea relaţiei 4.33 este analog celui precedent. Din relaţiile 4.5 la momentul de impact t^{imp} componentele tangenţiale ale deplasării şi vitezei sunt date de relaţiile:

$$U_T\left(t^{imp}\right) = U_T^e + O\left(V_{0T}^2\right),$$

$$\dot{U}_T\left(t^{imp}\right) = 2\frac{\varphi_T^1\alpha_1^2 - \varphi_T^2\alpha_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}V_{0T} + O\left(V_{0T}^2\right) < 0$$

Pornind de la momentul t^{imp} problema se rezumă la starea unei poziţii de echilibru perturbată cu o viteză tangenţială $\dot{U}_T\left(t^{imp}\right)$ negativă. Etapa 1 permite demonstrarea existenţei unui moment $t > t^{imp}$ astfel încât viteza este identic nulă pentru orice $t > \hat{t}$. Rezultă că oricare ar fi $t > \hat{t}$,

$$\left|U_T^e - U_T(t)\right| = \left|U_T^e - U_T\left(\hat{t}\right)\right| < \left|U_T^e - U_T\left(\tilde{t}\right)\right| + \left|U_T\left(\tilde{t}\right) - U_T\left(\hat{t}\right)\right|$$

$$< -\dot{U}_T\left(\tilde{t}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}} + O\left(V_{0T}^2\right) < -2\frac{\varphi_T^1\alpha_1^2 - \varphi_T^2\alpha_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}V_{0T} + O\left(V_{0T}^2\right)$$

Astfel, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, relaţia 4.33 este verificată cu $\eta = \dfrac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\varphi_T^2\alpha_2^2 - \varphi_T^1\alpha_1^2}\varepsilon$ pentru $V_{0T} > 0$. Acest rezultat rămâne valabil pentru perturbaţiile $V_{0T} \in (0, \eta)$, unde η este pozitiv.

Etapa 4

Concluzie: există $\eta > 0$ astfel încât oricare ar fi $\|V_0\| < \eta$ relaţia 4.33 este verificată.

Starea de echilibru în tendinţe de alunecare pozitivă caracterizată de $A < 0$ şi $\mu > \dfrac{K_T}{W}$ este instabilă.

Reamintim că pentru $A < 0$ şi $\mu > \dfrac{K_T}{W}$ există două soluţii de echilibru: una cu tendinţa de alunecare pozitivă, alta la zbor. Arătăm că poziţia de echilibru este instabilă şi că traiectoria pentru toate perturbaţiile acestui echilibru oscilează în jurul poziţiei de zbor. Condiţia de instabilitate se obţine dacă relaţia următoare va fi satisfăcută: oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ există $|V_{0T}| < \eta$ rezultă: $\left|U_T^e - U_T(t)\right| > \varepsilon$.

Etapa 1

Fie o perturbaţie iniţială V_{0T}, există un moment t_1^{punct} astfel că $U_T\left(t_1^{punct}\right) = \dfrac{F_N}{W}$ cu $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right) > 0$.

Se consideră poziţia de echilibru cu tendinţă de alunecare pozitivă caracterizată de $U^e = \left(0, \dfrac{F_N}{W} + \dfrac{N_N^e}{W}\right)$ cu $N_N^e = -\dfrac{A}{K_T - \mu W}$ care este perturbată cu o viteză tangenţială V_{0T} pozitivă infinitezimală. La dreapta originii mişcarea este descrisă de problema 4.10 şi soluţia este dată de:

$$U_T(t) = \frac{V_{0T}}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu W - K_T}}\left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

de unde se deduce:

$$\dot{U}_T(t) = \frac{V_{0T}}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}\right) > 0$$

Există prin urmare un moment t_1^{punct} cu $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right) \in \left(0, V_{0T}\sqrt{\dfrac{\mu W - K_T}{m}}e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t_1^{punct}}\right)$. Se alege V_{0T} mic, ceea ce implică deci că $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)$ este la fel de mic. La dreapta momentului t_1^{punct} există o fază de mişcare fără contact apoi un moment de impact t_1^{imp}.

Etapa 2

Arată că evoluţia particulei materiale cuprinde o succesiune de faze de mişcare fără contact şi faze de alunecare. Dacă în plus, t_j^{punct}, $j = i, i+1$ sunt două momente consecutive se spune că reacţiunea atinge punctul conului,

$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) < \dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$. Pornind de la momentul t_1^{punct} evoluţia este descrisă de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_N + K_N U_N + W U_T = F_N \\ m\ddot{U}_T + W U_N + K_T U_T = F_T \\ U_N(0) = 0, U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = U_T\left(t_1^{punct}\right) \end{cases} \tag{4.38}$$

Există un moment de impact t_1^{imp}. Considerăm următoarea familie de probleme dinamice:

$$\begin{cases} m\ddot{\hat{U}}_N + K_N \hat{U}_N + W \hat{U}_T = F_N \\ m\ddot{\hat{U}}_T + W \hat{U}_N + K_T \hat{U}_T = F_T \\ \hat{U}_N(0) = 0, \hat{U}_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{\hat{U}}_N(0) = 0, \dot{\hat{U}}_T(0) = \varsigma \end{cases} \tag{4.39}$$

unde ς tinde spre zero.

Soluţia $\hat{U}$ a problemei 4.39 converge uniform pe orice interval închis $\left[0,\hat{T}\right]$ spre soluţia $\tilde{U}$ a problemei ce urmează:

$$\begin{cases} m\ddot{\tilde{U}}_N + K_N \tilde{U}_N + W \tilde{U}_T = F_N \\ m\ddot{\tilde{U}}_T + W \tilde{U}_N + K_T \tilde{U}_T = F_T \\ \tilde{U}_N(0) = 0, \tilde{U}_T(0) = \dfrac{F_N}{W} \\ \dot{\tilde{U}}_N(0) = 0, \dot{\tilde{U}}_T(0) = 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

Rezultă că, deoarece $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)$ este suficient de mic, în timpul fazei de mişcare fără contact, soluţia U a problemei 4.38 este apropiată de soluţia $\tilde{U}$ a problemei 4.40. Astfel, la momentul de impact t_1^{imp} componentele tangenţiale ale deplasării şi vitezei satisfac relaţiile:

$$\hat{U}_T\left(t_1^{imp}\right) = \frac{F_N}{W} + \varsigma$$

$$\hat{V}_T\left(t_1^{imp}\right) = -\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)$$

ς negativ se aproprie de zero. Viteza tangenţială la momentul t_1^{imp} fiind negativ alunecarea care urmează este soluţia ecuaţiei:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T + \mu W)U_T = F_T + \mu F_N \\ U_T(0) = \dfrac{F_N}{W} + \varsigma \\ \dot{U}_T(0) = -\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right) \end{cases}$$

dată prin:

$$U_T(t) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \varsigma\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) - \dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}t\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W} \quad (4.41)$$

Relaţia 4.41 arată existenţa unui moment pentru care $\dot{U}_T(\hat{t}_1) = 0$. $\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)$ fiind infinitezimal, $U_T(\hat{t})$ se apropie de vârful conului. Deoarece la acest moment nu există poziţie de echilibru, masa alunecă în celălalt sens. În timpul acestei a doua faze de alunecare, evoluţia este dată de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = F_T - \mu F_N \\ U_T(0) = U_T(\hat{t}_1) \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

unde

$$U_T(\hat{t}_1) = \left(\frac{A}{W(K_T + \mu W)} + \varsigma\right)\cos\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}\hat{t}_1\right) - \dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T + \mu W}}\sin\left(\sqrt{\frac{K_T + \mu W}{m}}\hat{t}_1\right) + \frac{F_T + \mu F_N}{K_T + \mu W}$$

Soluţia este:

$$U_T(t) = \frac{1}{2}\left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right)\left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}\right) + \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}$$

De unde se deduce:

$$\dot{U}_T(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}\left(U_T(\hat{t}_1) - \frac{F_T - \mu F_N}{K_T - \mu W}\right)\left(e^{\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{m}}t}\right) > 0$$

În consecinţă există un moment t_2^{punct} astfel încât punctul material se găseşte în vârful conului. Acest moment se caracterizează prin $U_T\left(t_2^{punct}\right) = \dfrac{F_N}{W}$.

Fie

$$\frac{1}{2}\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}=-\frac{1}{2}\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{-\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}+\frac{A}{W(K_T-\mu W)}$$

de unde se deduce:

$$\dot{U}_T\left(t_2^{punct}\right)=\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}\left[\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}-\frac{A}{W(K_T-\mu W)}\right]$$

În consecinţă există un moment t_2^{punct} astfel încât punctul material se găseşte în vârful conului. Acest moment se caracterizează prin: $U_T\left(t_2^{punct}\right)=\frac{F_N}{W}$. Fie

$$\frac{1}{2}\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}=-\frac{1}{2}\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{-\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}+\frac{A}{W(K_T-\mu W)}$$

Ceea ce implică:

$$\dot{U}_T\left(t_2^{punct}\right)=\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}\left[\left(U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}\right)e^{\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}t_2^{punct}}-\frac{A}{W(K_T-\mu W)}\right]$$

Dar t_2^{punct} este aproape zero şi depinde de V_{0T}. Rezultă:

$$\dot{U}_T\left(t_2^{punct}\right)=\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}\left[U_T(\hat{t}_1)-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}-\frac{A}{W(K_T-\mu W)}\right]+O\left(t_2^{punct}\right)$$

$$<\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{m}}$$

$$\left[\frac{A}{W(K_T+\mu W)}+\varsigma+\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)\sqrt{\frac{m}{K_T+\mu W}}+\frac{F_T+\mu F_N}{K_T+\mu W}-\frac{F_T-\mu F_N}{K_T-\mu W}-\frac{A}{W(K_T-\mu W)}\right]+O(V_{0T})$$

$$<\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{K_T+\mu W}}\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)+O(V_{0T})<\dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right)+O(V_{0T})$$

Plecând de la momentul t_2^{punct}, e suficient să se continue în mod similar şi se arată că fazele de mişcare fără contact şi de alunecare se succed cu $\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right)<\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)$.

Etapa 3

Fie t_{i+1}^{punct} un moment astfel încât $U_T\left(t_{i+1}^{punct}\right)=\frac{F_N}{W}$. Atunci $\lim_{i\to+\infty}\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right)=0$.

Din etapa precedentă, expresia vitezei la care particula se găseşte în vârful conului satisface pentru toate $i>1$:

$$\dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right)<\sqrt{\frac{\mu W-K_T}{K_T+\mu W}}\dot{U}_T\left(t_i^{punct}\right)+O(V_{0T})$$

$$< \left(\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}}\right)^i \dot{U}_T\left(t_1^{punct}\right) + O(V_{0T})$$

Dar $\sqrt{\frac{\mu W - K_T}{K_T + \mu W}} < 1$. În consecinţă, $lim_{i \to +\infty} \dot{U}_T\left(t_{i+1}^{punct}\right) = 0$

Etapa 4

Concluzii:

Urmează o perturbaţie iniţială V_{0T} pozitivă infinitezimală, etapele precedente arată ca particula materială trece printr-o succesiune de faze de alunecare şi de mişcare fără contact. Dependenţa continuă printr-un raport dat pentru care dinamica converge uniform spre soluţia problemei 4.40 corespunzătoare poziţiei de echilibru de zbor perturbat.

În consecinţă oricare ar fi perturbaţia în viteze tangenţiale pozitive, traiectoria separă vecinătatea poziţiei de echilibru în tendinţa de alunecare pozitivă pentru oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru de zbor; ceea ce dovedeşte rezultatul de instabilitate.

Concluzii

- Poziţiile de echilibru în tendinţe de alunecare cu o reacţiune nenulă sunt fie stabile în sens Lyapunov fie instabile, aceasta depinde de parametrii sistemului. Starea de echilibru în contact cu zbor pentru care mişcarea sistemului este una stabilă este unică.
- Atunci când această stare de echilibru este unică ea este asimptotică stabilă. În plus, dacă coexistă cu alte stări de echilibru ea este stabilă în sens Lyapunov. În sfârşit, stările de echilibru în contact blocat sunt toate stabile în sens Lyapunov.
- Tabelul de mai jos prezintă rezultatele de stabilitate a tuturor stărilor de echilibru în funcţie de parametrii A şi μ.

Tabelul 4.2

	$\mu < \frac{K_T}{W}$	$\mu = \frac{K_T}{W}$	$\mu > \frac{K_T}{W}$
$A < 0$	- 1 soluţie de decolare	- 1 soluţie de decolare	- o soluţie de zbor - 1 soluţie în tendinţă de alunecare pozitivă
$A = 0$	- 1 soluţie în contact cu zbor	- 1 soluţie în contact cu zbor - o infinitate de soluţii în tendinţe de alunecare pozitive	- 1 soluţie în contact cu zbor - o infinitate de soluţii în contact blocat
$A > 0$	- 2 soluţii în tendinţă de alunecare pozitivă şi negativă - o infinitate de soluţii în contact blocat	- o soluţie în tendinţă de alunecare negativă - o infinitate de soluţii în contact blocat	- 1 soluţie în tendinţă de alunecare negativă - o infinitate de soluţii în contact blocat

În cele ce urmează se va completa rezultatele teoretice de stabilitate obţinute prin aplicarea metodei iterative „NSCD”.

4.4 Simulări numerice

Alegem succesiv un ansamblu de parametrii caracteristici stărilor de echilibru corespunzătoare tabelului 4.1. rezultatele prezentate sunt obţinute cu mărimile următoare[62]:

- Matricea de rigiditate

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Forţa exterioară F

$$\begin{cases} F = (1,2) & pentru \;\; A < 0 \\ F = (1,1) & pentru \;\; A = 0 \\ F = (2,1) & pentru \;\; A > 0 \end{cases}$$

- Coeficientul de frecare se ia:

$$\begin{cases} \mu = 0{,}25 & pentru \;\; \mu < \dfrac{K_T}{W} \\ \mu = 1 & pentru \;\; \mu = \dfrac{K_T}{W} \\ \mu = 1.25 & pentru \;\; \mu > \dfrac{K_T}{W} \end{cases}$$

- Masa punctului material se va lua egală cu unu.

Stabilitatea stărilor de echilibru

Problema dinamică (4.1) admite o stare de echilibru unică U^e, dacă se notează prin $A = K_T F_N - W F_T$ atunci pot interveni următoarele situaţii:

- Dacă $A < 0$ - pentru $\mu \le \frac{K_T}{W}$ soluţia de echilibru de zbor este unică,

  - pentru $\mu > \frac{K_T}{W}$ există două soluţii de echilibru, una de zbor şi una de alunecare pozitivă.

- Dacă $A = 0$ - pentru $\mu \le \frac{K_T}{W}$ există o soluţie unică de echilibru în contact neted,

  - pentru $\mu = \frac{K_T}{W}$ există o infinitate de soluţii de alunecare,

  - pentru $\mu > \frac{K_T}{W}$ există o soluţie de echilibru de contact neted şi o infinitate de soluţii de contact blocat.

- Dacă $A > 0$ există o infinitate de soluţii de contact blocat şi una sau două poziţii de echilibru de alunecare.

Pentru fiecare din cazurile rezultate s-a studiat dinamica provenită din vecinătăţile date de propoziţiile de echilibru corespunzătoare. Toate calculele s-au efectuat cu perturbaţii în spaţiul fazelor.

Cazul $A < 0$

Deoarece mărimea A este strict negativă sistemul posedă întotdeauna o soluţie de zbor. Sistemul dinamic se reduce la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Astfel, există avantajul determinării analitice a soluţiei şi analizarea stabilităţii sale cu metode obişnuite.

Acest exemplu este important deoarece permite aprecierea caracterului nedisipativ al algoritmului descris la studiul stabilităţii. Soluţia aproximativă obţinută cu metoda „NSCD”- modificată este analogă cu soluţia exactă.

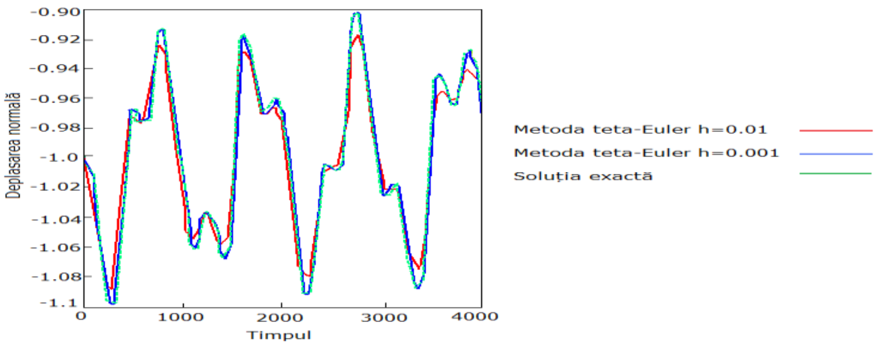


Fig. 4.4

În ceea ce priveşte analiza stabilităţii, metoda numerică dă un rezultat vizibil mai apropiat de soluţia exactă.

Dacă $\mu > \dfrac{K_T}{W}$ sistemul are în plus faţă de soluţia de echilibru de zbor, o soluţie de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă.

Echilibrul este caracterizat prin: $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0, N_N^e = -4, N_T^e = -5\right)$. Se observă din figura de mai jos dinamica, deci condiţiile iniţiale sunt: $\left(U_N(0) = U_N^e, U_T(0) = U_T^e, \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = V_{0T}\right)$.

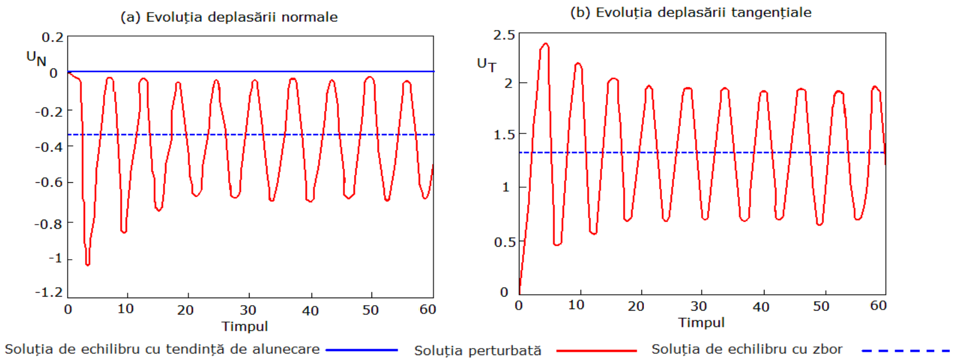


Fig. 4.5 Instabilitatea poziţiei de echilibru cu tendinţă de alunecare în sens pozitiv pentru

$$A < 0 \text{ şi } \mu > \frac{K_T}{W}$$

Sistemul este lăsat în vecinătatea soluţiei de echilibru în tendinţă de alunecare şi apoi oscilează după un timp finit în jurul soluţiei de zbor.

Cazul $A = 0$

Dacă $\mu < \dfrac{K_T}{W}$ există o poziţie unică de echilibru în contact de zbor. Poziţia de echilibru este definită prin $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0.5, N_N^e = 0, N_T^e = 0\right)$

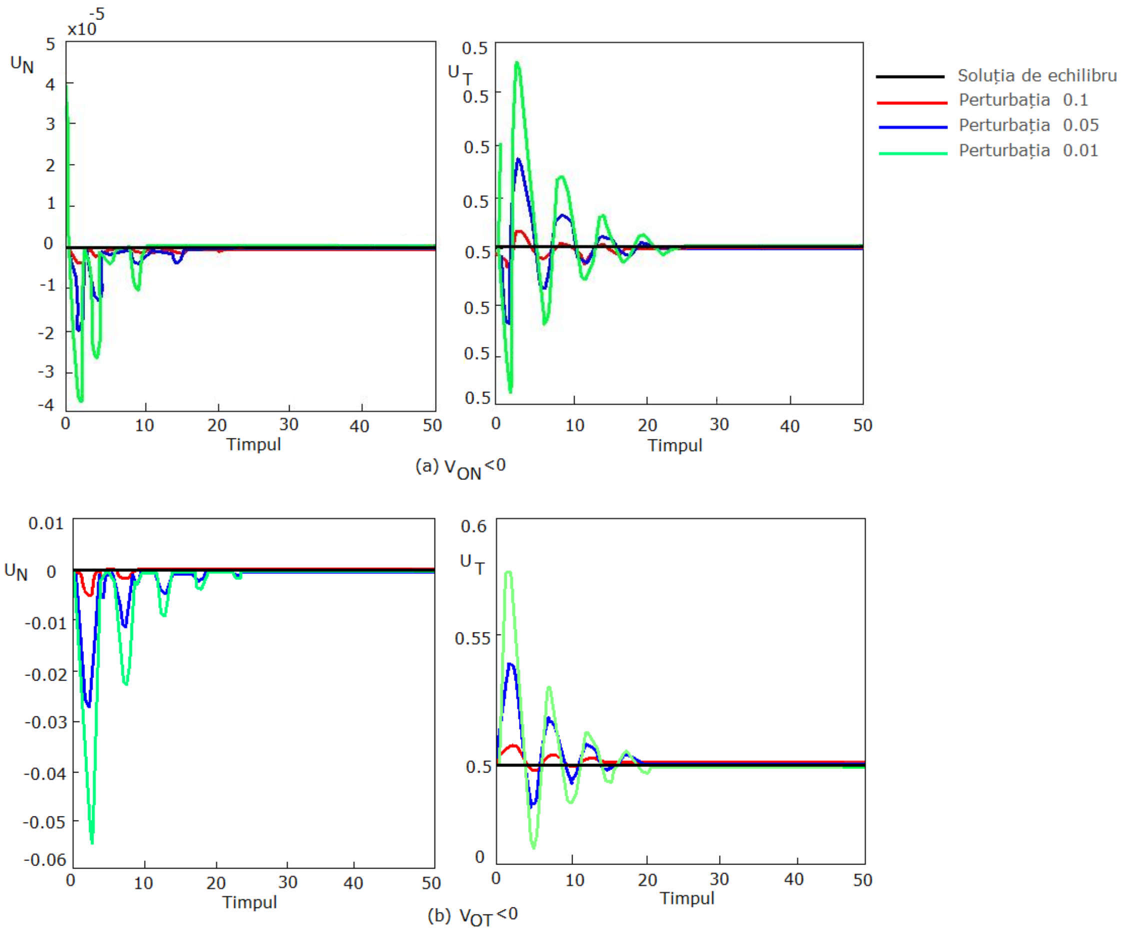


Fig.4.6 Stabilitatea asimptotică a vârfului de con pentru

$A = 0$ şi $\mu < \dfrac{K_T}{W}$

Curbele din figura de mai sus arată dinamica pentru stările iniţiale date $\left(U_N(0)=0, U_T(0)=U_T^e, \dot{U}_N(0)=V_{0N}, \dot{U}_T(0)=0\right)$ ce iau succesiv valorile, $V_{0N}=0.1;0.05;0.01$ apoi $\left(U_N(0)=0, U_T(0)=U_T^e, \dot{U}_N(0)=0, \dot{U}_T(0)=V_{0T}\right)$ ia succesiv valorile $V_{0T}=0.1;0.05;0.01$. Toate combinaţiile stărilor perturbative $\left(U_{0N}, U_{0T}, V_{0N}, V_{0T}\right)$ dau rezultate calitativ asemănătoare. Soluţia în contact cu zbor este atunci asimptotic stabilă.[62]

Dacă $\mu=\dfrac{K_T}{W}$ ansamblul stărilor de echilibru sunt instabile cu excepţia punctului situat pe con ce corespunde unei stări de alunecare dar cu o reacţiune nulă care este asimptotic stabilă. Se consideră o poziţie în tendinţă de alunecare pozitivă $\left(U_N^e=0, U_T^e=0, N_N^e=-1, N_T^e=-1\right)$

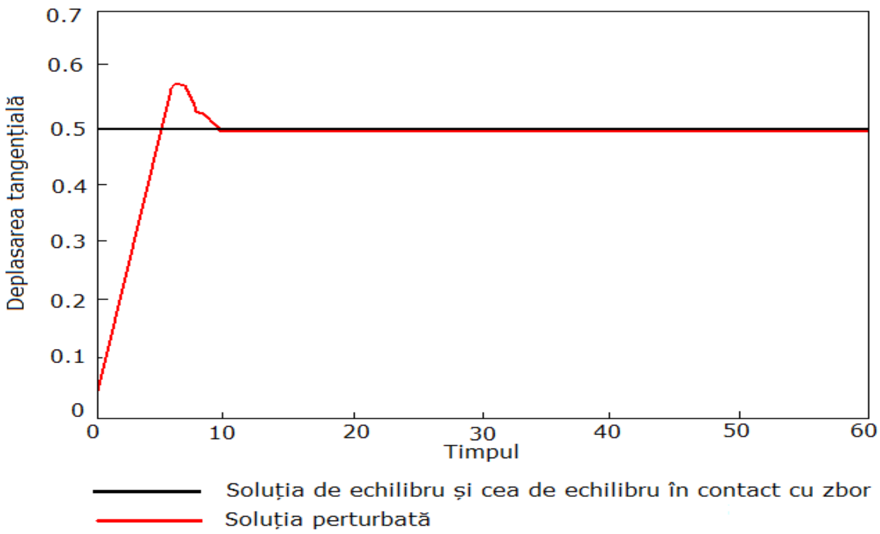


Fig. 4.7 Instabilitatea stării de echilibru cu tendinţă de alunecare pentru

$$A=0 \text{ şi } \mu=\frac{K_T}{W}$$

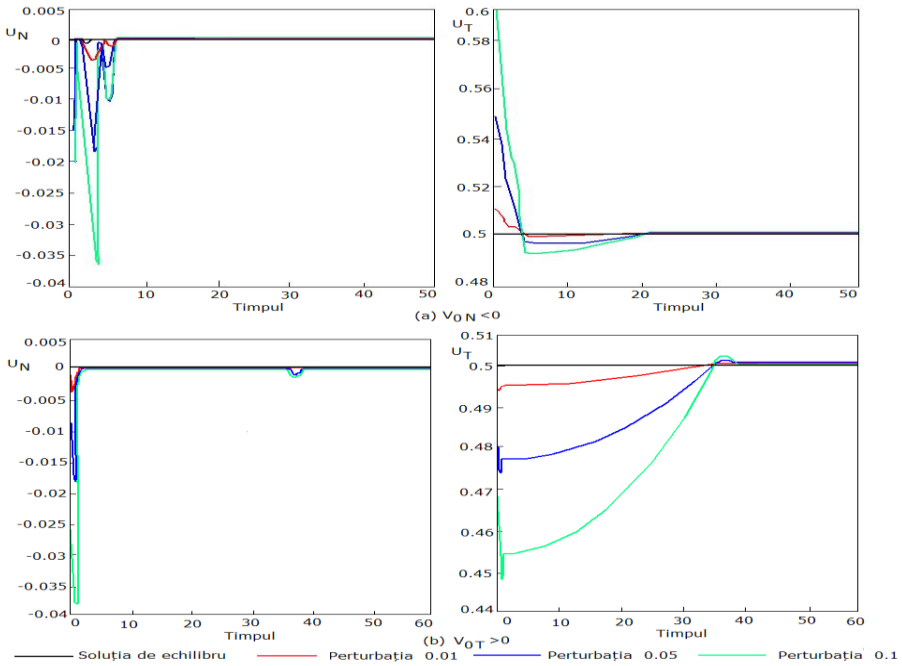


Fig.4.8 Stabilitatea asimptotică a vârfului de con pentru

$$A = 0 \text{ şi } \mu = \frac{K_T}{W}$$

Această figură prezintă traiectoria obţinută pentru condiţiile iniţiale $\left(U_N(0) = 0, U_T(0) = U_T^e, \dot{U}_N(0) = 0, \dot{U}_T(0) = V_{0T}\right)$; se depărtează de starea iniţială şi se va opri într-un punct situat pe conul de frecare. Acest rezultat este observat pentru o perturbaţie V_{0T} mică.

Invers, pentru toate condiţiile iniţiale situate în vecinătatea punctului de pe conul de frecare traiectoriile poziţiei de echilibru $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0{,}5, N_N^e = 0, N_T^e = 0\right)$ tind spre zero aşa cum se vede din figura 4.8.[62]

Punctul conului de frecare este stabil în sens Lyapunov şi toate celelalte stări de echilibru sunt instabile.

Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$ toate stările de echilibru sunt în contact blocat ceea ce ne permite să afirmăm că toate poziţiile punctelor situate pe conul lui Coulomb sunt stabile în sens Lyapunov. Oricare ar fi tipul perturbaţiei în cazul soluţiei de echilibru aflată în tendinţă de alunecare $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0{,}5, N_N^e = 0, N_T^e = 0\right)$ sunt calitativ identice.[64]

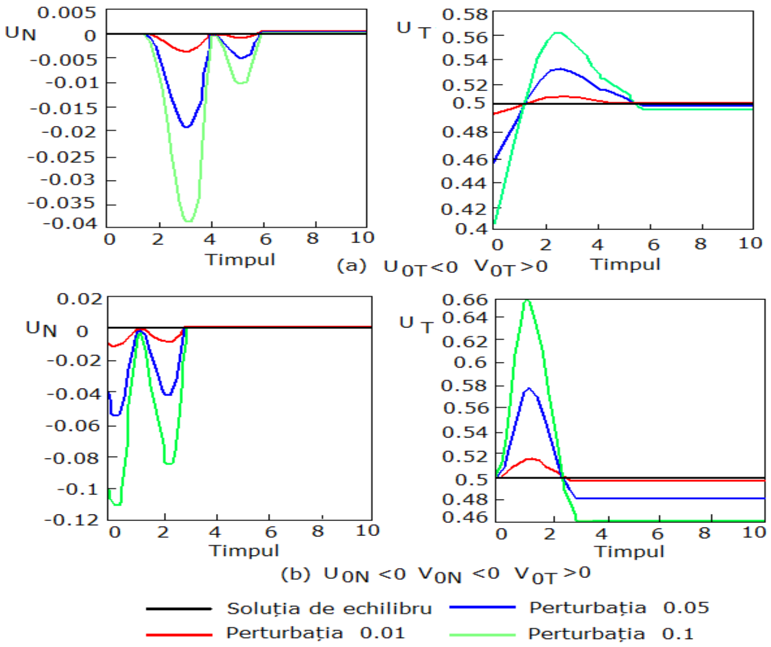


Fig. 4.9 Stabilitatea Lyapunov a punctului de con pentru

$$A = 0 \text{ şi } \mu > \frac{K_T}{W}$$

Aceste figuri obţinute pentru perturbaţiile deplasărilor tangenţiale şi a vitezelor tangenţiale, [62],[63]respectiv ale deplasărilor normale şi ale vitezelor normale arată afirmaţia de mai sus.

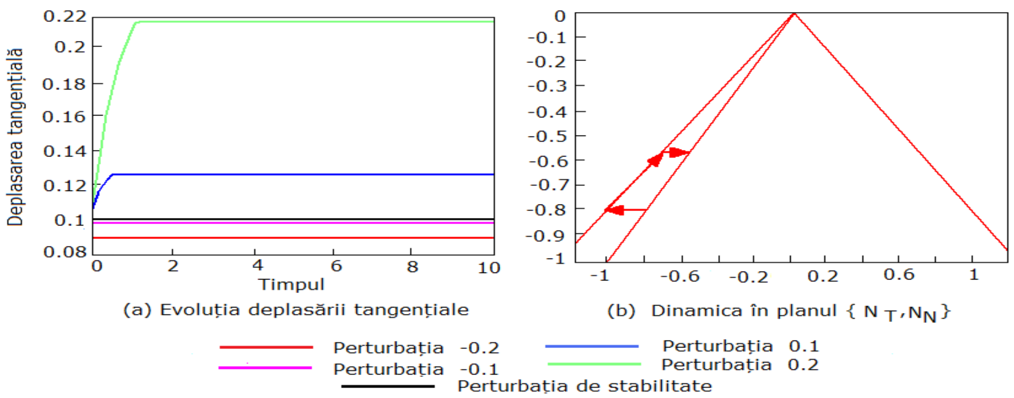


Fig. 4.10 – Stabilitatea Lyapunov a unei soluţii de echilibru în contact blocat ca urmare a unei perturbaţii cu viteză tangenţială pozitivă $A = 0$ şi $\mu > \dfrac{K_T}{W}$

Dinamica stării de contact blocat este reprezentată în figura 4.10a corespunzător perturbaţiilor în viteze tangenţiale. Oricare ar fi alte tipuri de perturbaţie rezultatele vor fi identice.

Cazul $A > 0$

Atunci când mărimea A este strict pozitivă ansamblul stărilor de echilibru corespund în planul $\{N_T, N_N\}$ la un segment deschis stărilor de contact blocat cu una sau două poziţii în tendinţă de alunecare. Experimentul numeric arată că aceste stări sunt întotdeauna stabile în sens Lyapunov.

Pentru orice tip de perturbaţie dinamica sistemului e calitativ identică aşa cum rezultă din figura 4.11a

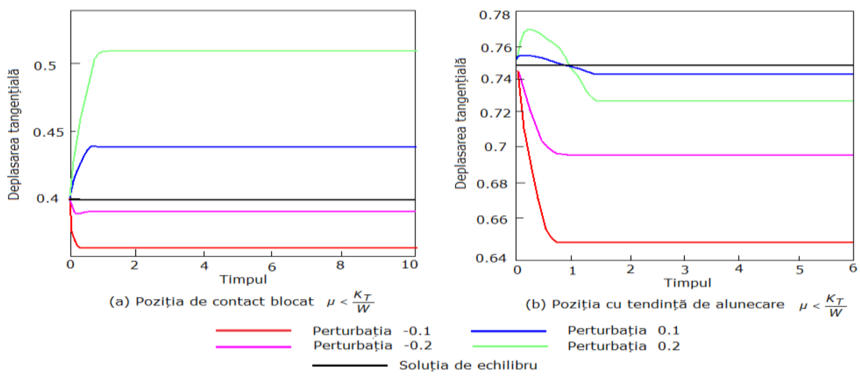


Fig. 4.11- Stabilitatea stărilor de echilibru: A>0

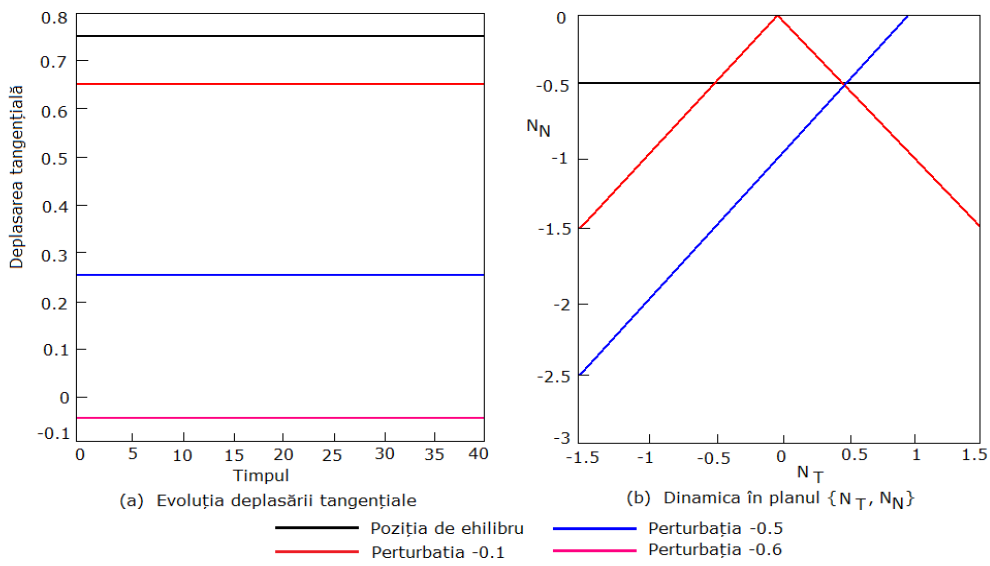
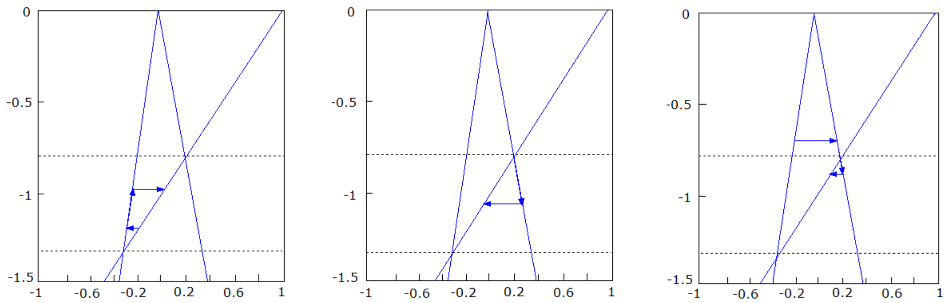


Fig. 4.12 – Stabilitatea unei poziţii de echilibru cu contact blocat urmată de o perturbaţie

$$U_{0T} < 0 \quad A > 0 \quad \mu = K_T / W$$



(a) Perturbaţia $v_{0T} > 0$ cu contact blocat (b) Perturbaţia $v_{0T} < 0$ în tendinţă de alunecare (c) Perturbaţia $v_{0T} > 0$ în tendinţă de alunecare

Fig.4.13 – Influenţa traiectoriei în funcţie de stările iniţiale în planul $\{N_T, N_N\}$

Aceste rezultate sunt obţinute pentru o poziţie de echilibru $\left(u_N^e = 0, u_T^e = 0{,}4, N_N^e = -1{,}6, N_T^e = 0{,}4\right)$ în contact blocat care au fost perturbate pentru diferite valori ale vitezei tangenţiale. Figura 4.12.b reprezintă dinamica poziţiei de echilibru blocat $\left(u_N^e = 0, u_T^e = 0{,}75, N_N^e = -1{,}25, N_T^e = 0{,}75\right)$ pentru perturbaţiile în viteză tangenţială. Se obţin curbe analoge pentru alte poziţii de echilibru în tendinţă de alunecare. Este interesant de vizualizat dinamica sistemului în planul $\{N_T, N_N\}$. Perturbaţiile în viteze tangenţiale la poziţia de echilibru sunt prezentate în figura 4.13 Starea iniţială din figura 4.13.a $\left(u_N^e = 0, u_T^e = 0{,}9, N_N^e = -1{,}1, N_T^e = 0{,}9\right)$ corespunde la o stare de contact blocat. Se perturbă această poziţie cu $v_{0T} = 0{,}2$. Dinamica poziţiei de echilibru în tendinţă de alunecare $\left(u_N^e = 0, u_T^e = 1{,}2, N_N^e = -0{,}8, N_T^e = 0{,}2\right)$ este succesiv perturbată cu $v_{0T} = -0{,}2$, apoi $v_{0T} = -0{,}2$ şi sunt reprezentate în figurile 4.13. b şi c. Aceste diagrame permit observarea influenţei perturbaţiilor şi în particular legătura între schimbările bruşte ale reacţiunii şi semnul perturbaţiilor iniţiale. Se constată că traiectoria se opreşte într-o poziţie de echilibru corespunzătoare la ansamblul stărilor de echilibru caracterizate de aceleaşi valori ale lui A şi μ.

4.5 Contribuţii personale

- S-a studiat existenţa şi unicitatea soluţiilor asociate ecuaţiilor de evoluţie a problemei P_u - sistem de tip Klarbring în cazul contactului cu frecare precum şi existenţa unei soluţii locale analitice.
- Pentru analiza stărilor de echilibru pentru problema P_u' în cazul ciocnirii plastice s-a utilizat metoda secţiunii de intersecţie a dreptei cu conul de frecare Coulomb
- S-a studiat stabilitatea stărilor de echilibru pentru un sistem dinamic discretizat utilizând metoda Lyapunov şi algoritmul iteraţiilor succesive NSCD.

5.CONCLUZII. CONTRIBUŢII PERSONALE

- Prezentarea stadiului actual al cercetărilor sistemelor mecanice cu legături unilaterale şi frecare, elementelor principale caracteristice mişcărilor sistemelor vibrpoercutante utilizând noţiunea de legătură unilaterală.
- Pe baza proprietăţilor deduse pentru funcţia legăturii unilaterale s-au clasificat mişcările cu sau fără contact prelungit ale sistemelor vibropercutante
- Descrierea principalelor metode de aproximare utilizate pentru analiza evoluţiei şi stabilităţii sistemelor clasice liniar elastice cu condiţii la limita contactului unilateral şi frecare Coulomb, metoda teta, schema Paoli-Schatzman şi schema Newmark adaptată la cazul sistemelor mecanice cu contact
- Punerea în evidenţă a legii de frecare Coulomb în formularea variaţională, exprimarea ecuaţiilor de mişcare pentru sistemul Klarbring
- Exprimarea ecuaţiei de mişcare cu ajutorul teoriei distribuţiilor prin considerarea spaţiului vectorial al distribuţiilor $S\left(\left[0,T\right];\Re^{n}\right)$
- Prezentarea modelului Coulomb extins care ţine cont de efectul „stick-slip” şi efectul Stribeck
- Descrierea modelului LuGre generalizat cunoscut şi ca modelul stării unice elasto-plastice

- S-a studiat efectul vibraţiei rapide numite „dither” – semnal de superpoziţie, pe o clasă de sisteme cu frecare. Interacţiunea gradelor de libertate microscopice şi macroscopice au fost considerate în investigaţiile analitice şi numerice.
- Modelul LuGre, modelul elasto-plastic care este mai riguros, sunt considerate modele ale frecării. Din expresiile analitice sunt obţinute două tipuri de semnale de superpoziţie numite viteză de excitaţie de tip puls pătratic şi forţă de excitare sinusoidală.
- Caracteristicile frecării efective prezintă tendinţa asemănătoare caracteristicilor de amortizare liniar vâscoasă la viteză foarte mică. Caracteristicile vitezei inferioare a frecării efective depinde mai ales de forţa de frecare Coulomb şi de caracteristicile semnalului de superpoziţie. Viteza inferioară a forţei de frecare descreşte cu creşterea puterii excitaţiei rapide. În plus, o alegere favorabilă a caracteristicilor semnalului de superpoziţie poate completa sau şterge parţial panta negativă a caracteristicilor vitezei de frecare.
- Pentru câteva valori ale parametrilor asociate cu modelul amortizării asperităţilor se poate observa o a doua zonă a pantei negative în frecarea efectivă în funcţie de caracteristicile vitezei alături de efectul Stribeck. Stabilitatea traiectoriei vitezei sistemului cu frecare a fost prezentat ţinând seama de caracteristicile semnalului de superpoziţie indus frecării efective.

- S-a elaborat schema logică a algoritmului NSCD pentru metoda contactului dinamic neneted [62]
- Sunt prezentate principiile teoretice care stau la baza construirii şirurilor de aproximaţii ale vitezelor necesare determinării soluţiei problemei P_U
- S-a realizat o schema de discretizare în viteze[63] privind contactul cu frecare a unei particule materiale din R^2
- S-a arătat că variaţia vitezei de aproximare este mărginită pe un interval
- S-a studiat existenţa şi unicitatea soluţiilor asociate ecuaţiilor de evoluţie a problemei P_U - sistem de tip Klarbring în cazul contactului cu frecare precum şi existenţa unei soluţii locale analitice.
- Pentru analiza stărilor de echilibru pentru problema P_U' în cazul ciocnirii plastice s-a utilizat metoda secţiunii de intersecţie a dreptei cu conul de frecare Coulomb
- S-a studiat stabilitatea stărilor de echilibru pentru un sistem dinamic discretizat utilizând metoda Lyapunov şi algoritmul iteraţiilor succesive NSCD.
- Întocmirea unei bibliografii compelete pentru tema studiată.

ANEXA I[34]

Fie J o funcţie convexă, semicontinuă inferior pe $\Re^n$ în $\Re \cup \{+\infty\}$. Se notează $\partial J(u)$ ansamblul gradienţilor lui J în u :0

$$r \in \partial J(u) \Leftrightarrow r \in \Re^n \quad J(v) \geq J(u)\langle r, v-u\rangle, \ \forall v \in \Re^n \tag{A.1}$$

Un exemplu de funcţie convexă care va fi utilizată este funcţia indicator a unui ansamblu convex închis $K \subset \Re_n$ notată I_K şi definită de:

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \ \ v \in K \\ +\infty & \text{dacă} \ \ nu \end{cases}$$

Subdiferenţiala funcţiei indicator K este un con convex închis:

$$\partial I_K(u) = \{r \in \Re^n, \forall v \in K, \langle r, v-u\rangle \leq 0\}$$

Apelând funcţia conjugată a lui J, funcţia J^* pe $\Re^n$ în $\Re \cup \{+\infty\}$definită de:

$J^*(r) = \sup\limits_{v \in \Re^n} \{\langle r, v\rangle - J(v)\}$ funcţia conjugată a lui I_K este dată de:

$$I_K^*(r) = \sup_{v \in \Re^n} \{\langle r, v\rangle - I_K(v)\} = \sup_{v \in K} \langle r, v\rangle$$

I_K^* este de asemenea numită funcţie convexă de sprijin a lui K.

<u>Proprietatea A.1</u>

Fie J convexă, semicontinuă inferior, atunci $J^{**} = \left(J^*\right)^* = J$ este asimilată cu următoarele expresii:

(i) $\quad r \in \partial J(u)$

(ii) $\quad J(u) + J^*(r) = \langle r, u\rangle$

(iii) $\quad u \in \partial J^*(r)$

ANEXA II[57]
CONVERGENŢA ŞIRULUI DE APROXIMAŢII

<u>Teorema</u> lui Helly – Banach

Fie $(V_K)_{K\geq 0}$ un şir în $BV\left([0,T];\Re^n\right)$ spunem că:

$\exists M > 0, \forall t \in [0,T], \forall K \in N, \|V_K(t)\| \leq 0;$

$\exists M' > 0, \forall K \in N, var(V_K;[0,T]) \leq M'$

Atunci există un şir extras $(V_{K_k})_{k\geq 0}$ şi $V \in BV\left([0,T];\Re^n\right)$ spunem că:

$\forall t \in [0,T], \lim\limits_{k\to+\infty} V_{K_k}(t) = V(t)$

$\forall \varphi \in C^0\left([0,T];\Re^n\right), \lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_{[0,T]} \varphi \dot{V}_{K_k} = \int\limits_{[0,T]} \varphi \dot{V}$

În virtutea celor de mai sus, este posibilă stabilirea propoziţiei de mai jos:

<u>Propoziţia AII.1</u>

Fie $(U_K)_{K\geq 1}$ şirul de aproximaţii definit, atunci există un subşir $(U_{K_k})_{k\geq 0}$ care:

$(i)\ U_{K_k} \to U\ uniform\ pe\ [0,T]$

$(ii)\ \dot{U}^+_{K_k} \to \dot{U}^+\ pentru\ orice\ t \in [0,T]\ individual\ al\ unei\ multimi\ finite$

$(iii)\ \ddot{U}_{K_k} \to \ddot{U}$ pe $M\left([0,T];\Re^n\right)$

Demonstraţie:

Estimările obţinute permit aplicarea teoremei Helly – Banach pentru un şir $\dot{U}^+_K$ pentru a deduce existenţa lui $V \in BV\left([0,T];\Re^n\right)$, astfel că:

$\forall t \in [0,T], \lim\limits_{k\to+\infty} \dot{U}^+_{K_k}(t) = V(t)$

$\forall \varphi \in C^0\left([0,T];\Re^n\right), \lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_{[0,T]} \varphi \ddot{U}^+_{K_k} = \int\limits_{[0,T]} \varphi \dot{V}$

Deoarece: $U(t) = U_0 + \int\limits_0^t V(s)ds$ rezultă teorema de convergenţă Lebesgue: $U_{K_k} \to U$ uniform pe $[0,T]$. Pe de altă parte: $\forall t \in]0,T[; \dot{U}^+(t) = V(t+)$ pentru creşterea finită. Cum $V(t)$ şi $V(t+)$ coincid pe $[0,T]$ exceptând punctele unei submulţimi numărabile pe $[0,T]$, se deduce teorema.

ANEXA III[37]

Ideile noi caracteristice sistemului dinamic arată că P_u este soluţia remarcată de J.J. Moreau şi M. Jean.

Se observă că este posibilă perturbarea unei stări de echilibru în contact blocat printr-o deplasare finită fără ca această perturbaţie a datelor Cauchy să nu fie urmată de mişcare (figura 4.12).

Definiţii

Se perturbă datele problemei 4.1 care devine P_u'. Se găseşte $U \in S\left(\left[0,\hat{T}\right];\Re^2\right)$ şi $N \in M\left(\left[0,\hat{T}\right];\Re^2\right)$ astfel că:

$$\begin{aligned} & U(0) = U_0, \dot{U}^+(0) = V_0 \\ & m\ddot{U} + KU = F + \varepsilon\xi + N \\ & U_N \le 0, N_N \le 0, U_N N_N = 0 \\ & \forall V \in C^0\left(\left[0,\hat{T}\right];\Re\right), \int_{\left[0,\hat{T}\right]} \left|N_T, V - \dot{U}_T^+\right| - \mu N_N\left(|V| - \left|\dot{U}_T^+\right|\right) \ge 0 \\ & U_N(t) = 0 \Rightarrow \dot{U}_N^+(t) = 0 \end{aligned} \tag{AIII.1}$$

F este constantă, ε un parametru mic iar ξ o forţă care s-a ales analitic.

Se poate spune că problema IV.41 este bine pusă. Astfel, problema 4.1 este problema AIII.1 cu $\xi = 0$. Prin urmare există stări de echilibru ale lui AIII.1 cu $\xi = 0$.

- Spunem că răspunsul U^e este stabil la perturbaţii identice, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât răspunsul U^e corespunzător problemei 4.1 să fie un răspuns al problemei AIII.1.
- Spunem că o stare de echilibru este stabilă Coulomb dacă reacţiunea corespunzătoare N^e este situată strict în interiorul conului lui Coulomb.

Propoziţia III.1

O stare de echilibru este stabilă Coulomb dacă şi numai dacă este stabilă la perturbaţii identice.

Demonstrarea acestei propoziţii este uşoară din considerente pur geometrice. Originalitatea provine din noile noţiuni de stabilitate.

Demonstraţie

Fie U^e o soluţie Coulomb stabilă. Arătăm că această soluţie este stabilă la perturbaţii identice. Rezultatele obţinute care dau ansamblul stărilor de echilibru în funcţie de parametrii permit să afirmăm fie că A este nul pentru coeficientul de frecare strict superior lui $\frac{K_T}{W}$, fie A este stric pozitiv cu un coeficient de frecare oarecare.

Se fixează o valoare a reacţiunii normale N_N^e în ansamblul reacţiunilor admisibile şi asociată deplasării U^e. Spunem că $\left(U^e, N^e\right)$ este stabilă la perturbaţii identice, înseamnă că există ξ astfel că $\left(U^e, N^e\right)$ este o stare de echilibru simultan pentru problema 4.1 şi AIII.1.

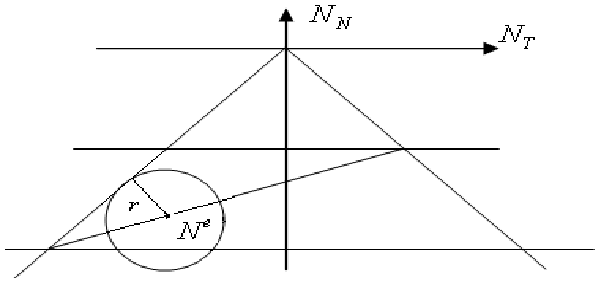


Fig.AIII.1 - Exemplu de descoperire a lui ε pentru $A > 0$ şi $\mu < K_T/W$

Reacţiunea normală corespunzătoare valorii lui U^e pentru problema statică asociată problemei AIII.1 este dată de:

$$KU^e = F + N + \varepsilon\xi(t) \text{ cu } \begin{cases} U_N^e = 0 \\ U_T^e = \dfrac{F_N + N_N^e}{W} \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{cases} N_N(t) = N_N^e - \varepsilon\xi_N(t) \\ N_T(t) = N_T^e - \varepsilon\xi_T(t) \end{cases} \tag{AIII.2}$$

Astfel există r_{max} astfel încât sfera $\left(N^e, r_{max}\right)$, aici un cerc situat în planul $\{N_T, N_N\}$ este conţinut strict în interiorul conului Coulomb. Raza este dată de:

$$r_{max}^2 = min\left| \min_{N_N<0}\left(f^-(N_N)\right), \min_{N_N<0}\left(f^+(N_N)\right)\right| \text{ cu}$$

$$\begin{cases} f^-(N_N) = \left(N_N - N_N^e\right)^2 + \left(\mu N_N - \left(\dfrac{A}{W} + \dfrac{K_T}{W} N_N^e\right)\right)^2 \\ f^+(N_N) = \left(N_N - N_N^e\right)^2 + \left(-\mu N_N - \left(\dfrac{A}{W} + \dfrac{K_T}{W} N_N^e\right)\right)^2 \end{cases}$$

Reacţiunile trebuie astfel să satisfacă:

$$\left(N_N(t) - N_N^e\right)^2 + \left(N_T(t) - N_T^e\right)^2 < r_{max}^2 \text{, oricare ar fi } t \text{ .}$$

Fie din relaţiile AIII.2:

$$r_{max}^2 > \varepsilon^2\left(1+\left(\frac{K_T}{W}-1\right)^2 \xi_N(t)^2 + \xi_T(t)^2 - 2\left(\frac{K_T}{W}-1\right)\xi_N(t)\xi_T(t)\right)$$

Funcţia ξ fiind analitică pe intervalul $\left[0,\hat{T}\right]$, există pentru toate momentele t constantele M_N, M_T, Min_N şi Min_T astfel încât oricare ar fi $t \in \left[0,\hat{T}\right]$ rezultă:

$$\begin{cases} |\xi_N(t)| \le M_N \\ |\xi_T(t)| \le M_T \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_N^2(t) < Min_N \\ \xi_T^2(t) < Min_T \end{cases}$$

Există atunci ε astfel încât:

$$\varepsilon < \frac{r_{max}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{K_T}{W}-1\right)^2 Min_N + Min_T - 2\left(\frac{K_T}{W}-1\right)M_N M_T\right)}}$$

Dacă o soluţie U^e este stabilă Coulomb ea este stabilă şi la perturbaţii identice.

Reciproc, se presupune că U^{e1} este stabilă la perturbaţii identice. Se arată atunci că această poziţie este stabilă Coulomb. Din definiţie U^{e1} este soluţia problemei:

$$KU^{e1} = F + N^{e1}$$

$$\begin{cases} U_N^{e1} \le 0, N_N^{e1} \le 0, N_N^{e1}U_N^{e1} = 0 \\ \left|N_T^{e1}\right| \le -\mu N_N^{e1} \end{cases}$$

şi de asemenea soluţia problemei:

$$KU^{e1} = F + \varepsilon\xi + N^{e2}$$

$$\begin{cases} U_N^{e1} \le 0, N_N^{e2} \le 0, N_N^{e2}U_N^{e1} = 0 \\ \left|N_T^{e2}\right| \le -\mu N_N^{e2} \end{cases}$$

Presupunem că U^{e1} nu este stabilă Coulomb. Atunci din definiţie: fie $\left|N_T^{e1}\right| = -\mu N_N^{e1}$, fie $N^{e1} = 0$, de unde se deduce:

- Dacă $N_T^{e1} = -\mu N_N^{e1}$ $\quad \varepsilon(\xi_T - \xi_N) + \left(N_T^{e2} - \mu N_N^{e2}\right) = 0$
- Dacă $N_T^{e1} = \mu N_N^{e1}$ $\quad \varepsilon(\xi_T + \xi_N) + \left(N_T^{e2} + \mu N_N^{e2}\right) = 0$
- Dacă $N^{e1} = 0$ $\quad \varepsilon(\xi_T + \xi_N) + \left(N_T^{e2} + \mu N_N^{e2}\right) = 0$

Se poate găsi întotdeauna o perturbaţie ξ astfel încât $N_T^{e2} - \mu N_N^{e2} > 0$ şi $N_T^{e2} + \mu N_N^{e2} > 0$. Reacţiunile sunt atunci în exteriorul conului Coulomb. Ceea ce este o contradicţie. Deci dacă U^{e1} este stabilă la perturbaţii identice este stabilă Coulomb.

Teoremă[66]

Dacă există o stare stabilă Coulomb atunci orice stare de echilibru fără zbor este o stare de echilibru Coulomb.

Demonstraţie

Dacă poziţia de echilibru considerată este stabilă Coulomb rezultatul este demonstrat mai sus., în plus există o stare stabilă Coulomb astfel încât există o poziţie corespunzătoare tendinţei de alunecare. Nu rămâne de studiat decât cazul unde soluţia de echilibru nu este stabilă Coulomb, se spune că este în tendinţă de alunecare caracterizată de o mărime A strict pozitivă.

Se porneşte de la o soluţie de echilibru în tendinţă de alunecare a problemei 4.1 pentru care condiţiile iniţiale sunt ale problemei AIII.1. Se doreşte a se arăta că există $\varepsilon > 0$ şi un moment $\hat{t}$ astfel încât pentru toate $t > \hat{t}$ reacţiunea este strict în interiorul conului Coulomb. Pentru a demonstra existenţa acestui moment se utilizează algoritmul „NSCD” considerând un sistem dinamic discret. Se poate concluziona că acest rezultat trece la limită la problema continuă.

Se arată înainte de toate, demonstraţia în cazul unde perturbaţia $\varepsilon\xi$ este constantă. Calculele se dovedesc în acest caz a fi efectuate complet analitic.

1. **Cazul unei forţe ξ constante**

Se prezintă cazul unei perturbaţii a echilibrului printr-o forţă constantă. În figura următoare se arată evoluţia mişcării pornind de la poziţia de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă urmată de o perturbaţie în forţă $\varepsilon\xi$ unde s-a ales un parametru ε suficient de mic.

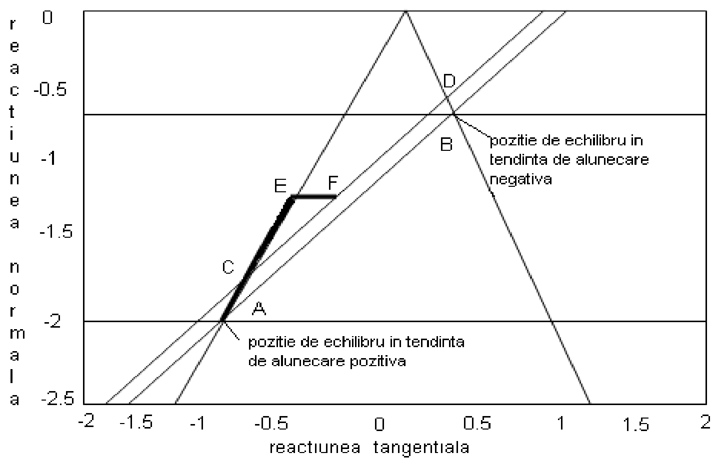


Fig. AIII.2

Poziţia de echilibru: $A > 0; \mu < \frac{K_T}{W}$

Poziţia de echilibru iniţială este reprezentată prin punctul A. Ansamblul de poziţii de echilibru corespunzătoare la o forţă F dată a problemei 4.1 este dreapta [AB] şi mulţimea stărilor de echilibru corespunzătoare sarcinii suplimentare $F + \varepsilon\xi$ este reprezentată de dreapta [CD]. Soluţia problemei 4.1 cuprinde alunecarea în care reacţiunea variază de la punctul A la E şi trece prin punctul C cu o viteză maximă. Viteza se anulează în punctul E care nu este o poziţie de echilibru. Avem prin urmare un salt al reacţiunii tangenţiale. Particula se află atunci strict în interiorul conului Coulomb – punctul F.

Aceasta se verifică simplu. Mişcarea care pleacă de la punctul A este descrisă de:

$$\begin{cases} m\ddot{U}_T + (K_T - \mu W)U_T = (F_T + \varepsilon\xi_T) - \mu(F_N + \varepsilon\xi_N) \\ U_T(0) = U_T^e = \dfrac{F_T + \mu N_N^e}{K_T} = \dfrac{F_N + N_N^e}{W} \\ \dot{U}_T(0) = 0 \end{cases}$$

cu $N_N^e = -\dfrac{A}{K_T - \mu W}$

Se introduc următoarele notaţii:

$$G_N = F_N + \varepsilon\xi_N \text{ şi } G_T = F_T + \varepsilon\xi_T$$

Soluţia este:

$$U_T(t) = \frac{\varepsilon(\mu\xi_N - \xi_T)}{K_T - \mu W} cos\left(\sqrt{\frac{K_T - \mu W}{m}}t\right) + \frac{G_T - \mu G_N}{K_T - \mu W}$$

Faza de alunecare se opreşte la momentul $\hat{t} = \sqrt{\dfrac{m}{K_T - \mu W}}\pi$. ε a fost ales suficient de mic; există $\tilde{N}^e$ astfel încât $N(\hat{t}) = \tilde{N}^e$.

Se remarcă faptul că viteza este maximă la momentul $t = \sqrt{\dfrac{m}{K_T - \mu W}}\dfrac{\pi}{2}$.

Reacţiunea va fi atunci:

$$\begin{cases} N_N(\hat{t}) = -\dfrac{\tilde{A}}{K_T + \mu W} \\ N_T(\hat{t}) = \mu N_N(\hat{t}) \end{cases}$$

cu

$$\tilde{A} = K_T(F_N + \varepsilon\xi_N) - W(F_T + \varepsilon\xi_T)$$

Aceasta corespunde coordonatelor punctului E. Rezultatul este acelaşi pentru o poziţie de echilibru în tendinţă de alunecare negativă la o perturbaţie cu o forţă $\varepsilon\xi$.

2. **Cazul unei forţe ξ analitice**

Se fixează pasul de timp h şi se consideră iteraţiile succesive ale algoritmului utilizând metoda „NSCD" la un sistem dinamic discret. Se alege o perturbaţie astfel încât acesta să fie iniţial în alunecare şi se arată că există un moment la capătul căruia evoluţia sistemului intră în interiorul buclei de contact blocat. Din tabelul 4.1 trebuie arătat că există un indice $i \in N$ astfel că relaţiile de mai jos sunt satisfăcute:

$$\begin{cases} \tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < 0 \\ \tilde{F}_T^{i+1} + \mu\tilde{F}_N^{i+1} > 0 \end{cases}$$

Este suficient de ales ε suficient de mic pentru ca sistemul să rămână în echilibru.

Se consideră poziţia de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă. De asemenea se aminteşte că această poziţie este caracterizată de o mărime A strict pozitivă şi un coeficient de frecare strict inferior lui $\frac{K_T}{W}$. Rezultă:

$$U^e = \left| 0, \frac{F_T + \mu N_N^e}{K_T} = \frac{F_N + N_N^e}{W} \right|; \qquad N_N^e = -\frac{A}{K_T - \mu W}$$

Se alege o perturbaţie a acestui echilibru printr-o forţă exterioară $\varepsilon\xi$ care conduce la o fază de alunecare pozitivă. Se arată că există un indice i astfel că alunecarea încetează, se spune că există un indice $i \in N$ ce verifică relaţia:

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < 0 \tag{AIII.3}$$

Avem:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} &= m\dot{U}_T^i - h(K_T - \mu W)U_T^i + h(F_T - \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right) \\ &= m\dot{U}_T^i - h(K_T - \mu W)U_T^e + h(F_T - \mu F_N) + h^2(\mu W - K_T)\sum_{j=2}^{i}\dot{U}_T^j \\ &\quad + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right) \end{aligned}$$

Dar,

$$\begin{aligned} (K_T - \mu W)U_T^e &= K_T\left(\frac{F_T}{K_T} - \frac{\mu A}{K_T(K_T - \mu W)}\right) - \mu W\left(\frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}\right) \\ &= -(F_T - \mu F_N) \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} = m\dot{U}_T^i + h^2(\mu W - K_T)\sum_{j=2}^{i}\dot{U}_T^j + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i - \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right)$$

Viteza este mărginită.

Există două constante pozitive Min şi Max astfel că în timpul alunecării pozitive avem: $Min \le \dot{U}_T^j \le Max$, $j + 2, \ldots, i$. Forţa ξ fiind analitică pe $\left|0, \hat{T}\right|$ există două constante M_N şi M_T astfel încât $|\xi_N| \le M_N$ şi $|\xi_T| \le M_T$. Astfel,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} \le \underbrace{mMax + h^2(\mu W - K_T)(i-1)Min + \varepsilon h(M_T + \mu M_N)}_{K^+}$$

Inegalitatea AIII.3 este verificată dacă mărimea κ^{+} este negativă, dacă indicele i satisface:

$$i > 1 + \frac{\varepsilon h(M_T + \mu M_N) + mMax}{Minh^2(K_T - \mu W)}$$

În plus, se alege parametrul ε suficient de mic astfel încât, $\varepsilon < \frac{2\mu A}{(K_T - \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, deplasarea tangenţială la iteraţia i verifică relaţia: $U_T^i < \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)}$. Rezultă:

$$\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} = m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{k+1} + \xi_T^k + \mu\left(\xi_N^{k+1} + \xi_N^k\right)\right)$$
$$> mMin - \frac{2h\mu A}{K_T - \mu W}$$

h fiind ales suficient de mic, semnul lui $\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1}$ este pozitiv. În consecinţă la iteraţia $i+1$ se intră în bucla de contact.

Se consideră următoarea poziţie de echilibru în tendinţă de alunecare negativă caracterizată de o mărime A strict pozitivă. Avem:

$$U^e = \left| 0, \frac{F_T - \mu N_N^e}{K_T} \right| = \left| 0, \frac{F_N + N_N^e}{W} \right|; \qquad N_N^e = -\frac{A}{K_T + \mu W}$$

Urmare acestei perturbaţii particula materială este în alunecare negativă. La fel ca şi mai sus, viteza fiind mărginită, există două constate pozitive min şi max astfel că în timpul alunecării negative avem: $-min \le \dot{U}_T^j \le -max$; $j = 2,..., i$. Alunecarea se opreşte dacă există $i \in N$ astfel încât:

$$\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} > 0 \qquad \text{(AIII.4)}$$

Rezultă:

$$\tilde{F}_T^{i+1} + \mu \tilde{F}_N^{i+1} = m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right)$$
$$= m\dot{U}_T^i - h(K_T + \mu W)U_T^e + h(F_T + \mu F_N) + h^2(\mu W - K_T)\sum_{j=2}^{i}\dot{U}_T^j$$
$$+ \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right)$$
$$= m\dot{U}_T^i + h^2(\mu W - K_T)\sum_{j=2}^{i}\dot{U}_T^j + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right)$$
$$> \underbrace{-m\,min + h^2(\mu W + K_T)(i-1)max - \varepsilon h(M_T + \mu M_N)}_{\kappa^-}$$

Inegalitatea AIII.4 este verificată dacă cantitatea κ^{-} este pozitivă ştiind că indicele i satisface:

$$i > \frac{\varepsilon h(M_T + \mu M_N) + m\,min}{h^2(K_T + \mu W)max} + 1$$

Dacă $\mu < \frac{K_T}{W}$, prin alegerea lui ε suficient de mic astfel încât $\varepsilon < \frac{2\mu A}{(K_T + \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, deplasarea tangenţială la iteraţia i verifică $\dot{U}_T^i > \frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T - \mu W)}$. Astfel,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + h\varepsilon(M_T + \mu M_N)$$

$$< -m\,max + \frac{2h\mu A}{K_T + \mu W}$$

h fiind ales suficient de mic, iar semnul lui $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ este negativ. În consecinţă, la iteraţia $i+1$ se intră în bucla de contact.

Dacă $\mu = \frac{K_T}{W}$,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -\frac{hA}{W} + h\varepsilon(M_T + \mu M_N)$$

$$< h\left(-\frac{A}{W} + \varepsilon(M_T + \mu M_N)\right)$$

Este suficient să alegem ε suficient de mic, astfel încât $\varepsilon < \frac{A}{W(M_T + \mu M_N)}$ pentru care cantitatea $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ să fie negativă.

Dacă $\mu > \frac{K_T}{W}$,

$$\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1} < -h(K_T + \mu W)U_T^i + h(F_T + \mu F_N) + \frac{\varepsilon h}{2}\left(\xi_T^{i+1} + \xi_T^i + \mu\left(\xi_N^{i+1} + \xi_N^i\right)\right)$$

$$< -h(K_T + \mu W)\left(\frac{F_N}{W} - \frac{A}{W(K_T + \mu W)}\right) + h(F_T + \mu F_N) + h\varepsilon(M_T + \mu M_N)$$

$$< h\left(\frac{2A\mu}{K_T + \mu W} + \varepsilon(M_T + \mu M_N)\right)$$

Considerând ε suficient de mic astfel încât $\varepsilon < \frac{2A\mu}{(K_T + \mu W)(M_T + \mu M_N)}$, iar $\tilde{F}_T^{i+1} - \mu\tilde{F}_N^{i+1}$ să fie negativă.

Concluzie

Există un număr de iteraţii $i \in N$ pentru care viteza se anulează şi reacţiunea normală este egală cu cea a unei stări de echilibru a problemei AIII.1. Masa intră strict în interiorul conului Coulomb. Rezultatul de convergenţă ne permite să afirmăm că acest rezultat nu depinde de timp.

Dacă ε este ales suficient de mic sistemul rămâne în echilibru.

Cazuri numerice

Se prezintă traiectoria în planul $\{N_T, N_N\}$ astfel că evoluţia deplasării tangenţiale pentru o perturbaţie în forţe conform noţiunilor stabilite la perturbaţii identice introduse anterior, amintim că această noţiune e definită pentru stări de echilibru în contact fără zbor caracterizate de $A = 0$ cu $\mu > \frac{K_T}{W}$ şi $A > 0$.

Prezentăm rezultatele obţinute pentru poziţiile de echilibru în tendinţă de alunecare. În primul moment, perturbaţia este o forţă constantă, apoi, se alege perturbaţia unei funcţii analitice în timp.

Forţa constantă

Perturbaţia stării de echilibru corespunde pentru o forţă constantă $\varepsilon\xi$ ce ia succesiv valorile ξ $(-1,0)$, $(-2,0)$ şi $(-3,0)$ dacă se perturbă poziţia de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă; $(0,-1)$, $(0,-2)$, $0,-3$ pentru poziţia de echilibru în tendinţă de alunecare negativă. Parametrul ε este egal cu $0,1$.

Ansamblul stărilor de echilibru corespunzătoare la o sarcină $F + \varepsilon\xi$ este reprezentată în funcţie de valoarea lui ξ prin intersecţia dreptelor cu domeniul de admisibilitate a reacţiunilor corespondente. Dinamica în planul $\{N_T, N_N\}$ este reprezentată în roşu, albastru şi verde în funcţie de valorile perturbaţiei.

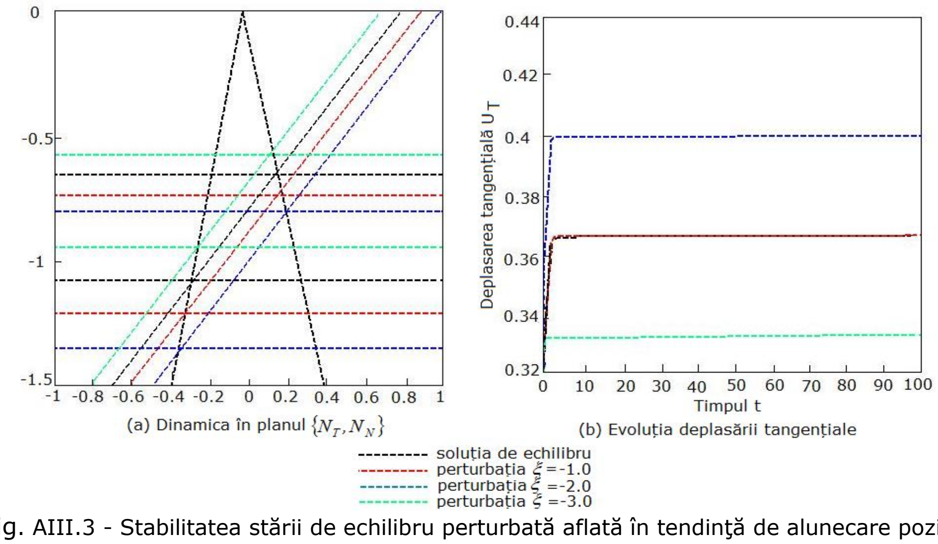


Fig. AIII.3 - Stabilitatea stării de echilibru perturbată aflată în tendinţă de alunecare pozitivă cu $A > 0$ şi $\mu < \frac{K_T}{W}$

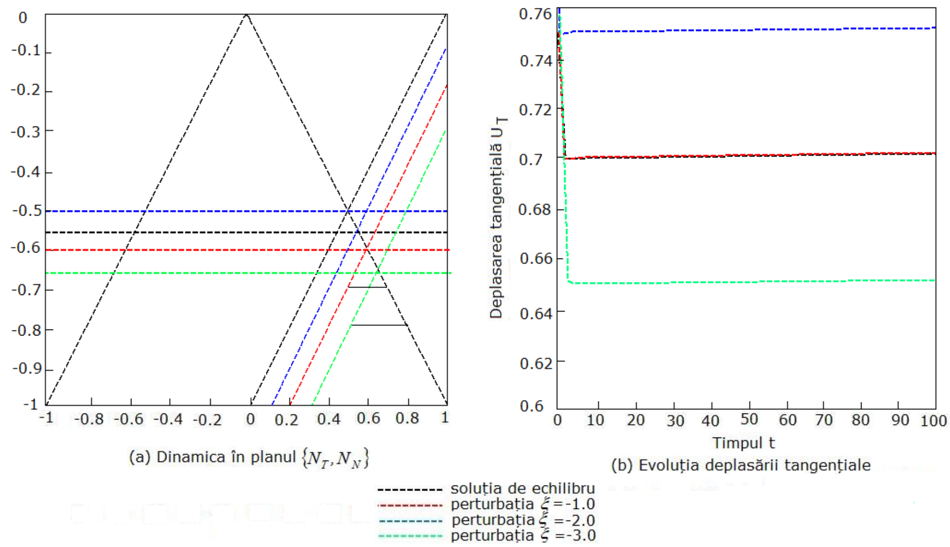


Fig. AIII.4 - Stabilitatea stării de echilibru perturbată aflată în tendinţă de alunecare negativă cu $A > 0$ şi $\mu = \dfrac{K_T}{W}$

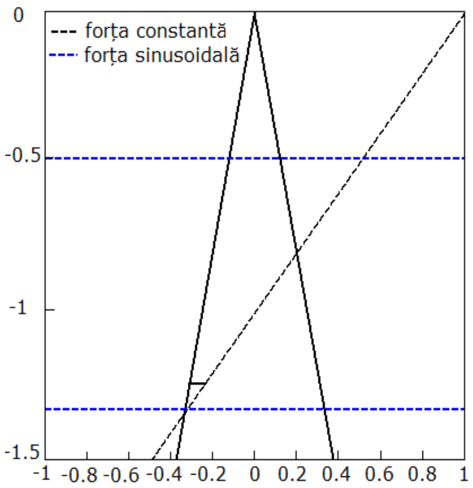
Aceste figuri prezintă evoluţia poziţiei de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0.33, N_N^e = -1.34, N_T^e = -1.59\right)$, respectiv în tendinţă de alunecare negativ $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0.75, N_N^e = -0.5, N_T^e = 0.5\right)$ caracterizate de $A > 0$, $\mu < \dfrac{K_T}{W}$ respectiv $A > 0$, $\mu = \dfrac{K_T}{W}$ urmată de o perturbaţie în forţă $\varepsilon\xi$. La sfârşitul unei perioade de timp finit mişcarea se opreşte la o stare stabilă Coulomb reprezentată prin simbolul „O" corespunzător unei poziţii de echilibru a sistemului supus la forţa $F + \varepsilon\xi$. Saltul între soluţia de perturbaţie şi soluţia de echilibru este constant la capătul timpului finit. (fig. AIII.3b şi fig. AIII.4b).

Forţa analitică sau analitică pe porţiuni

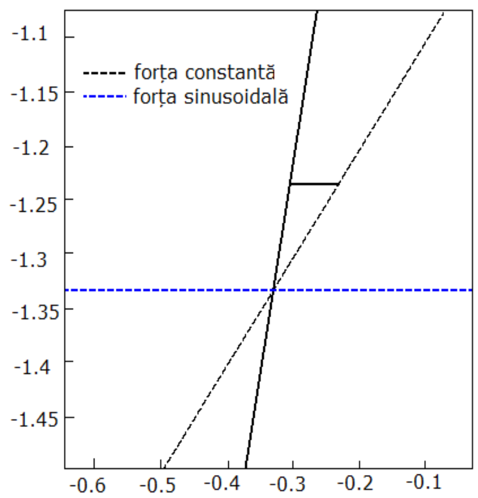
Se prezintă o perturbaţie a unei poziţii de echilibru în tendinţă de alunecare de către o forţă exterioară $\varepsilon\xi$. Se alege o astfel de perturbaţie a poziţiilor de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă şi negativă cu două forţe ξ astfel încât componenta normală este o funcţie treaptă şi o funcţie sinusoidală, deci componenta tangenţială este o funcţie identic nulă.

Parametrul ε este considerat ca fiind egal cu 0.1. Figurile AIII.5 respectiv AIII.6 prezintă reprezentarea poziţiei de echilibru în tendinţă de alunecare pozitivă $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0.33, N_N^e = -1.33, N_T^e = -0.33\right)$, respectiv în tendinţă de alunecare negativă $\left(U_N^e = 0, U_T^e = 0.75, N_N^e = -0.5, N_T^e = 0.5\right)$ caracterizată de $A > 0$, $\mu < \dfrac{K_T}{W}$

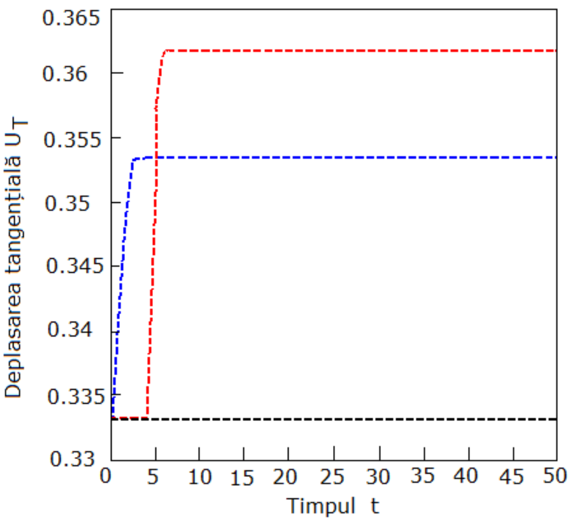
respectiv $A > 0$, $\mu = \dfrac{K_T}{W}$ urmată de o perturbaţie în forţă $\varepsilon\xi$. La sfârşitul perioadei timpului finit saltul între starea de echilibru şi traiectorie este constant pentru fiecare perturbaţie iar reacţiunea este strict în interiorul conului de frecare într-o stare stabilă Coulomb.



(a) Dinamica în planul

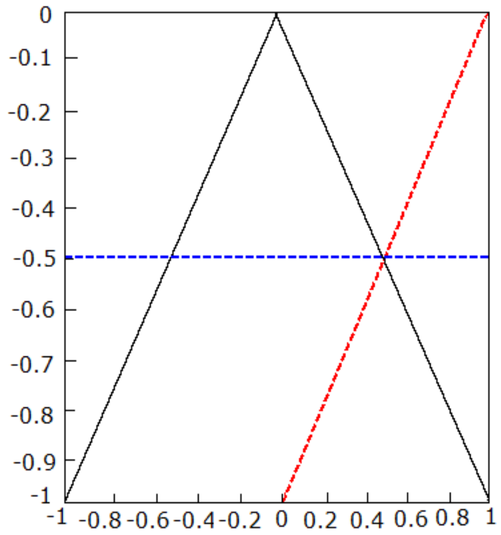


(b) Porțiune mărită a dinamicii în planul $\{N_T, N_N\}$

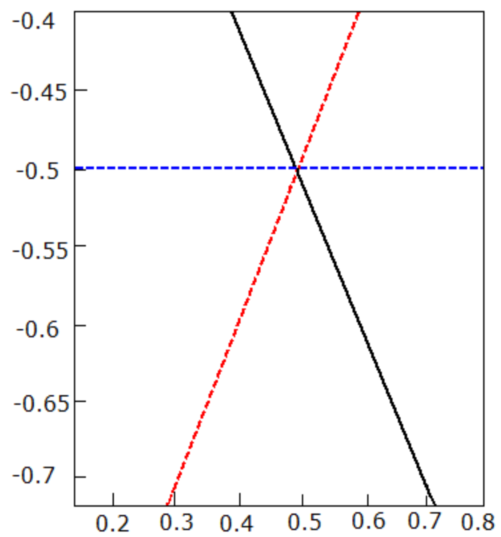


(c) Evoluția deplasării tangențiale

Fig.AIII.5 –Stabilitatea stării de echilibru perturbată aflată în tendinţă de alunecare pozitivă pentru $A > 0$ şi $\mu < \dfrac{K_T}{W}$



(a) Dinamica în planul $\{N_T, N_N\}$



(b) Porțiune mărită din reprezentarea dinamicii în planul $\{N_T, N_N\}$

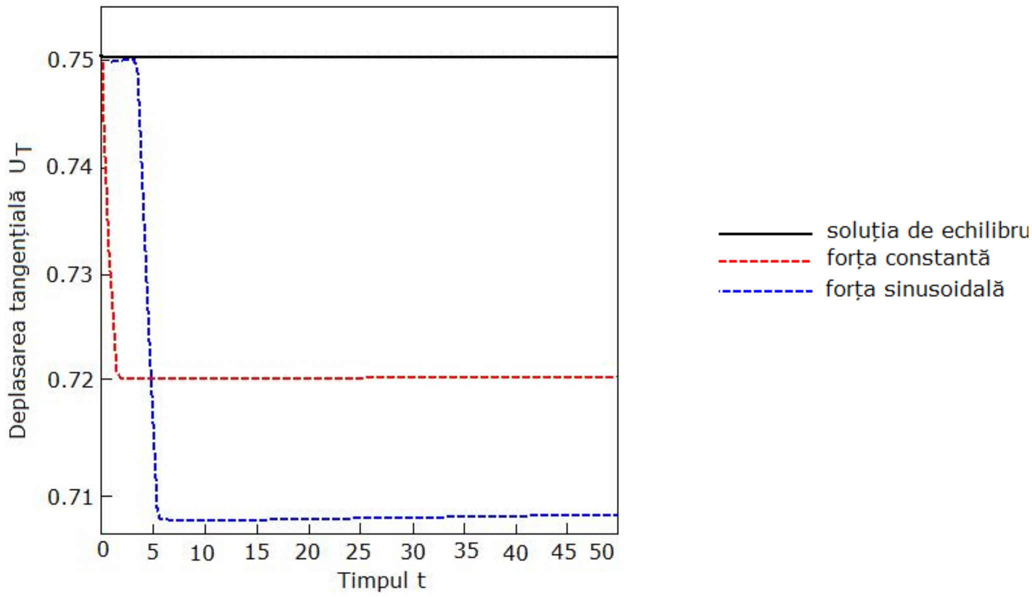


Fig.AIII.6 - Stabilitatea stării de echilibru perturbată aflată în tendinţă de alunecare negativă pentru $A > 0$ şi $\mu = \dfrac{K_T}{W}$

Concluzii

Obiectivul acestui studiu este analiza stabilităţii stărilor de echilibru a unui sistem simplu în prezenţa contactului unilateral şi al frecării Coulomb.

S-a obţinut un rezultat de existenţă pentru care datele sunt funcţii integrabile.

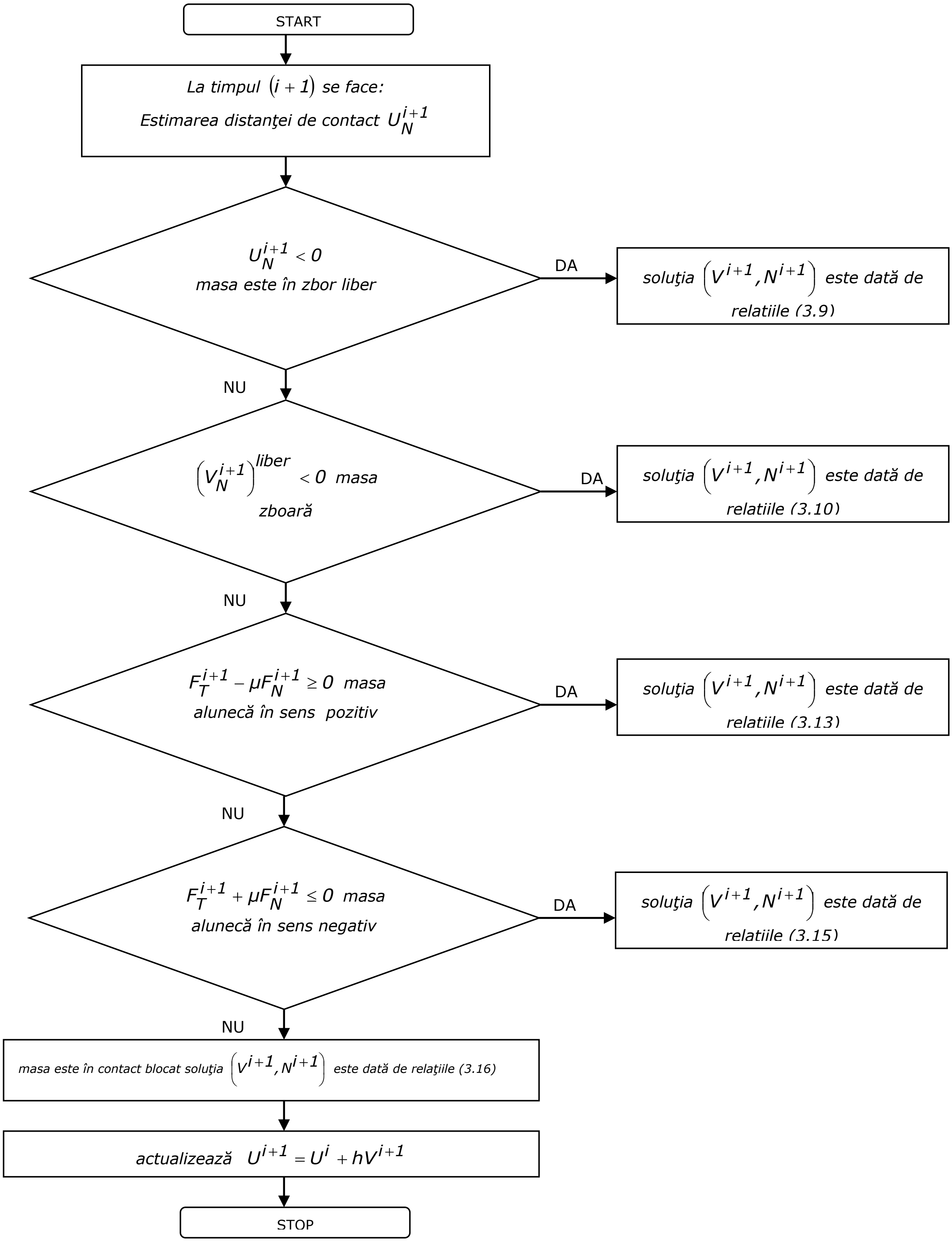
Pentru a se putea construi o aproximaţie compatibilă cu metoda NSCD – Contactului Dinamic Neneted se arată că se poate extrage un subşir convergent spre o soluţie a problemei. Amintim argumentele utilizate: extragerea subşirului şi limita acestuia care este soluţia problemei continue care furnizează existenţa, dar nu şi unicitatea soluţiei.

Ansamblul stărilor de echilibru au fost determinate în funcţie de parametrii sistemului. Stabilitatea a fost studiată prin integrarea directă a sistemelor de ecuaţii diferenţiale plecând de la vecinătăţile date ale echilibrului. Se insistă asupra a trei aspecte calitative ale rezultatelor de stabilitate obţinute:

- Poziţiile de echilibru în tendinţă de alunecare au o reacţiune nenulă; sunt fie stabile fie instabile; aici depind de parametrii sistemului.
- Singura state de echilibru asimptotic stabilă este starea de echilibru în contact cu zbor şi care este singura pentru care se obţine unicitatea soluţiei de echilibru. Dacă coexistă cu alte stări de echilibru, este stabilă în sens Lyapunov.
- Toate stările de echilibru în contact blocat sunt stabile în sens Lyapunov.

ANEXA IV

Schema logică a algoritmului NSCD



```
program NSCD;    {$N+} {$I-}
const a=2;
var n,j,k:integer;
var l:word;
var h,teta,m,u,detmt,t,fn,ft:real;
var ftildan,vn,un,ut,vt,ftildat,vlibern,vlibert,utilda,nn,nt:array [1..1] of double;
var I:array[1..a,1..a]of integer;
mr,mt,mtt,mad,minv:array[1..a,1..a]of real;
var    fisier :text;
begin
write('introdu numarul maxim de iteratii n=');readln(n);
write('introdu valoarea pasului h=');readln(h);
write('introdu valoarea lui teta=');readln(teta);
write('introdu valoarea lui masei m=');readln(m);
write('introdu valoarea coeficientului de frecare u=');readln(u);
I[1,1]:=1;I[1,2]:=0;I[2,1]:=0;I[2,2]:=1;
writeln('introdu elementele matricii de rigiditate mr');
for j:=1 to a do
for k:=1 to a do begin
write('mr[',j,',',k,']=');readln(mr[j,k]); end;
{writeln('calculeaza matricea mt'); }
for j:=1 to a do
for k:=1 to a do
begin
mt[j,k]:=m*i[j,k]+h*h*teta*mr[j,k];
{writeln('mt[',j,',',k,']=',mt[j,k]);}
 end;
{ writeln('Determinantul matricii mt este:');}
 detmt:=mt[1,1]*mt[2,2]-mt[1,2]*mt[2,1];
 {writeln('detmt=',detmt); }
 {writeln('transpusa matricii mt este mtt:');}
 mtt[1,1]:=mt[1,1];mtt[1,2]:=mt[2,1];mtt[2,1]:=mt[1,2];mtt[2,2]:=mt[2,2];
 for j:=1 to a do
for k:=1 to a do
{writeln('mtt[',j,',',k,']=',mtt[j,k]);
 writeln('mad adjuncta matricei mt este:');}
mad[1,1]:=mtt[2,2];mad[1,2]:=mtt[2,1];mad[2,1]:=mtt[1,2];mad[2,2]:=mtt[1,1;
 for j:=1 to a do
for k:=1 to a do
{writeln('mad[',j,',',k,']=',mad[j,k]);
for j:=1 to a do
for k:=1 to a do }
begin
minv[j,k]:=mad[j,k]/detmt;
{writeln('minv[',j,',',k,']=',minv[j,k]);}
end;
l:=0;
vn[l]:=0;un[l]:=1;   fn:=2;ft:=2;vt[l]:=0;ut[l]:=0; t:=0;
{crearea unui fisier de rezultate}
ASSIGN(fisier,'rezultate.txt');
```

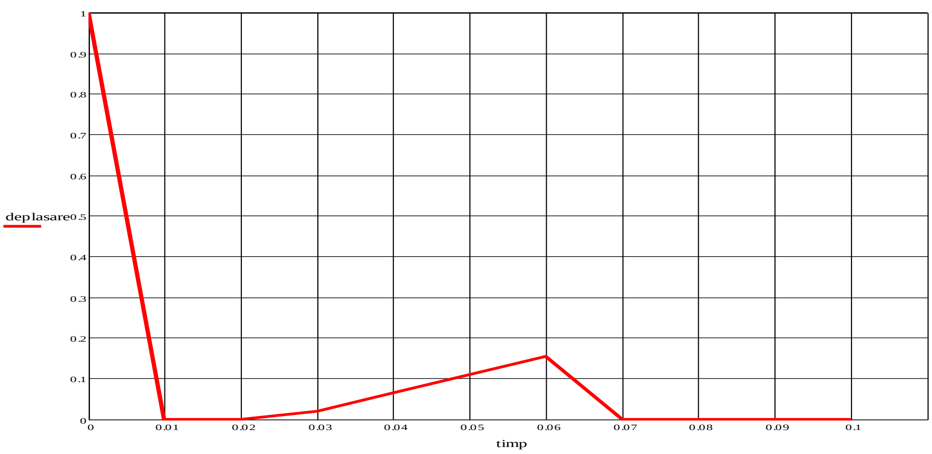
```
rewrite(fisier) ; append(fisier);
for l:=0 to n do begin
ftildan[l+1]:=m*vn[l]-h*mr[1,1]*un[l]+h*(teta*fn+(1-teta)*fn);
{writeln('fti1n=',fti1n);}
ftildat[l+1]:=m*vt[l]-h*mr[2,2]*ut[l]+h*(teta*ft+(1-teta)*ft);
{ writeln('fti1t=',fti1t); }
vlibern[l+1]:= minv[1,1]*ftildan[l+1];{ writeln('vi1libern=',vi1libern);}
vlibert[l+1]:= minv[2,2]*ftildat[l+1];{ writeln('vi1libernt',vi1libert);}
utilda[l+1]:=un[l]+h*(teta*vlibern[l+1]+(1-teta)*vn[l]);
writeln('utilda[',l+1,']=',utilda[l+1]);
writeln(fisier,t,un[l]);
if utilda[l+1]<0 then begin writeln('masa zboara liber, solutiile sunt');
                  vn[l+1]:=vlibern[l+1];writeln('vn=', vn[l+1]);
                   vt[l+1]:=vlibert[l+1]; writeln('vt=',vt[l+1]);
                  nn[l+1]:=0;     writeln('nn=',nn[l+1]);
                  nt[l+1]:=0; writeln('nt=',nt[l+1]);
                  writeln(fisier,' masa zboara liber solutiile sunt:
',vn[l+1],vt[l+1],nn[l+1],nt[l+1]);
              End
        else if vlibern[l+1]<0 then begin writeln('masa zboara, solutiile sunt');
                               vn[l+1]:=vlibern[l+1];writeln('vn=', vn[l+1]);
                               vt[l+1]:=vlibert[l+1]; writeln('vt=',vt[l+1]);
                               nn[l+1]:=0;writeln('nn=',nn[l+1]);
                               nt[l+1]:=0; writeln('nt=',nt[l+1]);
                                writeln(fisier,' masa zhoara, solutiile sunt:
',vn[l+1],vt[l+1],nn[l+1],nt[l+1]);
                                          end
                         else if ftildat[l+1]-u*ftildan[l+1]>=0 then begin
                         writeln('masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt');
vn[l+1]:=0; writeln('vn=', vn[l+1]);
vt[l+1]:=(ftildat[l+1]+u*ftildan[l+1])/(mt[2,2]+u*mt[1,2]);
writeln('vt=', vt[l+1]);
nn[l+1]:=(mt[1,2]*vt[l+1]-ftildan[l+1])/h; writeln('nn=',nn[l+1]);
nt[l+1]:=-u*nn[l+1]; writeln('nt=',nt[l+1]);
 writeln(fisier,' masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt:
',vn[l+1],vt[l+1],nn[l+1],nt[l+1]);
                                                     end
                        else if ftildat[l+1]+u*ftildan[l+1]<=0 then begin
                              writeln('masa gliseaza in sens negativ, solutiile sunt');
                              vn[l+1]:=0; writeln('vn=', vn[l+1]);
                              vt[l+1]:=(ftildat[l+1]-u*ftildan[l+1])/(mt[2,2]-u*mt[1,2]);
                              writeln('vt=', vt[l+1]);
                               nn[l+1]:=(mt[1,2]*vt[l+1]-ftildan[l+1])/h;
                               writeln('nn=',nn[l+1]);
                               nt[l+1]:=u*nn[l+1];
                               writeln('nt=',nt[l+1]);
 writeln(fisier,' masa aluneca in sens negativ, solutiile sunt:
',vn[l+1],vt[l+1],nn[l+1],nt[l+1]);
        end
        else begin writeln('masa blocata, solutiile sunt');
              vn[l+1]:=0; writeln('vn=',vn[l+1]);
```

```
            vt[l+1]:=0; writeln('vt=',vt[l+1]);
            nn[l+1]:=-ftildat[l+1]/h;
            writeln('nn=',nn[l+1]);
            nt[l+1]:=-ftildat[l+1]/h;
            writeln('nt=',nt[l+1]);
 writeln(fisier,' masa este blocata, solutiile sunt: ',vn[l+1],vt[l+1],nn[l+1],nt[l+1]);
              end;
     t:=t+h;
 end;
un[l+1]:=un[l]+h*vn[l+1];
 l:=l+1;
close(fisier);
end.
```

Date obţinute în fişierul REZULTATE

t=0.0E+0000 u(t)=1.00000000000000E+0000
masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=1.99977502530956E-0002
N_n(t)=9.99887512655270E-0005
N_t(t)=-1.24985939081909E-0004
t=1.0E-0002 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=6.49904388287143E-0002
N_n(t)=-1.99967504780586E+0000
N_t(t)=2.49959380975732E+0000
t=2.0E-0002 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=1.09778111288625E-0001
N_n(t)=-1.99945110944356E+0000
N_t(t)= 2.49931388680445E+0000
t=3.0E-0002 u(t)=1.99977502530956E-0002
masa aluneca in sens pozitiv, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=1.54110869427465E-0001
N_n(t)=-1.99922944565286E+0000
N_t(t)=2.49903680706608E+0000
t= 4.0E-0002 u(t)=6.49904388287143E-0002
masa este blocata, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=0.00000000000000E+0000
N_n(t)=-1.73013088314499E+0001
N_t(t)=-1.73013088314499E+0001
t=5.0E-0002 u(t)=1.09778111288625E-0001
masa este blocata, solutiile sunt:
v_n(t)=0.00000000000000E+0000
v_t(t)=0.00000000000000E+0000

$N_n(t)$=-2.00000000000021E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000021E+0000
t=6.0E-0002 u(t)=1.54110869427465E-0001
masa este blocata, solutiile sunt:
$v_n(t)$=0.00000000000000E+0000
$v_t(t)$=0.00000000000000E+0000
$N_n(t)$=-2.00000000000000E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000000E+0000
t=7.0E-0002 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa este blocata, solutiile sunt:
$v_n(t)$=0.00000000000000E+0000
$v_t(t)$=0.00000000000000E+0000
$N_n(t)$=-2.00000000000000E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000000E+0000
t=8.0E-0002 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa este blocata, solutiile sunt:
$v_n(t)$=0.00000000000000E+0000
$v_t(t)$=0.00000000000000E+0000
$N_n(t)$=-2.00000000000000E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000000E+0000
t=9.0E-0002 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa este blocata, solutiile sunt:
$v_n(t)$=0.00000000000000E+0000
$v_t(t)$=0.00000000000000E+0000
$N_n(t)$=-2.00000000000000E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000000E+0000
t=1.0E-0001 u(t)=0.00000000000000E+0000
masa este blocata, solutiile sunt:
$v_n(t)$=0.00000000000000E+0000
$v_t(t)$=0.00000000000000E+0000
$N_n(t)$=-2.00000000000000E+0000
$N_t(t)$=-2.00000000000000E+0000



BIBLIOGRAFIE

[1] P. ALART, A.CURNIER. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. Comp. Meth. Apll. Mech. Engng., 92, pages 353 – 375, 1991.
[2] T.D. BABEU, OANA PETCOVICIU. *The Active Fracture Model And Fractal Flow Behavior.* Proceedings of the International Symposium, Research and Education in an Innovation Era, Engineering Processes and Technologies, ”Aurel Vlaicu” University, Arad, Romania, November 16-18, 2006, pag.395-400, Ed. Universităţii Aurel Vlaicu, Arad, 2007.
[3] T.D. BABEU, OANA PETCOVICIU. *The Present Stage of Fractal Theory Application In Fracture Mechanics.* Proceedings of the International Symposium, Research and Education in an Innovation Era, Engineering Processes and Technologies, ”Aurel Vlaicu” University, Arad, Romania, November 16-18, 2006, pag. 390-394, Ed. Universităţii Aurel Vlaicu, Arad, 2007.
[4] T.D. BABEU, OANA PETCOVICIU. *Fractal dimension and fracture rough.* Modeling and Optimization in the Machines Building Field, MOCM-13, vol.4, pag.39-42, Ed. Alma Mater, Bacau, 2007.
[5] I. BABUŠKA, R. NARASIMHAN. *The Babuška – Brezzi condition and patch test: an example.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng, 140, pages 183 – 199, 1977.
[6] P. BALLARD. *The Dynamics of Discrete Mechanical System with Perfect Unilateral Constraints.* Arch. Rational. Mech. Anal, 154, 2000, 199-274.
[7] P. BALLARD, S. BASSEVILLE. *Existence and uniqueness for dynamical contact with Coulomb friction: A model problem.* Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2004, p.à paraître.
[8] I. BLEKHMAN. *Forming properties of nonlinear mechanical systems by means of vibration.,* Proceedings of IUTAM/IFToMM Symposium in Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems, 24-25 August, Riga, Latvia, 1998, 1-11.
[9] I.I BLEKHMAN. *Vibrational Mechanics-Nonlinear Dynamics Effects, General Approach, Applications.,* World Scientific, Singapore, 2000.
[10] S. BARBARIN. *Instabilité et frottement en élasticité: Application à un problem d'ondes de contraintes, Thesé de mécanique.* Université d'Aix-Marseille II, 1997*.*
[11] CRISTINA BASARABĂ-OPRIŢESCU. *Simulărinumerice pentru mişcări cu constrângeri mecanice şi ciocniri.* Teză de doctorat, 2007, Timişoara, Ed. Politehnica.
[12] J. BASS. *Cours de Mathématiques.* Masson, Paris, 1971.
[13] F. BEN BELGACEM, Y. RENARD. *Hybrid finite element methods for Signorini's problem.* Math. Comp., vol.72 pages 1117 – 1145, 2003.
[14] L. BRÎNDEU. *Mişcări periodice ale unui sistem liniar.* Simpozion de Mecanisme şi Tranmsmisii Mecanice, 2, Reşiţa, pag. 448+453, 1976.
[15] L. BRINDEU, VOICHIŢA HULE, OANA PETCOVICIU., *Model dynamic al cionirii considerând propagarea undelor de tensiune în corpul deformabil.,* Analele Universităţii din Oradea, secţiunea Mecanică, CD, pag. 29, 2003.
[16] L. BRINDEU, VOICHIŢA HULE, OANA PETCOVICIU. *Dynamic Model of Impact, Considering the Propagation of the Stress Waves in the Deformable Body.,* Buletinul Ştiinţific al Universităţii Politehnica din Timişoara, seria Mecanica, TOM 48, fascicola 1, 2003.

[17] C.C. CANUDAS DE WIT, H. OLSSON, K.J. ASROM, P. LISCHINSKY, *A new model for control of systems with friction.,* IEEE Transaction on Automatic Control 40 (3), 1995, 419-425.
[18] X. CHATEAU, Q.S. NGUYEN. *Buckling of Elastic Structures in Unilateral Contact with or without Friction.* Eur. J. Mech. A/Solids, 10 (1), 1991, 71-89.
[19] X. CHATEAU. *Sur quelques problems lies à la modélisation mécanique de l'emboutissage, Thèse de mécanique,* Ecole Polytechnique, 1992.
[20] S. CHATTERJEE, T.K. SINGHA, S.K. KARMAKAR. *Non-trivial effect of fast vibration on the dynamics of a class of non-linearly damped mechanical system.,* Journal of Sound and Vibration, 260 (4), 2003, 711-730.
[21] P.W. CHRISTENSEN, J.S. PANG. *Frictional Contact Algorithms Based on Semismooth Newton Methods.* M. Fukushima and L.Qi(editors). Reformulation – Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, pages 81 – 116, 1998.
[22] A PINTO DA COSTA. *Instabilidades e Bifurcaçõ es em Sistemas de Comportamento Não-Suave, Thèse de mécanique,* Universidade Técnica de Lisboa, 2001.
[23] AL. DĂNOIU. *Contribuţii la studiul dinamicii şi vibraţiilor unor organe de lucru ale maşinilor agricole.* Teză de doctoarat, Universitatea "Politehnica" Timişoara, 2003.
[24] Z. DOSTĂL, J. HASLINGER, R. KUČERA. *Implementation of the fixed point method in contact problems with Coulomb based on dual splitting type technique,* journal of computational and Applied Mathematics, pages 245 – 256, 140, 2001.
[25] P. DUPONT, V. HAYWARD, B. ARMSTRONG, F. ALPETER., *Single state elasto-plastic friction models.,* IEEE Transaction on Automatic Control 47 (5), 2002, 787-792.
[26] G. DUVANT, J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunond Paris,1972.
[27] N. FAUR. *Elemente finite.*Editura Politehnica, Timişoara, 2002.
[28] B. FEENY, A. GURAN, N. HINRICHS, K. POPP. *A historical review on dry friction and stick slip phenomena,* American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Review 51 (5), 1998, 321-341.
[29] B.B. FEENY, F.C. MOON. *Quenching stick-slip chaos with dither.,* Journal of Sound and Vibration, 237 (1), 2000, 173-180.
[30] ELMER FRANZ-JOSEF. *Nonlinear dynamics of dry friction.,* Journal of Physics: A 30, 1997, 6057-6063.
[31] ADELINA GEORGESCU. *The asymptotic treatment of the differential equationof applied mathematics.* Chapman&&Hall, London, 1995.
[32] D.A. HAESSING, B. FRIEDLAND., *On the modeling and simulation of friction.,* American Society of Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 32 (3), 1991, 167-196.
[33] A. Halanay. *Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1963.
[34] J. HASLINGER. *Approximation of Signorini problem with friction obeying Coulomb's law.* Math. Methods Appl. Sci., 5, pages 422-437,1983.
[35] P. HILD, P.LABORDE. *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems.* Applied Numerical Mathematics, pages 401-421, 41, 2002.
[36] S.L. IPRI, H. ASADA. *Tuned dither for friction suppression during force-guided robotic assembly.,* International Conference on Intelligent Robots and Systems, 5-9 August, Pittsburgh, PA, USA, 1995.

[37] M. JEAN. *The Non-Smooth Contact Dynamics Method.,* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 177, 1999, 235-257.
[38] N. KIKUCHI, J.T. ODEN. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods.* SIAM, Philadelfia, 1988.
[39] A. KLARBING, A. MIKELIC, M. SHILLOR. *Frictional contact problems with normal compliance. Int. J. Engng. Sci.,* 26 N^0 8, pages 811-832, 1988.
[40] A. KLARBRING. *Examples of Non-Uniqueness and Non-Existence of Solutions to Quasistatic Contact Problems with Friction,* Ing. Arch, 60, 1990, 529-541.
[41] P. LABORDE, Y. RENARD. *Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems.* Soumis, 2003.
[42] G. LEBEAU, M. SCHATZMAN. *A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary.* J. Diff. Eqs., pages 55, 309-361, 1984.
[43] F. LEBON. *Contact problems with friction: models and simulations.* Simulation Modelling practice and theory, 11, pages 449-463, 2003.
[44]. J.A.C. MARTINS, A. PINTO DA COSTA. *Stability of Finite-Dimensional Nonlinear Elastic Systems with Unilateral Contact and Friction.,* Int. J. Sol. Struc., 37, 2000, 2519-1564.
[45] J.A.C. MARTINS, M. RAOUS. *Friction and Stabilities.*, CISM Courses and Lectures No.457, Springer Wien New York, 2002.
[46] F. MOIROT. *Etude de la stabilité d'un état d'équilibre en présence de frottement de Coulomb, Thèse de méchanique,* Ecole Polytechnique, 1998.
[47] M.D.P. MONTEIRO-MARQUES. *Dfferential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Schocks and Dry Friction,* Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1993.
[48] J.J. MOREAU *Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité.* C.R. Acad Sci., Paris, sér A, 271, 1970, 608-611.
[49] J.J. MOREAU *Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constrains.,* G. Del. Piero and F. Maceri Eds, Springer-Verlag, Wien-New-York,1983.
[50] J.J. MOREAU. *Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques.* C.R.A.S. série II, 296 pages 1473-1476, 1983.
[51] J.J. MOREAU. *Une formulation du contact avec frottement sec, application au calcul numérique.* C.R.A.S. série II, 302 N^0 13, pages 799-801, 1986.
[52] J.J. MOREAU *Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics Nonsmooth Mechanics and Applications,* CISM, Courses and Lectures No.302 (J.J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos Eds), Springer-Verlag, Wien-New-York, 1988, 1-88.
[53] CRISTINA OPRIŢESCU, OANA PETCOVICIU, M.I. TOADER. *consideration on the Simulation of Contact with Friction for Rigid Bodies.* Sesiunea de comunicări ştiinţifice a catedrei de mecanică tehnică şi meanisme, SIMEC 2009, pag. 194-197, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, ISSN: 1842-8045.
[54] CRISTINA OPRIŢESCU, OANA PETCOVICIU, M.I. TOADER. *Applications on the application of MEF to simulate the contact with friction.* Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics „SISOM", 2009.
[55] L. PAOLI. *Time disctretization of vibro-impact.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., 359, pages 2405-2428, 2001.
[56] L. PAOLI, M. SCHATZMAN. *Schéma numérique pour un modéle de vibrations avec constraints unilatérales et perte d'énergie aux impacts, en dimension finie.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I,1993, 317, 211- 215.
[57] L. PAOLI, M. SCHATZMAN. *Approximation et existence en vibro-impact.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 1999, 329, 1103-1107.

[58] J.C. PAUMIER, Y. RENARD. *Surface perturbation of an elastodynamic contact problem with friction.* European Journal of Applied Mathematics, vol. 14, 2003, 465-483.

[59] OANA PETCOVICIU. *Noţiuni fundamentale ale analizei fractale.* Ştiinţă şi inginerie, vol.10, pag 199-202, Ed. AGIR, Bucureşti 2006.

[60] OANA PETCOVICIU, T.D. BABEU. *Studiul rupturii metalelor cu ajuorul fractalului.* Buletinul AGIR nr.2/2007, pag. 189-190, Ed. AGIR, 2007.

[61] OANA PETCOVICIU, T.D. BABEU. *Analiza fractală a suprafeţelor rugoase.* Mecanica solidelor – culegerea lucrărilor ştiinţifice, CNMS XXXI, pag. 385-388, Ed. U.T.M., Chişinău, 2007.

[62] OANA PETCOVICIU, CRISTINA OPRIŢESCU, M.I. TOADER. *On some condition of contact study with friction for composite materials, 2nd* International Conference „Advanced Composite Materials Engineering" COMAT 2008, 9-11 October 2008, Braşov, Romania, vol.1A, pag. 68-73, ISSN 1844-9336.

[63] OANA PETCOVICIU, CRISTINA OPRIŢESCU, M.I. TOADER. *Simulation methods in mechanical contact with friction.* Annual Session Scientific Papers IMT Oradea, FELIX SPA, 2009.

[64] OANA PETCOVICIU, CRISTINA OPRIŢESCU, M.I. TOADER. *Considerations on the Dynamic of mechanical System with unilateral links. Methods of simulation.* National Conference on Mechanics of Solids, Bucureşti, 2009.

[65] Y. RENARD. *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction.* 4th Contact Mechanics International Symposium, Hannover, 2005.

[66] M. SCHATZMAN *A Class of Nonlinear Differential Equations of Second Order in Time Nonlinear,* Ana Theory Meth and Appli., 2, 1978, 355-373.

[67] M. SCHATZMAN *Uniqueness and Continuous Dependence on Data for a One Dimensional Impact Problems.* Mathematical and Computational Modelling, 28, 4-8, 1998, 1-18.

[68] A. SIGNORINI. *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata.* Rend de Matematica, Rome, 1959.

[69] GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU. *Consideraţii privind folosirea funcţiei legăturii unilaterale în studiul ciocnirii.* A IV-a Conferinţă de vibraţii în construcţia de maşini, pag. 299-305, Timişoara, 1982; 4th Conference on Vibration in Mechanical Engineering pag. 67-72, Timişoara, November, 1982.

[70] D.E. STEWART *An Implicit Time-Stepping Scheme for a Rigid-Body Dynamics with Inelastic Collisions and Coulomb Friction.,* Int. J. Num. Meth. Eng, 39, 1996, 2673-2691.

[71] D.E. STEWART *Convergence of a Time-Stepping Scheme for a Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painlevé's Problem.,* Arch. Rational Mech. Ana, 145, 1998, 215-260.

[72] P.P. TEODORESCU. *Mechanical System. Clasical models.* 1, Springer, 2006.

[73] P.P. TEODORESCU, W KECS. *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică.* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1970.

[74] J.J. THOMSEN. *Using fast vibrations to quench friction-induced oscillations.,* Journal of Sound and Vibration, 228 (5), 1999, 1079-1102.

[75] M.I. TOADER. *Contribuţii la aplicarea analizei funcţionale în studiul vibraţiilor sistemelor mecanice.* Teză de doctorat, Timişoara, 1980.

[76] R. VOINEA, D. VOICULESCU, F.P. SIMION. *Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie.*, Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1989.

[77] D. VOLA, E. PRATT, M. RAOUS, M. JEAN *Consistent Time Discretization for a Dynamical Frictional Contact Problem and Complementarity Techniques.,* Revue Européenne des elements finis, 7, 1998, 149-162.

[78] D. VOLA, M. RAOUS, J.A.C. MARTINS. *Friction and Instability of Steady Slinding: Squeal of a Rubber/Glass Contact.,* Int. j. Numer. Meth. Engrg., 46, 1999, 1699-172